Matematični aktivnosti pri izbirnem predmetu Matematična delavnica

Mathematical activity in the elective subject of Mathematical Workshop

Nataša Podojsteršek
Osnovna šola Mežica

Σ Povzetek

Predstavljeni sta dve matematični aktivnosti, ki jih lahko izvedemo pri izbirnem predmetu Matematična delavnica. Spadata v področje kombinatorike. Nakazane so možnosti razširitve aktivnosti in primeri izvedbe, za katere se lahko učitelj odloči glede na starost in sposobnost otrok v skupini, v kateri se aktivnosti izvajata. Tako ju lahko igrajo že v petem razredu, še najbolj pa je primerna za sedmošolce in osmošolce. Obe aktivnosti omogočata izkustveno učenje in razvijata divergentno razmišljanje, strategijo poskus–napaka, strategijo reševanja problemov, sposobnost zbiranja in urejanja podatkov, ki peljejo do induktivnega sklepa.

Ključne besede: Matematična delavnica, Hanojski stolpi, Menjava krogcev

Σ Abstract

Featured are two mathematical activities that can be performed in the elective subject Mathematical Workshop. They belong in the field of combinatorics. Indicated are possibilities of extending the activities and examples of implementation for which the teacher can decide according to the age and ability of children in the group in which the activities are carried out. The activities can be introduced as early as the fifth grade, but they are the most suitable for seventh- and eighth-graders. Both activities enable experiential learning, develop divergent thinking, enable *the use of the strategies of trial and error and problem solving, and encourage children to collect and organize data, leading them to an inductive conclusion.*

Keywords: *Mathematical Workshop, Hanoi towers, Changing the circles*

α Uvod

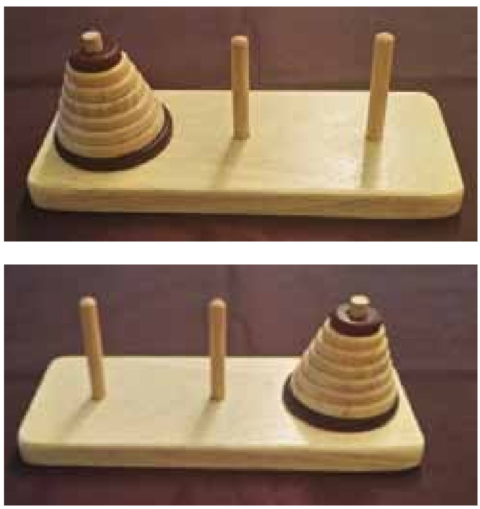
Izbirni predmet Matematična delavnica izvajam na naši šoli že od leta 2003. Namenjen je učencem različnih matematičnih sposobnosti. Zato vsebino in obliko dela prilagajam željam, interesom in sposobnostim učencev, ki so vključeni v skupino. Zdi se mi pomembno, da so učenci dejavni in da znanje pridobivajo iz lastnih izkušenj in doživljanj. Zaradi tega so tudi metode dela bistveno drugačne kot pri rednem pouku matematike. Sproti se odločam za samostojno, skupinsko delo ali delo v dvojicah, za preiskovanje ali dejavno pridobivanje izkušenj. Rada vidim učence, ki so zadovoljni in z veseljem rešujejo naloge ali preiskujejo ali igrajo matematične igre. Učenci tako razvijajo pozitiven odnos do matematike in do svoje, lastne dejavnosti.

V prispevku predstavljam dve matematični aktivnosti, ki jih učenci igrajo pri Matematični delavnici. Pri obeh se skrivata matematika in logično mišljenje. Spadata v področje kombinatorike. Obe igri lahko igrajo vsi učenci, razširitve aktivnosti so neobvezne in so stopnjevane po zahtevnosti. Najboljša izvedba se je izkazala pri »blokurah«, kjer so prvo šolsko uro učenci spoznavali igro in pravila ter igro dejansko igrali, jo »izkusili« in doživeli. Drugo šolsko uro pa smo aktivnost igre razširili in izpeljali matematično refleksijo.

