MOČNIK-SPIELMANN

ANFANGSGRÜNDE
DER
GEOMETRIE
FÜR
REALSCHULEN

Verlag von F. TEMPSKY in WIEN und PRAG.

Begleitwort

für

Močniks

Geometrische Formenlehre

und

Anfangsgründe der Geometrie

für

Realschulen.

Bearbeitet von

Johann Spielmann.

Mit 216 in den Text gedruckten Figuren.

Achtzehnte, geänderte Auflage.

Preis geheftet 1 K 60 h, gebunden 2 K 10 h.

Seit dem Erscheinen der 17. Auflage der Anfangsgründe der Geometrie für die 2., 3. und 4. Classe der Realschulen von Močnik sind fast 20 Jahre verstrichen. Durch die in dieser Zeit üblich gewordene geänderte Darstellung der geometrischen Lehren für die Schule und durch den neuen Lehrplan für Realschulen ist eine neue Auflage nothwendig geworden. Dieselbe schließt sich selbstverständlich vollständig den Forderungen des Lehrplanes und den Instructionen an. Sie unterscheidet sich von der 17. Auflage dadurch, dass sie auch die geometrische Formenlehre für die 1. Classe enthält. Damit ist der Vortheil verbunden, dass der Schüler durch alle vier Classen dasselbe Buch beibehält, dass es nicht nothwendig ist, manche Lehren für die verschiedenen Stufen wiederholt in das Buch aufzunehmen, sondern nur einmal, wodurch nicht nur eine Kürzung sich ergibt, sondern auch das Localgedächtnis der Schüler mehr ausgenützt wird. Die achsiale Symmetrie wird in der neuen Auflage stärker betont und consequent ausgenützt. Die aus derselben sich ergebenden Sätze wurden nicht auf die Congruenz der Dreiecke sondern auf die unmittelbare Anschauung gegründet. Die Nothwendigkeit dieses Vorganges ergab sich auch aus der Forderung der Instructionen, dass achsiale und centrische Symmetrie schon in den Unterrichtsstoff der 1. Classe aufzunehmen sind; es schien gerathen, nicht erst bei den regelmäßigen Polygonen damit zu beginnen,

sondern sie schon früher an einfacheren Formen zu erörtern. Die Darstellung der geometrischen Gebilde durch ihre Projection wurde nicht wie in der früheren Auflage nur Anhangsweise vorgenommen, sondern dem Lehrstoff an den entsprechenden Stellen selbst eingefügt. Die neue Auflage weist ferner auch eine große Anzahl neuer Figuren auf, da in dieser Beziehung die 17. einer Verbesserung bedurfte.

Das beigedruckte Inhaltsverzeichnis lässt den Inhalt und den Umfang des Buches erkennen.

Der Umfang des Buches ist durch den Lehrplan und die Instructionen bestimmt. Auf die einzelnen Classen entfallen der Reihe nach ca. 30, 40, 33 und 55 Seiten. Eine Reduction tritt von selbst dadurch ein, dass von den zahlreichen Übungsbeispielen immer ein Theil wegfallen wird; in seinem Umfange wurde aber der Übungsstoff wegen der wünschenswerten Möglichkeit des Abwechselns erhalten. Der größere Umfang des Pensums der ersten Classe findet darin seine Erklärung, dass von den wichtigsten geometrischen Gebilden (Gerade, Dreieck, Viereck, Vieleck), nachdem sie an den Körpern vorgenommen wurden, im Interesse der Wiederholung und der Übersicht noch eine zusammenfassende Darstellung gegeben wurde, die dem Schüler nur mehr wenig Mühe verursachen wird.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Močniks

Geometrische Formenlehre

und

Anfangsgründe der Geometrie

für

Realschulen.

Bearbeitet von

Johann Spielmann.

Mit 216 in den Text gedruckten Figuren.

Achtzehnte, geänderte Auflage.

Preis geheftet 1 K 60 h, gebunden 2 K 10 h.

Wien und **Prag.**

Verlag von F. Tempsky.

1900.

ai 737098

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

20161098o

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

INHALT.

1. Theil.

Geometrische Formenlehre und Planimetrie.

Seite

I. Die einfachsten Körperformen und die wichtigsten ebenen geometrischen Gebilde 1
Der Würfel 1
Raumgebilde und Raumgrößen 5
Entstehung der Raumgrößen durch Bewegung 5
Das gerade quadratische Prisma 5
Das rechtwinklige Parallelepiped 6
Die quadratische gerade Pyramide und ihr Stumpf 6
Das schiefe Parallelepiped 7
Die schiefe vierseitige Pyramide und ihr Stumpf 8
Der Punkt 9
Die gerade Linie 9
Der Winkel 11
Das Dreieck 13
Das Viereck 15
Die achsiale Symmetrie 16
Das regelmäßige sechsseitige Prisma. 18
Die regelmäßige fünfseitige Pyramide 18
Das Vieleck 18
Die centrische Symmetrie 19
Der gerade Cylinder 20
Der gerade Kegel und sein Stumpf 21
Die Kugel 22
Der Kreis und die Winkelmessung . . . . . 23—26
Die Ellipse 26
II. Gerade Linien und Winkel; Constructionsaufgaben 28
Zeichnendes Rechnen mit Strecken und Messung derselben . . . . 28—29
Zeichnendes Rechnen mit Winkeln 30
Winkelpaare 31
Senkrechte und schiefe Gerade 32
Parallelentheorie 33
Centriwinkel, Sehnen und Bogen eines Kreises; Constructionsaufgaben . 36
III. Eigenschaften der Strecken- und Winkelsymmetrale und aus denselben sich ergebende Constructionen 38
IV. Das Dreieck 40
1. Lehrsätze über Seiten und Winkel eines Dreieckes 40
2. Construction der Dreiecke und Congruenz derselben 44
3. Symmetrie des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes 50

Seite

V. Grundeigenschaften des Kreises 50
1. Gerade und Winkel in Beziehung zum Kreis 50
2. Sehnen- und Tangentendreiecke 53
3. Lage zweier Kreise 54
VI. Das Viereck 55
VII. Das Vieleck 63
VIII. Geometrische Örter 67
IX. Flächengleichheit der ebenen Figuren 70
Verwandlung und Theilung der ebenen Figuren 73
X. Ausmessung der ebenen Figuren 76
1. Ausmessung der geradlinigen Figuren 76
2. Ausmessung des Kreises 83
XI. Ähnlichkeit der ebenen Figuren 87
1. Geometrische Verhältnisse und Proportionen 87
2. Ähnlichkeit der Dreiecke 92
3. Anwendungen der Ähnlichkeit der Dreiecke 93
4. Ähnlichkeit der Vielecke 95
5. Umfangs- und Flächenverhältnisse ähnlicher Figuren 97
XII. Anwendung der Algebra auf die Geometrie 98

2. Theil.

Die Stereometrie.

I. Gerade Linien und Ebenen im Raume 104
1. Hauptlagen von Geraden und Ebenen 104
2. Lage der Geraden gegen eine Ebene. 105
3. Lage der Ebenen gegeneinander. 108
4. Von den orthogonalen Projectionen 110
a) Projectionen auf eine Ebene 110
b) Projectionen auf zwei Ebenen 113
5. Körperecken 118
II. Körper 119
Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Körper 119
1. Regelmäßige Körper 119
2. Das Prisma 121
3. Die Pyramide 125
4. Der Cylinder 129
5. Der Kegel 131
6. Die Kugel 135
III. Ausmessung der Körper 138
1. Das Prisma 139
2. Die Pyramide 143
3. Der Cylinder. 148
4. Der Kegel 150
5. Die Kugel 153
6. Volumen und Gewicht der Körper 155

ERSTER THEIL.

Geometrische Formenlehre und Planimetrie.

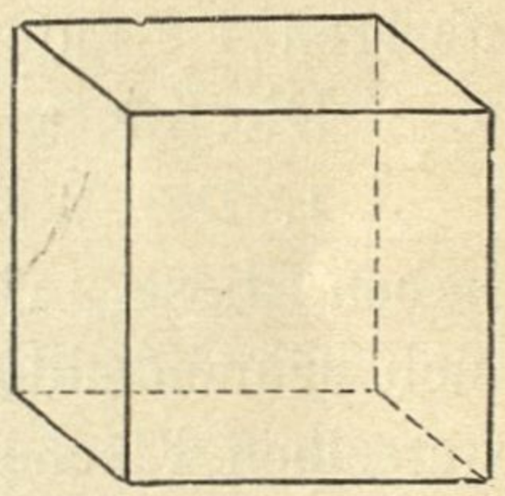
I. Die einfachsten Körperformen und die wichtigsten ebenen geometrischen Gebilde.

Der Würfel.

Der Würfel wird auf einem Tische so aufgestellt, dass eine Fläche den Schülern zugewendet ist.

§. 1. Der Würfel (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Der Würfel ist ein Körper.

Fig. 1.



Der Würfel ist nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt: von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben. Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge, die von vorne nach hinten Breite und die von unten nach oben Höhe.

Ein Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe.

§. 2. Der Würfel wird von sechs Flächen begrenzt. Diese sind: die obere, untere, vordere, hintere, rechte und linke Fläche. Da der Würfel von sechs Flächen begrenzt wird, heißt er auch Sechsflächner oder Hexaeder.

Alle Flächen des Würfels sind ebene Flächen.

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Hauptrichtungen ausgedehnt. Die untere Fläche von rechts nach links und von vorne nach hinten, die vordere Fläche von rechts nach links und von unten nach oben u. s. w.

Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite (Höhe).

Die untere Fläche, auf welcher der Würfel steht, sowie auch die obere Fläche, heißen Grundflächen; die übrigen vier Flächen werden Seitenflächen genannt.

Die Flächen eines Würfels zeigen gegeneinander eine zweifache Lage.

1. Die beiden Grundflächen treffen nie zusammen, soweit man sie auch in ihren Richtungen erweitert, sie heißen parallel; von den

Seitenflächen sind die vordere und hintere, ebenso die rechte und linke zueinander parallel. Am Würfel gibt es also drei Paare paralleler Flächen.

2. Jede Seitenfläche trifft mit jeder der Grundflächen zusammen, sie schneiden einander. Dasselbe ist bei zwei benachbarten Seitenflächen der Fall. Am Würfel stehen je zwei sich schneidende Flächen senkrecht (normal) aufeinander.

Alle Grenzflächen des Würfels zusammen bilden dessen Oberfläche.

§. 3. Jede Fläche am Würfel wird von vier Kantenlinien oder Kanten begrenzt. Eine Kantenlinie entsteht da, wo zwei Flächen zusammenstoßen. Am Würfel kommen im ganzen 12 Kanten vor.

Alle Kanten des Würfels sind gerade Linien.

Jede Kante des Würfels ist nur nach einer Richtung ausgedehnt; z. B. die vordere obere von rechts nach links.

Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge.

Die 8 Kanten an den Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen 4 Kanten heißen Seitenkanten.

Die Kanten des Würfels haben gegeneinander eine dreifache Lage.

1. Der Würfel hat Kanten, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, diese schneiden einander in diesem Punkt. Die am Würfel sich schneidenden Kanten stehen aufeinander senkrecht und liegen in derselben Fläche.

2. Es gibt Kanten, welche dieselbe Richtung besitzen, sie treffen nicht zusammen, so weit man sie auch verlängert. Sie heißen parallel. Am Würfel kommen 3 Gruppen von je 4 parallelen Kanten vor; je zwei derselben liegen in derselben Fläche.

3. Der Würfel besitzt auch Kanten, die weder parallel sind, noch sich schneiden, auch wenn sie beliebig verlängert werden; z. B. die vordere obere und die rechte untere Grundkante; sie liegen nicht in derselben Fläche. Derartige Kanten heißen sich kreuzende.

Die Kanten des Würfels haben gegen die Flächen desselben eine zweifache Lage. Die vordere obere Kante trifft die untere Grundfläche nicht, dies würde auch bei beliebiger Erweiterung beider nicht geschehen. Diese Kante ist mit der unteren Grundfläche parallel. Die Seitenkanten hingegen treffen die untere Grundfläche, sie schneiden dieselbe.

Alle Kanten des Würfels stehen auf den Flächen, welche sie schneiden, senkrecht.

Eine nach allen Seiten begrenzte ebene Fläche heißt eine ebene Figur. Die Grenzlinien einer Figur heißen Seiten derselben. Jede Fläche des Würfels ist eine vierseitige Figur. Da die Seiten gerade

Linien sind, heißt die Figur geradlinig; da alle Seiten gleich sind, heißt sie gleichseitig.

Alle Grenzlinien einer Figur zusammen bilden ihren Umfang. Der Umfang einer Fläche des Würfels ist eine gebrochene Linie.

§. 4. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei Eckpunkten begrenzt. Ein Eckpunkt entsteht da, wo drei Flächen zusammenstoßen. Der Würfel hat 8 Eckpunkte. Der Würfel ist ein eckiger Körper.

Die Eckpunkte des Würfels sind nach keiner Richtung ausgedehnt; sie sind weder lang, noch breit, noch dick.

Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Eine Figur, welche vier Seiten hat, hat auch vier Eckpunkte und heißt deshalb auch ein Viereck. Jede Fläche am Würfel ist ein gleichseitiges Viereck.

§. 5. Zwei Kanten, welche sich treffen, bilden einen Winkel. Jede Fläche des Würfels hat vier Winkel. Am ganzen Würfel sind 24 Winkel.

Die Kanten, welche einen Winkel bilden, heißen die Schenkel und der Eckpunkt, in dem sie zusammentreffen, der Scheitel des Winkels.

Ein Winkel, dessen Schenkel aufeinander senkrecht stehen, heißt ein rechter. Am Würfel kommen lauter rechte Winkel vor.

Jede Fläche am Würfel hat vier rechte Winkel, sie ist rechtwinklig; da diese Winkel gleich sind, ist sie gleichwinklig. Eine Figur, welche gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt regelmäßig. Das regelmäßige Viereck heißt Quadrat. Am Würfel ist also jede Fläche ein Quadrat.

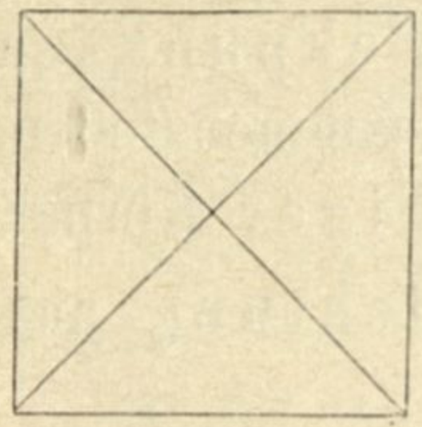
Die Quadrate am Würfel haben gleiche Größe und gleiche Gestalt; infolge dessen lassen sie sich so aufeinander legen, dass sie sich decken; sie sind congruent. Ein Körper welcher von lauter congruenten und regelmäßigen Figuren begrenzt wird, heißt regelmäßig. Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper.

Ein eckiger Körper, dessen obere Grundfläche mit der unteren parallel und congruent ist, heißt ein Prisma. Der Würfel ist also ein Prisma. Da die Seitenkanten des Würfels auf den Grundflächen senkrecht stehen, sagt man: der Würfel ist ein senkrechtes oder gerades Prisma.

§. 6. Verbindet man zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrates durch eine Gerade, so erhält man eine Diagonale desselben. Jedes Quadrat hat zwei Diagonalen, die untereinander gleich, aber größer als eine Seite sind.

Die Diagonalen eines Quadrates bilden mit den Seiten spitze Winkel. (Fig. 2.) Der Durchschnittspunkt halbiert jede derselben. Die vier Eckpunkte eines Quadrates sind daher von dem Durchschnittspunkt der Diagonalen gleich weit entfernt; dieser heißt deshalb der Mittelpunkt des Quadrates.

Fig. 2.



Verbindet man zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Würfels (einer gehört der oberen, der andere der unteren Grundfläche an) durch eine Gerade, so erhält man eine Diagonale des Würfels. Jeder Würfel hat vier Paare gegenüberliegender Eckpunkte, mithin auch vier Diagonalen. Alle schneiden einander in demselben Punkt und werden durch ihn halbiert.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen eines Würfels durch eine Gerade, so erhält man eine Achse des Würfels. Der Würfel besitzt drei gleich lange aufeinander senkrecht stehende Achsen; sie schneiden einander in dem Durchschnittspunkt der Diagonalen und werden durch denselben halbiert. Dieser Punkt heißt daher der Mittelpunkt des Würfels.

§. 7. Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilothes d. i. eines frei hängenden durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt lothrecht oder vertical. Eine Gerade, welche die Richtung eines auf einem ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens hat, heißt horizontal oder wagrecht. Eine Gerade, welche weder horizontal noch lothrecht ist, heißt schräge.

Jede ebene Fläche, welche durch eine lothrechte Gerade gelegt wird, heißt lothrecht oder vertical; hingegen heißt sie horizontal, wenn alle in ihr enthaltenen Geraden horizontal sind. Ist eine ebene Fläche weder horizontal noch vertical, so heißt sie schräge.

Mithin sind die oberen und unteren Kanten des Würfels in der betrachteten Lage horizontal, die Seitenkanten vertical, die Diagonalen der Seitenflächen und die Diagonalen des Würfels schräge. Die Grundflächen sind horizontal, die Seitenflächen vertical.

§. 8. Jede Kante des Würfels ist durch ihre Endpunkte begrenzt. Denkt man sich eine Kante über ihre Endpunkte ohne Ende verlängert, so erhält man eine unbegrenzte Gerade oder einen Strahl. Erweitert man eine Begrenzungsfläche des Würfels über die Kanten hinaus ohne Ende, so erhält man eine unbegrenzte Ebene. Denkt man sich zwei in einer Kante eines Würfels sich schneidende Flächen erweitert, so begrenzen sie theilweise einen Raum, welcher Keil genannt wird. Erweitert man die drei an einer Ecke eines Würfels zusammen-

stoßenden Flächen, so heißt der theilweise begrenzte Raum ein Dreikant und zwar ein rechtwinkliges Dreikant, weil die Kanten und Flächen desselben aufeinander senkrecht stehen.

Weder ein Keil noch ein Dreikant ist ein Körper, weil sie den Raum nicht vollständig begrenzen.

Raumgebilde und Raumgrößen.

§. 9. Körper, Flächen, Linien und Punkte nennt man Raumgebilde. Die ersteren drei sind im Raume ausgedehnt und heißen deshalb Raumgrößen. Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist daher keine Raumgröße.

Entstehung der Raumgrößen durch Bewegung.

§. 10. Die Raumgrößen können durch Bewegung erzeugt werden.

1. Bewegt sich ein Punkt im Raume, so dass er stets dieselbe Richtung der Bewegung beibehält, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Gerade. Ein Gerade kann durch zwei Bewegungen eines Punktes erzeugt werden, deren Richtungen entgegengesetzt sind.

2. Bewegt sich eine gerade Linie im Raume in einer bestimmten Richtung, die aber mit der Ausdehnung der Geraden selbst nicht zusammenfällt, so entsteht eine ebene Fläche.

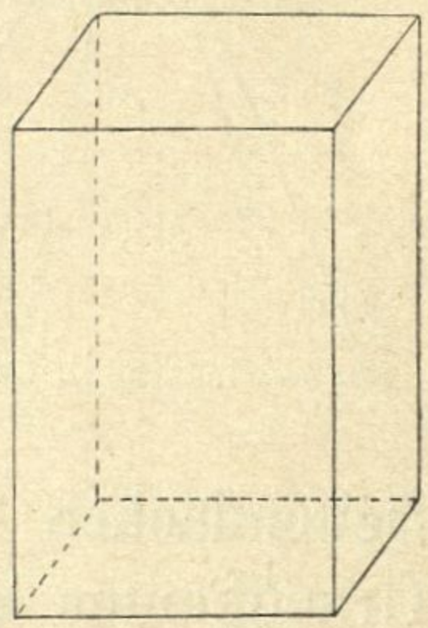
3. Bewegt sich eine ebene Fläche im Raume in einer anderen Richtung, als in der sie selbst ausgedehnt ist, so entsteht ein Körper.

So kann man den Würfel durch Bewegung eines Quadrates entstanden denken.

Das quadratische gerade Prisma.

§. 11. Der Körper in Fig. 3 hat zwei Grundflächen, welche congruente parallele Quadrate sind, und vier congruente Seitenflächen, von welchen je zwei gegenüberliegende parallel sind, je zwei anstoßende aufeinander senkrecht stehen. Alle Seitenflächen stehen auf den Grundflächen senkrecht.

Fig. 3.



Jede der Seitenflächen ist ein Viereck, das nur rechte Winkel enthält; je zwei gegenüberliegende Seiten desselben sind gleich, je zwei anstoßende ungleich. Ein solches Viereck heißt ein Rechteck.

Im Quadrat und im Rechteck sind je zwei gegenüberliegende Seiten parallel; ein solches Viereck wird ein Parallelogramm genannt. Weil das Quadrat und das Rechteck nur rechte Winkel enthalten, heißen sie rechtwinklige Parallelogramme. Das Quadrat ist ein rechtwinklig gleichseitiges, das Reckteck ein rechtwinklig ungleichseitiges Parallelogramm.

Der betrachtete Körper hat 8 gleiche Grundkanten, vier ebenfalls untereinander gleiche Seitenkanten. Die Seitenkanten sind den Grundkanten nicht gleich. Er ist nach §. 5 wie der Würfel ein Prisma; da

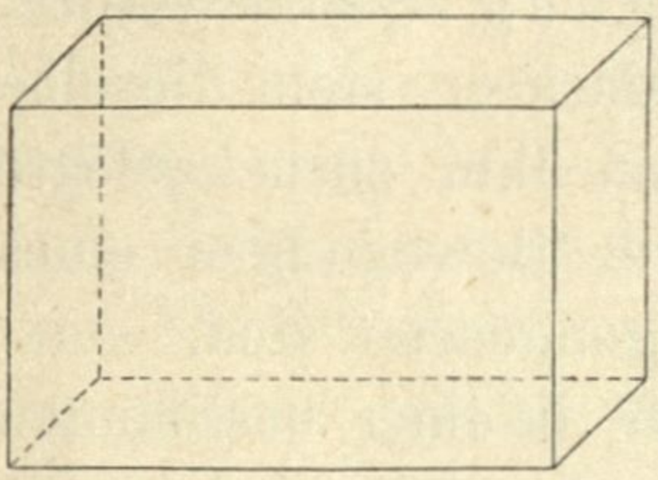
die Grundflächen Quadrate und die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht sind, so heißt er das quadratische gerade Prisma. Da er nicht von durchaus congruenten Flächen begrenzt ist, so ist er kein regelmäßiger Körper.

Welche Kanten des geraden quadratischen Prismas sind *a)* parallel, *b)* horizontal, *c)* vertical?

Das rechtwinklige Parallelepiped.

§. 12. Der in Fig. 4 dargestellte Körper hat zu Grundflächen parallele congruente Rechtecke und zu Seitenflächen rechtwinklige Parallelogramme. Nach § 5 ist derselbe ebenfalls ein gerades Prisma. Er hat acht Grundkanten, von welchen je vier gleich lang sind, und vier gleiche Seitenkanten.

Fig. 4.

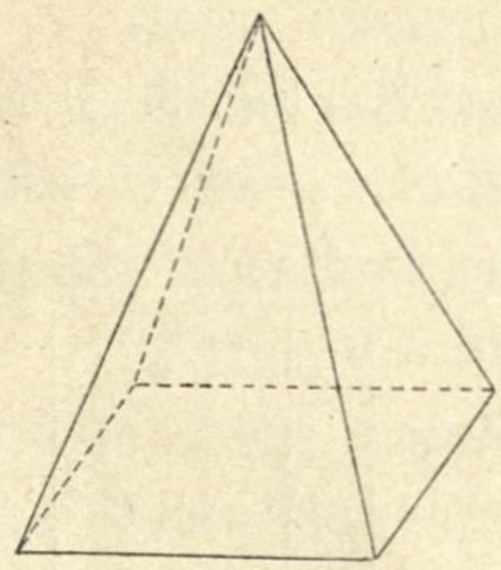


Ein Prisma, in welchem die Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Der betrachtete Körper ist daher wie der Würfel und das gerade quadratische Prisma ein Parallelepiped. Da alle drei Prismen nur rechtwinklige Parallelogramme als Begrenzungsflächen enthalten, so sind sie rechtwinklige Parallelepipede.

Die quadratische gerade Pyramide.

§. 13. Der in Fig. 5 dargestellte Körper ist von 5 Flächen begrenzt; eine derselben ist horizontal, die vier anderen sind schräge und treffen in einem Punkte, der Spitze, zusammen. Die Grundfläche ist ein Quadrat, jede der Seitenflächen hat drei Eckpunkte und auch drei Seiten, und wird daher ein Dreieck genannt. In jedem dieser Dreiecke sind zwei Seiten gleich, ein solches Dreieck heißt ein gleichschenkliges; die gleichen Seiten werden Schenkel genannt, die ungleiche Seite ist die Grundlinie. Alle vier Seitendreiecke sind congruent.

Fig. 5.



Der Körper besitzt 8 Kanten; vier davon heißen Grundkanten, die vier anderen, in welchen je zwei Seitenflächen einander schneiden, heißen Seitenkanten. Sowohl die Grundkanten als auch die Seitenkanten sind untereinander gleich. Der Körper hat 5 Ecken, die an der Grundfläche liegenden sind Dreikante, die Ecke an der Spitze ist ein Vierkant, weil sie vier Kanten besitzt.

