Striženje neenakosti

Igor Klep

V prispevku bomo pokazali, kako lahko s pomočo striženja dokazujemo neenakosti.

Uvod

Ena izmed najbolj prepoznavnih neenakostih je neenakost med aritmetično in geometrično sredino dveh števil. Ta pravi, da za poljubni nenegativni realni števili x, y velja

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \tag{1}$$

pri čemer velja enakost natanko takrat, ko je $x = y$. Torej imamo za $x \neq y$ v (1) strogo neenakost

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}.$$

Izrazu na levi strani neenakosti (1) pravimo **aritmetična sredina** števil x in y, desna stran pa je njuna **geometrična sredina**. Podajmo še enovrstični dokaz te neenakosti:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Definiramo lahko tudi aritmetično in geometrično sredino za več stevil. Naj bo podano naravno število n in nenegativna realna števila $x_1, \ldots, x_n$. Potem izrazu

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

pravimo **aritmetična sredina**, izrazu

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

pa **geometrična sredina** števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Neenakost (1) velja tudi bolj splošno v primeru n spremenljivk.

Izrek 1 Neenakost med aritmetično in geometrično sredino. Naj bo n naravno število in naj bodo x_1, x_2, …, x_n nenegativna realna števila. Potem je

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \tag{2}$$

pri čemer enakost v (2) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

V nadaljevanju si bomo ogledali enega izmed mnogih dokazov te neenakosti, ki sloni na tehniki striženja neenakosti. To tehniko bomo nato uporabili še na več primerih.

Striženje neenakosti

Načelo striženja v najpreprostejši obliki pove sledeče. Denimo, da želimo dokazati neenakost

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

ki postane boljša, če zbližamo vrednosti dveh izmed spremenljivk x_i. Natančneje povedano, razlika $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ postane manjša, če fiksiramo vse razen dveh spremenljivk, preostali dve spremenljivki pa zbližamo. Torej za y_1, y_2 z $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ velja

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &\quad \geq f(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) - g(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Če velja $f(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) \geq g(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$, tedaj velja tudi začetna neenakost (3). Tako poskušamo (3) s pomočjo zvitih substitucij privesti do preprostejše neenakosti, ki jo znamo dokazati.

Poglejmo sedaj, kako lahko to načelo uporabimo v praksi.

Dokaz izreka 1 Napravili bomo vrsto substitucij, ki bodo ohranjale levo stran (aritmetično sredino $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$) in hkrati povečevale desno stran (geometrično sredino $g(x_1, \ldots, x_n) =$

$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$). Na koncu niza substitucij bodo vsi x_i enaki in leva stran neenakosti (2) bo enaka desni strani. S tem bomo dokazali neenakost med aritmetično in geometrično sredino.

Če so vsi izmed x_i enaki njihovi aritmetični sredini $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, ki jo bomo označili z $\bar{x}$, potem neenakost (2) očitno drži. V nasprotnem primeru pa obstajata indeksa i in j, za katera je $x_i < \bar{x} < x_j$. (Ne morejo biti vsi x_k večji od $\bar{x}$, prav tako pa ne morejo biti vsi x_k manjši od $\bar{x}$.) Par x_i, x_j zamenjamo z

$$x_i \rightsquigarrow x_i' = \bar{x}, \qquad x_j \rightsquigarrow x_j' = x_i + x_j - \bar{x},$$

vse ostale spremenljivke x_k pa pustimo pri miru.

Očitno je $x_i' > 0$, $x_j' = x_i + x_j - \bar{x} \geq x_j - \bar{x} > 0$. Hkrati velja

$$x_i' + x_j' = \bar{x} + x_i + x_j - \bar{x} = x_i + x_j.$$

Torej z zamenjavo spremenljivk nismo spremenili vrednosti leve strani neenakosti (2). Pokažimo pa, da smo povečali vrednost desne strani:

$$x_i'x_j' = \bar{x}(x_i + x_j - \bar{x}) = x_ix_j + (\bar{x} - x_i)(x_j - \bar{x}) > x_ix_j.$$

Opisani postopek sedaj nadaljujemo. Opazimo, da i-te spremenljivke ne bomo nikoli več spremenili, ker je že enaka aritmetični sredini $\bar{x}$. Tako bomo po kvečjemu $n-1$ koraku prišli do položaja, ko bodo vse spremenljivke enake, neenakost (2) pa bo izpolnjena, saj bosta obe strani enaki $\bar{x}$. Po načelu striženja je s tem neenakost med aritmetično in geometrično sredino dokazana.

Spotoma smo dokazali tudi, kdaj velja enakost: če sta imeli dve spremenljivki različni vrednosti, potem smo jih lahko zamenjali tako, da smo ohranili levo stran neenakosti in strogo povečali desno stran. Torej enakost v (2) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ∎

Tukaj velja opozoriti, da izbira zamenjave $x_i \rightsquigarrow \bar{x}$ in $x_j \rightsquigarrow x_i + x_j - \bar{x}$ zgoraj ni bila naključna. Če bi na primer oba x_i in x_j zamenjali z njunim povprečjem $\frac{x_i+x_j}{2}$, potem bi bil postopek striženja neskončen (ne bi se končal po končno mnogo korakih) in bi se morali ukvarjati s konvergenco in drugimi tehničnimi zapleti.