β Prva aktivnost: Hanojski stolpi

Hanojski stolpi je matematična igra. Za igro so potrebne tri palice, na katere natikamo okrogle ploščice različnih velikosti. Število ploščic je lahko poljubno, toda vse morajo biti različnega premera. Več kot je ploščic, težja je igra.

Na začetku igre so vse ploščice zložene na prvi palici, in to v urejenem redu, od največje do najmanjše, tako da ima kup obliko stožca. Cilj igre je premakniti Hanojski stolp na tretjo, prazno palico. Pri prestavljanju ploščic smemo naenkrat premakniti samo eno ploščico in nikoli ne smemo večje ploščice postaviti na manjšo. Srednjo palico pa uporabljamo za začasno odlagališče.



[Slika 1] Začetno stanje in končno stanje

Primer izvedbe

1. Učencem najprej predstavim igro in demonstriram igranje, saj je zgolj navodilo nekaterim učencem premalo. Če pa so v skupini učenci z višjimi matematičnimi sposobnostmi, lahko navodila in pravila igre podam zgolj ustno ali zapišem na list in učenci sami poskušajo igrati po navodilih brez demonstracije.
2. Nato učenci sami zaigrajo igro. Pri tem je pomembno, da se število ploščic spreminja. Lahko začnejo z dvema ali tremi ploščicami. Pozneje poskusijo z več ploščicami. Pomembno je, da zaigra vsak učenec, da res izkusi igro. Za to je potrebno dovolj materiala. Po izkušnjah učenci igrajo do konca šolske ure in z veseljem prelagajo ploščice.

[Slika 2] Vmesno stanje pri premikanju Hanojskega stolpa s 5 ploščicami

3. Naslednjo šolsko uro pa skušamo aktivnost razširiti. Učencem ponudim vprašanja:

- Opazuj začetek igre: Kam prestaviš prvo, najmanjšo ploščico pri sodem (lihem) številu ploščic v Hanojskem stolpu?
- Z najmanj kolikimi potezami prestaviš Hanojski stolp treh (štirih, petih, šestih, sedmih) ploščic iz prve palice na tretjo palico? Zapisuj ali riši potek igre.
- Raziskuj odnos med številom ploščic in številom potez, ki so potrebne za premestitev Hanojskega stolpa iz prve na tretjo palico. Izdelaj tabelo.
- *Ali lahko izračunaš, najmanj koliko potez je potrebnih za premestitev Hanojskega stolpa z 10 ploščicami?
- *Zapiši splošni obrazec za premestitev Hanojskega stolpa z n ploščicami na tretjo palico.

*Zadnji dve vprašanji sta za učence kar zahtevni, ampak ju je smiselno vključiti, ker pripeljeta do posplošitve.

Učencem (lahko) ponudim tabelo:

število ploščic v Hanojskem stolpu	**min. število potez za premestitev Hanojskega stolpa na 3. palico**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
10	
n	

Izpolnjena tabela:

število ploščic v Hanojskem stolpu	**min. število potez za premestitev Hanojskega stolpa na 3. palico**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
10	1023
n	$2^n - 1$

Namig učencem, kako si naj zapisujejo potek igre:

Npr. za Hanojski stolp z eno ploščico: (1,0,0) → (0,1,1)

za Hanojski stolp z dvema ploščicama: (2,0,0) → (1,1,0) → (0,1,1) → (0,0,2)

Nekaj spoznanj in možnosti

Prišla sem do spoznanja, da morajo učenci imeti na voljo dovolj časa. Zato je smiselno načrtovati še kakšno uro več. Zdi se mi pomembno, da sami uvidijo in izkusijo igro. Igra se zdi na prvi pogled zelo enostavna. Toda pri prestavljanju Hanojskega stolpa s 7 krogci še zdaleč ni tako, saj moraš narediti vsaj 64 premikov.