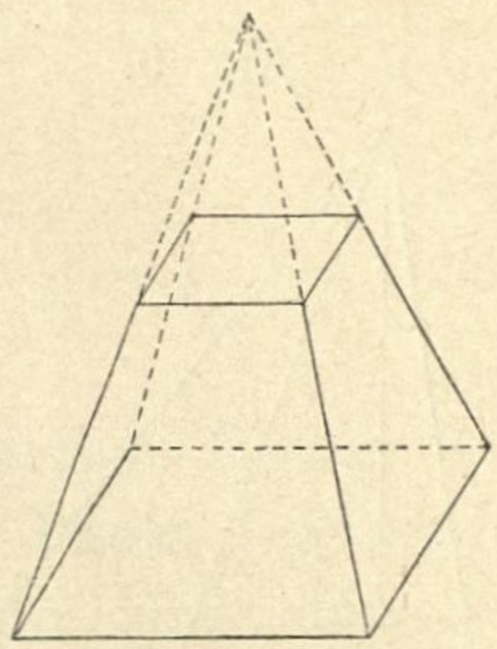
Der betrachtete Körper heißt eine Pyramide; eine Pyramide wird gerade oder senkrecht genannt, wenn die Seitenkanten gleich sind. Da in der vorliegenden Pyramide überdies die Grundfläche ein Quadrat ist, so heißt sie die quadratische gerade Pyramide. Sind die Seitenkanten

den Grundkanten gleich, so ist die Pyramide eine vierseitige gleichkantige Pyramide.

Der quadratische gerade Pyramidenstumpf.

§. 14. Legt man durch den Körper in Fig. 5 eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt er dadurch in zwei Körper; der obere ist wieder eine gerade quadratische Pyramide, der untere heißt eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. (Fig. 6.) Der vorliegende Pyramidenstumpf ist von 6 Flächen begrenzt. Die obere und untere heißen die Grundflächen und sind Quadrate. Sie stimmen in der Größe nicht überein und können daher nicht zur Deckung gebracht werden; sie haben aber gleiche Form. Figuren von verschiedener Größe aber gleicher Form heißen ähnlich.

Fig. 6.



Die Seitenflächen dieses Pyramidenstumpfes sind Vierecke, in welchen zwei Gegenseiten parallel, die beiden andern nicht parallel sind. Ein solches Viereck heißt ein Trapez. Sind die nicht parallelen Seiten gleich, so heißt das Trapez gleichschenklig. Die Seitenflächen des betrachteten Pyramidenstumpfes sind congruente gleichschenklige Trapeze.

Der betrachtete Körper hat acht Grundkanten, von denen je vier einander gleich sind, ferner vier gleiche Seitenkanten.

Welche Lage haben die Grundkanten, welche die Seitenkanten?

Ein aus einer geraden Pyramide entstandener Pyramidenstumpf heißt ebenfalls ein gerader.

Das schiefe Parallelepiped.

§. 15. Der Körper in Fig. 7 hat zu Grundflächen Rechtecke, zu Seitenflächen vier Vierecke, die auf den Grundflächen nicht senkrecht stehen. Je zwei gegenüberliegende Seiten in einem dieser Vierecke sind parallel, daher ist jedes derselben ein Parallelogramm; zwei benachbarte Seiten derselben stehen aber nicht senkrecht aufeinander, sondern schief, die Winkel sind nicht rechte, sondern schiefe. Ein solches Parallelogramm heißt ein schiefwinkliges. (Fig. 8.)

Fig. 7.

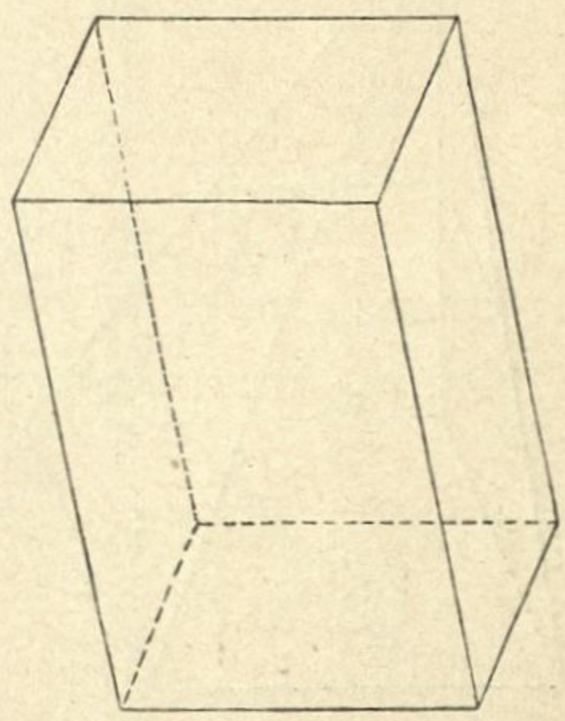
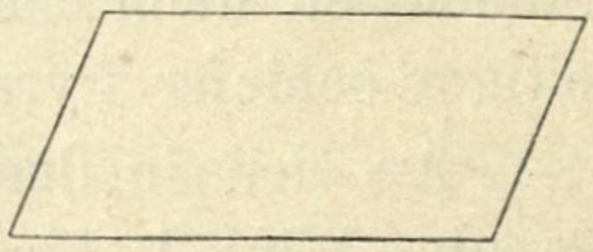


Fig. 8.



Die beiden Grundflächen sind congruent, von den Seitenflächen sind je zwei gegenüberliegende ebenfalls congruent.

Der Körper hat 8 Grundkanten, von welchen je vier einander gleich sind; er besitzt vier gleiche

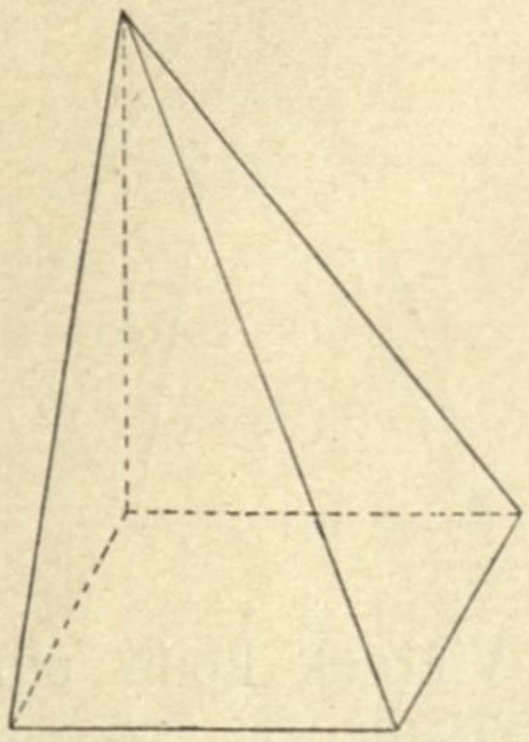
und parallele Seitenkanten. Die Ecken sind Dreikante. Da die Grundflächen dieses Prismas (§ 5) Parallelogramme sind, so ist es ein Parallelepiped, da die Seitenkanten schief zu den Grundflächen sind, ein schiefes Parallelepiped.

Die Grundflächen könnten auch schiefwinklige Parallelogramme sein.

Die schiefe vierseitige Pyramide.

§. 16. Der Körper in Fig. 9 ist eine Pyramide, da er eine Grundfläche (ein Quadrat) und zu Seitenflächen (vier) Dreiecke hat, die in einem Punkte zusammenstoßen. Der betrachtete Körper ist aber von der in Fig. 5 dargestellten Pyramide dadurch verschieden, dass die Seitenkanten verschiedene Länge besitzen. Daher haben auch die Seitenflächen ungleiche Seiten und sind mithin ungleichseitige nicht congruente Dreiecke. Eine solche Pyramide heißt eine schiefe Pyramide; die Grundfläche muss nicht ein Quadrat, sondern kann irgend ein Viereck sein.

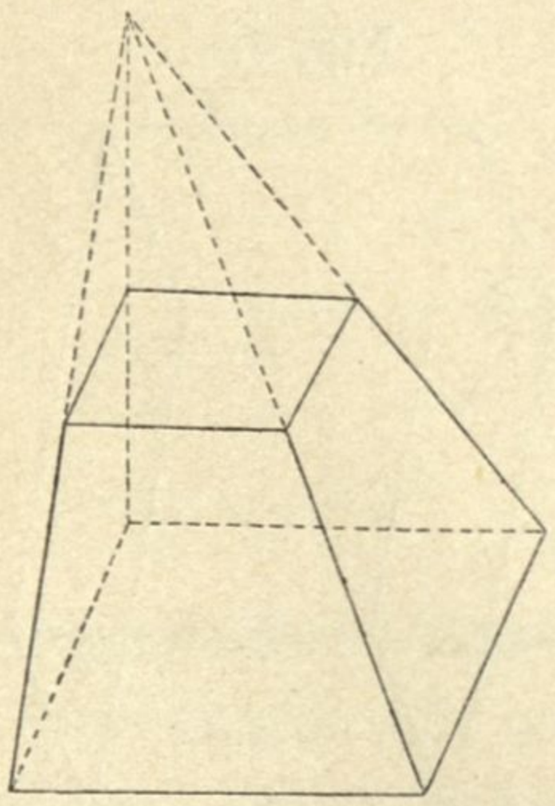
Fig. 9.



Der schiefe vierseitige Pyramidenstumpf.

§. 17. Legt man durch eine schiefe vierseitige Pyramide eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt sie in zwei Körper, der obere ist wieder eine schiefe vierseitige Pyramide, der untere eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. (Fig. 10.)

Fig. 10.



Die Grundflächen sind ähnliche Vierecke; die Seitenflächen sind Vierecke, in welchen zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die beiden andern nicht parallel und ungleich sind. Eine solche Figur heißt ein ungleichschenkliges Trapez. Die vier Seitenflächen lassen sich nicht zur Deckung bringen, sind also nicht congruent.

Der vorliegende Pyramidenstumpf hat acht Grundkanten und vier ungleiche Seitenkanten. An den acht Ecken liegen Dreikante.

Welche Lage haben die Grundkanten, welche die Seitenkanten?

Ein Pyramidenstumpf, welcher aus einer schiefen Pyramide entstanden ist, heißt ebenfalls schief. Der betrachtete Körper ist ein vierseitiger schiefer Pyramidenstumpf.

An den in den §§. 1—17 betrachteten Körpern kamen Punkte, Gerade, Winkel, Dreiecke und Vierecke zur Besprechung.

Der Punkt.

§. 18. Der Punkt hat keine Ausdehnung; er kann daher nicht gesehen, sondern nur an einer bestimmten Stelle gedacht werden. Um ihn zu versinnlichen, zieht man um die Stelle, an welcher er gedacht wird, einen kleinen Ring oder bezeichnet dieselbe mit einem Sternchen und setzt dazu, um ihn benennen zu können, einen Buchstaben oder eine Ziffer. Z. B.

A	a	I	1
o	·	*	+

Die gerade Linie.

§. 19. Bestimmung der Lage einer Geraden.

Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Lagen denken. Ist noch ein zweiter Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Lagen der Geraden nur eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht.

Die Lage einer Geraden ist demnach durch zwei Punkte vollkommen bestimmt.

Eine gerade Linie wird mit Hilfe des Lineals gezeichnet.

Aufgabe:

1. Wie viele verticale Gerade sind durch einen Punkt möglich?
2. Wie viele horizontale Gerade sind durch einen Punkt möglich?

§. 20. Unbegrenzte und begrenzte Gerade.

1. Die Gerade ist an sich unbegrenzt und heißt als solche ein Strahl. Nimmt man in derselben (Fig. 11) einen Punkt A an, so

Fig. 11.

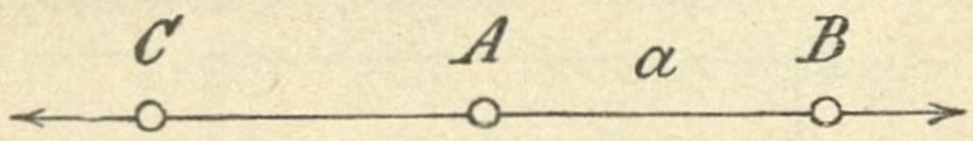
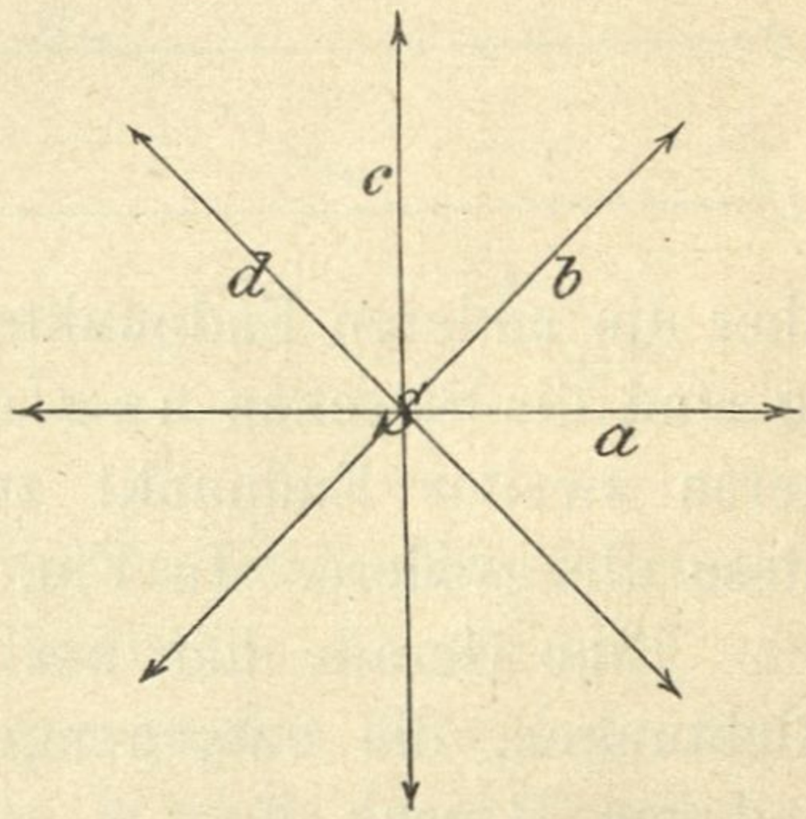


Fig. 12.



wird sie in zwei Theile getheilt, welche von diesem Punkte aus in zwei einander entgegengesetzten Richtungen ausgedehnt sind und Halbstrahlen genannt werden. Ein Halbstrahl ist demnach eine durch einen Punkt (Grenzpunkt) halb begrenzte Gerade. Er wird durch den Grenzpunkt A und einen zweiten in ihm liegenden Punkt B (C) oder mit einem einzigen Buchstaben a bezeichnet.

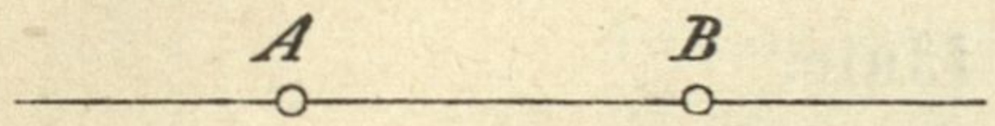
Gehen mehrere in einer Ebene liegende Gerade (Fig. 12) durch denselben Punkt S, so bilden sie ein Strahlenbüschel. Der allen

Geraden gemeinschaftliche Punkt S wird Mittelpunkt oder das Centrum des Strahlenbüschels genannt. Durch den Mittelpunkt wird jeder Strahl in zwei Halbstrahlen zerlegt, welche dieselbe Lage, aber entgegengesetzte Richtung haben.

2. Nimmt man in einer Geraden zwei Punkte an (Fig. 13), so heißt der durch dieselben begrenzte Theil der Geraden eine Strecke.

Eine Strecke ist daher eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade. Die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte, oder auch den einen den Anfangspunkt, den anderen den Endpunkt. Um eine Strecke zu benennen, setzt man an jeden ihrer Endpunkte einen Buchstaben und spricht diese in der Reihenfolge AB oder BA aus, je nachdem man sich die Strecke durch die Bewegung eines Punktes von A nach B oder umgekehrt von B nach A entstanden denkt.

Fig. 13.



Die zwischen zwei Punkten gezogene Gerade (Strecke) ist die kürzeste Verbindungslinie derselben und wird deshalb die Enfernung oder der Abstand (Distanz) der beiden Punkte genannt.

§. 21. Vergleichung zweier Strecken hinsichtlich ihrer Länge.

Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer Länge zu vergleichen, lege man sie so aufeinander, dass sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen dann die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken einander gleich. In Fig. 14 ist $AB = CD$. Wenn

Fig. 14.

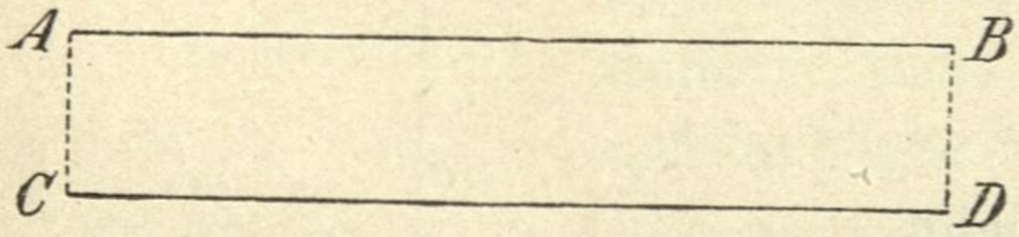
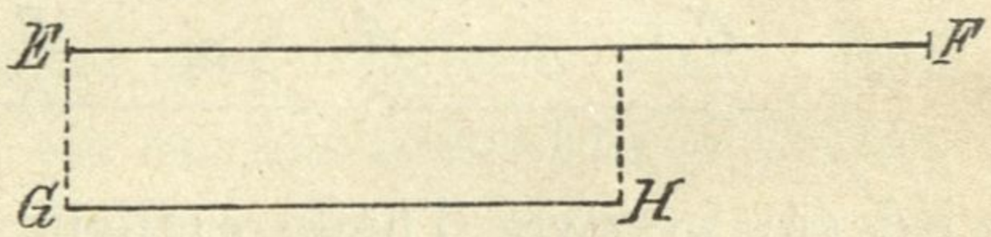


Fig. 15.



aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammenfallen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen die Endpunkte der anderen fällt, diese die größere. In Fig. 15 ist $EF > GH$ oder $GH < EF$.

Eine Gerade hat nur eine Lage, eine Größe, hingegen zwei Richtungen, die entgegengesetzt sind. AB (Fig. 14) von A nach B, und von B nach A.

§. 22. Vergleichung zweier Geraden hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage.

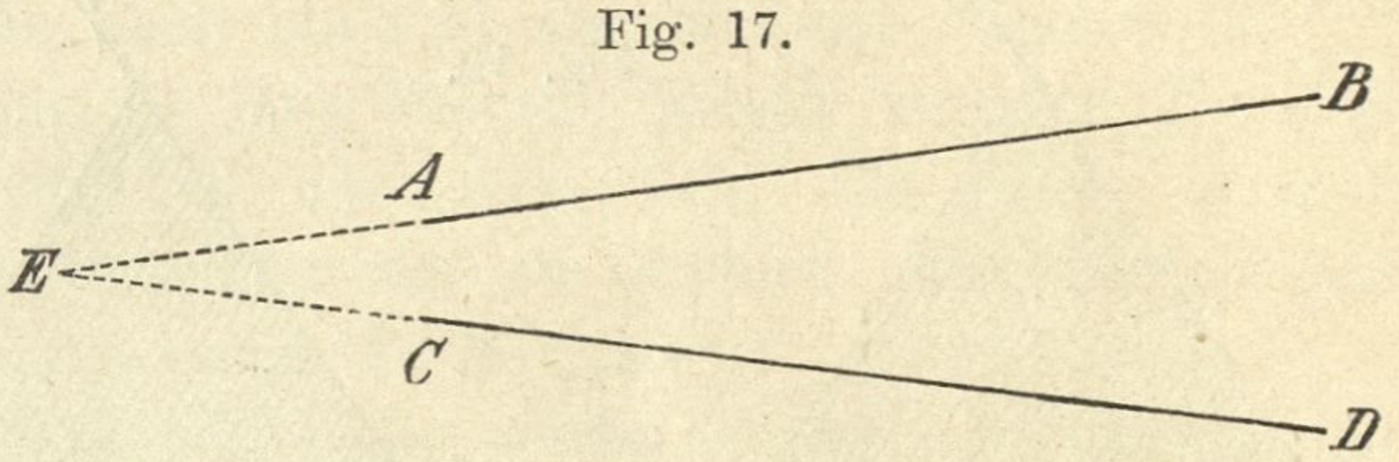
1. Zwei Gerade, welche in derselben Ebene liegen und, wenn sie noch so weit verlängert werden, nie zusammentreffen, heißen gleich-

laufend oder parallel. Dass die Geraden AB und CD (Fig. 16) parallel sind, drückt man dadurch aus, dass man schreibt: $AB \parallel CD$. Der zwischen zwei parallelen Geraden liegende Theil der Ebene heißt ein Parallelstreifen.

Fig. 16.

2. Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen und, hinreichend verlängert, zusammentreffen, heißen ungleichlaufend oder nicht parallel, wie AB und CD. (Fig. 17.)

Fig. 17.



Zwei nicht parallele Gerade heißen in der Richtung nach dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte hin convergierend und nach der entgegengesetzten Richtung divergierend.

Aufgaben:

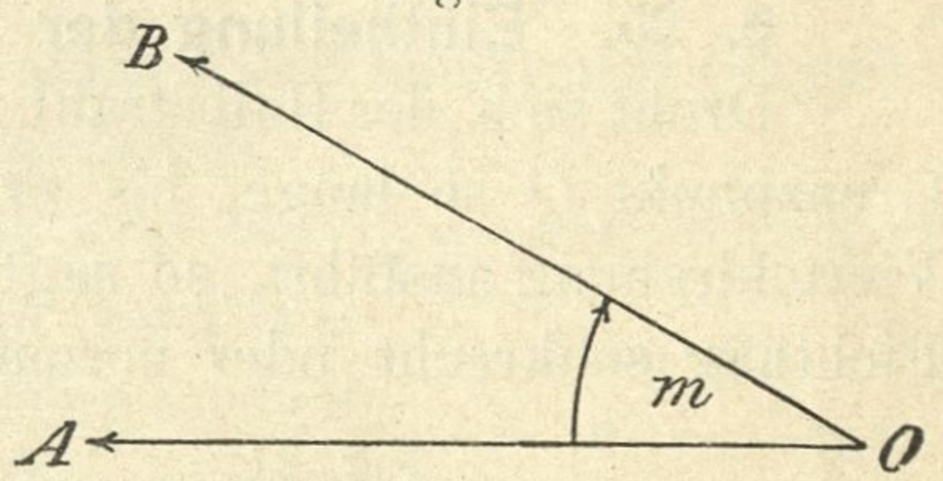
1. Welche Lage gegeneinander haben die Geraden, welche von den Punkten eines frei fallenden Körpers beschrieben werden?
2. Welche Lage gegeneinander haben die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen?

Der Winkel.

§. 23. Entstehung und Bezeichnung eines Winkels.

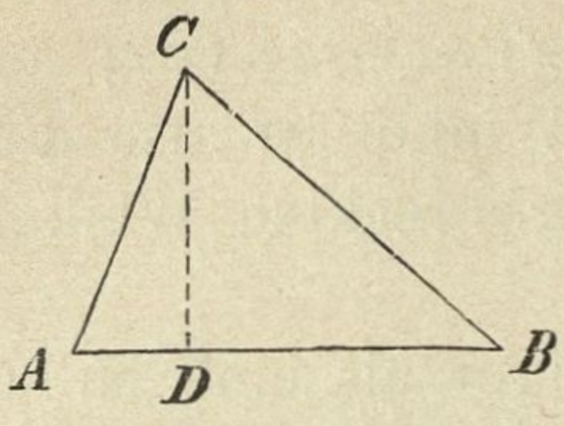
Dreht man den Halbstrahl OA um O (Fig. 18) in der Richtung des Pfeiles in die Lage OB, so wird der von ihm beschriebene Theil der Ebene ein Winkel genannt. Die Halbstrahlen, welche einen Winkel bilden, nennt man die Schenkel, ihren Schnittpunkt den Scheitel des Winkels.

Fig. 18.



Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen Buchstaben am Scheitel oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben. Im letzteren Falle steht ein Buchstabe am Scheitel, und die zwei anderen an beliebigen Punkten der beiden Schenkel; diese Buchstaben werden bei der Benennung eines Winkels in einer solchen Ordnung gelesen, dass der am Scheitel stehende die Mitte einnimmt. In dem Winkel (Fig. 18) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel, und der Winkel heißt: Winkel O, oder Winkel m, oder Winkel AOB, oder Winkel BOA.

Fig. 23.



Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, wird die Spitze oder der Scheitel und die Senkrechte, die vom Scheitel auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes genannt. Sie gibt den Abstand des Scheitels von der Grundlinie an.