Nadaljnji zgledi potenčnih sredin

Oglejmo si še nekaj primerov uporabe striženja neenakosti.

Neenakost med geometrično in harmonično sredino

Nekoliko tehnično zahtevnejši, a vsebinsko podoben je dokaz neenakosti med geometrično in harmonično sredino. Se pravi, da za vsako naravno število n in pozitivna realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ velja

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}, \qquad (5)$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Izrazu na desni strani neenakosti (4) pravimo **harmonična sredina** števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Označimo harmonično sredino s h. Če so vsi izmed x_i enaki h, potem neenakost (4) očitno drži. V nasprotnem primeru pa obstajata indeksa i in j, za katera je $x_i < h < x_j$. Res, če bi bili vsi $x_j < h$, potem je

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} < \frac{n}{\frac{1}{h}+\frac{1}{h}+\cdots+\frac{1}{h}} = h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}},$$

kar je očitno protislovje. Podobno lahko vidimo, da niso vsi $x_i > h$.

Sedaj par x_i, x_j zamenjamo z

$$x_i \rightsquigarrow x_i' = h, \qquad x_j \rightsquigarrow x_j',$$

pri čemer x_j' izberemo tako, da se desna stran (4) ne spremeni:

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j} = \frac{1}{x_i'} + \frac{1}{x_j'} = \frac{1}{h} + \frac{1}{x_j'}.$$

Torej je

$$x_j' = \frac{hx_ix_j}{hx_i + hx_j - x_ix_j} > 0,$$

saj je imenovalec $hx_i + hx_j - x_ix_j = (h - x_j)x_i + hx_j = (h - x_i)x_j + hx_i$ pozitiven. Kot prej vse ostale spremenljivke x_k pustimo nespremenjene.

Poglejmo, kaj se ob tej zamenjavi spremenljivk zgodi z levo stranjo (4):

$$\begin{aligned} x_i'x_j' - x_ix_j &= h\frac{hx_ix_j}{hx_i + hx_j - x_ix_j} - x_ix_j \\ &= x_ix_j\left(\frac{h^2}{hx_i + hx_j - x_ix_j} - 1\right) \\ &= x_ix_j\frac{h^2 - (hx_i + hx_j - x_ix_j)}{hx_i + hx_j - x_ix_j} \\ &= x_ix_j\frac{(h - x_i)(h - x_j)}{hx_i + hx_j - x_ix_j} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pri čemer smo v zadnjem koraku upoštevali $x_i < h < x_j$ in

$$hx_i + hx_j - x_ix_j > hx_i + x_ix_j - x_ix_j = hx_i > 0.$$

Opisani postopek sedaj nadaljujemo. Opazimo, da se i-te spremenljivke ne bomo več dotaknili, ker je že enaka harmonični sredini h. Tako bomo po kvečjemu $n-1$ koraku prišli do položaja, ko bodo vse spremenljivke enake, neenakost (4) pa bo izpolnjena, saj bosta obe strani enaki h. Po načelu striženja je s tem neenakost med geometrično in harmonično sredino dokazana.

Spotoma smo dokazali tudi, kdaj velja enakost: če sta imeli dve spremenljivki različni vrednosti, potem smo jih lahko zamenjali tako, da smo ohranili desno stran neenakosti in strogo zmanjšali levo stran. Enakost v (4) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ■

Neenakost med kvadratično in aritmetično sredino

Povsem analogno je moč dokazati tudi neenakost

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \qquad (6)$$

kjer levo stran imenujemo **kvadratična sredina** števil $x_1, \ldots, x_n$. To prepuščamo bralcu za vajo.

Kapitalistična neenakost

Izrek 2 Naj bo n naravno število in naj bosta $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ in $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ padajoči zaporedji realnih števil. Če je $z_1, z_2, \ldots, z_n$ poljubna permutacija (prerazporeditev) zaporedja $y_1, y_2, \ldots, y_n$, potem velja

$$\begin{aligned} x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n &\leq \\ &\leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \end{aligned}$$

Razložimo najprej od kod ime te neenakosti. Recimo, da trgovina prodaja banane po 1 EUR/kg, čokolado pa po 5 EUR/kg. Kdaj bodo prihodki trgovine večji, če proda 10 kg banan in 5 kg čokolade *ali* če proda 5 kg banan in 10 kg čokolade?

Dokaz izreka 2 Tudi to neenakost lahko dokažemo s striženjem. Oglejmo si levo stran neenakosti (6). Recimo, da permutirano zaporedje $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ni padajoče. Potem ostajata indeksa i in j, za katera velja $i < j$ in $z_i < z_j$. Če ti števili med sabo zamenjamo, vse ostale z_k pa pustimo pri miru, potem se leva stran (6) poveča:

$$x_iz_i + x_jz_j \leq x_iz_j + x_jz_j, \qquad (7)$$

saj je zaradi monotonosti zaporedja x_i,

$$x_j(z_j - z_i) \leq x_i(z_j - z_i).$$

Opazimo, da velja enakost v (7) natanko tedaj, ko je $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_j$. To pomeni, da je leva stran neenakosti (6) največja tedaj, ko je zaporedje z_i padajoče, kar smo želeli dokazati. ■

Neenakosti (6) včasih pravimo tudi preureditvena neenakost.