Če opazimo, da imajo učenci težave pri prestavljanju ploščic, jih nekaj časa le pustimo, da sami igrajo in pridejo do nekaterih spoznanj. Učence usmerimo, naj bodi pozorni, ali Hanojski stolp sestavlja liho ali sodo število ploščic in kako začnejo igro, kako se premikajo ploščice po prvi potezi … Pomagamo z navodilom, da naj začnejo raziskovati pri manjšem št. ploščic in naj si ugotovitve zapišejo. Na koncu se le pogovorimo o strategiji premikanja ploščic in demonstriramo.

Smiselno se je pogovoriti o igri.

Npr: Katera ploščica naredi največ in katera najmanj premikov? Kakšno je stanje tik, preden prestavimo največjo ploščico? Kako pa prestavljamo ploščice, ko je največja že prestavljena na zadnjo, tretjo palico? Koliko potez smo naredili do te stopnje in koliko jih bomo še do konca?

S pomočjo zgornjih vprašanj, pridemo tudi do posplošitve. Se je že zgodilo, da je kak učenec sam prišel do posplošitve in splošnega zapisa, sicer pa zapis oblikujemo skupaj in povemo, da spada v eksponentno funkcijo. Te učenci ne poznajo, poznajo pa potence (osnovo, stopnjo).

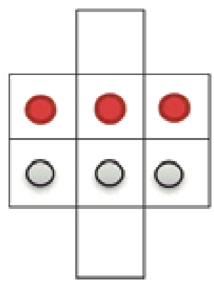
Ker je vsak učenec igral, si zapisoval poteze, izpolnjeval tabelo, mu je oblikovanje splošnega zapisa bližje in bolj razumljivo. To je aktivno učenje, saj pripelje do povezav med konkretno in miselno dejavnostjo.

Če igro igrajo osmošolci, jo razširimo v sklopu Zgodovine matematike. In sicer učenci lahko samostojno odkrijejo izvor igre, avtorja igre ter legendo, ki je povezana s Hanojskimi stolpi. Lahko naredijo tudi plakat in predstavitev.

Učenci lahko igro zaigrajo tudi na medmrežju, kjer najdemo kar nekaj računalniških aplikacij za to igro.

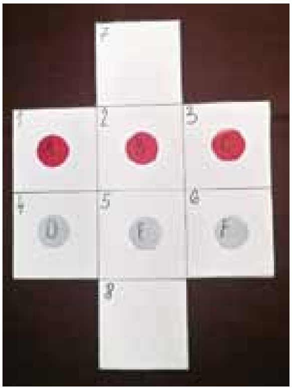
γ Druga aktivnost: Menjava krogcev

Za to igro so potrebni po trije krogci dveh različnih barv ter igralna ploskev z osmimi kvadratki.



Krogci in kvadratki na igralni ploskvi so označeni s črkami oz. so oštevilčeni, kot kaže spodnja slika št. 3.

Učenci si lahko sami izdelajo igralno ploskev in krogce, ali pa si za krogce sposodijo figure iz kakšne druge igre, kot je npr. Človek ne jezi se, ali pa dobijo barvne zamaške od plastenk.



[Slika št. 3] Začetno stanje pri igri menjava krogcev (delo učencev)

Na začetku igre so krogci iste barve položeni v isti vodoravni liniji. Cilj igre je zamenjati položaje krogcev ene barve s krogci druge barve. Pri tem smemo krogec premakniti za en korak vodoravno ali navpično v prazen kvadratek.