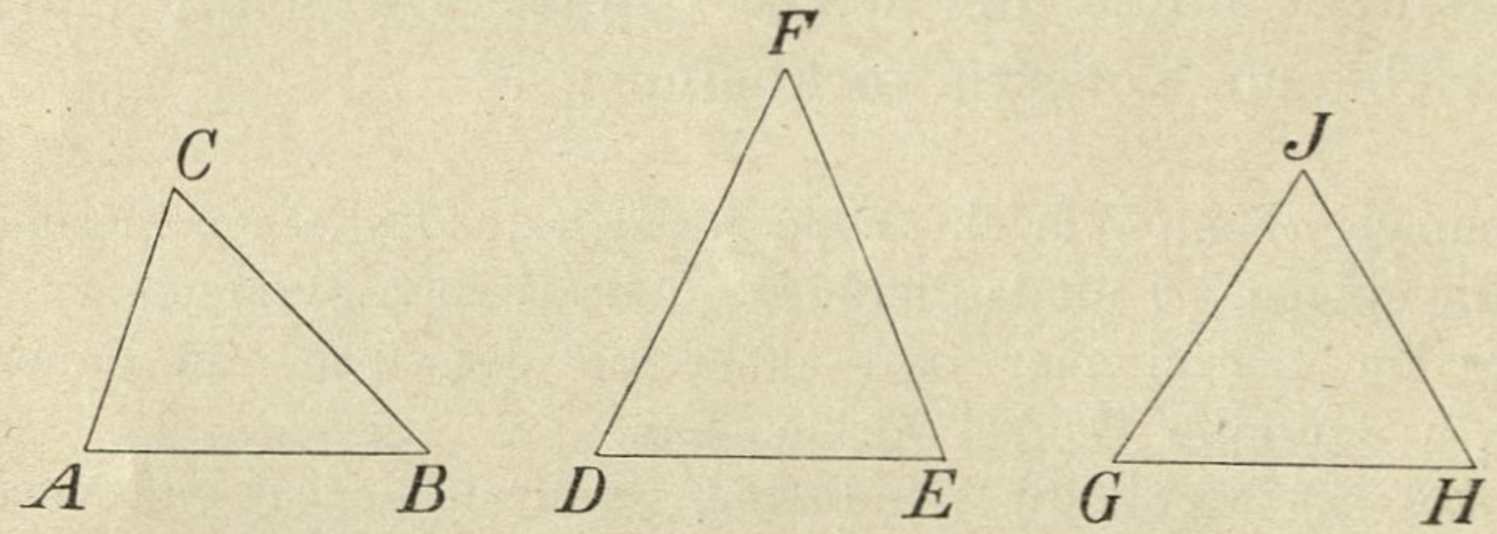
Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 23) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und, wenn $CD \perp AB$ ist, CD die Höhe.

Die Summe der Seiten eines Dreieckes heißt der Umfang desselben.

§. 27. Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.

In Beziehung auf die Länge der Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke. (Fig. 24.)

Fig. 24.



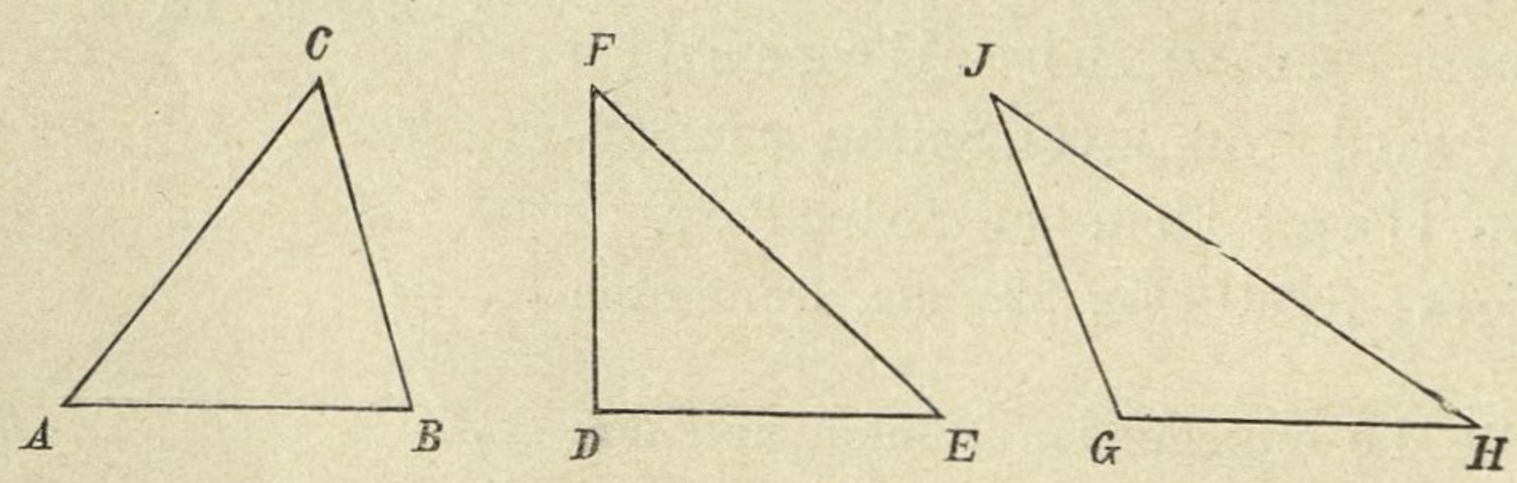
Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn in demselben keine Seite einer andern gleich ist, wie ABC; gleichschenklig, wenn zwei Seiten einander gleich sind, wie DEF; und gleichseitig wenn alle drei Seiten gleich sind, wie GHJ.

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie und den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt den Scheitel des Dreieckes.

§. 28. Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

Nach der Größe der Winkel unterscheidet man spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. (Fig. 25.)

Fig. 25.



Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat, wie ABC: rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat, wie FDE; und stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat, wie JGH.

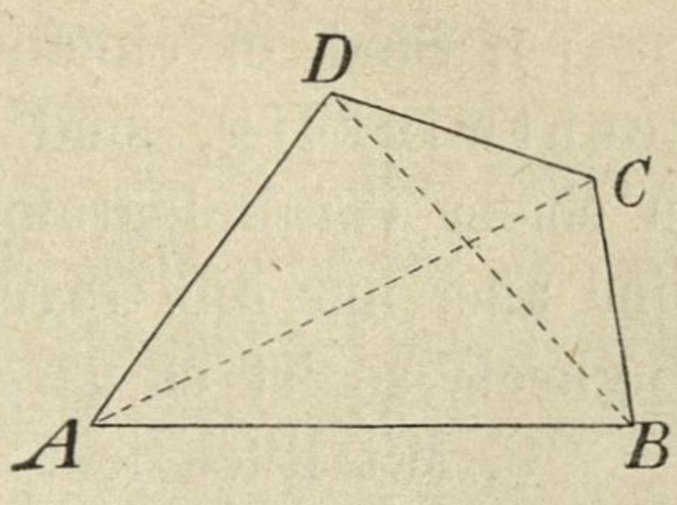
Im rechtwinkligen Dreiecke nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse, die beiden andern Seiten Katheten.

Das Viereck.

§. 29. Erklärungen.

1. Eine von vier Strecken begrenzte ebe ne Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 26.



Ein Viereck hat vier Seiten, vier Winkel und vier Eckpunkte.

Die Strecke, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale.

Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

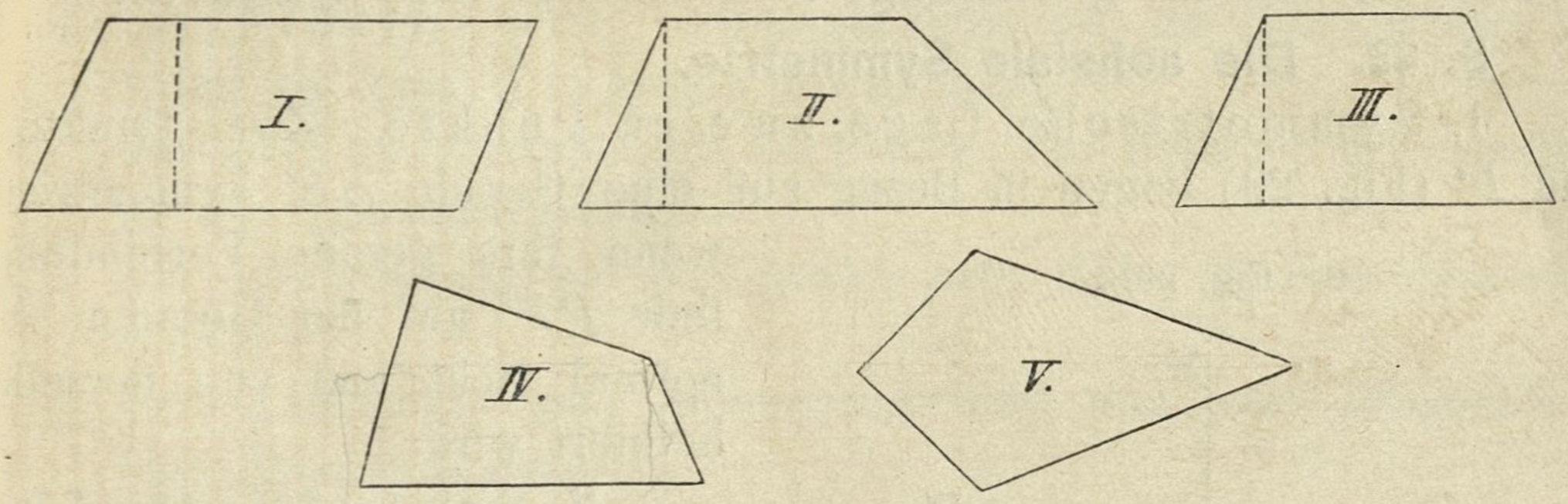
Nenne in dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 26) alle vier Seiten und alle vier Winkel! Nenne die Diagonalen!

Die Summe der Seiten eines Viereckes heißt der Umfang desselben.

§. 30. Eintheilung der Vierecke nach der Lage der Seiten.

Nach der Lage der Seiten unterscheidet man drei Arten von Vierecken: Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Ein Parallelogramm (I. in Fig. 27) ist ein Viereck, in welchem beide Seitenpaare parallel sind.

In einem Parallelogramm kann man irgend eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, welche auf die Grundlinie von der gegenüberliegenden Seite gezogen wird, ist dann die Höhe.

Ein Trapez (II. in Fig. 27) ist ein Viereck, in welchem nur ein Paar von Seiten parallel ist. Die nicht parallelen Seiten heißen Schenkel. Im Trapeze wird nur eine der beiden Parallelseiten als Grundlinie angenommen, und die Höhe ist dann die Senkrechte, die von der andern Parallelseite auf sie gefällt wird. Eine besondere Art des Trapezes ist das gleichschenklige Trapez (III. in Fig. 27) in welchem die nicht parallelen Seiten einander gleich sind.

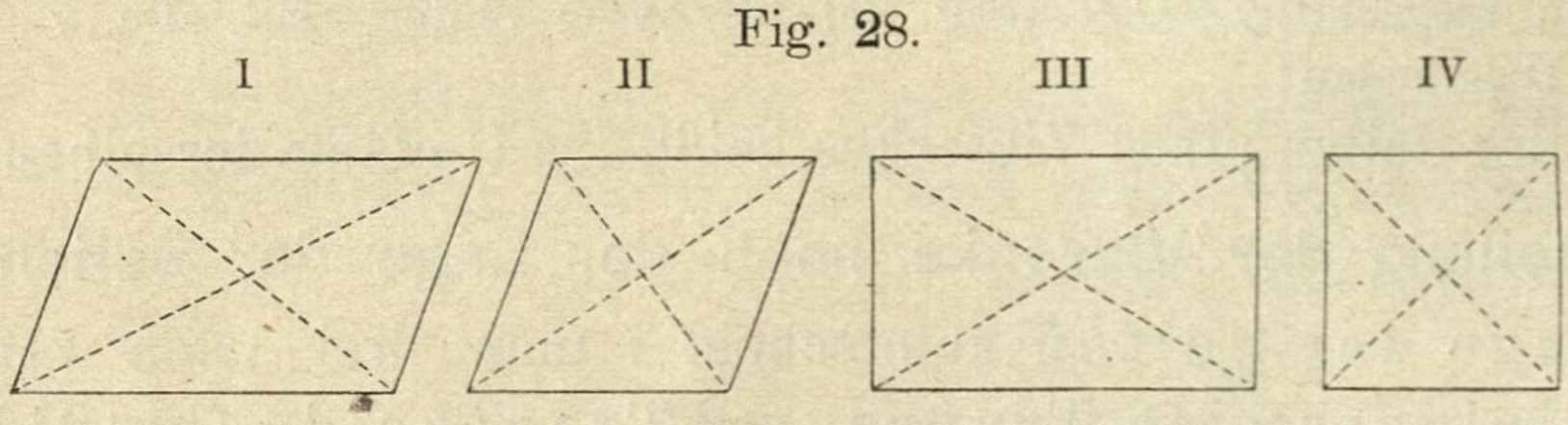
Ein Trapezoid (IV. in Fig. 27) ist ein Viereck, in welchem kein Paar von Seiten parallel ist. Eine besondere Art des Trapezoides ist das Deltoid (V. in Fig. 27), in welchem zwei Paare gleicher anstoßender Seiten vorkommen.

§. 31. Eintheilung der Parallelogramme nach der Größe der Seiten und Winkel.

1. Sind in einem Parallelogramm alle Winkel rechte, so heißt es rechtwinklig, sind sie schief, so heißt es schiefwinklig. Sind in einem Parallelogramm alle Seiten gleich, so ist es gleichseitig, sind aber nur die Gegenseiten gleich, die an derselben Ecke liegenden ungleich, so ist es ungleichseitig.

2. Mit Rücksicht auf die Größe der Seiten und der Winkel unterscheidet man vier Arten von Parallelogrammen (Fig. 28). Das

Fig. 28.

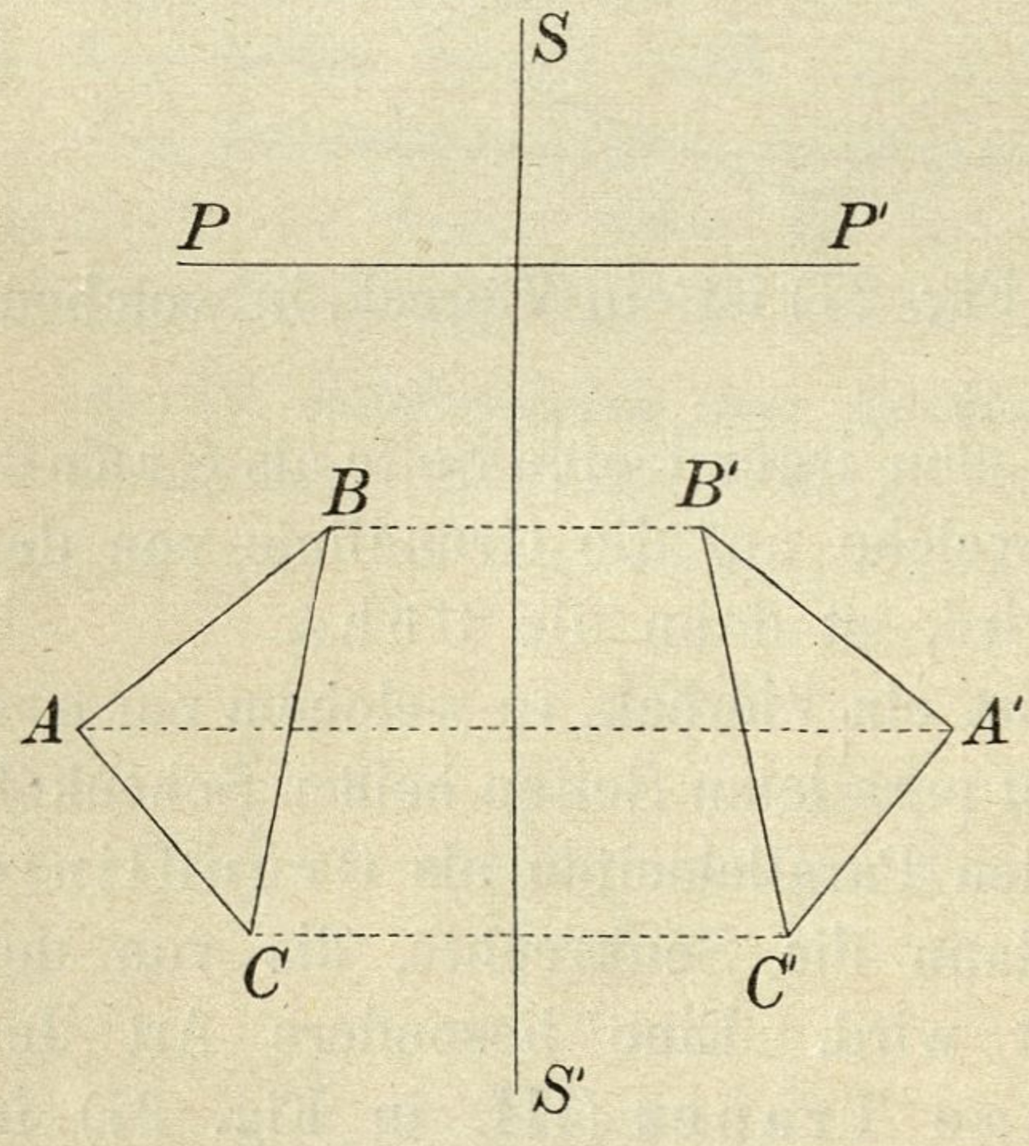


ungleichseitige schiefwinklige Parallelogramm *(I)* heißt Rhomboid, das gleichseitige schiefwinklige *(II)* Rhombus, das ungleichseitige rechtwinklige *(III)* Rechteck und das gleichseitige rechtwinklige *(IV)* Quadrat.

§. 32. Die achsiale Symmetrie.

1. Symmetrische Lage zweier Punkte. Zwei Punkte P und P' (Fig. 29) liegen in Bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch, wenn ihre gerade Verbindungslinie PP' auf der Geraden SS' normal steht und von derselben halbiert wird.

Fig. 29.



2. Symmetrische Lage zweier Gebilde (Figuren). Zwei Gebilde (Figuren) ABC und $A'B'C'$ (Fig. 29) sind in Bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern entspricht.

Die Gerade SS' heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale und die beiden Punkte oder Gebilde, welche in Bezug auf SS' symmetrisch liegen, einander symmetrisch zugeordnet oder kurz zugeordnet.

Zwei Gebilde, welche einander symmetrisch zugeordnet sind, können durch Drehung um die Symmetrale zur Deckung gebracht werden, sie sind daher congruent.

Aufgaben:

1. Es ist die Symmetrale und ein Punkt gegeben; der zugeordnete Punkt zu finden.
2. Es ist die Symmetrale und *a)* eine Strecke, *b)* ein Winkel, *c)* ein Dreieck gegeben und das zugeordnete Gebilde zu zeichnen.

3. Symmetrische Figuren (Gebilde). Eine Figur (Gebilde) heißt symmetrisch, wenn sich dieselbe durch eine Gerade in zwei symmetrisch liegende Hälften theilen lässt. Nach der Anzahl der Geraden, durch welche eine Figur (Gebilde) in zwei symmetrische Hälften getheilt werden kann, heißt dieselbe ein-, zwei-, drei-, mehrachsig symmetrisch.

Von den bisher betrachteten Gebilden sind die folgenden symmetrisch:

a) die unbegrenzte Gerade: jede ihrer Normalen kann als Symmetrale derselben angesehen werden;

b) die Strecke. Die Normale in ihrem Halbierungspunkte ist ihre Symmetrale; man nennt sie kurz Streckensymmetrale;

c) der Parallelstreifen. Die Parallele in der Mitte desselben und jede Normale zu seinen Begrenzungsgeraden sind Symmetralen;

d) der Winkel. Seine Halbierungslinie ist die Symmetrale; man nennt sie kurz Winkelsymmetrale;

e)* das gleichschenklige Dreieck; die Höhe auf die Grundlinie ist die Symmetrieachse;

f) das gleichseitige Dreieck; jede Höhe ist eine Symmetrieachse;

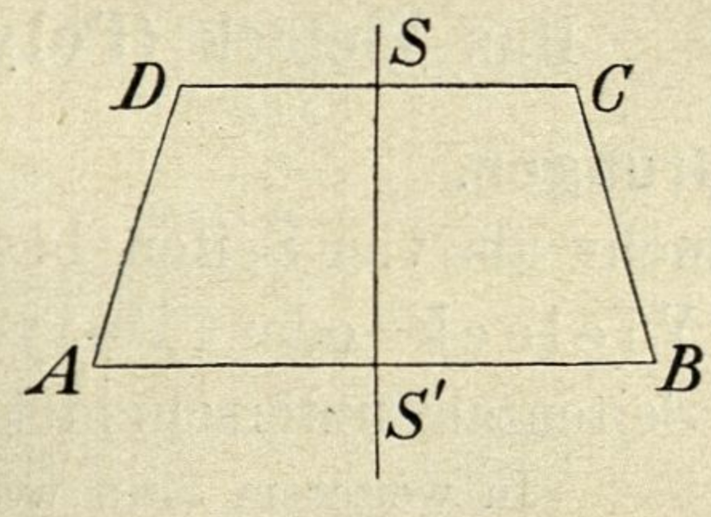
g) das Quadrat; jede Seitensymmetrale und jede Diagonale ist eine Symmetrieachse;

h) das Rechteck; jede Seitensymmetrale ist eine Symmetrieachse;

i) der Rhombus; jede Diagonale ist eine Symmetrieachse;

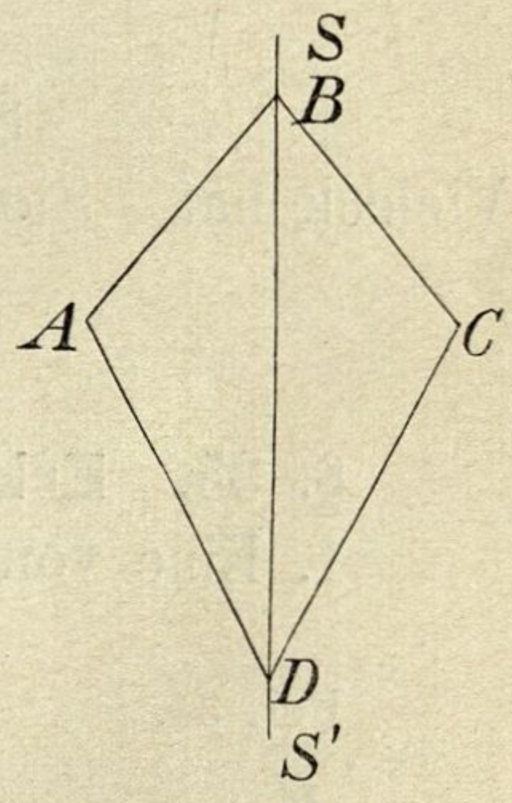
k) das gleichschenklige Trapez; die Symmetrale der beiden Parallelseiten ist die Symmetrieachse (Fig. 30);

Fig. 30.



l) das Deltoid; die Diagonale zwischen den Eckpunkten, an denen die gleichen Seiten liegen, ist die Symmetrieachse (Fig. 31).

Fig. 31.

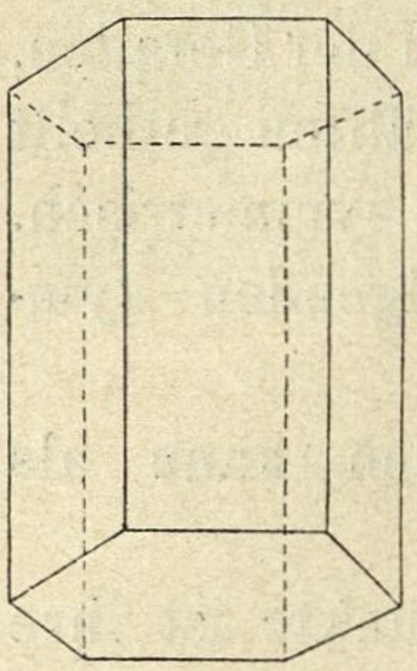


*) Der Schüler schneide diese und die folgenden Figuren aus Papier aus und überzeuge sich durch Drehung um die Symmetralen von der Richtigkeit der ausgesprochenen Sätze.

Das regelmäßige sechsseitige Prisma.

§. 33. Der in Fig. 32 dargestellte Körper ist ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma. Die Grundflächen sind regelmäßige Sechsecke, d. h. geradlinig begrenzte Figuren mit sechs gleichen Seiten und eben so vielen gleichen Winkeln. Sie sind parallel und congruent. Der Körper hat 12 Grundkanten und 6 Seitenkanten, welche auf den Grundflächen und den Grundkanten senkrecht stehen. Die Seitenflächen sind sechs Rechtecke.

Fig. 32.



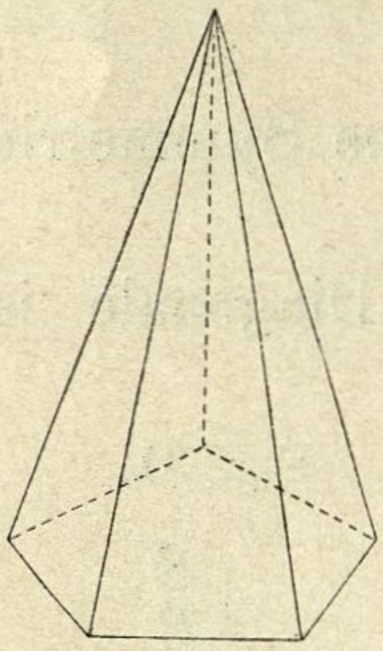
Ein gerades Prisma heißt regelmäßig, wenn die Grundflächen regelmäßige Vielecke sind; es ist aber kein regelmäßiger Körper. (§ 5.)

Beschreibe ein regelmäßiges *a)* dreiseitiges, *b)* fünfseitiges Prisma.

Die regelmäßige fünfseitige Pyramide.

§. 34. Der in Fig. 33 dargestellte Körper ist eine regelmäßige fünfseitige Pyramide. Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Fünfeck, die Seitenkanten sind einander gleich und treffen in einem Punkt zusammen. Die Seitenflächen sind congruente gleichschenklige Dreiecke. Der Körper hat fünf Grundkanten und fünf Seitenkanten. Da die Seitenkanten dieser Pyramide gleich sind, so ist sie zugleich eine gerade. Eine Seitenkante kann auch dieselbe Länge haben wie eine Grundkante, in diesem Falle heißt die Pyramide gleichkantig.

Fig. 33.



