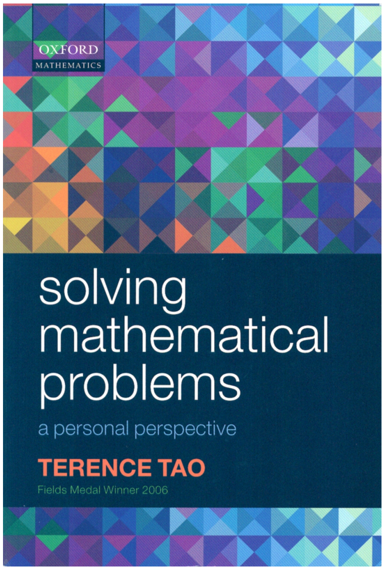
Way. Eckler uporablja za osnovo v glavnem Websterov angleški slovar. Nobenega razloga pa ni, da ne bi iskali po Ecklerjevem zgledu zanimivih besed tudi po slovenskih slovarjih.

Marko Razpet

Terence Tao: SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS – A PERSONAL PERSPECTIVE, Oxford University Press, 2006, 128 strani.



Malo ljudi je nadarjenih za matematiko in le redki med njimi so talentirani. Resničnih genijev pa je na svetu le nekaj. A celo v tej peščici so nekateri izjemni, kot da bi bili z drugega planeta. Nedvomno je Terence Tao taka izjema. Z desetimi leti je osvojil bronasto medaljo na mednarodni matematični olimpijadi. V naslednjih dveh letih je nato zaporedoma osvojil še srebrno in zlato medaljo. V vsej zgodovini teh tekmovanj ni bilo tako mladega prejemnika zlate medalje! Pri dvajsetih je doktoriral na Univerzi v Princetonu, se potem preselil v Kalifornijo in pri štiriindvajsetih letih postal redni profesor na znameniti univerzi UCLA v Los Angelesu ter pri tem ponovno podrl starostni rekord; na tej univerzi niso še nikoli imeli tako mladega rednega profesorja. Za svoja matematična odkritja je dobil številne nagrade. Omenimo samo Fieldsovo medaljo, ki jo je prejel leta 2006. Več podatkov o tem izjemnem matematiku najdemo na `http://en.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao` in `http://www.math.ucla.edu/~tao/`. Priporočam tudi obisk spletne strani YouTube, kjer boste nedvomno uživali v ogledu njegovega predavanja *Structure and Randomness in the Prime Numbers*.

Pri petnajstih letih, leta 1990, je napisal knjigo Solving mathematical problems: a personal perspective; leta 2006 je izšel ponatis pri založbi Oxford University Press. V knjigi je zbral nekaj nalog iz matematičnih tekmovanj. Vse naloge so elementarne, a različnih težavnostnih stopenj. Avtor predstavi rešitve nalog s komentarji in občasno doda še kakšno sorodno nalogo brez rešitve. Težavnejše naloge označi z eno ali dvema zvezdicama.

Knjiga je lansko leto prišla v matematično knjižnico. Zaradi zvezdniškega imena avtorja sem jo na hitro prelistal. Natančno se spomnim, da se mi je slučajno odprla na strani 43, kjer najdemo Problem 3.3. Ta je med lažjimi in rešitev sem na hitro preletel že v knjižnici. Bil sem očaran.

In hkrati zaprepaden. Precej bralcev Obzornika uči bodisi v zadnjih razredih osnovne šole, bodisi v gimnazijah, zato dobro vedo, kaj lahko pričakujejo od petnajstletnikov in tudi, kaj lahko pričakujejo od izjemno nadarjenih petnajstletnikov. Potem ko prebereš to knjižico, postane vsaka še tako „učena“ razlaga o razliki med nadarjenimi ljudmi in geniji odveč.

