PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 3
Strani 142–147

Marko Razpet:

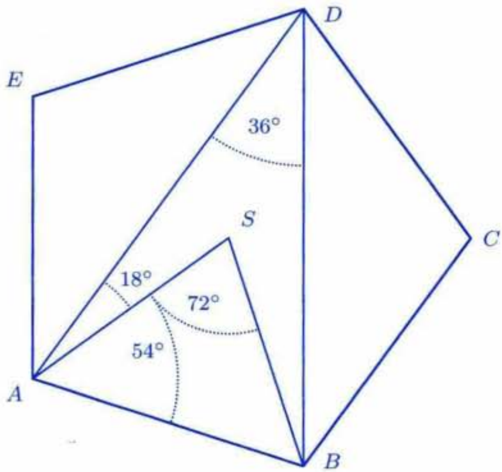
KOTI V PRAVILNEM PETKOTNIKU

Ključne besede: matematika, geometrija, pravilni petkotniki, koti.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1519-Razpet.pdf

KOTI V PRAVILNEM PETKOTNIKU

Kot je razvidno na sliki, v pravilnem petkotniku $ABCDE$ s središčem v točki S povsem naravno nastopajo koti $18°, 36°, 54°$ in $72°$, ki so vsi večkratniki kota $18°$.



Za kote $30°, 45°$ in $60°$ ni težko najti vrednosti kotnih funkcij, saj si pomagamo z enakostraničnim trikotnikom in kvadratom. Rezultatov si tudi ni težko zapomniti. Navadno pa najdemo v učbenikih za kotne funkcije kotov, ki jih srečamo v pravilnem petkotniku, precej zapletene izpeljave. Za nekatere od njih je treba obvladati celo kompleksna števila ter enačbe tretje in četrte stopnje. Ogledali si bomo, kako lahko enostavneje dobimo izraza za sinus in kosinus kota $54°$. Rezultat nam omogoča izračun vrednosti kotnih funkcij tudi za ostale kote v pravilnem petkotniku in geometrijsko konstrukcijo pravilnega petkotnika, če poznamo njegovo stranico a.

Najprej opazimo, da velja

$$2 \cdot 54° = 270° - 3 \cdot 54° .$$

Nato se spomnimo znanih identitet

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha , \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha , \quad \sin(270° - \alpha) = - \cos \alpha .$$

Nekoliko manj znana je identiteta za kosinus trojnega kota, ki pa jo dobimo iz adicijskega izreka in prejšnjih identitet (ali tudi iz Moivreove formule):

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha (1 - 4\sin^2 \alpha) .$$

Označimo

$$x = \sin 54^\circ , \quad y = \cos 54^\circ .$$

Očitno je $0 < x < 1$ in $0 < y < 1$. Ker velja

$$\sin(2 \cdot 54^\circ) = -\cos(3 \cdot 54^\circ) ,$$

dobimo od tod najprej

$$2xy = -y(1 - 4x^2) ,$$

po krajšanju z y in po preureditvi pa je pred nami kvadratna enačba

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 .$$

Njeni rešitvi sta

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) , \quad x_2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) .$$

Ker je x_2 negativno število, imamo nazadnje

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) .$$

Število

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

smo že srečali v Preseku (Presek **27** (1999/2000), 34). Imenujemo ga *število zlatega reza* (zlato razmerje, označujemo ga tudi τ), ker nastopa pri zlatem rezu, zlatem pravokotniku, zlati spirali. Potence števila ϕ s celimi eksponenti se linearno izražajo s ϕ samim, koeficienti pa so Fibonaccijeva števila. Trditev temelji na tem, da število $\phi = 2x_1$ zadošča enačbi $\phi^2 = \phi + 1$, iz katere dobimo ϕ^n, oziroma enačbi $\phi^{-1} = \phi - 1$, ki nam da izraze za ϕ^{-n}, kjer je n naravno število.