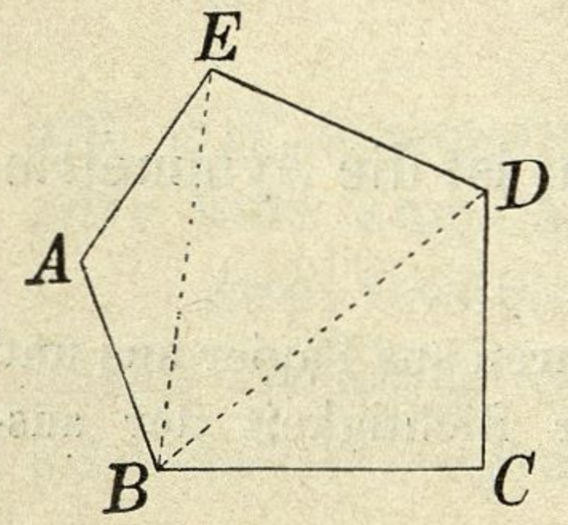
Eine Pyramide heißt regelmäßig, wenn sie gleiche Seitenkanten und zur Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck hat. Sie ist aber kein regelmäßiger Körper.

Das Vieleck (Polygon).

§. 35. Erklärungen.

1. Eine von mehr als vier Seiten begrenzte ebene Figur heißt ein Vieleck oder Polygon. (Fig. 34.) Nach der Seitenzahl unterscheidet man Fünfecke, Sechsecke etc.

Fig. 34.



In weiterem Sinn werden auch die Dreiecke und Vierecke Polygone genannt.

Jedes Vieleck hat so viele Eckpunkte und so viele Winkel, als es Seiten hat.

Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte eines Vieleckes verbindet, heißt Diagonale.

§. 36. Eintheilung der Vielecke nach der Größe der Seiten und Winkel.

Ein Vieleck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind; sonst ungleichseitig. Ein Vieleck heißt gleichwinklig, wenn alle Winkel einander gleich sind; sonst ungleichwinklig. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten und alle Winkel gleich sind; sonst unregelmäßig. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

§. 37. Achsiale Symmetrie eines regelmäßigen Vieleckes.

Jede Symmetrale *a*) einer Seite, *b*) eines Winkels ist auch eine Symmetrale des ganzes Polygones. (Nachweis durch Deckung.) Hat ein Polygon eine gerade Anzahl von Seiten, so fallen die Symmetralen

Fig. 35 *a*.

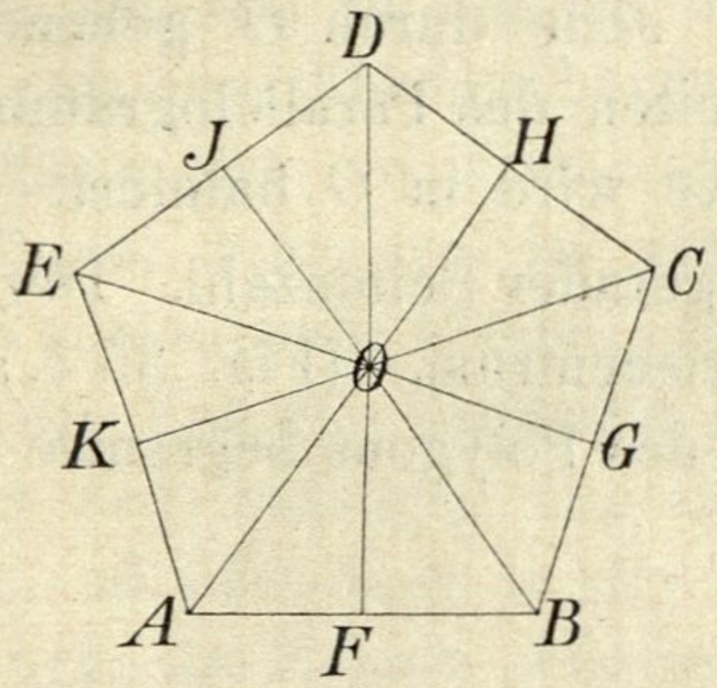
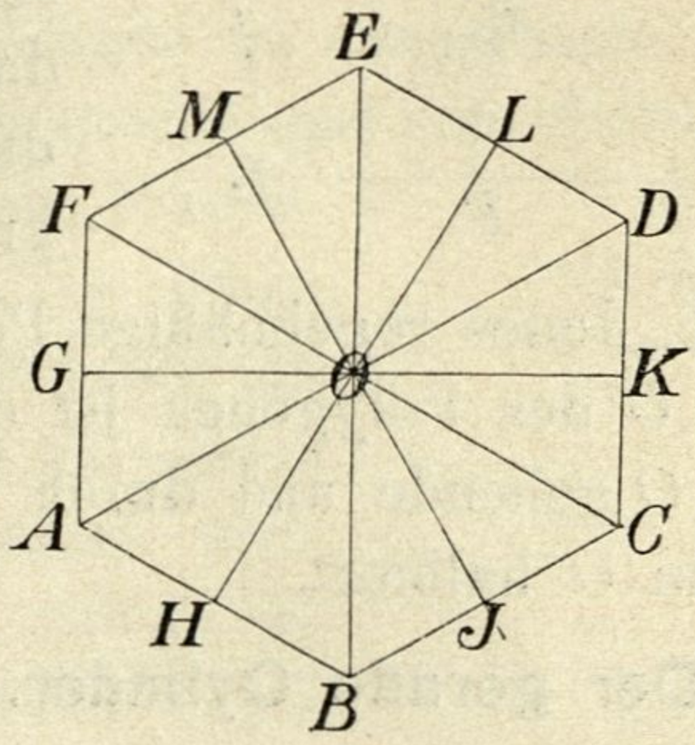


Fig. 35 *b*.



a) je zweier paralleler Seiten, *b*) zweier Gegenwinkel zusammen. Hat ein Polygon eine ungerade Seitenzahl, so fällt jede Seitensymmetrale mit einer Winkelsymmetrale zusammen. Mithin hat jedes regelmäßige Polygon so viele Symmetralen, als es Seiten hat. (Fig. 35 *a* und *b*.)

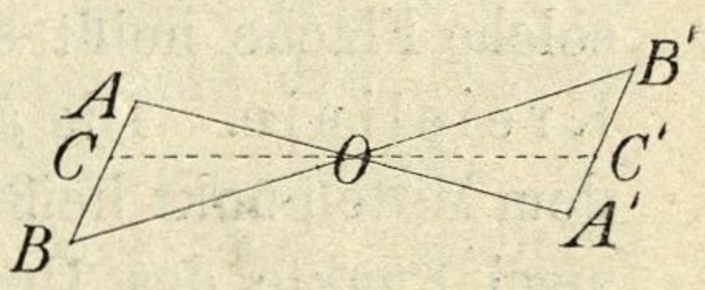
Alle Symmetralen eines regelmäßigen Polygones schneiden einander in demselben Punkt *O*, der *a*) von allen Ecken, *b*) von allen Seiten gleichen Abstand hat. Er heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes.

Die centrische Symmetrie.

§. 38. Zwei Punkte *A* und *A'* (Fig. 36) liegen centrisch bezüglich des Punktes *O*, wenn die Strecke *AA'* durch *O* halbiert wird. Der Punkt *O* heißt das Centrum.

Zwei Gebilde liegen bezüglich des Punktes *O* centrisch, wenn jedem Punkt des einen ein centrisch liegender Punkt des andern entspricht. Die gleichen und parallelen Strecken *AB* und *A'B'* (Fig. 36) liegen bezüglich des Punktes *O* centrisch.

Fig. 36.



Liegen umgekehrt zwei Strecken centrisch, so müssen sie gleich und parallel sein.

Von zwei centrisch liegenden Gebilden lässt sich jedes durch eine in der Zeichnungsebene um das Centrum vorgenommene Drehung von 180° mit dem andern zum Deckung bringen.

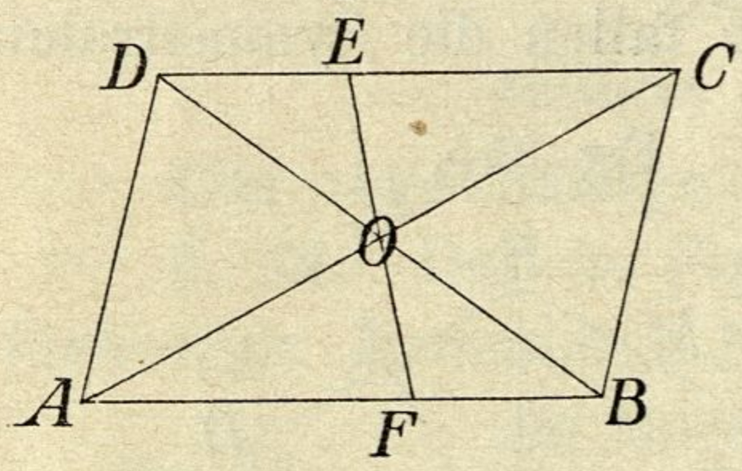
Ein Gebilde heißt centrisch, wenn es einen Punkt hat, in Bezug auf welchen die Punkte des Gebildes paarweise centrisch liegen.

Centrische Gebilde sind:

1. Ein Strahl. Jeder Punkt desselben kann als Centrum angenommen werden.

2. Eine Strecke. Symmetriecentrum ist der Halbierungspunkt.

Fig. 37.



3. Zwei sich halbierende Strecken. Ihr Durchschnittspunkt ist das Centrum.

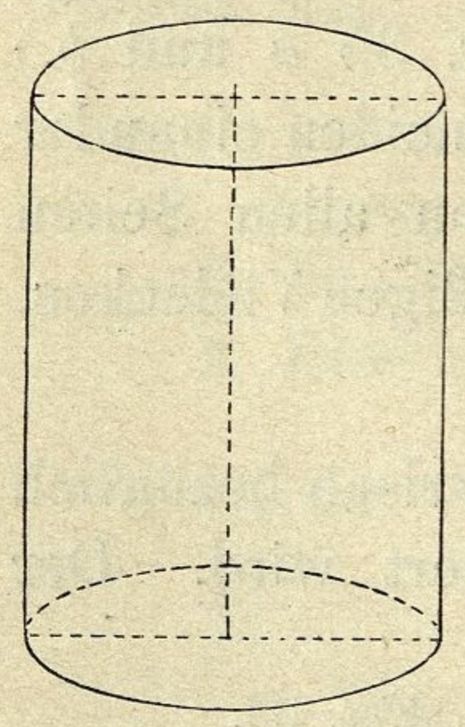
4. Jedes Parallelogramm. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen O (Fig. 37) ist das Centrum. Jede durch O gehende und durch zwei Seiten des Parallelogrammes begrenzte Strecke wird in O halbiert.

5. Jedes regelmäßige Polygon von gerader Seitenzahl. Der Mittelpunkt O des Polygones ist das Symmetriecentrum. (Fig. 35 *b*.) Jede durch O gehende und durch zwei Seiten des Polygons begrenzte Gerade wird in O halbiert.

Der gerade Cylinder.

§. 39. Die Fig. 38 stellt einen geraden Cylinder dar. Dieser wird von drei Flächen begrenzt; zwei derselben, die Grundflächen, sind ebene, parallele und congruente Figuren, die dritte, die Mantelfläche des Cylinders, ist keine ebene, sondern eine gekrümmte Fläche. Weil der Cylinder nicht von lauter ebenen Flächen, sondern auch von einer krummen Fläche begrenzt ist, heißt er ein krummflächiger Körper; die früher betrachteten Körper waren eckige.

Fig. 38.



Die Grundflächen des Cylinders sind von einer krummen Linie begrenzt. In jeder derselben gibt es einen Punkt (Centrum), der von allen Punkten des Umfanges (Peripherie) gleich weit entfernt ist. Eine solche Fläche heißt eine Kreisfläche, die sie begrenzende krumme Linie Kreislinie. Die gerade Verbindungslinie eines Punktes derselben mit dem Mittelpunkt heißt Halbmesser oder Radius. Eine Strecke, welche zwei Punkte des Umfanges verbindet und durch den Mittelpunkt geht,

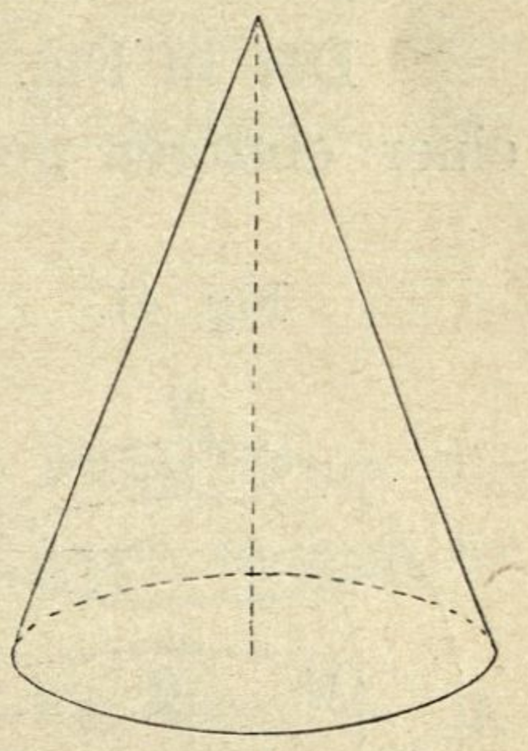
heißt Durchmesser (Diameter). Alle Halbmesser und daher auch alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich. Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei Halbkreise.

Verbindet man die Endpunkte zweier paralleler in derselben Richtung gezogener Radien der beiden Grundflächen durch eine Gerade, so fällt dieselbe in die Mantelfläche des Cylinders; sie heißt eine Seite desselben. Bei dem betrachteten Cylinder steht jede Seite auf den beiden Grundflächen senkrecht, der Cylinder heißt daher ein senkrechter oder gerader Cylinder. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen heißt die Achse des Cylinders. Bei dem geraden Cylinder ist sie auf den beiden Grundflächen normal. Einen geraden Cylinder kann man durch Verschiebung eines horizontalen Kreises in verticaler Richtung oder durch Rotation eines Rechteckes um eine seiner Seiten entstanden denken.

Der gerade Kegel.

§. 40. Der in Fig. 39 dargestellte Körper ist ein gerader Kegel; er ist von zwei Flächen begrenzt, der Grundfläche und dem Mantel. Die Grundfläche ist ein Kreis, also eine ebene Fläche, der Mantel hingegen ist eine krumme, in einen Punkt auslaufende Fläche. Dieser Punkt heißt die Spitze des Kegels. Verbindet man dieselbe mit einem Punkte des Umfanges der Grundfläche durch eine Gerade, so fällt diese in die Mantelfläche und heißt eine Seite des Kegels. Alle Seiten des geraden Kegels stehen gegen die Grundfläche schief und sind gleich lang. Die gerade Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche ist die Achse des Kegels; sie steht beim geraden Kegel auf der Grundfläche senkrecht.

Fig. 39.



Einen geraden Kegel kann man durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten entstanden denken.

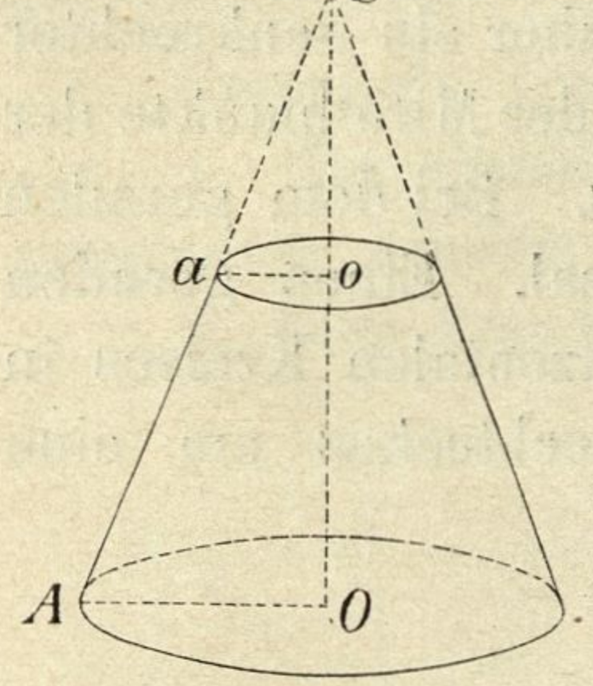
Der gerade Kegelstumpf.

§ 41. Wird ein gerader Kegel (Fig. 40) durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur ein Kreis. Der Kegel zerfällt durch einen solchen Schnitt in zwei Theile, einen zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegenden Theil, welcher ein abgekürzter gerader Kegel oder ein gerader Kegelstumpf heißt, und einen zwischen der Schnittfläche und dem Scheitel liegenden kleineren Kegel, welcher der Ergänzungskegel des Stumpfes genannt wird. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen

ungleichen Kreisen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen Mantelfläche begrenzt.

Die Strecke Oo, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, heißt die Achse; sie steht auf den beiden Kreisflächen senkrecht. Eine Strecke, welche die Endpunkte zweier paralleler in derselben Richtung gezogener Radien der beiden Grundflächen verbindet, fällt in die Mantelfläche des Stumpfes und heißt eine Seite desselben; z. B. Aa.

Fig. 40.

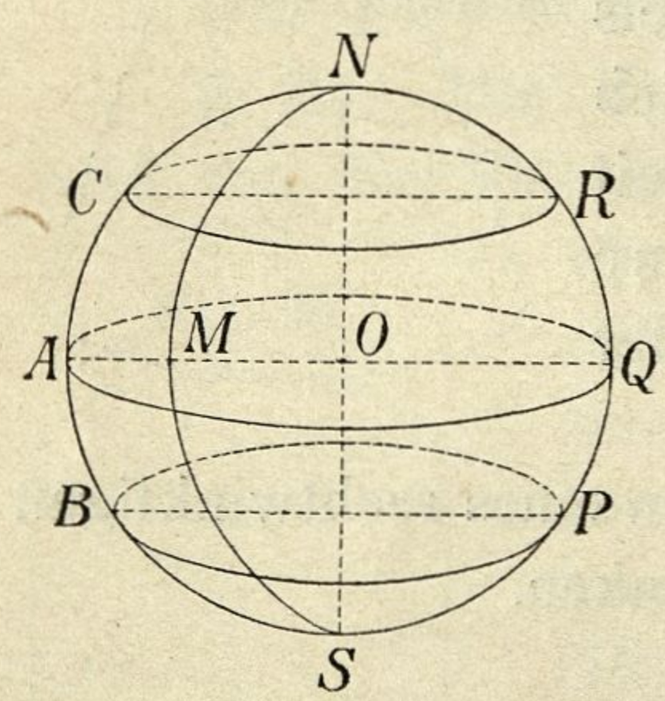


Einen geraden Kegelstumpf kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Trapez $AOoa$, in welchem ein Schenkel Oo auf den beiden parallelen Seiten senkrecht steht, um diese Seite als Achse herumdreht; der andere Schenkel Aa beschreibt dabei die Mantelfläche, die beiden parallelen Seiten AO und ao erzeugen die Grundflächen des geraden Kegelstumpfes. In einem geraden Kegelstumpfe sind alle Seiten gleich.

§. 42. Erklärung und Entstehung einer Kugel.

Der in Fig. 41 dargestellte Körper ist eine Kugel. Sie ist von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt, deren Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkt, dem Mittelpunkt oder Centrum, gleich weit abstehen. Die Strecke zwischen einem Punkt der Oberfläche und dem Centrum heißt Halbmesser oder Radius; eine Strecke, welche zwei Punkte der Oberfläche einer Kugel verbindet und durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser (Diameter). Alle Radien und daher auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

Fig. 41.

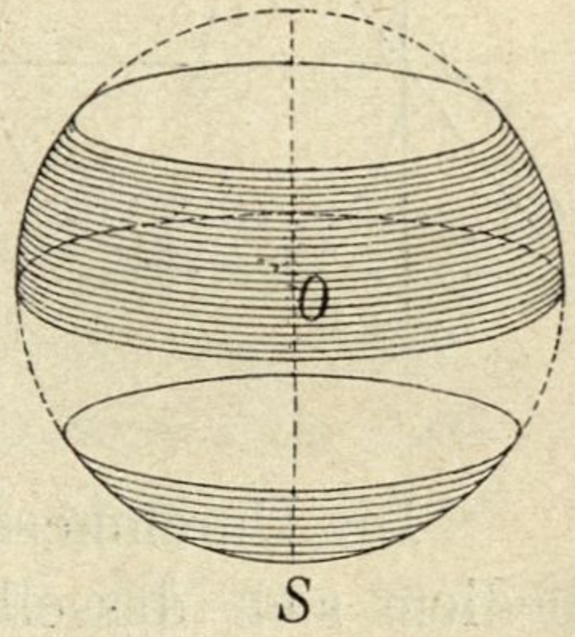


Man kann sich eine Kugel durch eine halbe Umdrehung eines Kreises $NASQ$ um den Durchmesser NS (Fig. 41) entstanden denken; der Durchmesser NS heißt die Achse, seine Endpunkte werden die Pole der Kugel genannt. Die einzelnen Lagen der sich drehenden Kreislinie heißen Meridiane, und die Kreislinien, z. B. CR, welche die Punkte der sich drehenden Kreislinie beschreiben, Parallelkreise. Die Meridiane sind alle einander gleich, die Parallelkreise haben verschiedene Größe. Der größte Parallelkreis ist der Äquator AQ, d. i. derjenige Kreis, welcher von dem Halbierungspunkte A des Halbkreises NAS beschrieben wird.

§ 43. Schnittfiguren an der Kugel.

1. Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Schnittfläche ein Kreis, welcher um so größer ist, je näher am Mittelpunkte der Schnitt gelegt wird. Am größten wird er, wenn die Schnittebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein *größter Kreis* der Kugel. Der Äquator, sowie alle Meridiankreise sind größte Kugelkreise.

Fig. 42.



2. Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so zerfällt der Kugelkörper in zwei Theile, welche man *Kugelabschnitte* nennt. Geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt, so theilt sie den Kugelkörper in zwei symmetrische Kugelabschnitte, welche *Halbkugeln* heißen; für jede nicht durch den Mittelpunkt gehende Schnittebene sind die Kugelabschnitte ungleich. Die gekrümmte Fläche eines Kugelabschnittes heißt eine *Kugelmütze* oder *Calotte*.

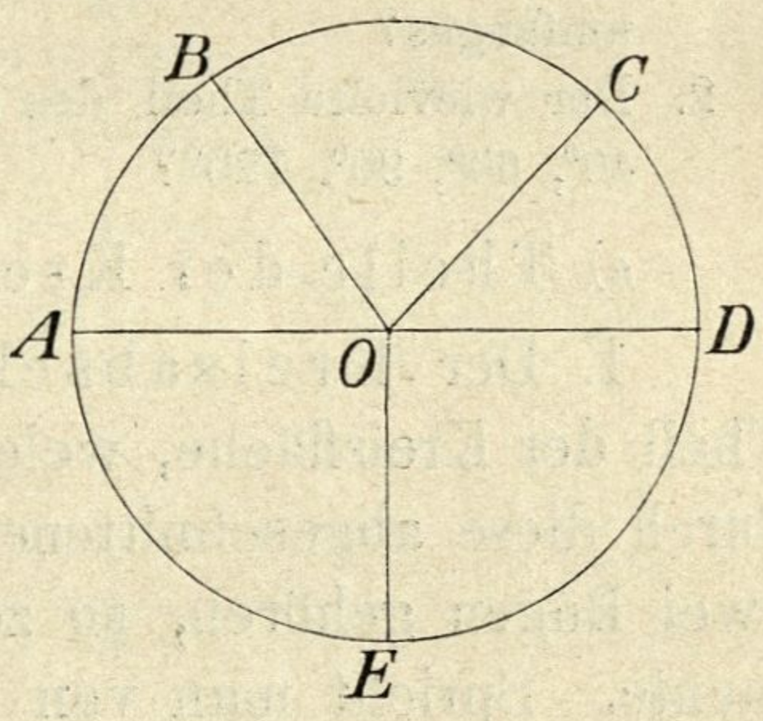
3. Wird eine Kugel durch zwei *parallele Ebenen* geschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Theil des Kugelkörpers eine *Kugelschicht* und der dazu gehörige Theil der Kugelfläche eine *Kugelzone*.

§ 44. Der Kreis.

a) *Entstehung der Kreislinie.*

Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 43) um den Punkt O in der Ebene so lange, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt A eine Linie, deren Punkte von O gleichen Abstand haben, also einen Kreis (§ 39). O ist der Mittelpunkt, AO ein Radius, AD ein Durchmesser. Die von der Kreislinie eingeschlossene Figur heißt Kreisfläche.

Fig. 43.



Der Kreis ist eine centrische und eine achsial-symmetrische Figur. Jeder Durchmesser ist eine Symmetrieachse.

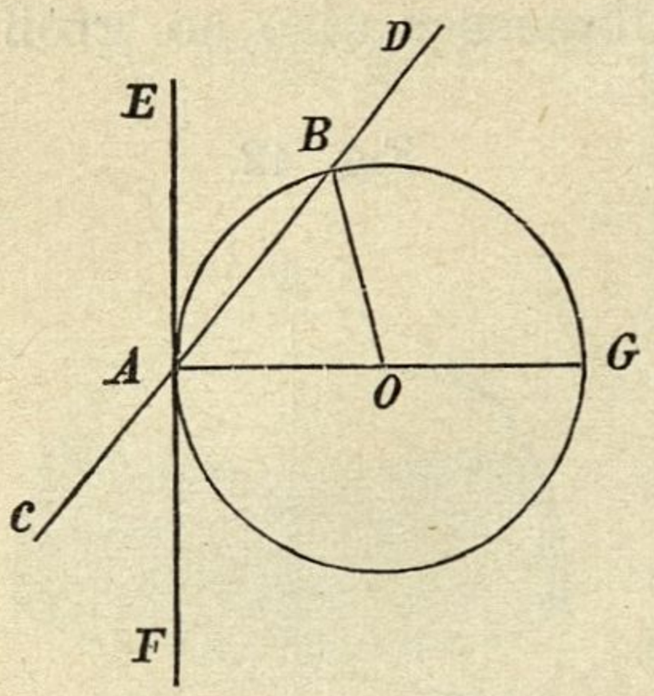
b) *Punkt und Kreis.*

Ein Punkt liegt in der Peripherie, außerhalb oder innerhalb derselben, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkt (Centralabstand) gleich dem Radius, größer oder kleiner als derselbe ist.

c) Die Gerade und der Kreis.