Pri študiju matematike srečamo številne globoke ideje. Vprašamo se lahko, kako so se porajale v glavah vrhunskih matematikov. Tega večinoma ne moremo ugotoviti, saj so nam posredovane v izpiljeni obliki, ki zakriva njihov postopni razvoj. Slediti delu živečih genialnih matematikov je težko, saj človek potrebuje ogromno znanja že za razumevanje njihovega dela zgolj na formalnem nivoju. Le redki imajo dovolj talenta in znanja za resen uvid v sodobno vrhunsko matematiko. Tu pa se, zaradi elementarne narave problemov, zajetih v knjigi, ponuja širokemu krogu matematikov enkratna priložnost „opazovati“ resničnega genija pri delu. Terenca Taa pogosto imenujejo matematični Mozart. K temu bi dodal, da je za matematika ne prebrati te knjige podobno, kot če bi ljubitelj glasbe živel v letih 1781–1791 na Dunaju in zamudil vse Mozartove koncerte in opere.

Knjiga ponuja obilo estetskega užitka ob lepih idejah, ki so potrebne za rešitve podanih problemov. Zahtevnejši bralec se bo seveda problemov sprva lotil sam. Nič hudega, če ne bo prišel daleč! Po vloženem naporu bo navdušenje nad presenetljivimi potmi do rešitev še toliko večje. Učiteljem na srednjih šolah bo knjiga izjemno dobrodošel pripomoček za pripravo zanimivih krožkov za najbolj nadarjene dijake. Njim je vsekakor treba priporočiti pričujočo knjigo v branje!

Najlepše pri tej knjigi je podajanje rešitev. Avtor nas ne seznani zgolj z najbolj elegantno rešitvijo. Ravno nasprotno, potrudi se podrobno razložiti svojo miselno pot do rešitve skupaj z možnimi poizkusi, ki ne vodijo nikamor ali pa ne peljejo k lepi rešitvi. Kot sam pravi, ima rad matematiko preprosto zato, ker je zabavna. In seveda je jasno, da je zabavna le tedaj, ko je elegantna. Za primer naj omenim kar prvi problem v knjigi, to je Problem 2.1 na strani 11. Treba je dokazati trditev, da je med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili vsaj eno deljivo z vsoto svojih števk. Dokaz trditve je dolg le 7 vrstic. V knjigi pa so temu problemu posvečene tri strani in skoraj vsak stavek na teh treh straneh prinaša presenečenje.

Ko berem gornje vrstice, se ne morem izogniti vprašanju, koliko me je pri navdušenju zavedlo dejstvo, da je avtor eden največjih zvezdnikov sodobne matematike. Saj vsi vemo, da se spodobi (še enkrat ista primera) biti očaran ob vsaki Mozartovi skladbi, pri kakšnem manj znanem skladatelju pa le upamo priznati, da nam je kaj njegovega všeč, kaj drugega pač ne. Toplo vam priporočam, da knjigo preberete, in kaj kmalu vam bo jasno, da bi bila knjiga obsojena na uspeh, tudi če bi jo napisal Janez Novak (seveda, če bi bil česa takega sposoben).

Za konec bom v nekoliko skrajšani obliki povzel problema, ki sem ju omenil zgoraj. Ta dva sodita med lažje v knjigi, a tudi pri težjih je potreben nivo matematičnega znanja podoben, le premisleki so zahtevnejši. Začnimo z:

Problem 2.1. *Pokaži, da je med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili vsaj eno deljivo z vsoto svojih števk.*

Avtor najprej ugotovi, da je to končen problem: obstaja natanko 900 trimestnih števil in zato lahko trditev preverimo z računanjem. Taka rešitev ne zdrži osnovnih estetskih kriterijev.

Zapišimo pogoj, da je trimestno število deljivo z vsoto svojih števk, s formulo:

$$(a+b+c) \mid 100a+10b+c\,. \tag{1}$$

Ni videti, da bi ta izraz lahko poenostavili ali na kakšen smiseln način prevedli v drugo obliko. Seveda se vprašamo, zakaj ravno 18 zaporednih trimestnih števil? Zakaj ne 13? Je tu kak skrit pomen?