Nekateri menijo, da se oznaka ϕ uporablja v čast starogrškemu kiparju Fidiji, ki je zlati rez uporabljal pri svojih mojstrovinah, drugi pa stavijo, da oznaka pride od Fibonaccija. Kakorkoli že je, velja

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{2}\,\phi\,.$$

Podobno idejo, ki nas privede do kvadratne enačbe, lahko uporabimo tudi za sinus kota 18°. Začnemo z enakostjo $2\cdot 18^\circ = 90^\circ - 3\cdot 18^\circ$ in nadaljujemo podobno kot pri sinusu kota 54°. Lahko pa uporabimo dobljeni rezultat in enakost

$$2\sin^2 18^\circ = 1 - \cos 36^\circ = 1 - \sin 54^\circ = \frac{1}{2}(2-\phi)\,.$$

Tako dobimo najprej

$$\sin^2 18^\circ = \frac{1}{4}(2-\phi) = \frac{1}{4}(\phi - 1)^2\,,$$

nato pa

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2}(\phi - 1) = \frac{1}{2\phi}\,.$$

S številom ϕ se izražajo tudi

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}\,, \quad \sin 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\phi}\,.$$

Prav tako lahko s številom ϕ zapišemo tudi kosinuse, tangense in kotangense tistih večkratnikov kota 18°, ki ležijo med kotoma 0° in 90°, kot kaže razpredelnica.

kot	sin	tg	
18°	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\phi}$	$\frac{1}{5}\sqrt{35-20\phi}$	72°
36°	$\frac{1}{2}\sqrt{3-\phi}$	$\sqrt{7-4\phi}$	54°
54°	$\frac{1}{2}\phi$	$\frac{1}{5}\sqrt{15+20\phi}$	36°
72°	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\phi}$	$\sqrt{3+4\phi}$	18°
	cos	ctg	kot

Bralec bo z lahkoto zapisal vrednosti v zgornji razpredelnici v običajni obliki, s kvadratnimi koreni. Čemu nam vse to lahko koristi?

V učbenikih običajno najdemo geometrijsko konstrukcijo pravilnega petkotnika, ki je včrtan dani krožnici. Poskusimo sedaj konstruirati pravilni petkotnik z dano stranico a. Njeni krajišči označimo z A in B, ki bosta hkrati že dve oglišči iskanega lika. V A in B narišemo pravokotnici na daljico AB in konstruiramo kvadrat $ABFG$. Razpolovišče stranice AG označimo s H, potem pa načrtamo krožni lok s središčem v H skozi F. Krožni lok preseka podaljšek stranice AG v točki I. Na tem podaljšku določimo še točko J, ki je od A oddaljena $2a$. Ker je po Pitagorovem izreku

$$|HI| = |HF| = \frac{1}{2}a\sqrt{5}\,,$$

dobimo

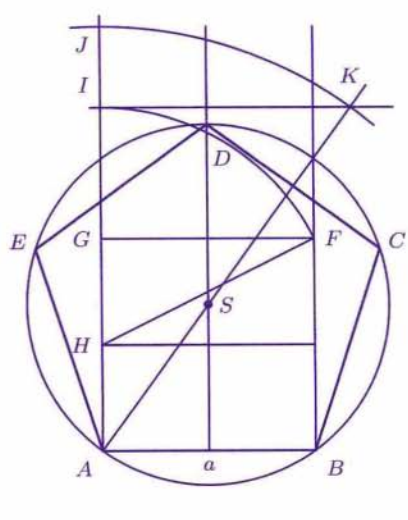
$$|AI| = |AH| + |HI| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5} = a\phi\,.$$

Skozi I načrtamo vzporednico stranici AB, ki jo krožni lok s središčem v A skozi J preseka v točki K. Takoj vidimo, da premica skozi A in K oklepa z daljico AB kot 54°. Velja namreč

$$\sin\sphericalangle AKI = \frac{|AI|}{|AK|} = \frac{a\phi}{2a} = \frac{1}{2}\phi\,.$$

Torej je res

$$\sphericalangle BAK = \sphericalangle AKI = 54^\circ\,.$$



Očitno premica skozi A in K preseka pravokotnico skozi razpolovišče daljice AB ravno v središču S iskanemu pravilnemu petkotniku očrtane krožnice. S konstrukcijo iskanega pravilnega petkotnika $ABCDE$ potem ni več težav.