Primer izvedbe

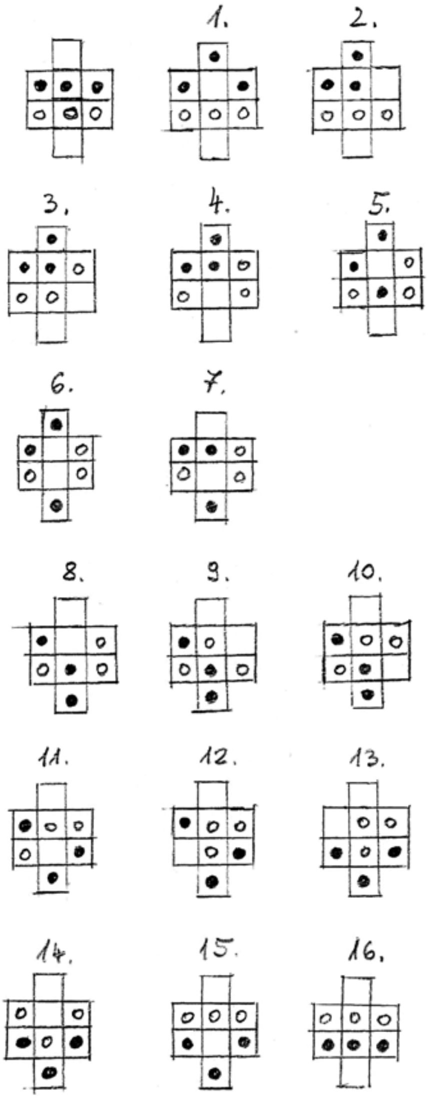
1. Tudi pri tej igri učencem najprej predstavim igro in pravila igranja.
2. Nato vsak učenec zaigra igro. Izkušnje kažejo, da učenci kar hitro pridejo do cilja in da pri igri uživajo.
   Igra spodbuja divergentno razmišljanje, saj je cilj eden, a poti do njega je več. Igra podpira tudi strateško razmišljanje ob korelaciji poskus – napaka.
3. Nato učencem zastavim izziv:

Koliko potez je najmanj potrebnih za dosego cilja? Učence spodbujam, da zapisujejo ali rišejo potek igre.

Pri tem se lahko dogovorimo, da za premik krogca B na polje 7, zapišejo B7. Lahko pa si preprosto rišejo polja in krogce. Za to porabijo kar nekaj časa.

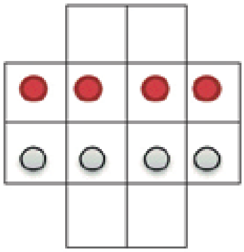
Učenci pridejo sami do rešitve. Z njimi se pogovorim o premikanju krogcev, in to demonstriramo (lahko kar na tablo z magneti). Tako tudi učenci, ki niso sami prišli do cilja z najmanj potezami, slišijo in vidijo strategijo premikanja krogcev.

Ugotovimo, da 16 potez zadostuje za menjavo krogcev:



[Slika št. 4] Vseh 16 potez pri menjavi 6 krogcev

4. Aktivnost nadgradim tako, da spreminjamo število krogcev in igralno ploskev. Učenci najprej igrajo igro, nato prav tako štejejo število potez, ki so potrebni do končne zamenjave krogcev. Npr:



Učence nagovorim, naj opišejo (tudi zapišejo) strategijo igranja, ki jih pripelje do najmanj mogočih potez.

Lahko pa jih izzovem tudi tako, da jih vprašam, kdo pride do cilja z 20 potezami. Seveda potem učenec, ki to zmore, pred tablo demonstrira premikanje krogcev in pojasni strategijo.

Učencem lahko ponudim prazne igralne ploskve, da si rišejo poteze krogcev. S tem jim pomagam pri časovni stiski, ki nas lahko vedno spravi v zadrego. Primer takega delovnega lista Slika št. 5.

5. Lahko še razširimo dejavnost z raziskovanjem zveze med številom praznih polj in vseh polj na igralni ploskvi ter številom krogcev. Učence napeljem na zapis posplošitve.

