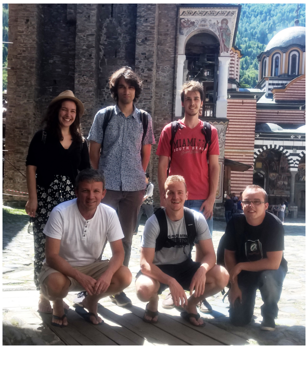
ŠTIRIINDVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Na letošnje mednarodno tekmovanje študentov je prišlo kar 331 tekmovalcev z vsega sveta in vodje 71 ekip. V prvih letih tekmovanja je organizator prof. John Jayne z londonske univerze UCL poskušal izvesti tekmovanje na različnih koncih Evrope, zadnjih deset let pa je tekmovanje vsako leto v Bolgariji. Kampus Ameriške univerze v Blagoevgradu je ena od redkih institucij, ki lahko na približno spodoben način in ob razumnih stroških vsako leto poskrbi za toliko udeležencev. Vse kaže, da bo Blagoevgrad postal stalna lokacija tekmovanja.

Tekmovanje je potekalo sredi najhujšega vročinskega vala med 31. julijem in 6. avgustom 2017. Vsem tekmovalcem gre posebna pohvala, da jim je uspelo v neklimatiziranih prostorih ne le preživeti ves teden, temveč tudi dvakrat po pet ur reševati težke matematične naloge. Ljubljansko univerzo so zastopali Juš Kosmač, Samo Kralj, Severin Mejak, Lenart Treven in Živa Urbančič, primorsko pa Daniil Baldouski, Filip Božič in Arber Avdullahu.

Za reševanje nalog je potrebno znanje, ki ga večina študentov pridobi v prvih dveh letih študija matematike. Naloge so bile letos zelo težke, kljub temu pa sta kar dva tekmovalca dosegla vse možne točke. Zanimivo je, da kar osem prvouvrščenih študentov prihaja z univerz iz Tel Aviva ali iz Sankt Peterburga.

Živa Urbančič in Arber Avdullahu sta dobila pohvalo, Juš Kosmač, Lenart Treven, Severin Mejak in Samo Kralj pa tretjo nagrado. Jušu Kosmaču je žal le za eno točko ušla druga nagrada.



Slika 1. Ljubljanska ekipa v Rilskem samostanu.

Podrobnosti o tekmovanju lahko najdete na spletni strani www.imc-math.org.

Bralci Obzornika lahko svoje znanje matematike preverijo na naslednjih zelo simpatičnih nalogah. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko. Praviloma je prva naloga vedno najlažja, potem pa težavnost narašča do pete naloge, ki je večinoma nedostopna.

II.1. *Naj bo* $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija z limito v neskončnosti*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Pokaži, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = L.$$

Nalogo se da rešiti na več načinov. Najbrž najbolj naraven način je substitucija $t = nx$, ki zamenja meje iskanemu integralu in tako omogoči uporabo ocene v neskončnosti.

Obstaja pa tudi krajša in bolj zvita rešitev. Naj bo

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Za $t > 0$ velja

$$\int_0^1 f(tx)\,dx = \int_0^t f(u)\frac{du}{t} = \frac{F(t)}{t}.$$

V primeru $\lim_{t\to\infty} F(t) = \pm\infty$ lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo, ki pove

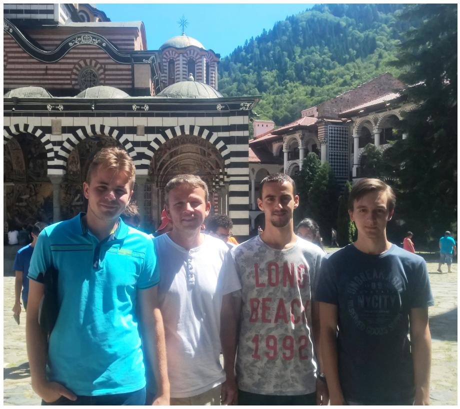
$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{1} = L.$$

Limita $\lim_{t\to\infty} F(t)$ je končna le v primeru $L = 0$. Tudi takrat je $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t} = 0 = L$. Zato je $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n} = L$.