Sledi nekaj eksperimentiranja s konkretnimi rešitvami enačbe (1) v želji, da bi opazili kaj uporabnega. Potem pa sledi preblisk! Kje srečamo vsoto števk? Seveda, pri preverjanju deljivosti s številom 9. Števili $a+b+c$ in $100a+10b+c$ imata isti ostanek pri deljenju z 9, saj je

$$100a+10b+c = 9(11a+b)+(a+b+c).$$

Povrhu je 9 v tesni zvezi z $18 = 2 \cdot 9$. In potem se avtorju porodi ideja, da bi namesto trditve:

Med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili najdemo vsaj eno, ki reši (1), poizkušali dokazati močnejšo trditev:

Med vsakimi 18 zaporednimi trimestnimi števili najdemo vsaj en večkratnik števila 9, ki reši (1).

Izkaže se, da je ta trditev pravilna. Bolj naravno (glej formulacijo problema) bi bilo namesto večkratnikov števila 9 v drugi trditvi vzeti kar večkratnike števila 18. Tudi ta trditev se izkaže za pravilno. Še več, tako formulirana domneva porodi idejo za kratko in elegantno rešitev zastavljenega problema.

Zapišimo jo. Med 18 zaporednimi trimestnimi števili obstaja natanko en večkratnik števila 18. Označimo ga z $abc_{10} = 100a+10b+c$. Iz $18 \mid abc_{10}$ sledi $9 \mid abc_{10}$ in zato $9 \mid (a+b+c)$ po pravilu za preverjanje deljivosti s številom 9. Ker so a, b in c števke, je $1 \leq a+b+c \leq 27$. Torej imamo natanko tri možnosti: $a+b+c$ je bodisi 9, bodisi 18, bodisi 27. Zadnja možnost nastopi samo v primeru $abc_{10} = 999$, ki pa ni večkratnik števila 18. In zato je $a+b+c$ bodisi 9 bodisi 18. V obeh primerih $(a+b+c) \mid 18$, in ker $18 \mid abc_{10}$, imamo želeno enačbo

$$(a+b+c) \mid abc_{10}\,.$$

Avtor potem doda še nekaj komentarjev. Zapišimo najpomembnejšega. Obstaja takih 17 zaporednih trimestnih števil, da nobeno med njimi ni deljivo z vsoto svojih števk: od 559 do 575. In avtor mirno pove, da je za iskanje zaporedja uporabil računalnik in ne kakšnih zvitih matematičnih idej.

Sedaj pa še:

Problem 3.3. *Naj bodo a, b, c taka realna števila, da je a, b, c, $a+b+c \neq 0$ in*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\,. \tag{2}$$

Dokaži, da potem velja

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}\,. \tag{3}$$

Na prvi pogled je problem videti enostaven. V končno mnogo korakih naj bi enačbo (2) preoblikovali v (3). Prvi poizkus bi bil izračunati peti potenci obeh strani enačbe (2). Dobimo enačbo, ki je podobna enačbi (3), le da v njej nastopa še cela množica „čudnih“ sumandov. In ni videti, da bi kakšna računska manipulacija vodila h končni rešitvi. Toliko o direktnem pristopu!

Dijake je treba večkrat opozarjati, naj v računih ne uporabljajo enakosti (2), ker je **skoraj vedno** napačna. In tu je prvi ključ do rešitve! Zdi se, da enakost (2) zelo omeji možne vrednosti števil a, b, c. Kako? Da bi to ugotovili, zapišimo (2) na kak drug ekvivalenten način. Skupni imenovalec je dober začetek. Dobimo

$$\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a+b+c}\,.$$

Potem pa še navzkrižno množimo:

$$ab^2 + a^2b + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc = abc\,. \tag{4}$$

Kako iz te enačbe dobiti čim več informacij o številih a, b, c? Ali jo znamo rešiti? Avtor najprej pomisli na uporabo kakšnih neenakosti, npr. Cauchy-Schwarzeve ali neenakosti z aritmetičnimi in geometrijskimi sredinami. Taka pot bi bila morda prava, če bi imeli omejitev, da so a, b, c pozitivni. Pa niso, saj če bi bili, bi bil $1/(a+b+c)$ manjši od vsakega od sumandov na levi strani enačbe (2) in še toliko bolj od njihove vsote.