Eine Gerade kann mit einer Kreislinie zwei Punkte oder nur einen Punkt oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Fig. 44.



Eine Strecke AB (Fig. 44), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Geht eine Sehne durch den Mittelpunkt, so ist sie ein Durchmesser.

Eine Gerade CD (Fig. 44), welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinaus entsteht, heißt eine Secante. Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt A gemeinschaftlich hat und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Tangente des Kreises.

Die Durchmesser eines Kreises bestimmen ein Strahlenbüschel. Man bedient sich desselben zum Zeichnen der Kreislinien aus freier Hand.

d) Theile der Kreislinie.

Jeder Theil des Umfanges, wie z. B. AB (Fig. 43) wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, der vierte Theil ein Quadrant, der sechste ein Sextant, der achte ein Octant. Um die Größe eines Kreisbogens im Vergleich zum ganzen Kreisumfange angeben zu können, theilt man diesen in 360 gleiche Theile und nennt einen solchen Theil einen Bogengrad. Ein Bogengrad (^{0}) wird in 60 Bogenminuten ($'$) und eine Bogenminute in 60 Bogensecunden ($''$) eingetheilt.

Aufgaben:

1. Wie viele Bogengrade kommen auf einen Halbkreis, wie viele auf den Quadranten, den dritten, fünften, sechsten, achten, zehnten Theil des Kreisumfanges?
2. Der wievielte Theil des Kreisumfanges ist ein Bogen von 10^0, 20^0, 30^0, 36^0, 40^0, 60^0, 90^0, 120^0?

e) Theile der Kreisfläche.

1. Der Kreisabschnitt oder das Kreissegment, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AB (Fig. 44) und dem durch diese abgeschnittenen Bogen begrenzt wird. Da zu jeder Sehne zwei Bögen gehören, so zerschneidet sie auch den Kreis in zwei Segmente. Spricht man von einem, so ist das kleinere gemeint.

2. Der Kreisausschnitt oder Kreissector, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, wie AOB (Fig. 44).

§ 45. Messen der Winkel.

1. Zur Messung der Winkel nimmt man einen bestimmten Winkel als Einheit an und untersucht, wie oft dieselbe in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes ist der 90. Theil eines rechten Winkels. Dieser wird ein Winkelgrad genannt. Der 60. Theil eines Winkelgrades heißt eine Winkelminute, der 60. Theil einer Winkelminute eine Winkelsecunde.

Wie groß ist ein gestreckter Winkel?

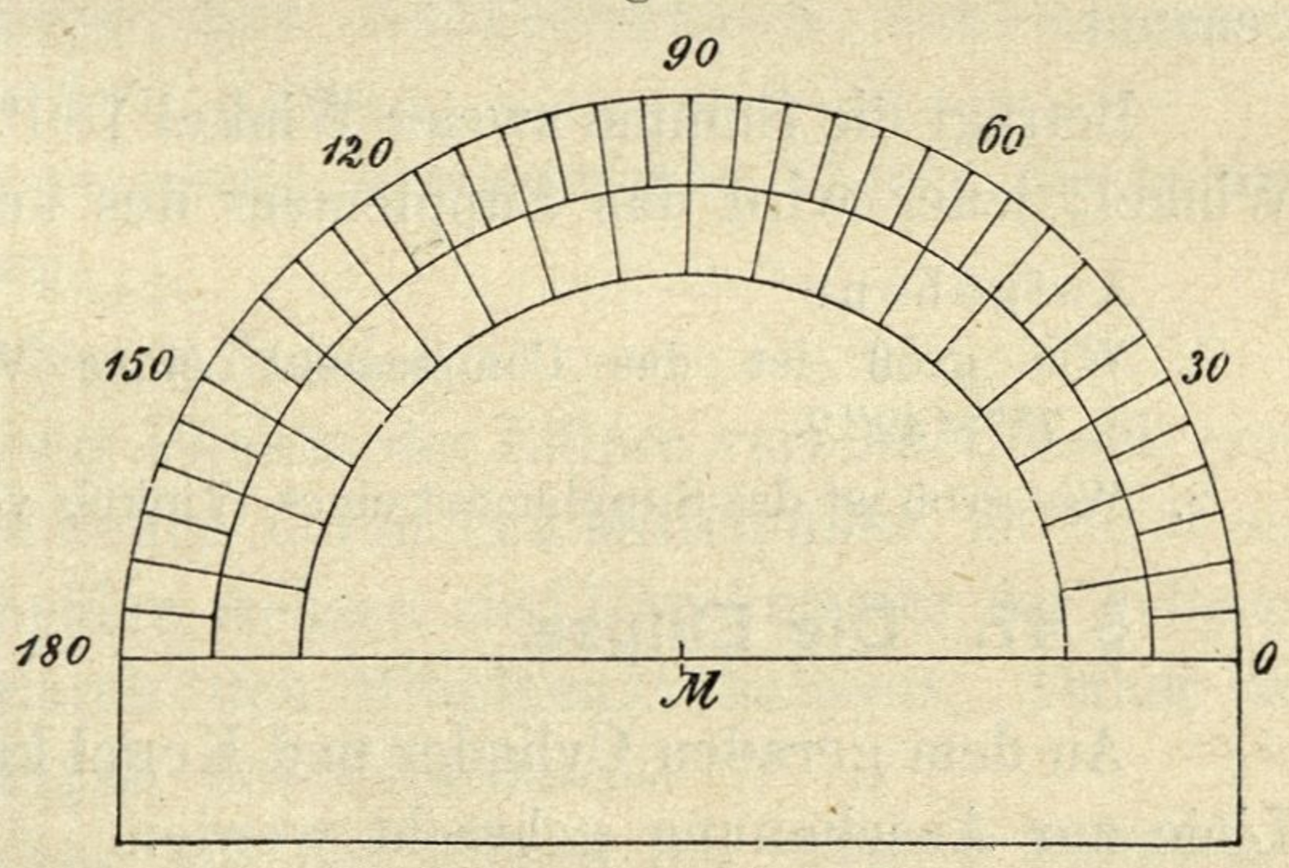
Zwischen welchen Grenzen liegt ein hohler, ein spitzer, ein stumpfer Winkel?

2. Theilt man den Bogen eines Halbkreises in 180 gleiche Theile, so heißt jeder dieser Theile ein Bogengrad. Zieht man vom Mittelpunkte des Kreises zu den Endpunkten eines jeden Bogengrades Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt herum 180 Winkel (Centriwinkel), welche zusammen einen gestreckten Winkel bilden. Diese Winkel sind untereinander gleich, da bei je zweien, wenn man sie gehörig aufeinander legt, die Bogen und daher auch die Schenkel zusammenfallen. Zu jedem Bogengrad gehört also ein Centriwinkel von einem Winkelgrad; ebenso zu einer Bogenminute und einer Bogensecunde ein Centriwinkel von einer Winkelminute, beziehungsweise einer Winkelsecunde. Daher hat jeder Centriwinkel eben so viele Winkelgrade, Winkelminuten und Winkelsecunden als der zugehörige Bogen Bogengrade, Bogenminuten und Bogensecunden enthält.

Wegen dieser Übereinstimmung ist es möglich, einen Winkel durch den Bogen zu messen, zu welchem er als Centriwinkel gehört, obwohl Bogen und Winkel ungleichartig sind.

Zum Messen und Auftragen der Winkel bedient man sich des Winkelmessers oder Transporteurs. (Fig. 45.) Dieser ist ein in 180 Grade eingetheilter Halbkreis aus Papier, Holz oder Metall, bei welchem die Kante 0...180 den Durchmesser und der Punkt *M* den Mittelpunkt vorstellt.

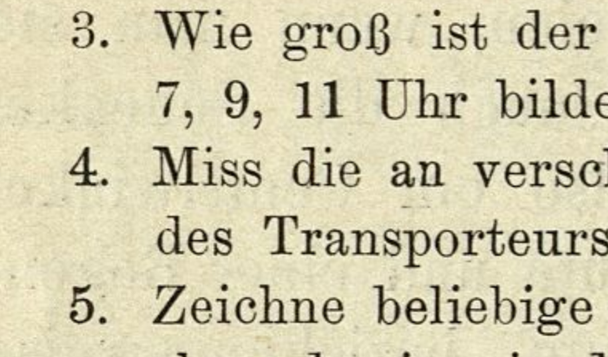
Fig. 45.



3. Erhabene Winkel. Die Drehung eines Halbstrahles wurde in § 25 auf eine halbe Umdrehung beschränkt; sie kann aber auch größer

sein. Die so entstehenden Winkel heißen erhabene oder convexe Winkel, z. B. AOB (Fig. 46). Ein Winkel, welcher durch eine ganze Umdrehung entsteht, heißt ein voller Winkel. Seine Schenkel liegen in einer Geraden nach derselben Richtung. Ein erhabener Winkel hat mehr als 180°, ein voller Winkel 360°.

Fig. 46.



Zwei von demselben Punkt ausgehende Halbstrahlen bilden zwei Winkel; unter dem Winkel derselben meint man den kleineren, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist.

Die Grade, Minuten und Secunden der Winkel werden so wie die der Bogen durch °, ‘, “ bezeichnet.

Aufgaben:

1. Wie viele Grade hat der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 3, 5, 6, 8, 10 Stunden beschreibt?
2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1, 4, 15, 34, 48 Zeitminuten beschreibt?
3. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 4, 7, 9, 11 Uhr bilden?
4. Miss die an verschiedenen eckigen Körpern vorkommenden Winkel mittelst des Transporteurs!
5. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab und miss sie dann mit dem Transporteur!
6. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße aus freier Hand und dann mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90°, 45°, 60°, 30°, 80°, 50°, 120° 175°, 200°, 270°, 285°, 300°.

§ 46. Complementäre und supplementäre Winkel.

Beträgt die Summe zweier Winkel 90°, so heißen sie complementäre Winkel; jeder der beiden Winkel wird das Complement des andern genannt.

Beträgt die Summe zweier Winkel 180°, so heißen sie supplementäre Winkel; jeder wird das Supplement des andern genannt.

Aufgaben:

1. Wie groß ist das Complement eines Winkels von *a*) 35°, *b*) 48° 12‘, *c*) 75° 8‘ 42“?
2. Wie groß ist das Supplement eines Winkels von *a*) 55°, *b*) 96° 20‘, *c*) 137° 21‘ 28“?

§ 47. Die Ellipse.

An dem geraden Cylinder und Kegel kann noch eine andere krumme Linie zur Anschauung gebracht werden.

Schneidet man diese Körper durch eine Ebene, welche zur Grundfläche nicht parallel ist und alle Seiten trifft, so erhält man als Durch-

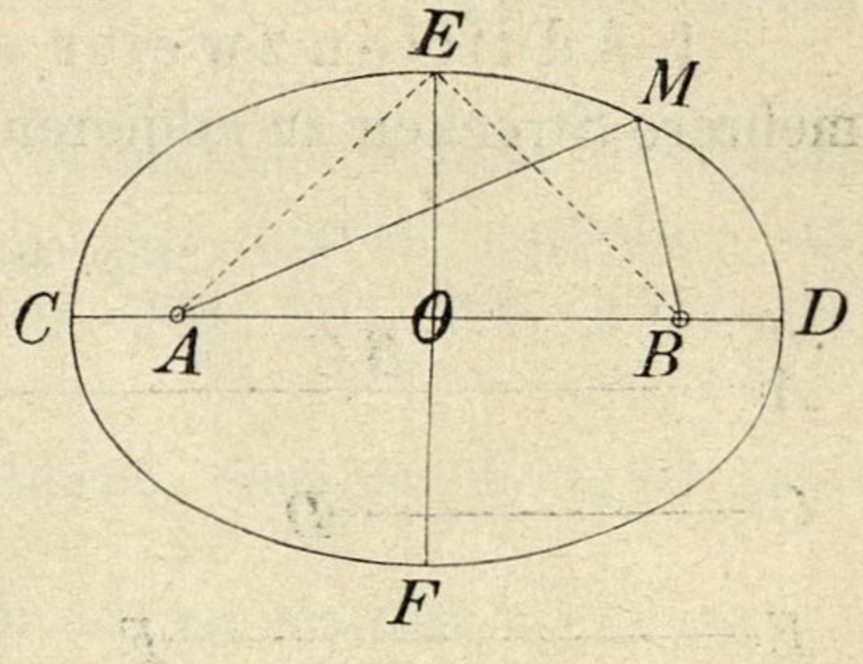
schnittsfigur derselben mit dem Mantel eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird.

Man kann sie an dem Niveau einer Flüssigkeit erkennen, welche in einem Gefäß, das die Form eines geraden Cylinders oder Kegels hat, sich befindet, wenn man demselben eine schräge Stellung gibt.

Construction der Ellipse.

Befestigt man in den Punkten A und B (Fig. 47) die Enden einer Schnur, spannt dieselbe mittels eines Stiftes M und fährt mit diesem um die beiden Punkte so herum, dass die Schnur immer gespannt bleibt, so beschreibt der Stift eine Ellipse.

Fig. 47.



Die Punkte A und B nennt man die Brennpunkte der Ellipse. Die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, d. i. die Strecken AM und BM, heißen die Leitstrahlen dieses Punktes.

Die Strecke CD, welche durch die Brennpunkte geht, heißt die große Achse; die Endpunkte C und D derselben heißen die Scheitel der großen Achse, und der Halbierungspunkt O der Mittelpunkt der Ellipse.

Die Strecke EF, welche im Mittelpunkte auf der großen Achse senkrecht steht, heißt die kleine Achse; die Punkte E und F sind die Scheitel derselben.

Aus der Entstehung der Ellipse geht hervor, dass sich die Längen der beiden Leitstrahlen AM und BM von Punkt zu Punkt verändern, dass aber ihre Summe stets dieselbe bleibt. Die Summe stellt die Länge der Schnur dar und diese ist der großen Achse gleich. In der Ellipse ist also die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes gleich der großen Achse.

Die Ellipse ist eine zweiachsig symmetrische Figur; die beiden Achsen sind die Symmetralen.

Wie groß sind die Leitstrahlen AE und BE?

Eine Strecke, welche zwei Punkte der Ellipse verbindet, heißt eine Sehne derselben. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie ein Durchmesser. Die beiden Achsen sind Durchmesser der Ellipse. Alle Durchmesser werden durch den Mittelpunkt halbiert. Daher ist die Ellipse eine centrische Figur, das Centrum ist O.

Eine gerade Linie, welche mit der Ellipse nur einen Punkt gemeinschaftlich hat und übrigens ganz außerhalb der Ellipse liegt, heißt eine Tangente der Ellipse.

Je kleiner die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte, oder je kleiner der Unterschied zwischen der großen und der kleinen Achse ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise.

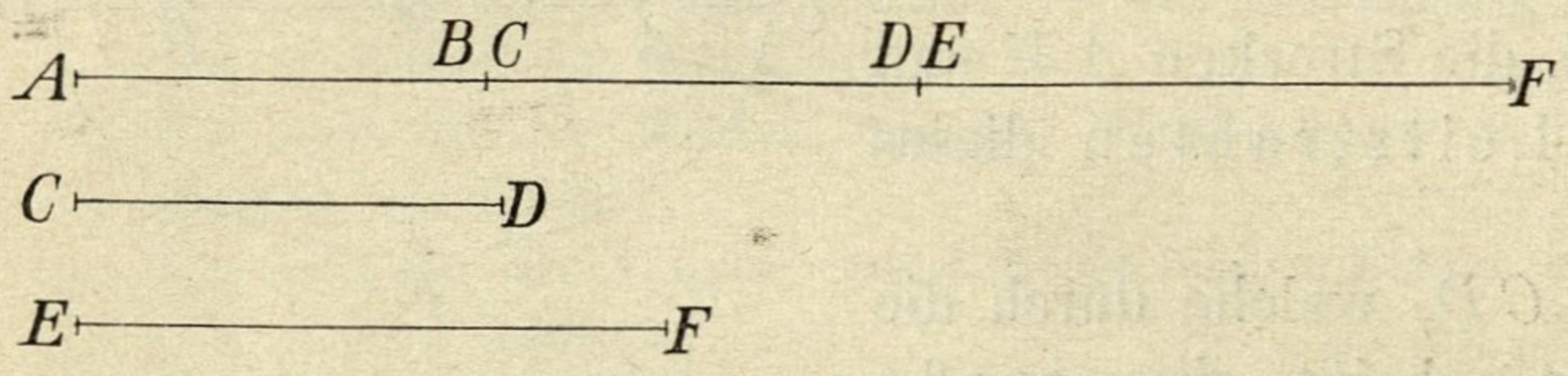
Markiert man auf einem Lineale drei Punkte und lässt zwei derselben auf den Schenkeln eines Winkelkreuzes gleiten, so beschreibt der dritte Punkt eine Ellipse.

II. Gerade Linien und Winkel.

§. 48. Zeichnendes Rechnen mit Strecken.

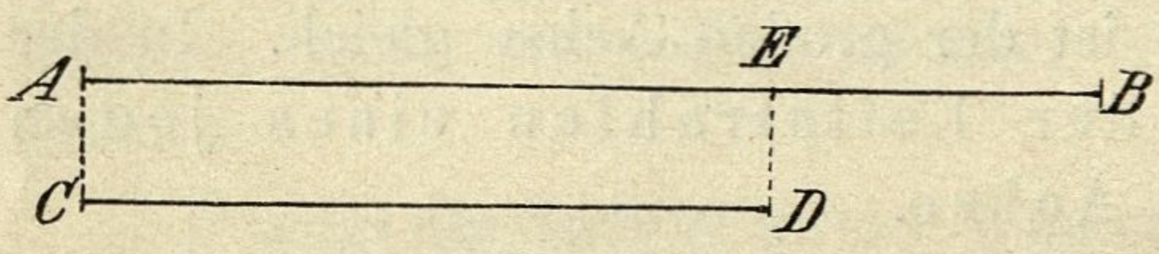
1. Addition zweier oder mehrerer Strecken. Um zwei oder mehrere Strecken zu addieren, legt man sie in einer Geraden so neben-einander, dass der Endpunkt der ersten mit dem Anfangspunkte der zweiten, der Endpunkt der zweiten mit dem Anfangspunkte der dritten Strecke u. s. w. zusammenfällt; dann ist die Strecke zwischen dem Anfangspunkte der ersten und dem Endpunkte der letzten Strecke die gesuchte Summe. In Fig. 48 ist $AF = AB + CD + EF$.

Fig. 48.



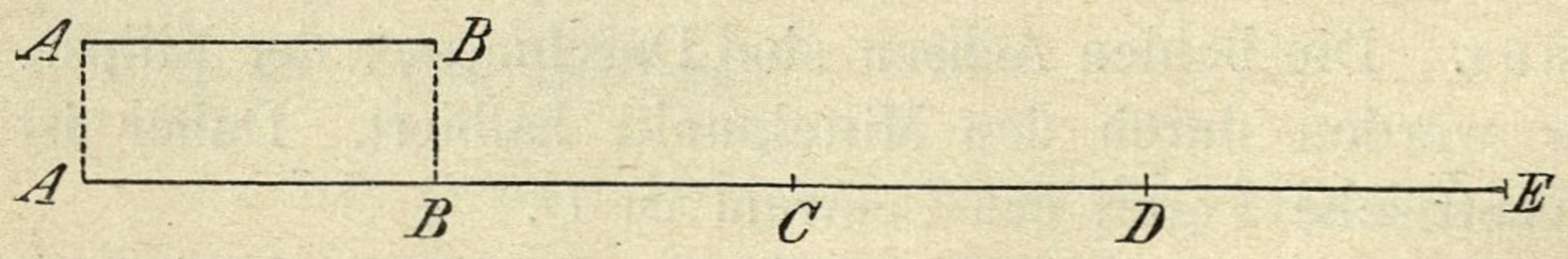
2. Subtraction zweier Strecken. Um zwei Strecken zu subtrahieren, legt man die kleinere so auf die größere, dass zwei Endpunkte derselben zusammenfallen; dann ist die Strecke zwischen den anderen Endpunkten die gesuchte Differenz (Unterschied). In Fig 49 ist $BE = AB - CD$.

Fig. 49.



3. Multiplication einer Strecke mit einer ganzen Zahl. (Vervielfachen einer Strecke.) Eine Strecke wird mit einer ganzen Zahl multipliciert (vervielfacht), indem man dieselbe in der früher angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. Ist z. B. die Strecke AB (Fig. 50) mit 4 zu multiplicieren oder zu vervierfachen, so trägt man dieselbe auf

Fig. 50.



einer Geraden viermal nebeneinander auf; es ist dann $AE = AB \times 4$ oder AE das Vierfache von AB.

4. Division einer Strecke. *a)* Durch eine ganze Zahl (Theilung). Eine Strecke durch eine ganze Zahl dividieren heißt, dieselbe in so viele gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist eine Strecke. Ist eine Strecke in 2, 4, 8, 16 . . . gleiche Theile zu theilen, so theile man dieselbe vorläufig nach dem Augenmaße in zwei, jede Hälfte wieder in zwei, jedes Viertel wieder in zwei gleiche Theile u. s. w. Ist eine Strecke in 6 gleiche Theile zu theilen, so theilt man dieselbe zuerst in zwei gleiche Theile und jede Hälfte in drei gleiche Theile.

b) Durch ein Strecke. Eine Strecke durch eine Strecke dividieren heißt untersuchen, wie oft die letztere in der ersten enthalten ist. (Messung.) Der Quotient ist eine Zahl. Z. B. (Fig. 50) $AE : AB = 4$.

Aufgaben:

1. Es sind drei horizontale Strecken zu zeichnen, dieselben bezüglich ihrer Länge zu vergleichen und zu addieren.
2. Es sind drei verticale Strecken zu zeichnen und zu addieren.
3. Es sind zwei verticale Strecken zu zeichnen und ihre Differenz zu ermitteln.
4. Es ist eine gegebene Strecke mit 7 zu multiplicieren.
5. Es ist *a)* eine horizontale, *b)* eine verticale, *c)* eine schräge Strecke in 3, 4, 5, 6, 8, 10 gleiche Theile zu theilen.

§. 49. Messen der Strecken.

Auf der Division einer Strecke durch eine Strecke beruht die Bestimmung der Länge einer Strecke d. i. das Messen derselben.

Eine Strecke messen heißt untersuchen, wie oft eine als Längeneinheit angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des österreichischen Längenmaßes ist das Meter *(m)*, das in 10 Decimeter *(dm)* à 10 Centimeter *(cm)* à 10 Millimeter *(mm)* eingetheilt wird. Ein Meter ist nahezu der zehnmillionste Theil eines Erdmeridianquadranten. 1000 Meter = 1 Kilometer *(km)*, 10 Kilometer = 1 Myriameter *(μm)*.

Zum Ausmessen der Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall, auf welchen eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Unterabtheilungen aufgetragen sind; sie heißen Maßstäbe.

Anfängern ist anzurathen, dass sie zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abschätzen und dann mit dem Maßstabe genau messen.

Aufgaben:

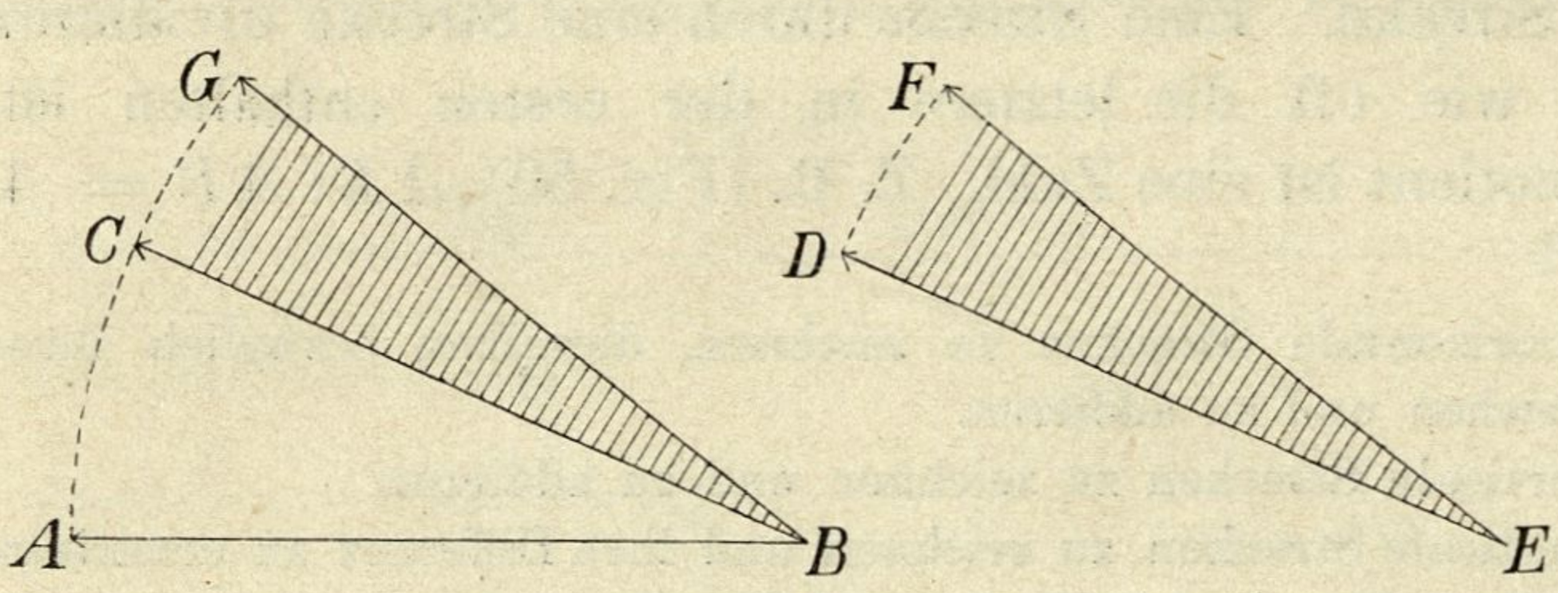
1. Die Summe folgender Strecken zu suchen:
   a) 3 *dm* 8 *cm* 5 *mm*, 7 *dm* 9 *cm* 6 *mm*, 8 *dm* 6 *mm*;
   b) 3 *km* 86 *m*, 5 *km* 817 *m*.