I.3. *Zaporedje matrik* $(A_n)_n$ *je podano rekurzivno s pravilom*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & I \\ I & A_n \end{bmatrix}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pokaži, da ima matrika A_n $n+1$ *različnih lastnih vrednosti* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ *z algebrajskimi večkratnostmi* $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.



Slika 2. Primorska ekipa.

Tudi to nalogo se da rešiti na več načinov. Najhitreje pridemo do rešitve, če izračunamo karakteristični polinom matrike A_{n+1}:

$$\Delta_{A_{n+1}}(\lambda) = \begin{vmatrix} A_n - \lambda I, & I \\ I, & A_n - \lambda I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & I - (A_n - \lambda I)^2 \\ I, & A_n - \lambda I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} I - (A_n - \lambda I)^2, & 0 \\ A_n - \lambda I, & I \end{vmatrix} = \big(I - (A_n - \lambda I)\big)\big(I + (A_n - \lambda I)\big) =$$

$$= \big((1+\lambda)I - A_n\big)\big(A_n - (\lambda - 1)I\big) = \Delta_{A_n}(\lambda + 1)\Delta_{A_n}(\lambda - 1).$$

Matrika A_1 ima lastni vrednosti -1 in 1. Zadnji račun pokaže, da vsaka lastna vrednost λ matrike A_n porodi lastni vrednosti $\lambda - 1$ in $\lambda + 1$ matrike A_{n+1}. Tako ima recimo matrika A_2 vse lastne vrednosti $-1-1=-2$, $-1+1=0$, $1-1=0$ in $1+1=2$, matrika A_3 pa lastne vrednosti -3,$-1(3\times)$, $1(3\times)$ in 3. Dokaz lahko zaključimo z indukcijo, še lažje pa je, če si shematsko predstavljamo, da se nove lastne vrednosti z ustrezno algebrajsko večkratnostjo pojavijo vsakič v novi vrstici Pascalovega trikotnika.

I.3. *Za vsako naravno število m naj $P(m)$ pomeni produkt vseh naravnih deliteljev števila m (npr. $P(6) = 36$). Za dano naravno število n definirajmo zaporedje $(a_n)_n$ z začetnim členom $a_1 = n$ in rekurzivnim pravilom*

$$a_{k+1} = P(a_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Ali za vsako množico $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$ obstaja takšen začetni člen $a_1 = n$, da velja: Za vse $1 \le k \le 2017$ je člen a_k popoln kvadrat natanko za $k \in S$?

To je res. Za zaporedje si lahko izberemo kar potence števila dva, pri čemer soda potenca pomeni popoln kvadrat. Pokažimo, da zahtevi ustreza zaporedje $a_k = 2^{p_k}$ za primerne potence p_k. Velja

$$a_{k+1} = P(a_k) = P(2^{p_k}) = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdots 2^{p_k} = 2^{\frac{1}{2}p_k(p_k+1)}.$$

Za $1 \leq m \leq 2017$ bomo potence p_k konstruirali induktivno, tako da bo za $1 \leq k \leq m$ veljalo $p_{k+1} = \frac{1}{2}p_k(p_k+1)$ in bo p_k sodo število natanko za $k \in S$.

V primeru $m = 1$ vzamemo $p_1 = 0$, če $1 \in S$, in $p_1 = 1$ sicer. Privzemimo, da smo za neki $m < 2017$ že dobili zaporedje $(p_k)_k$ z želenima lastnostma za $k \leq m$. V primeru $k = m+1$ je morda konstruirano zaporedje že pravo. Če ni, ga zamenjamo z novim zaporedjem z novim začetnim členom $p_1' = p_1 + 2^m$ in enakim rekurzivnim pravilom $p_{k+1}' = \frac{1}{2}p_k'(p_k'+1)$. Pokažimo, da velja $p_k' \equiv p_k + 2^{m-k+1} \pmod{2^{m-k+2}}$:

$$p_{k+1}' = \tfrac{1}{2}p_k'(p_k'+1) \equiv \tfrac{1}{2}(p_k + 2^{m-k+1})((p_k+1) + 2^{m-k+1}) =$$

$$= \tfrac{1}{2}p_k(p_k+1) + 2^{2m-2k+1} + 2^{m-k}(2p_k+1) \equiv$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}p_k(p_k+1) + 2^{m-k} \equiv p_{k+1} + 2^{m-(k+1)+1} \pmod{2^{m-(k+1)+2}}.$$

Zato je $p_k \equiv p_k' \pmod 2$ za $k = 1, \ldots, m$ in $p_{m+1} \equiv p_{m+1}' + 1 \pmod 2$, ravno to pa smo želeli doseči.