Pomoč jim je lahko tudi tabela:

Število krogcev	**Število praznih polj**	**Število vseh polj**
6		
8		
10		
12		
n		

Izpolnjena tabela:

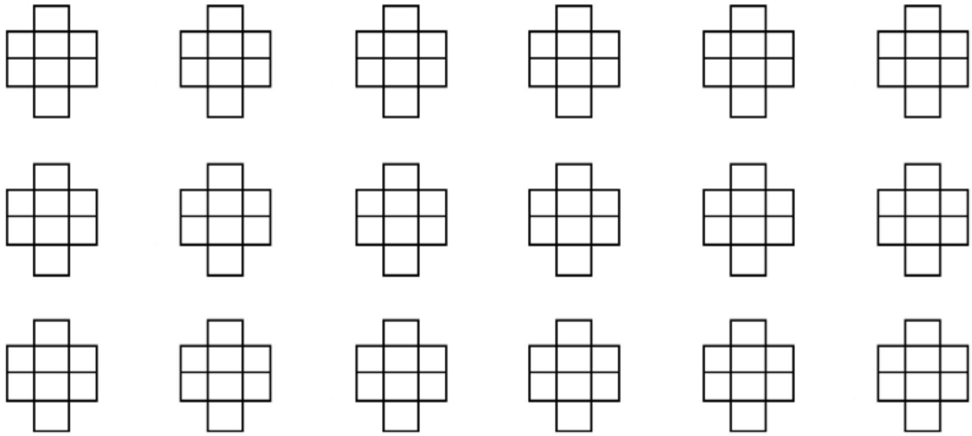
Število krogcev	Število praznih polj	Število vseh polj
6	2	8
8	4	12
10	6	10
12	8	20
n	$n-4$	$2n-4=$ $2(n-2)$

Nekaj spoznanj in namigov

Ta aktivnost spodbuja tudi divergentno razmišljanje (cilj je eden, a poti do njega je več). Vsi učenci pridejo do cilja. Lažje in hitreje kot pri Hanojskih stolpih. Toda težje jim je ugotoviti strategijo premikanja krogcev, ki pripelje do cilja z najmanj potezami. Zato je skoraj res bolje, če je naloga zastavljena tako, da jim povemo št. najmanj potez in je izziv, kdo pride do cilja z najmanj premikov. To tudi spodbuja neke vrste zdravo tekmovalnost med učenci.

Učenci do posplošitve pri zadnji tabeli pridejo hitreje. Če je treba, jih vodimo s podvprašanji. Ampak to linearno povezavo dokaj dobro sami odkrijejo in jo tudi razumejo.

Za mlajše učence lahko aktivnost naredimo zabavnejšo in privlačnejšo, če krogce zamenjamo z živalmi, npr. zelene in rjave žabe ali zelene in rjave kobilice …



[Slika št. 5] *Delovni list za zapis potez pri igri menjava krogcev*

δ Komu sta aktivnosti namenjeni?

Menim, da ne moremo postaviti starostnih meja. Igri so igrali tako sedmošolci, osmošolci kot devetošolci. Igri prilagodimo starosti in sposobnostim učencev primerno. Lahko ju igrajo tudi v nižjih razredih. Učence spodbujamo, da zapisujejo ali rišejo potek igre.

Obe aktivnosti razvijata divergentno razmišljanje, strategijo poskus – napaka, strategijo reševanja problemov, sposobnost zbiranja in urejanja podatkov, ki peljejo do induktivnega zaključka.

ε Sklep

Do zdaj sta obe igri učence navdušili. Igrali so vsi učenci, ne glede na njihovo sposobnost. Vsi učenci pridejo do cilja. Seveda eni hitreje kot drugi, ampak temu ne posvečam preveč pozornosti. Pomembno se mi zdi, da so pri uri dejavni vsi učenci in da imajo možnost nadgradnje igre in razvoj miselnih procesov, kar pa ti dve igri seveda omogočata.

ζ Viri in literatura:

1. Vilko Domajnko, Z nalogami skozi zgodovino matematike, DZS, Ljubljana, 1993.
2. Učni načrt za izbirni predmet Matematična delavnica, Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport, Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2004.
3. Kirkby Dave, Marvellous Ideas for Mellow Maths Teachers (Ideas – a Collins Educational photocopy master), Collins Educational, 1992.