2. Die Differenz folgender Strecken zu suchen:
   a) **3** *m* 8 *dm* **5** *cm*, **1** *m* 2 *dm* 3 *cm;*
   b) **13** *m* **4** *dm* 7 *cm*, 8 *m* 9 *dm* 8 *cm;*
   c) 4 *km*, 1 *km* 27 *m*.
3. Die Strecke 3 *m* 8 *dm* 9 *cm* *a)* mit 3 zu multiplicieren, *b)* ihren 5. Theil zu berechnen.
4. Wie oft sind 3 *km* 826 *m* in **15** *km* 304 *m* enthalten?

§. 50. Zeichnendes Rechnen mit Winkeln.

1. Addition der Winkel. Zwei Winkel ABC und DEF (Fig. 51) werden addiert, indem man sie so nebeneinander legt, dass sie den Scheitel und ein Paar Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf die entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen fällt. In Fig. 51 ist $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF$.

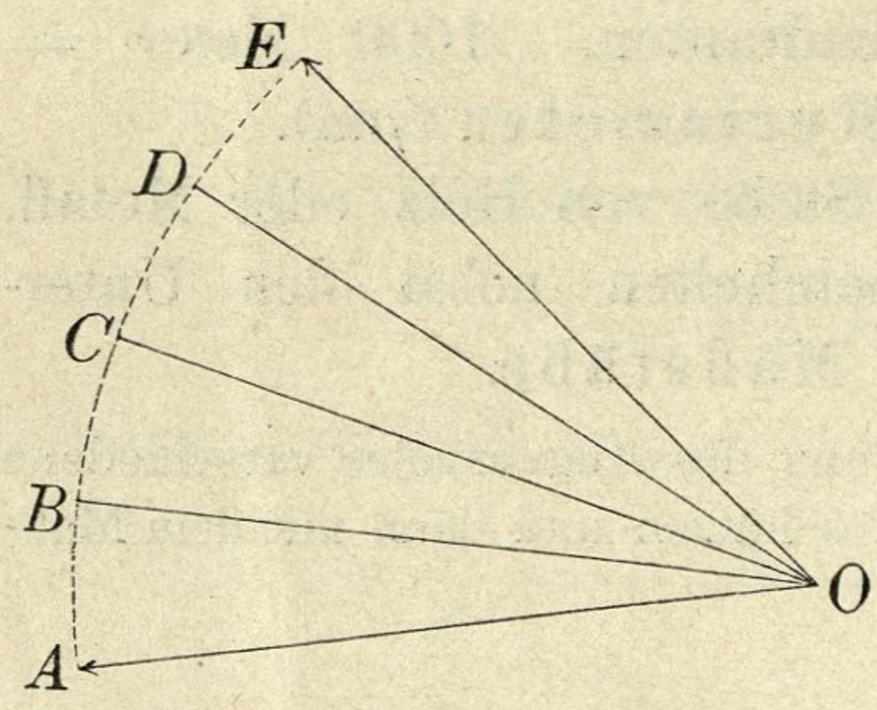
Fig. 51.



2. Subtraction der Winkel. Zwei Winkel ABG und DEF Fig. 51 werden subtrahiert, indem man den kleineren so auf den größeren legt, dass sie den Scheitel und ein Paar Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf dieselbe Seite des gemeinschaftlichen fällt. In Fig. 51 ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABG - \sphericalangle DEF$.

3. Multiplication eines Winkels mit einer ganzen Zahl. (Vervielfachen eines Winkels.) Ein Winkel AOB (Fig. 52) wird mit einer ganzen Zahl multipliciert (vervielfacht), indem man denselben in der oben angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 52 ist $\sphericalangle AOE = \sphericalangle AOB \times 4$.

Fig. 52.



4. *a)* Division eines Winkels durch eine ganze Zahl. (Theilung eines Winkels.) Einen Winkel durch eine ganze Zahl dividieren heißt, denselben in so viele gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist also ein Winkel. Zu diesem Zwecke beschreibe man aus dem Scheitel des zu theilenden Winkels mit einem beliebigen Halb-

messer einen Kreisbogen, welcher beide Schenkel durchschneidet, und theile den zwischen den Schenkeln gelegenen Theil des Kreisbogens in so viele gleiche Theile, als die ganze Zahl anzeigt. Verbindet man jeden Theilungspunkt mit dem Scheitel des Winkels, so erscheint derselbe als Summe so vieler gleicher Winkel, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 52 ist $\frac{\sphericalangle AOE}{4} = \sphericalangle AOB$.

b) Division eines Winkels durch einen Winkel. (Messung.) Dadurch wird untersucht, wie oft ein Winkel in einem andern enthalten ist. Der Quotient ist also eine Zahl. Z. B. (Fig. 52) $\sphericalangle AOE : \sphericalangle AOB = 4$.

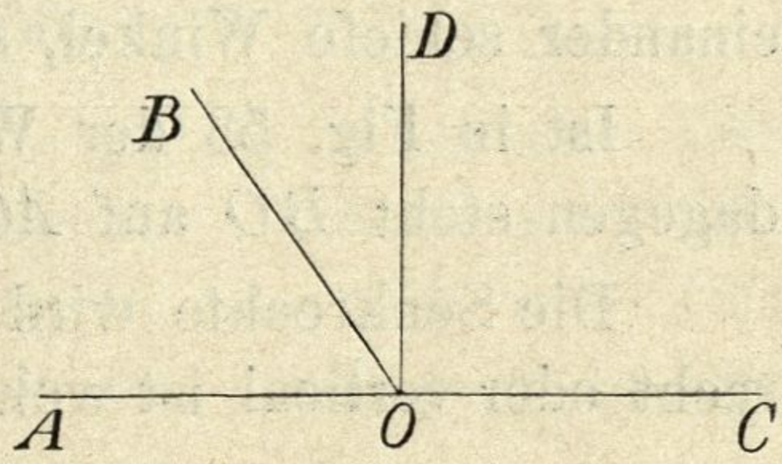
Aufgaben:

1. Was für ein Winkel ist die Summe *a)* eines rechten und eines spitzen, *b)* eines rechten und eines stumpfen, *c)* eines gestreckten und eines hohlen Winkels?
2. Wie groß ist die Summe aller Winkel, die in einer Ebene um einen gemeinschaftlichen Scheitel herum liegen?
3. Wie groß ist die Differenz *a)* eines gestreckten und eines rechten, *b)* eines vollen und eines gestreckten, *c)* eines vollen und eines rechten Winkels?
4. Was für ein Winkel ist die Differenz *a)* eines rechten und eines spitzen, *b)* eines stumpfen und eines rechten, *c)* eines gestreckten und eines stumpfen, *d)* eines vollen und eines rechten, *e)* eines vollen und eines stumpfen, *f)* eines vollen und eines spitzen Winkels?
5. Was für ein Winkel ist das Doppelte *a)* eines rechten, *b)* eines stumpfen, *c)* eines gestreckten Winkels?
6. Was für ein Winkel ist die Hälfte *a)* eines rechten, *b)* eines stumpfen, *c)* eines gestreckten, *d)* eines erhabenen, *e)* eines vollen Winkels?
7. Die Summe folgender Winkel zu suchen:
   a) 52^0, 39^0, 124^0 und 76^0;
   b) $28^0 24' 30''$, $33^0 45' 56''$, $74^0 28' 53''$, $22^0 16' 37''$.
8. Die Differenz folgender Winkel zu suchen:
   a) 128^0, 73^0;
   b) $216^0 34' 28''$, $78^0 24' 17''$;
   c) $73^0 16' 47''$, $58^0 23' 56''$;
   d) 23^0, $14^0 25' 38''$.
9. Den Winkel $43^0 38' 35''$ *a)* mit 3 zu multiplicieren, *b)* in 5 gleiche Theile zu theilen.
10. Untersuche, wie oft ein Winkel von *a)* 8^0, *b)* $15' 28''$, *c)* $12^0 35' 49''$ bezüglich in einem Winkel von *a)* 96^0, *b)* $108^0 16'$, *c)* $100^0 46' 32''$ enthalten ist.

§. 51. Neben- und Scheitelwinkel.

a) Nebenwinkel. Verlängert man einen Schenkel eines hohlen Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein Nebenwinkel. Nebenwinkel sind also zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaft-

Fig. 53.

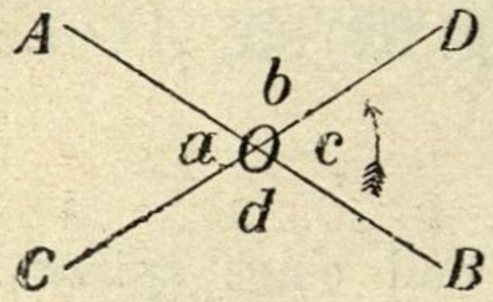


lich haben, und deren zwei andere Schenkel in einer Geraden liegen. AOB (Fig. 53) ist ein Nebenwinkel von BOC; ebenso ist AOD ein Nebenwinkel von DOC.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten oder 180°.

b) Scheitelwinkel. Verlängert man beide Schenkel eines hohlen Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein Scheitelwinkel. In Fig. 54 sind a und c, b und d Scheitelwinkel.

Fig. 54.



Scheitelwinkel entstehen durch dieselbe Drehung; denn dreht man (Fig. 54) AB um O in der Richtung des Pfeiles bis in die Lage CD, so beschreibt AO den Winkel a, BO den Winkel c; daher ist $a = c$. Zwei Scheitelwinkel sind daher einander gleich.

Aufgaben:

1. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von *a)* 65°, *b)* 28°40′, *c)* 115° 48′, *d)* 73° 19′ 52″?
2. Die Differenz zweier Nebenwinkel beträgt 28°; wie groß ist jeder derselben?
3. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so groß als der andere; wie groß ist jeder?
4. Ein Winkel ist *a)* 37°, *b)* 68°27′, *c)* 53°36′43″; wie groß ist der Scheitelwinkel seines Nebenwinkels?
5. Wenn in Fig. 54 der Winkel a 69°17′26″ beträgt, wie groß ist jeder der Winkel b, c, d?
6. Wie groß ist der Winkel der von den Halbierungslinien zweier Nebenwinkel gebildet wird?

Senkrechte und parallele Gerade.

Senkrechte und schiefe Gerade.

§. 52. Aus den Lehrsätzen von den Neben- und den Scheitelwinkeln folgt:

Ist von den Winkeln, welche zwei sich schneidende Gerade miteinander bilden, einer ein rechter, so sind es auch die andern; ist einer von jenen Winkeln ein schiefer, so sind es auch die andern.

Bilden zwei sich schneidende Gerade miteinander rechte Winkel, so heißen sie aufeinander senkrecht oder normal; bilden sie miteinander schiefe Winkel, so heißen sie gegeneinander schief.

Ist in Fig. 53 der Winkel AOD ein rechter, so ist $DO \perp AC$; dagegen steht BO auf AC schief.

Die Senkrechte wird auch Normale oder Loth genannt. Lothrecht oder vertical ist wohl zu unterscheiden von senkrecht oder normal.

Parallelentheorie.

§. 53. Die Erklärung von parallelen Geraden ist in § 22 enthalten.

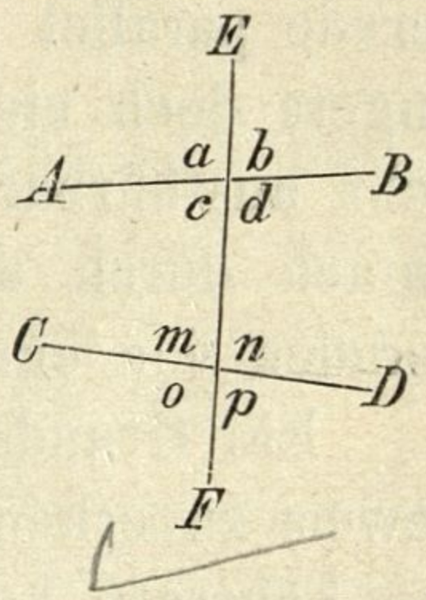
Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann mit dieser nur **eine** Parallele gezogen werden. (Grundsatz von den Parallelen.)

Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

§. 54. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Schnittpunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die andern vier äußere Winkel. In Fig. 55 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade oder Transversale; c, d, m und n sind innere, a, b, o und p äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Gegenwinkel. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden Wechselwinkel genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Anwinkel.

Fig. 55.



Gegenwinkel:	Wechselwinkel:	Anwinkel:
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

§. 55. Lehrsätze. 1. Wenn zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so sind

a) je zwei Gegenwinkel einander gleich,

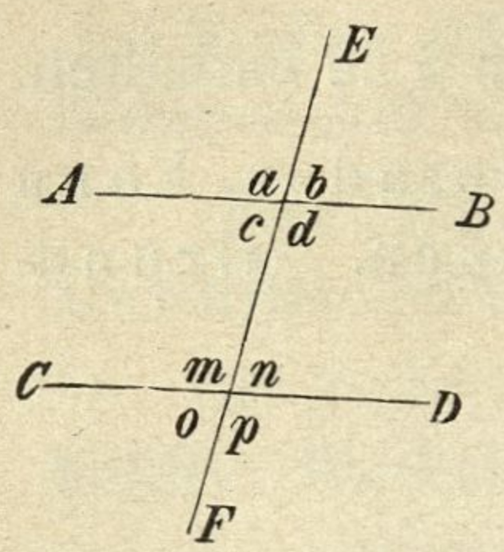
b) je zwei Wechselwinkel einander gleich,

c) je zwei Anwinkel supplementär.

Voraussetzung. $AB \parallel CD$ (Fig. 56).

Behauptung. 1. $a = m$, $b = n$, $c = o$, $d = p$, 2. $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$, 3. $a + o = 180^0$, $b + p = 180^0$, $c + m = 180^0$, $d + n = 180^0$.

Fig. 56.



Beweis. Bewegt sich die Gerade AB parallel mit sich selbst, so bildet sie, da sich dabei ihre Lage gegen EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel; es fallen also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel aufeinander, Gegenwinkel sind daher einander gleich, je zwei Wechselwinkel gehen in zwei Scheitelwinkel über, sind also ebenfalls einander gleich; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, betragen also zusammen 180°.

2. Umgekehrt folgt: Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dass entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich, oder zwei Anwinkel supplementär sind, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel. Um mit Gewissheit behaupten zu können, dass zwei Gerade parallel sind, sollte man zeigen, dass sie fort und fort verlängert doch nie zusammentreffen. Da aber eine solche Verlängerung nicht ausführbar ist, so wird die parallele Lage zweier Geraden ganz einfach durch die Winkel entschieden, welche entstehen, wenn diese Geraden von einer dritten geschnitten werden.

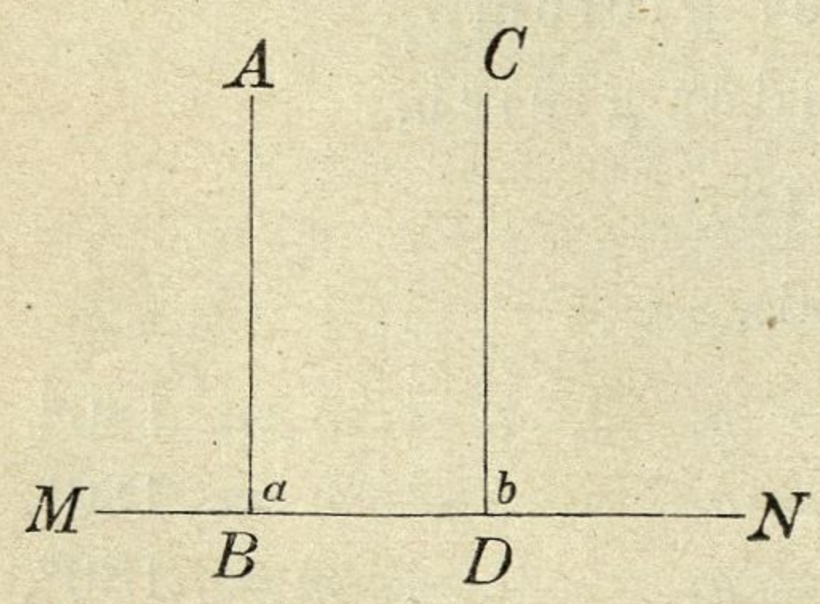
Ein Grundsatz (§. 53) enthält einen Satz, dessen Richtigkeit ohne Beweis zu erkennen ist, während ein Lehrsatz eines Beweises bedarf. Ein Lehrsatz besteht aus Voraussetzung und Behauptung. Vertauscht man dieselben miteinander (§. 55, 1 und 2), so erhält man die Umkehrung des Lehrsatzes.

Aufgabe:

Es sei in Fig. 56 der Winkel $a = 103^0\,47'\,25''$; wie groß ist jeder der Winkel b, c, d, m, n, o, p?

§. 56. Lehrsätze. 1. Stehen zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.

Fig. 57.



Voraussetzung: Es sei (Fig. 57) $AB \perp MN$ und $CD \perp MN$.

Behauptung: $AB \parallel CD$.

Beweis: Da $a = R$ und $b = R$, so ist auch $a = b$; die Geraden AB und CD bilden also mit der sie Schneidenden MN gleiche Gegenwinkel, folglich sind sie parallel.

2. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. (Fig. 57.)

Voraussetzung: Es sei $AB \parallel CD$ und $AB \perp MN$.

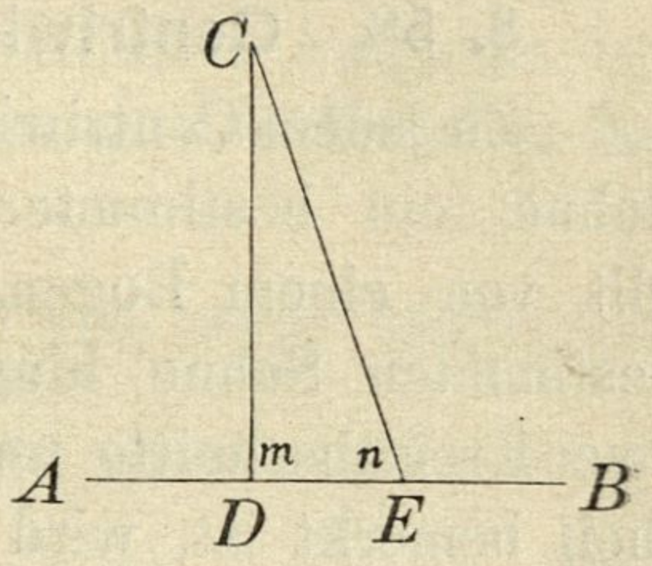
Behauptung: $CD \perp MN$.

Beweis: Wegen $AB \parallel CD$ ist $a = b$, wegen $AB \perp MN$ ist $a = R$; daher ist auch $b = R$, d. i. $CD \perp MN$.

3. Von einem Punkt lässt sich auf eine Gerade nur eine einzige Normale errichten.

Wären CD und CE (Fig. 58) senkrecht auf AB, so wären m und n als rechte Winkel supplementär; da sie aber Anwinkel sind, so müssten CD und CE parallel sein, was nicht möglich ist, da sie den Punkt C gemeinschaftlich haben.

Fig. 58.



Die Länge dieser völlig bestimmten Senkrechten gibt den Abstand des Punktes von der Geraden an.

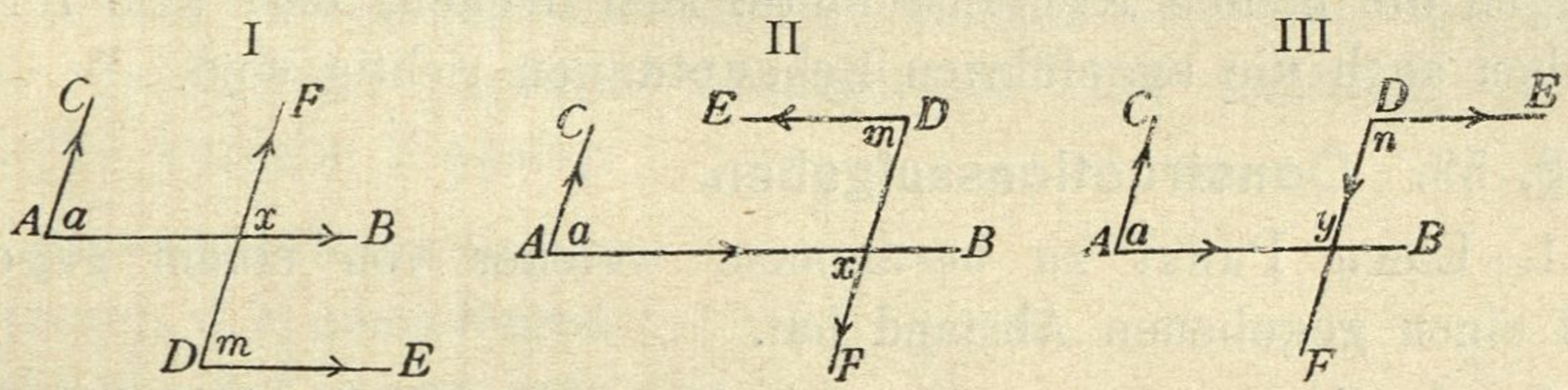
Auch in einem Punkt einer Geraden lässt sich auf diese nur eine einzige Normale errichten.

§. 57. Lehrsätze. 1. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

2. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

3. Es sei (Fig. 59) $AB \parallel DE$ und $AC \parallel DF$.

Fig. 59.



In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet. Es sei z. B. $x = 75^0$; da a und m Gegenwinkel zu dem Winkel x zwischen Parallelen sind, so muss jeder derselben ebenfalls 75° sein, sie sind also einander gleich.

In II sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet. Es sei $x = 75^0$; dann ist sowohl a als Wechsel-

winkel und m als Gegenwinkel zu x bei Parallelen ebenfalls 75^0; m und a sind daher einander gleich.

In III haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Es sei z. B. $y = 105^0$, dann ist a als Anwinkel zu y 75^0 und n als Wechselwinkel zu y 105^0. Daher $a + n = 180^0$.

§. 58. Centriwinkel, Sehnen und Bogen eines Kreises.

Zu jedem Centriwinkel gehört ein bestimmter Bogen, eine bestimmte Sehne, ein bestimmter Kreisabschnitt und Kreisausschnitt. Dasselbe gilt von einem Bogen, Kreisabschnitt und Kreisausschnitt. Zu einer bestimmten Sehne hingegen gehören zwei Bogen, zwei Centriwinkel, zwei Kreisabschnitte und zwei Kreisausschnitte. Wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, wird immer das kleinere dieser Stücke als zur Sehne gehörig angesehen.

Von den Centriwinkeln, Sehnen und Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise gelten folgende Lehrsätze:

1. Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Sehnen und gleiche Bogen.
2. Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen.
3. Zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen und gleiche Centriwinkel.

Von der Richtigkeit dieser Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Centriwinkel, oder zwei gleiche Sehnen, oder zwei gleiche Bogen annimmt und dann die betreffenden Kreisausschnitte übereinander gelegt denkt; man findet, dass unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte sich decken, dass also für jede derselben auch die angeführten Behauptungen richtig sind.

§. 59. Constructionsaufgaben.

1. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand hat.

Beschreibt man aus dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstand als Halbmesser einen Kreis, so genügen alle Punkte dieser Kreislinie den Bedingungen der Aufgabe.

Eine Aufgabe, welche unendlich viele verschiedene Auflösungen zulässt, heißt unbestimmt, im Gegensatz zu einer bestimmten, welche entweder nur eine einzige Auflösung, oder eine beschränkte, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen besitzt; nach der Anzahl der Auf-

lösungen ist sie ein-, zwei- oder mehrdeutig. Die vorliegende Aufgabe ist demnach unbestimmt.

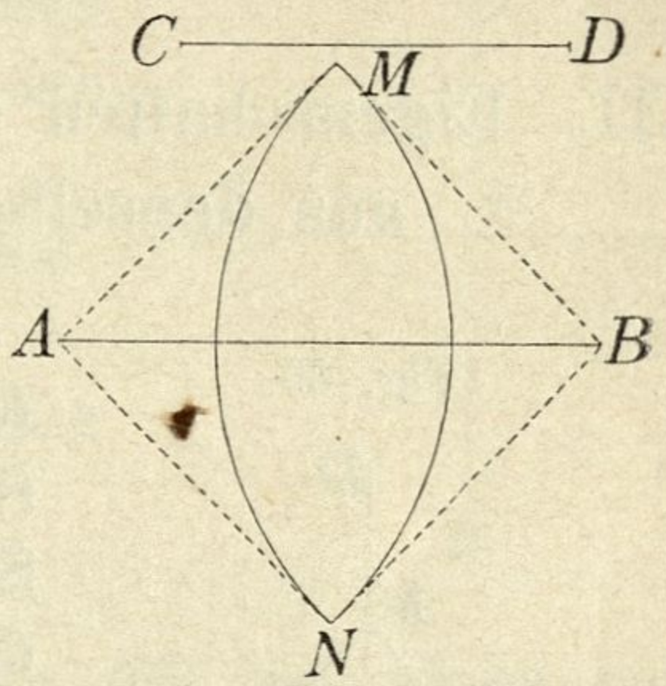
Eine Aufgabe heißt überbestimmt, wenn mehr Bedingungen gegeben sind, als zur Auflösung erforderlich sind.