Bralec bo morda konstruiral pravilni petkotnik z dano stranico a še kako drugače, recimo z uporabo diagonal iz oglišča D. Trikotnik ABD je enakokrak z osnovnico a. Kot ob vrhu D pa meri $36°$. Ni težko izračunati dolžine krakov AD in BD. Dobimo

$$|AD| = |BD| = \frac{a}{2\sin 18^\circ} = a\phi\,.$$

Ker že obvladamo konstrukcijo daljice dolžine $a\phi$, znamo s tem načrtati tudi trikotnik ABD. Ker merita $\sphericalangle ADE$ in $\sphericalangle BDC$ tudi po $36°$, dodamo ta kot na vsako stran vrha D enakokrakega trikotnika ABD. Nato odmerimo a iz D vzdolž nosilk daljic DC in DE. S tem imamo vsa oglišča iskanega lika.

Za konec si oglejmo še eno zanimivost v zvezi s kvadrati sinusov večkratnikov kota $\gamma = 18°$. Označimo

$$a_n = \sin^2(n\gamma)\,,$$

kjer je n poljubno celo število. Iz že predstavljene razpredelnice domnevamo, da je

$$a_n = A_n + B_n\phi\,,$$

kjer so A_n in B_n racionalna števila. Posebej je $\sin^2(3\gamma) = \phi^2/4 = (1 + \phi)/4$. Tako imamo na primer $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $A_1 = 1/2$, $B_1 = -1/4$, $A_2 = 3/4$, $B_2 = -1/4$, $A_3 = 1/4$, $B_3 = 1/4$ itd. V Preseku smo tudi že dokazali, da realna števila oblike $a + b\phi$, kjer sta a in b racionalni števili, zaradi iracionalnosti števila ϕ lahko v taki obliki zapišemo samo na en način. Seveda za vsako naravno število veljata enakosti $A_{-n} = A_n$ in $B_{-n} = B_n$.

Z uporabo adicijskega izreka za funkcijo sinus najprej izpeljemo identiteto

$$\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) = 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\,,$$

kamor nato vstavimo $\alpha = n\gamma$ in $\beta = \gamma$. Dobimo rekurzivno enačbo za a_n:

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_n\phi + 1 - \frac{1}{2}\phi\,.$$

Ker je $a_0 = 0$ in $a_1 = 1/2 - \phi/4$, lahko postopoma izračunamo $a_2, a_3, \ldots$. Z metodo matematične indukcije dokažemo, da so vsi členi zaporedja a_n oblike $A_n + B_n\phi$, kjer so A_n in B_n racionalna števila. Torej velja naslednja enačba:

$$(A_{n+1} + B_{n+1}\phi) + (A_{n-1} + B_{n-1}\phi) = (A_n + B_n\phi)\phi + 1 - \frac{1}{2}\phi\,.$$

Ker je $\phi^2 = 1 + \phi$, morata zaradi enoličnosti zapisa A_n in B_n izpolnjevati enačbi

$$\begin{aligned} A_{n+1} + A_{n-1} &= B_n + 1 \\ B_{n+1} + B_{n-1} &= A_n + B_n - \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Iz dobljenega sistema rekurzivnih enačb lahko korak za korakom izračunamo A_n in B_n. Toda pojdimo še korak naprej. Izrazimo

$$A_n = B_{n+1} + B_{n-1} - B_n + 1/2$$

iz druge enačbe in ga vstavimo v prvo. Dobimo rekurzivno enačbo

$$B_{n+2} = B_{n+1} - B_n + B_{n-1} - B_{n-2}\,.$$

Torej je katerikoli B_n izmenična vsota štirih svojih predhodnikov.

Podobno najdemo tudi rekurzivno enačbo

$$A_{n+2} = A_{n+1} - A_n + A_{n-1} - A_{n-2} + \frac{1}{2}\,.$$

Katerikoli A_n je izmenična vsota štirih svojih predhodnikov, povečana za polovico. Tako lahko širimo naslednjo tabelo:

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
A_n	...	3/4	1/2	0	1/2	3/4	1/4	1/2	1	1/2	...
B_n	...	$-1/4$	$-1/4$	0	$-1/4$	$-1/4$	1/4	1/4	0	1/4	...

Prav za konec pa še ena naloga za bralce. Diagonali iz različnih oglišč v pravilnem petkotniku se sekata v notranjosti lika. Dokažite, da je pri tem razmerje daljšega in krajšega odseka enako številu ϕ.

Marko Razpet