Potem avtor naniza še nekaj možnih pristopov. Naj omenim enega. Na (4) lahko gledamo kot na kvadratno enačbo z neznanko a s parametroma b in c. A ta enačba ni videti lahko rešljiva, razen če bi uporabili formulo za ničli kvadratne funkcije, v kateri pa nastopajo kvadratni koreni. S to idejo je sicer mogoče priti do rešitve. Kako, bo pozornemu bralcu jasno, ko bo natančno premislil pot do rešitve, ki je opisana spodaj.

Želimo rešiti enačbo

$$p(a,b,c) = 0\,,$$

kjer je p polinom

$$p(a,b,c) = ab^2 + a^2b + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc\,.$$

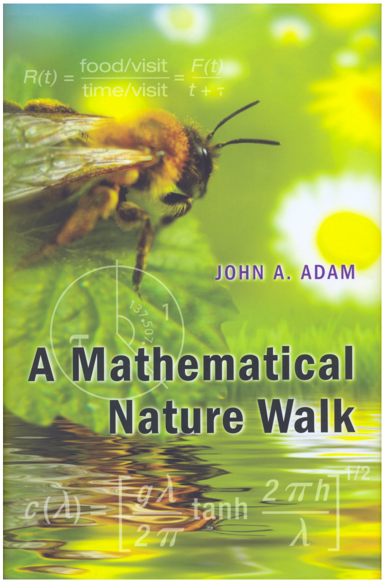
Kako poiskati ničle polinoma? S faktorizacijo? Najprej opazimo, da se polinom ne spremeni, če zamenjamo vloge spremenljivk a, b, c. Pravimo, da je simetričen. Je homogen. In je tretje stopnje (srednješolsko znanje matematike pove, da ima vsak polinom tretje stopnje v eni spremenljivki realno ničlo in je zato deljiv z linearnim polinomom). Ali ima potem polinom p linearen homogen faktor? Če je odgovor pritrdilen, ali je potem kateri od preprostih polinomov $a+b$, $a-b$, a, $a+b+c$, $a+b-c$, $\ldots$ faktor v razcepu polinoma $p(a,b,c)$? Lahko poizkusimo tudi s čim ne tako enostavnim, npr. z $a+2b$. A to ni videti tako lepo in v vsakem primeru lahko tovrstne možnosti preizkusimo, če preprostejše ne bodo delovale. Začnimo torej kar z $a+b$. Če si mislimo, da je $p(a,b,c)$ polinom v spremenljivki a s parametroma b in c, hitro ugotovimo, da je $a=-b$ ničla. Potem pa mora biti $p(a,b,c)$ deljiv z $a+b$. Ampak zaradi simetričnosti bi moral biti deljiv tudi z $a+c$ in $b+c$. In res, preprost račun pokaže, da je

$$p(a,b,c)=(a+b)(a+c)(b+c)\,.$$

Strnimo. Po predpostavki števila a, b, c zadoščajo enačbi (2). In potem vemo, da mora biti $p(a,b,c)=0$. Iz zgornje enačbe sledi, da je bodisi $a=-b$, bodisi $a=-c$, bodisi $b=-c$. V vseh treh primerih velja (3)!

Peter Šemrl

John A. Adam: A MATHEMATICAL NATURE WALK, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 2009, 250 strani.



Poljudnoznanstvena knjiga *Matematična naravoslovna pot* bralcu razlaga, kako nam lahko matematika pomaga opisati in pojasniti številne naravne pojave, s katerimi se srečujemo na vsakem koraku, če se le malo sprehodimo in razgledamo po naravi. Žal pa jih le redki sploh opazijo, še manj pa je tistih, ki jih poskušajo tudi razumeti. Najbrž se v sodobnem načinu življenja le malokdo vpraša, zakaj so taki, kot so. Avtor knjige odgovarja ravno na tovrstna vprašanja in nam poskuša usmeriti pozornost na opazovanje, opisovanje in analizo naravnih pojavov. Pri tem uporablja preproste matematične modele, ki jih potem večinoma obravnava z elementarno matematiko, le tu in tam pa poseže po infinitezimalnem računu ali preprosti diferencialni enačbi.

Knjiga je napisana v premišljeni pogovorni obliki in nas vodi skozi 96 vprašanj, povezanih z vsakdanjimi naravnimi pojavi, ki se dogajajo okoli