Primer

Naj bodo $x_1, \ldots, x_{2015}$ realna števila, katerih vsota je vsaj 2015 in katerih vsota kvadratov je vsaj 2015^2. Pokaži, da ne morejo biti vsi x_i manjši od 2.

Denimo, da trditev ne drži. V tem primeru obstajajo x_i, za katere je

$$\sum_{i=1}^{2015} x_i \geq 2015, \quad \sum_{i=1}^{2015} x_i^2 \geq 2015^2 \quad \text{in} \quad x_i < 2 \quad \text{za vse i.}$$

Najprej opazimo, da mora biti vsaj eno od števil negativno. V nasprotnem primeru namreč velja

$$2015^2 > 2^2 \cdot 2015 > \sum_{i=1}^{2015} x_i^2 \geq 2015^2,$$

kar je protislovje. Sedaj lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\sum_{i=1}^{2015} x_i = 2015$; če je vsota x_i strogo večja od 2015, pomanjšamo kakšnega od negativnih x_i, da dobimo vsoto 2015. Ob tem se vsota kvadratov povečuje, torej je še vedno vsaj 2015^2, hkrati pa so vsi x_i manjši od 2.

Predpostavimo, da sta dva izmed x_i, npr. x_1 in x_2, manjša od 2. Zamenjamo ju z 2 in $x_1 + x_2 - 2$. S tem se vsota števil x_i ne spremeni, vsota kvadratov pa se poveča za $2(2 - x_1)(2 - x_2)$. Postopek ponavljamo. Na koncu bodo vsa števila razen enega enaka 2, preostalo število pa bo -2013. Vendar pa tedaj dobimo

$$\sum_{i=1}^{2015} x_i^2 = 2014 \cdot 2^2 + 2013^2 = 2015^2,$$

kar je v nasprotju s predpostavko, da je vsota vseh x_i^2 večja od 2015^2.

Primer

Naj bodo x, y, z nenegativna realna števila, za katera je $x + y + z = 1$. Potem velja

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}. \tag{8}$$

Vsaj ena od spremenljivk je manjša od $\frac{1}{2}$. Ker je izraz na levi strani (8) simetričen, lahko po potrebi preimenujemo spremenljivke in dosežemo, da je $x \leq \frac{1}{2}$. Levo stran neenakosti (8) sedaj preuredimo v

$$x(y + z) + yz(1 - 2x). \tag{9}$$

Ker je $1 - 2x \geq 0$, lahko ostrižemo y in z. Obe spremenljivki postavimo na $\frac{y+z}{2}$. S tem se vrednost izraza (9) ni zmanjšala (uporabimo neenakost med aritmetično in geometrično sredino na yz). Hkrati pa smo dosegli, da so vse tri spremenljivke manjše ali enake $\frac{1}{2}$.

Izberimo si sedaj srednjo od spremenljivk; ponovno lahko po morebitnem preimenovanju spremenljivk predpostavimo, da je to x. Ena od spremenljivk y, z je tako vsaj $\frac{1}{3}$, druga pa kvečjemu $\frac{1}{3}$. Ponovno ostrižemo y in z – tisto spremenljivko, ki je bližje $\frac{1}{3}$, postavimo na $\frac{1}{3}$, preostalo pa na $y + z - \frac{1}{3}$. Tako povečamo levo stran (9), hkrati pa smo dosegli, da je ena od spremenljivk enaka $\frac{1}{3}$.

Po potrebi preimenujmo spremenljivke, da postane $x = \frac{1}{3}$. V zadnjem koraku ostrižemo y, z in dosežemo, da je $x = y = z = \frac{1}{3}$. Za to trojico v (8) velja enakost. S tem je naloga rešena. ■

Vaje

Bralca vabimo, da se preizkusi na naslednjih primerih.

1. Dokaži, da za vsa nenegativna realna števila a, b, c velja

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

2. Za realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ poišči najmanjšo vrednost izraza

$$|x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_{2015}|.$$

   Za katere vrednosti x je ta minimum dosežen?

3. Pokaži, da za pozitivna realna števila a, b, c velja

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

4. Naj za $a_1, \ldots, a_{2015} \geq 0$ velja $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = 1$. Poišči maksimum izraza

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{2014}a_{2015}.$$

Literatura

[1] Kiran Kedlaya, *A < B (A is less than B)*, `https://artofproblemsolving.com/articles/files/KedlayaInequalities.pdf`, ogled: 12. 1. 2016.

[2] Thomas Mildorf, *Olympiad Inequalities*, `https://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf`, ogled: 12. 1. 2016.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mean`, ogled: 12. 1. 2016.

× × ×