II.4. *Zaporedje zvezno odvedljivih funkcij $(f_n)_n$, $f_n\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, je definirano s $f_1 = 1$ in rekurzivno s pravilom*

$$f_{n+1}' = f_n f_{n+1} \text{ na } (0,1),\ f_{n+1}(0) = 1.$$

Pokaži, da za vsak $x \in [0,1)$ obstaja limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, in določi limitno funkcijo.

Iz zapisane diferencialne enačbe sledi integralska enačba

$$f_{n+1}(x) = \exp\left(\int_0^x f_n(t)\,dt\right).$$

Lahko je videti, da je preslikava $\Phi\colon C([0,1)) \to C([0,1))$ s predpisom

$$\Phi(f)(x) = \exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$$

monotona. Ker na $(0,1)$ velja $f_2(x) = e^x > 1 = f_1(x)$, je $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $x \in (0,1)$.

S pomočjo odvajanja vidimo, da negibna točka f preslikave Φ na prostoru $\{h \in C([0,1)) : h(0) = 1\}$ zadošča diferencialni enačbi

$$\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) f(x) = f'(x),$$

zato je

$$f^2 = f',\ f(0) = 1.$$

Rešitev enačbe je funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ker je $f_1 < f$ na $(0,1)$, z indukcijo dobimo $f_{n+1} = \Phi(f_n) < \Phi(f) = f$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Tako je na $(0,1)$ zaporedje $(f_n)_n$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja končna limita g. Pokazali bomo, da je $g = f$.

Velja $g(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Ker je $f_1 = 1$, iz integralske enačbe sledi, da za vse n velja $f_n > 0$ na $[0,1)$. Iz iste enačbe od tod sledi, da so vse funkcije f_n naraščajoče. Tudi odvodi $f'_{n+1} = f_n f_{n+1}$ so naraščajoči, zato so f_n konveksne funkcije. Tako je tudi g konveksna in posledično zvezna na intervalu $(0,1)$. Funkcija g je zvezna tudi v točki 0, ker je $1 = f_1 \leq g \leq f$ in je $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 1$. Tako smo pokazali, da zaporedje zveznih funkcij na kompaktnem intervalu konvergira k zvezni funkciji, zato je konvergenca enakomerna na vsakem intervalu $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Enostavna ocena pokaže, da je pri fiksnem ε funkcija Φ zvezna na prostoru $C([0,1-\varepsilon])$.

Pokažimo, da je g negibna točka preslikave Φ. V nasprotnem primeru bi obstajala $x \in [0, 1-\varepsilon]$ in $\eta > 0$, tako da bi bilo $|\Phi(g)(x) - g(x)| > \eta$. Zaradi zveznosti Φ obstaja $\delta > 0$, da je v supremum normi

$$\|\Phi(\bar{g}) - \Phi(g)\| < \tfrac{1}{3}\eta,\ \text{če je } \|\bar{g} - g\| < \delta.$$

Vzemimo dovolj velik N, da je $\|f_n - g\| < \min\{\delta, \frac{1}{3}\eta\}$ za $n \geq N$. Tedaj je

$$\|f_{n+1} - \Phi(g)\| = \|\Phi(f_n) - \Phi(g)\| < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Tako pridemo do protislovja:

$$|f_{n+1}(x) - \Phi(g)(x)| > |\Phi(g)(x) - g(x)| - |g(x) - f_{n+1}(x)| > \eta - \tfrac{1}{3}\eta.$$

Ker je f edina negibna točka preslikave Φ na prostoru $\{h \in C([0, 1-\varepsilon]) : h(0) = 1\}$, je $g = f$ na intervalu $[0, 1-\varepsilon]$. To velja za poljuben $\varepsilon \in (0,1)$, zato je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{za } x \in [0,1).$$

Marjan Jerman