Z. B. Von einem gegebenen Punkt A mit einem gegebenen Radius r einen Kreis zu beschreiben, der durch einen bestimmten Punkt B geht; die Aufgabe ist nur möglich, wenn $r = AB$ ist. Sonst ist sie unmöglich. Im allgemeinen sind überbestimmte Aufgaben unlöslich, weil die gegebenen Stücke die zur Auflösung erforderlichen Bedingungen meist nicht erfüllen.

2. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten einen gegebenen Abstand hat.

Es seien (Fig. 60) A und B die gegebenen Punkte, CD der gegebene Abstand. Die gesuchten Punkte müssen in den Durchschnittspunkten zweier Kreise liegen, welche von den Mittelpunkten A und B mit CD als Radius beschrieben werden. Da sich im allgemeinen die beiden Kreislinien in zwei Punkten M und N schneiden, so gibt es zwei verschiedene Punkte, welche der Aufgabe genügen.

Fig. 60.



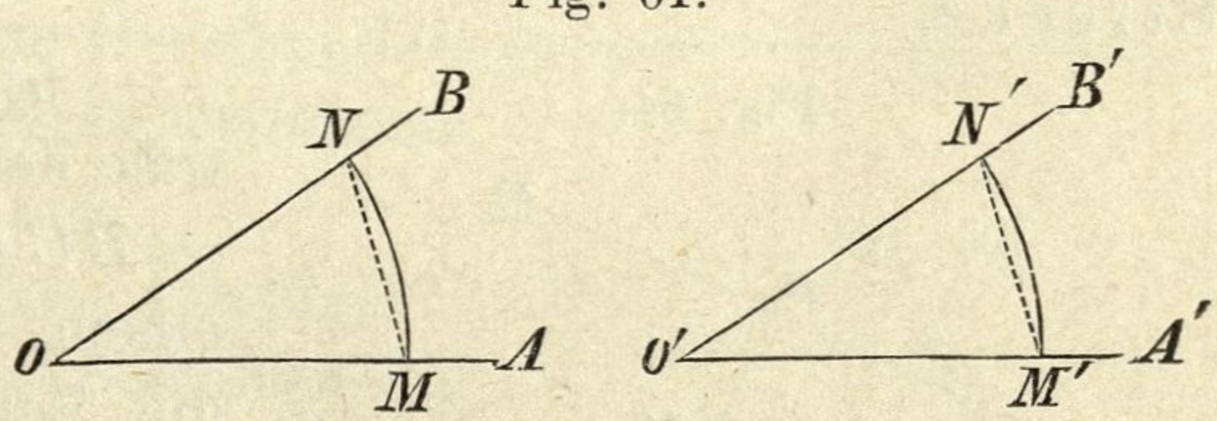
Ist CD gleich der Hälfte der Strecke AB, so erhält man nur einen einzigen Punkt, welcher in der Mitte von AB liegt; ist CD kleiner als die Hälfte von AB, so erhält man keinen Punkt.

Die Aufgabe kann also eindeutig oder zweideutig bestimmt, aber auch unmöglich sein.

3. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten verschiedene gegebene Abstände hat. Die Auflösung ist derjenigen der Aufgabe 2 analog.

4. Einen gegebenen Bogen zu übertragen, d. h. einen Bogen zu zeichnen, der einem aus dem Mittelpunkte O (Fig. 61) beschriebenen Bogen MN gleich ist.

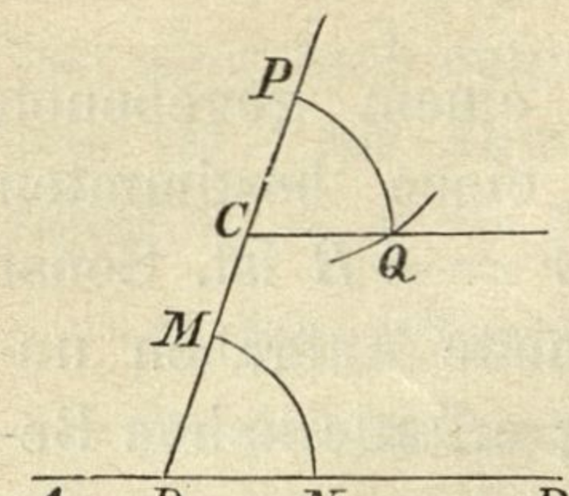
Fig. 61.



Man ziehe die beliebige Gerade $O'A'$ und beschreibe aus O' mit dem Halbmesser $O'M' = OM$ einen Bogen, welcher die Gerade $O'A'$ in M' schneidet. Trägt man nun von M' die Sehne MN auf, so erhält man N' und es ist dann Bogen $M'N'$ = Bogen MN (§. 58).

Durch eine gleiche Construction lässt sich auch ein gegebener Winkel übertragen. (Fig. 61.)

Fig. 62.



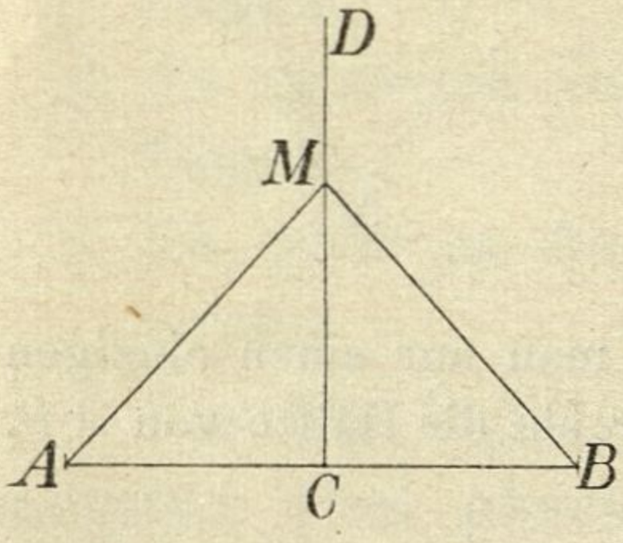
5. Durch einen Punkt C außerhalb einer gegebenen Geraden AB zu dieser die Parallele zu ziehen.

a) Man ziehe durch C (Fig. 62) eine Gerade, welche die gegebene Gerade AB in D schneidet, und construiere zu dem Winkel CDB im Punkte C einen gleichen Gegenwinkel PCQ; dann ist $CQ \parallel AB$.

b) Die Construction wird am einfachsten, wenn die Winkel C und D rechte sind; man führt sie mit Hilfe eines Winkelbrettchens aus, welches die Form eines rechtwinkligen Dreieckes hat. (§. 56, 1.)

III. Eigenschaften der Strecken- und Winkelsymmetrale und aus denselben sich ergebende Constructionen.

Fig. 63.

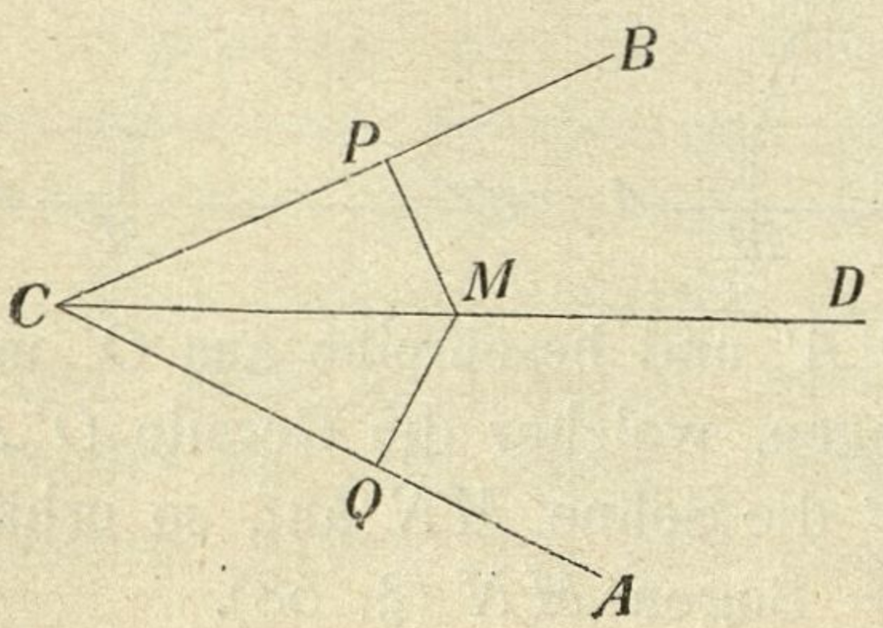


§. 60. *a)* Es sei CD (Fig. 63) die Symmetrale der Strecke AB, also $AC = BC$ und $CD \perp AB$ (§ 32). Verbindet man irgend einen Punkt M der Symmetrale mit den Endpunkten der Strecke und dreht die rechte Hälfte der Figur um CD als Achse um 180°, so muss, da die Winkel bei C als rechte gleich sind, CB in die Richtung von AC fallen, weil $BC = AC$ fällt ferner B auf A, somit BM auf AM.

Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat also von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände, so liegt er in der Symmetrale der Strecke.

Fig. 64.



b) Es sei CD (Fig. 64) die Symmetrale des Winkels ACB, also $\sphericalangle ACD = BCD$. (§. 32.) Fällt man von irgend einem Punkt M der Symmetrale auf die Schenkel des Winkels ACB die Normalen MP und MQ und dreht die untere Hälfte ACD der Figur um CD als Achse um 180°, so muss CA in die Richtung von CB fallen, weil

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ ist, MQ muss auf MP fallen, weil von einem Punkte (M) auf eine Gerade (CB) nur eine einzige Senkrechte möglich ist.

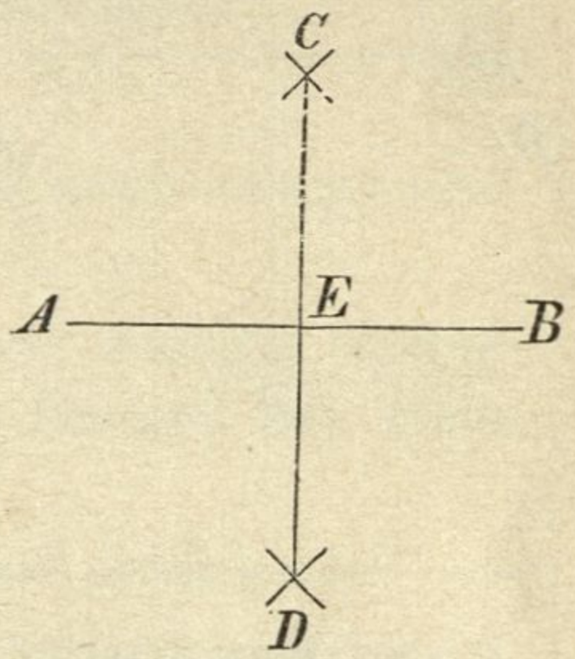
Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat also von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände, so gehört er der Symmetrale desselben an.

§. 61. Constructionen.

a) Die Symmetrale einer gegebenen Strecke AB (Fig. 65) zu construieren.

Fig. 65.



Bestimmt man nach §. 59, 2 zwei Punkte C und D so, dass jeder derselben von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke gleiche Abstände hat, so ist durch CD die Lage der Symmetrale der Strecke AB bestimmt.

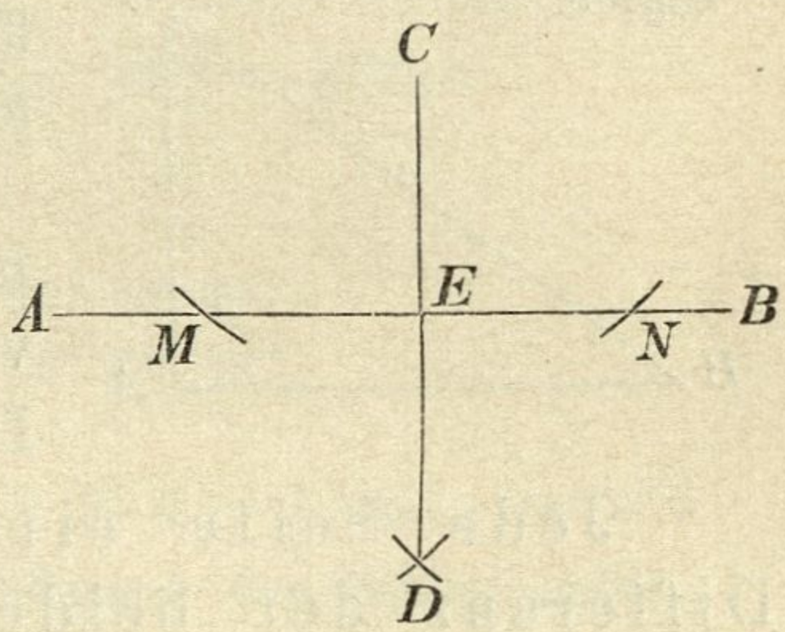
Dieselbe Construction liefert auch die Auflösung für folgende Aufgaben:

b) Die Symmetrale zweier gegebener Punkte zu construieren.

c) Eine gegebene Strecke zu halbieren.

d) Zu einer gegebenen Geraden AB (Fig. 66) von einem außer ihr liegenden Punkte C die Normale zu ziehen.

Fig. 66.



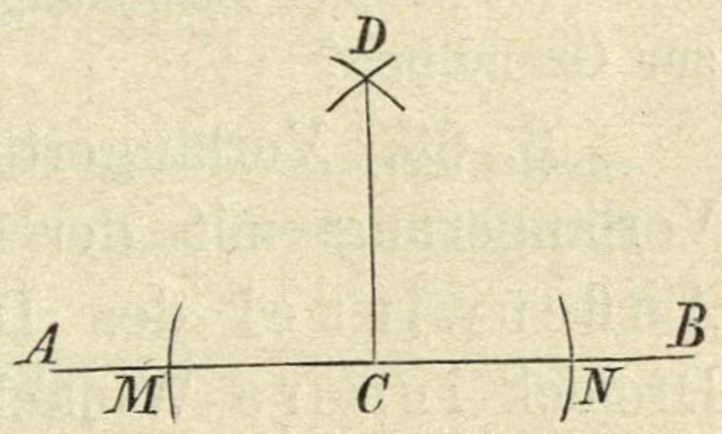
Man bestimme nach §. 59, 1 auf der Geraden zwei Punkte M und N, welche von C gleich weit abstehen, und construiere zu MN die Symmetrale CD, so ist diese zu AB normal.

Durch dieselbe Construction wird auch die Aufgabe gelöst:

e) Zu einem gegebenen Punkte (C) den in Beziehung auf eine gegebene Gerade (AB) symmetrisch liegenden Punkt (D) zu bestimmen.

Es muss hier $MD = MC$ sein.

Fig. 67.



f) Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 67) in einem gegebenen Punkte C derselben die Normale zu errichten.

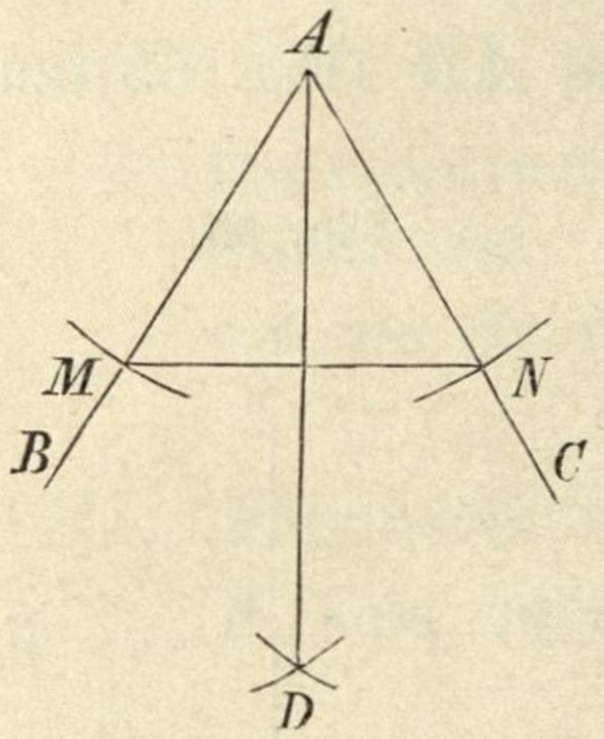
Man bestimme in der Geraden zwei Punkte M und N so, dass $CM = CN$ ist, und construiere die Symmetrale von MN;

zur Bestimmung derselben ist außer C noch ein zweiter Punkt D erforderlich, so dass $DM = DN$ ist.

g) Die Symmetrale eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 68) zu construieren, d. h. den Winkel zu halbieren.

Bestimmt man auf den Schenkeln zwei Punkte M und N, welche vom Scheitel A gleich weit abstehen, und dann in der Winkelfläche den Punkt D so, dass er von M und N gleichen Abstand hat, so ist AD die Symmetrale der Strecke MN, folglich ist sie auch, wie man sich durch Deckung überzeugen kann, die Symmetrale des Winkels BAC.

Fig. 68.



Durch diese Construction kann auch folgende Aufgabe gelöst werden:

h) Einen gegebenen Kreisbogen zu halbieren.

Man halbiere den zugehörigen Centriwinkel.

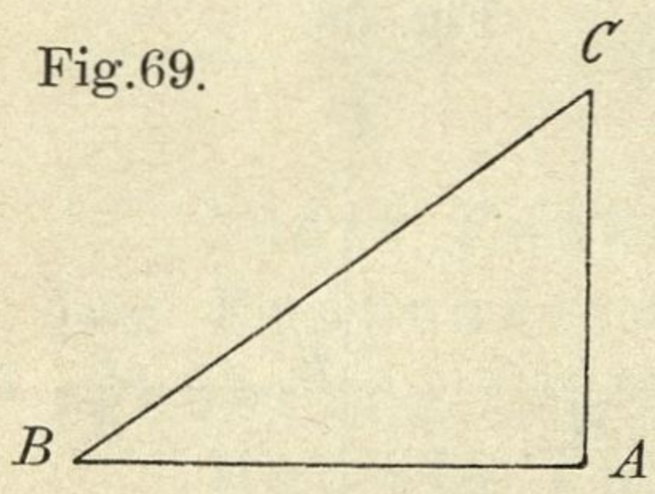
Durch wiederholte Anwendung der Constructionen *c*, *g* und *h* kann man eine Strecke, einen Winkel, einen Bogen in 4, 6, 8 . . . gleiche Theile theilen.

IV. Das Dreieck.

1. Lehrsätze über Seiten und Winkel eines Dreieckes.

§. 62. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte; denn die Gerade AB (Fig. 69) ist die kürzeste Linie zwischen A und B, also ist die gebrochene Linie ACB d. i. $AC + CB$ größer als AB.

Fig.69.



Aus drei Linien, deren Längen $2\,m$, $3\,m$ und $4\,m$ sind, ist demnach ein Dreieck möglich; vergleicht man jede dieser 3 Seiten mit der Differenz der beiden andern, so ergibt sich:

Jede Seite eines Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden andern.

Wenn zwei Seiten eines Dreieckes 24 *m* und 17 *m* sind, zwischen welchen Grenzen liegt die dritte Seite?

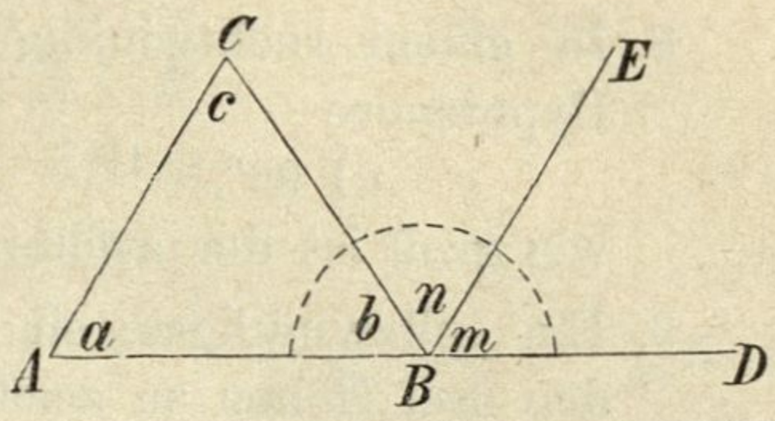
In welcher Beziehung steht ein Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes zur Grundlinie?

§. 63. Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Seite einen Winkel, welcher ein Außenwinkel des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreieck innere Winkel sind.

CBD (Fig. 70) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

§. 64. *a)* Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten oder 180°.

Fig. 70.



Beweis. Wird die Seite AB des Dreieckes ABC (Fig. 70) verlängert und durch B die Gerade $BE \parallel AC$ gezogen, so entstehen die zwei Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel bei Parallelen gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, b, c ist daher so groß als die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muss auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? Jedes Dreieck hat daher wenigstens wie viele spitze Winkel?

2. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180° subtrahiert.

b) Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

Denn der Außenwinkel CBD (Fig. 70) ist die Summe der Winkel m und n; diese sind aber den Winkeln a und c gleich.

Aufgaben.

1. In einem Dreiecke sei der Winkel
   a) $a = 65^0$, $b = 87^0$; *b)* $a = 43^0\ 10'$, $b = 102^0\ 27'$; *c)* $a = 25^0\ 46'\ 21''$, $b = 74^0\ 48'\ 49''$;
   wie groß ist der dritte Winkel c?
2. Wie groß ist jeder der Winkel, wenn 1) $a = b = c$, 2) $a = b$ und $c = 57^0$?
3. In einem Dreiecke ist ein Winkel $63^0\ 35'$, die Differenz der beiden andern beträgt $12^0\ 27'$; wie groß ist jeder derselben?
4. In einem Dreiecke sind zwei innere Winkel
   a) $a = 24^0$, $c = 52^0$; *b)* $a = 65^0\ 12'$, $c = 79^0\ 54'$; *c)* $a = 12^0\ 47'\ 43''$, $c = 81^0\ 9'\ 56''$;
   wie groß ist der entsprechende Außenwinkel?
5. Ein Außenwinkel eines Dreieckes sei $102^0\ 25'\ 39''$, ein innerer ihm nicht anliegender Winkel $40^0\ 40'\ 52''$; wie groß ist der andere ihm nicht anliegende Winkel?
6. Wie groß ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Summe der beiden spitzen Winkel?

7. In einem rechtwinkligen Dreiecke sei ein spitzer Winkel
a) 62^0, *b)* $38^0\ 39'$, *c)* $49^0\ 17'\ 25''$;
wie groß ist der andere spitze Winkel?

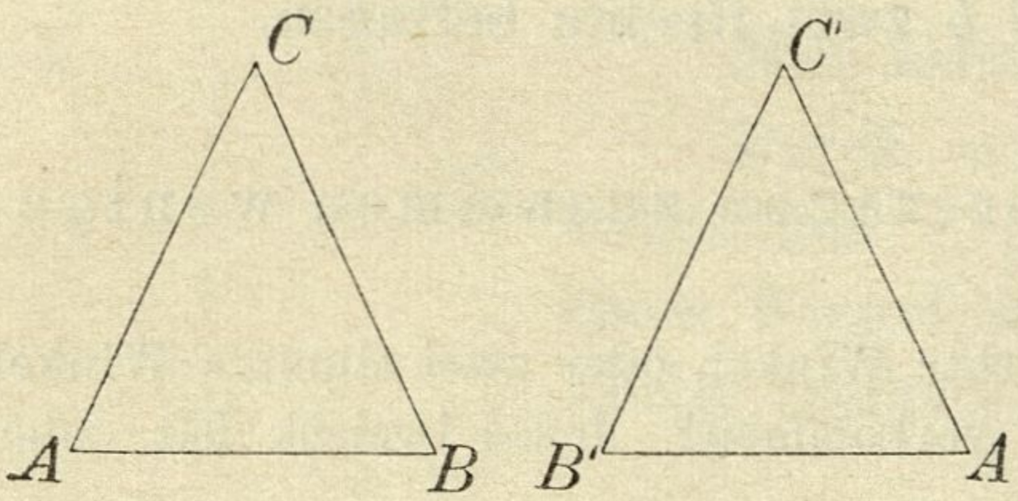
8. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt der eine Außenwinkel an der Hypotenuse
a) 96^0, *b)* $117^0\ 48'$, *c)* $133^0\ 56'\ 50''$;
wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

9. Ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck mit den drei Höhen zu zeichnen und die Lage derselben anzugeben.

§. 65. 1. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 71) die Seite $AC = BC$.

Stellt man sich das Dreieck ABC noch einmal, und zwar umgewendet als $A'B'C'$ vor, so kann man das letztere so auf das erstere legen, dass sich die Winkel C und C' decken; dann fällt der Punkt B' auf A, der Punkt A' auf B, die Seite $B'A'$ auf AB, und ist deshalb der Winkel $B' = A$; B' ist aber $= B$, also ist auch $B = A$. Hieraus folgt:

Fig. 71.



Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.

2. Ist umgekehrt in dem Dreiecke ABC der Winkel $B = A$, so kann man auf gleiche Weise die Seite $B'A'$ mit der Seite AB sich decken lassen und zeigen, dass die Seite $AC = BC$ sein muss; d. h.:

Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.

Aus dem ersten Satze folgt:

a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

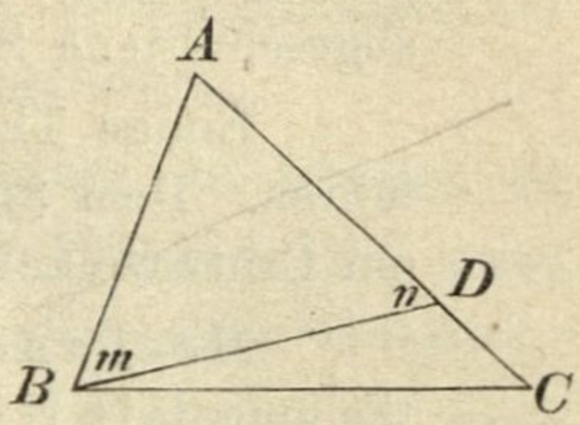
b) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich.

Aufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
2. Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel ein rechter ist?
3. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist *a)* $23^0\ 35'$, *b)* $65^0\ 10'\ 36''$, *c)* $118^0\ 48'\ 29''$; wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie?
4. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie *a)* $15^0\ 12'$, *b)* $48^0\ 5'\ 49''$, *c)* $73^0\ 41'\ 17''$ beträgt?
5. Wenn der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes 130^0 ist, wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie? Welcher Satz ergibt sich daraus?

§. 66. Ist (Fig. 72) $AB = AD$, also das Dreieck ABD gleichschenklig, so sind die Winkel m und n an der Grundlinie einander gleich. Dreht man BD um B bis BC, so wird der Winkel ABC größer als m, der Winkel ACB dagegen um ebensoviel kleiner als n, da der dritte Dreieckswinkel A ungeändert bleibt. In dem Dreiecke ABC ist demnach die Seite $AC > AB$ und zugleich der Winkel $ABC > ACB$.

Fig. 72.



Daraus folgt:

1. Der größeren Seite eines Dreieckes liegt ein größerer Winkel gegenüber; und umgekehrt:

2. Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt eine größere Seite gegenüber.

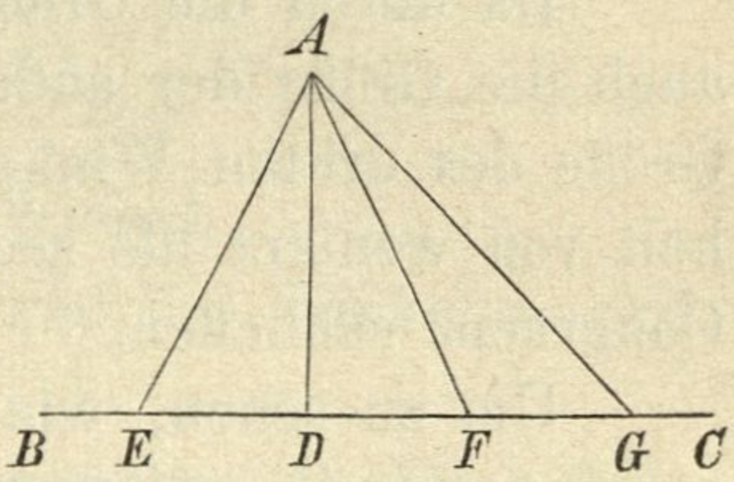
In einem rechtwinkligen Dreiecke ist daher die Hypotenuse, in einem stumpfwinkligen Dreiecke die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.

Aufgaben.

1. Wenn in einem Dreiecke $\sphericalangle A = 72^0$, $\sphericalangle B = 55^0$ ist, welche Seite desselben ist die größte?
2. Wenn in einem Dreiecke die Seiten 75 *cm*, 48 *cm*, 90 *cm* sind, welcher Winkel ist der größte, welcher der kleinste?
3. Ist es möglich, dass in einem Dreiecke mit zwei Seiten von 76 *mm* und 98 *mm* Länge der ersten ein Winkel von 95^0 gegenüberliegt?

§. 67. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 73) zu einer Geraden BC die Normale AD und zugleich mehrere schiefe Strecken AE, AF, AG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADF, ADG, in denen die Kathete AD kürzer ist als jede der Hypotenusen AE, AF, AG.

Fig. 73.



Daraus folgt:

Die Normale ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

§. 68. Aufgaben.

1. Einen Winkel von *a)* 60^0, *b)* 30^0, *c)* 120^0, *d)* 150^0 zu construieren.
   a) Durch Construction eines gleichseitigen Dreickes.
   b) Durch Halbierung eines Winkels von 60^0.
   c) und *d)* Durch Construction des Nebenwinkels von 60^0, bezüglich von 30^0.
2. Einen Winkel von *a)* 90^0, *b)* 45^0, *c)* 135^0 zu construieren.
   a) Nach §. 61 *f*.
   b) und *c)* Durch Halbierung eines Winkels von 90^0, und durch Construction des Nebenwinkels von 45^0.

3. Die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man bestimme die Größe eines Centriwinkels, indem man 360° durch die Zahl der verlangten gleichen Theile des Kreises dividiert, construiere diesen Winkel am Mittelpunkte, und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne in der Peripherie herum.

Einige Theilungen des Kreisumfanges lassen sich geometrisch ausführen. Dem 3ten, 4ten, 6ten, 8ten, 12ten Theile der Peripherie entspricht ein Centriwinkel von bezüglich 120°, 90°, 60°, 45°, 30°.

Mechanisch kann die Construction der Winkel und daher die Kreistheilung mit Hilfe des Transporteurs vorgenommen werden.

4. Einen Halbkreis in Grade zu theilen, oder einen Transporteur anzufertigen.

Damit der Halbkreis von Grad zu Grad getheilt erscheine, muss er 180 gleiche Theile erhalten. Zu diesem Ende theile man den Halbkreis zuerst in 3 gleiche Theile; durch zweimaliges Halbieren derselben ergeben sich 12 gleiche Bogen, jeder von 15°. Wird ferner durch Versuche jeder solche Bogen in 3, und jeder neu erhaltene Bogen in 5 gleiche Theile getheilt, so erhält man 180 gleiche Theile, deren jeder einen Grad umfasst.

2. Construction der Dreiecke und Congruenz derselben.

§. 69. Erklärung. Zwei Raumgrößen heißen congruent, wenn sie dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, so dass sie aufeinander gelegt sich vollständig decken.

Damit zwei Dreiecke congruent sind, müssen alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sein.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestandstücken in zwei Dreiecken auf ihre Congruenz schließen.

Um zu sehen, wie viele und welche Bestandstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke congruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wie viele und welche Stücke erforderlich sind, um mit denselben ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt construieren zu können, weil dann alle Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sein müssen.

1. Ist nur ein Bestandstück, ein Winkel oder eine Seite gegeben, so lassen sich unzählig viele verschiedene Dreiecke construieren, die alle jenes Stück enthalten. Durch ein Bestandstück ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

2. Auch mit zwei Bestandstücken: mit zwei Winkeln, mit einer Seite und einem anliegenden Winkel, mit einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel, oder mit zwei Seiten können unzählig viele verschiedene Dreiecke construiert werden. Durch zwei Bestandstücke ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

3. Sind drei Bestandstücke des Dreieckes gegeben, so können es sein: *a)* alle drei Winkel; *b)* eine Seite und zwei Winkel (die zwei anliegenden oder ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel); *c)* zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; *d)* zwei Seiten und der einer derselben gegenüberliegende Winkel; *e)* alle drei Seiten.

Da durch zwei Winkel eines Dreieckes auch der dritte Winkel bestimmt ist, mit zwei Winkeln sich aber kein bestimmtes Dreieck construieren lässt, so wird auch durch drei Winkel die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt. Der erste der angeführten fünf Fälle liefert also keine bestimmte Construction.

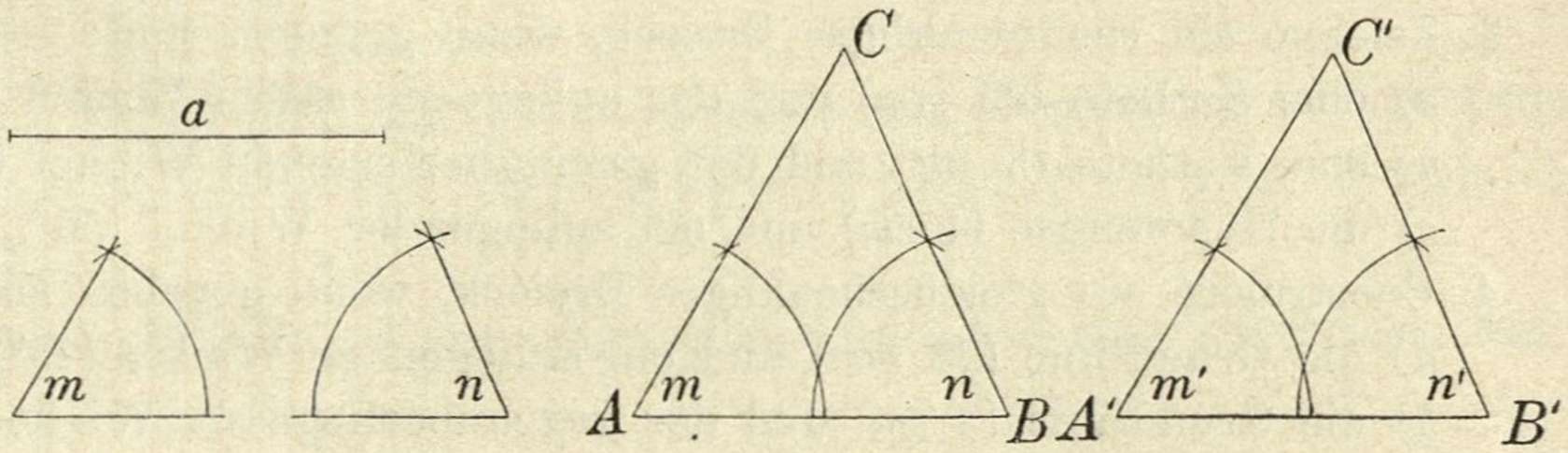
Es bleiben demnach nur die letzten vier Fälle zu untersuchen übrig.

§. 70. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die Construction ist nur möglich, wenn die Summe der beiden Winkel kleiner ist als 180^0.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden, oder ein ihr anliegender und der ihr gegenüberliegende Winkel.

Fig. 74.



a) Es sei (Fig. 74) a die gegebene Seite und die Winkel m und n die ihr anliegenden Winkel.

Man ziehe $AB = a$; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A den Winkel m, und in B den Winkel n auf, so geben die Geraden AC und BC die Richtungen der zweiten und der dritten Seite des Dreieckes an; der dritte Eckpunkt C kann daher nur in dem Schnittpunkte dieser Geraden liegen. Man erhält also aus den gegebenen drei Stücken nur das Dreieck ABC. Construiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck $A'B'C'$, so unterscheidet es sich von dem ersten nur durch den Ort, an dem es sich befindet, es ist nur eine Copie desselben und mit ihm congruent.

Daraus folgt:

1. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. **(I. Congruenzsatz.)** Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmt; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Dieser Fall lässt sich also auf den früheren *a)* zurückführen, und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.

Da rechtwinklige Dreiecke immer den rechten Winkel gleich haben, so gilt auch der Satz:

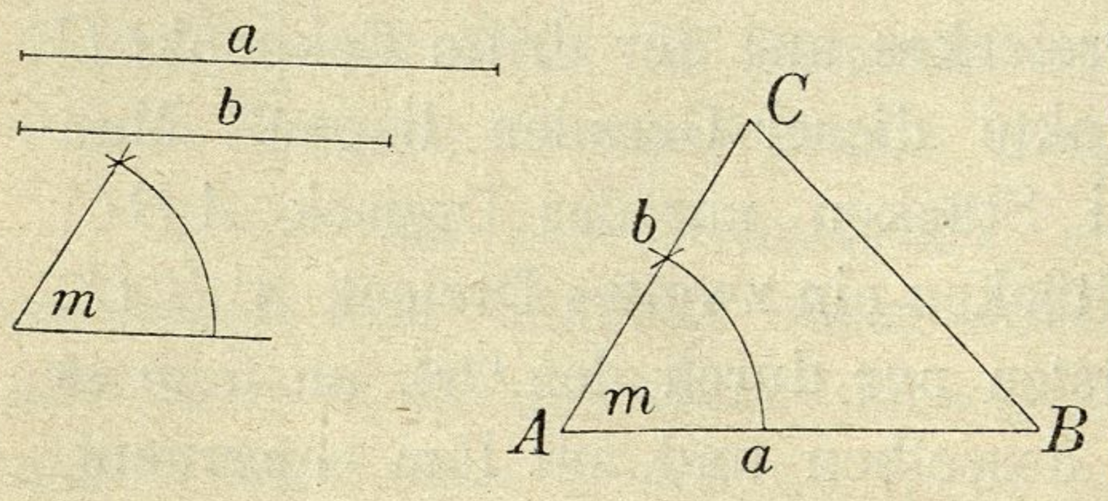
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie 1. die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, 2. eine Kathete und einen gleichliegenden spitzen Winkel paarweise gleich haben.

Aufgaben.

1. Construiere ein Dreieck mit der Seite 2 *cm* 9 *mm* und den anliegenden Winkeln 60° und 45°.
2. Construiere ein Dreieck, in welchem eine Seite 27 *mm*, ein anliegender Winkel 45° und der gegenüberliegende Winkel 75° beträgt.
3. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete (25 *mm*) und der anliegende spitze Winkel (30°);
   b) eine Kathete (3 *cm*) und der gegenüberliegende Winkel (75°);
   c) die Hypotenuse (4 *cm*) und ein anliegender Winkel (55°).
4. Construiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie (28 *mm*) und ein anliegender Winkel (75°);
   b) die Grundlinie (3 *cm*) und der gegenüberliegende Winkel (150°);
   c) der Schenkel (26 *mm*) und ein Winkel (30°) an der Grundlinie.
5. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Hypotenuse (35 *mm*) gegeben ist.

§. 71. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 75.



Es seien a und b (Fig. 75) die zwei gegebenen Seiten und m der von ihnen eingeschlossene Winkel. Um mit diesen drei Stücken ein Dreieck zu construieren, zeichne man zuerst einen Winkel $A = m$, trage dann auf dessen Schenkeln die gegebenen Seiten a und b auf.

Dadurch ist die Lage der Eckpunkte B und C, daher auch die dritte Seite bestimmt. ABC ist dann dasjenige Dreieck, welches die gegebenen drei Stücke enthält.

Wann ist die Construction nur möglich?

Da die Construction nur ein Dreieck ergibt, so folgt:

1. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. **(II. Congruenzsatz.)** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind demnach congruent, wenn sie die beiden Katheten paarweise gleich haben.

Aufgaben.

1. Construiere ein Dreieck mit den Seiten **2** *cm* und **3** *cm*, welche einen Winkel von 60^0 einschließen.
2. Zwei Strecken betragen **27** *mm* und **32** *mm;* zeichne mit denselben ein Dreieck, in welchem der von ihnen eingeschlossene Winkel 45^0 beträgt.
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn dessen Schenkel (**38** *mm*) und der Winkel am Scheitel (150^0) gegeben sind.
4. Construiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2 *cm* 2 *mm* und 2 *cm* 6 *mm* sind.
5. Construiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete 2 *cm* beträgt.

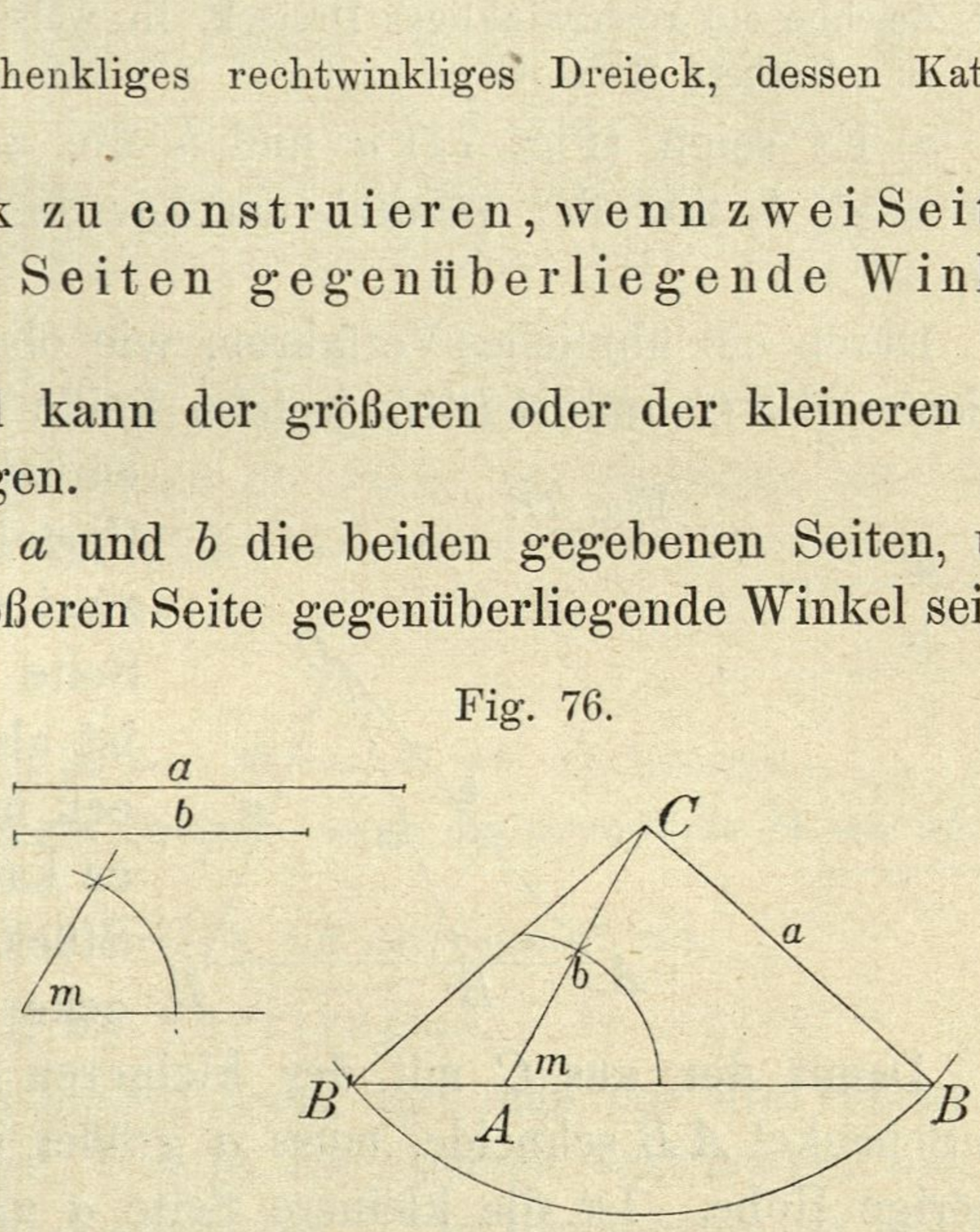
§. 72. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

a) Es seien (Fig. 76) a und b die beiden gegebenen Seiten, und zwar sei $a > b$; der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel sei m.

Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muss in dem zweiten Schenkel AB und zugleich in der Kreislinie liegen, welche aus C mit dem Halbmesser a beschrieben wird. Der Eckpunkt B muss daher der Durchschnitts-

Fig. 76.



punkt dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB sein. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B', und man erhält somit zwei Dreiecke ABC und $AB'C$. Von diesen enthält jedoch nur das erste die gegebenen drei Stücke.

Wann ist die Aufgabe möglich?

Da die Aufgabe nur eine Lösung hat, so folgt:

1. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. **(III. Congruenzsatz.)** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Daraus ergibt sich:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich haben.

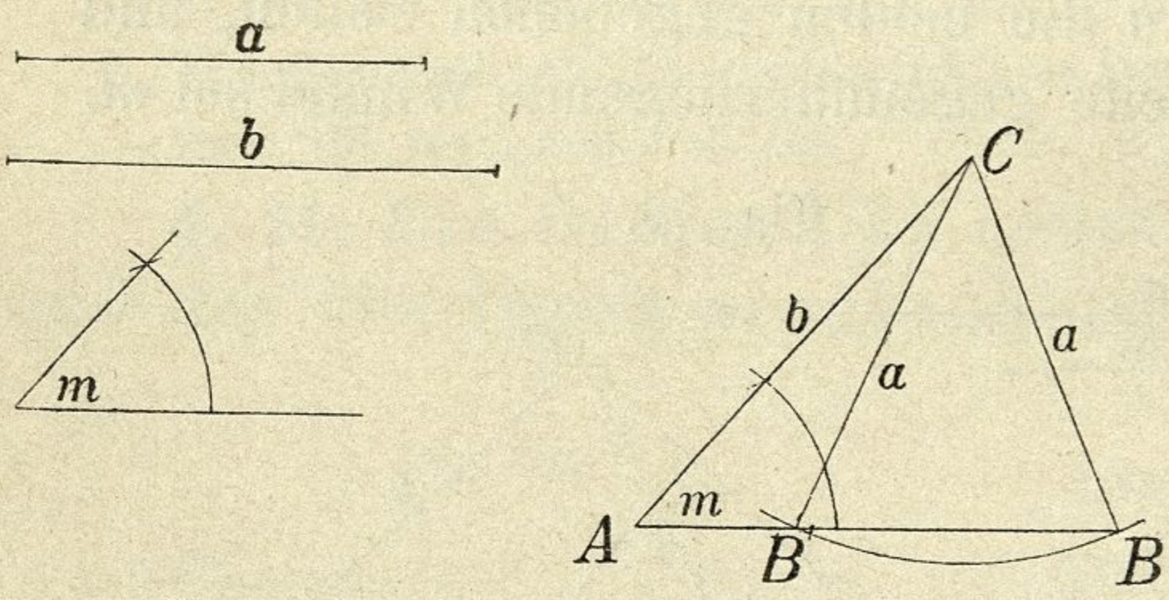
Aufgaben.

1. Construiere ein Dreieck, worin die Seiten 2 *cm* und 3 *cm* 5 *mm* vorkommen und der zweiten Seite ein Winkel von 75^0 gegenüberliegt.
2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse 25 *mm* und eine Kathete 2 *cm* ist.

b) Es seien (Fig. 77) a und b die zwei gegebenen Seiten, und zwar $a < b$, und der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, sei m.

Durch ein ähnliches Verfahren, wie oben unter a), erhält man zwei Dreiecke ABC und $AB'C$, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also im allgemeinen ein Dreieck nur zweideutig bestimmt; es kann aus der Gleichheit dieser Stücke auf die Congruenz der Dreiecke nicht geschlossen werden.

Fig. 77.



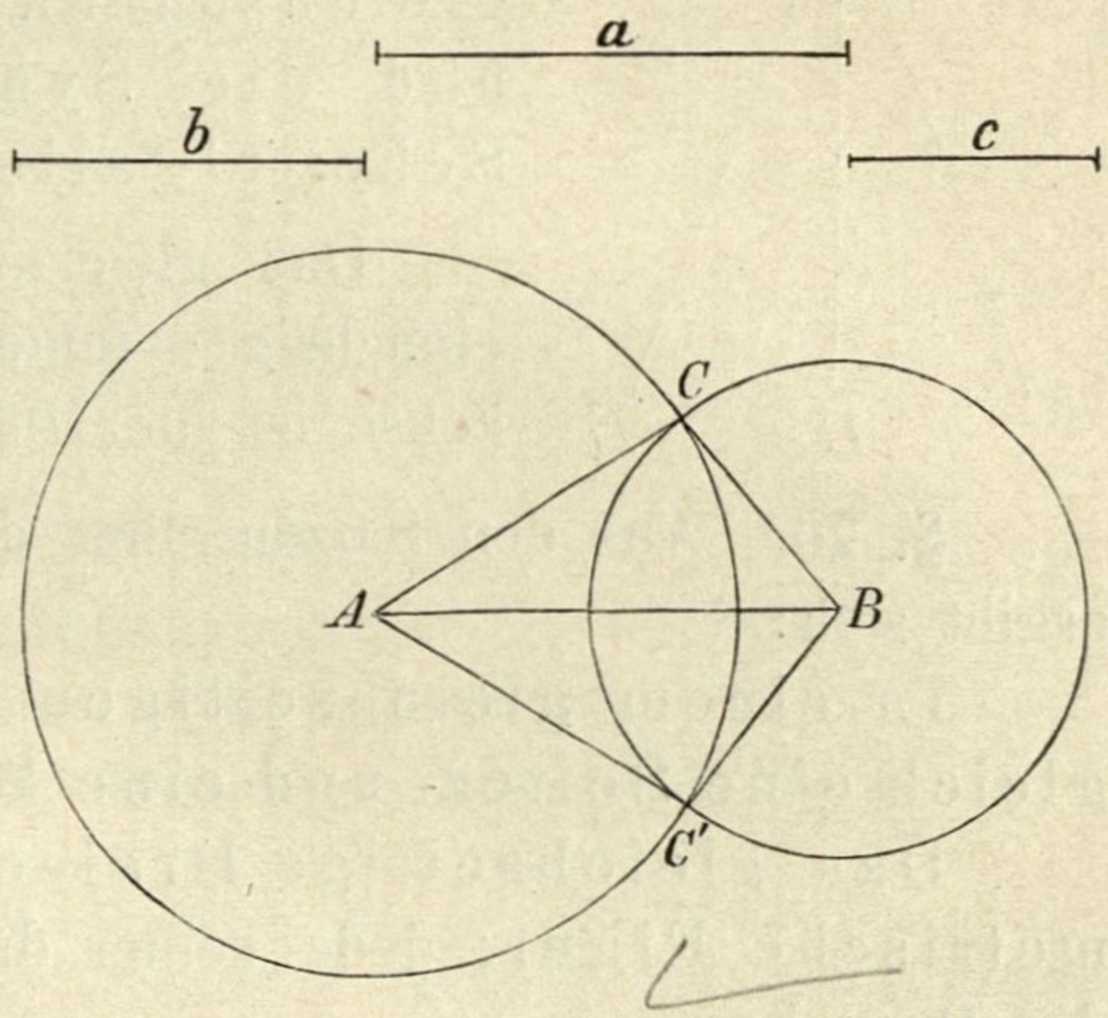
Damit der aus C mit der kleineren Seite a beschriebene Bogen den Schenkel AB schneide, muss a größer sein als die zur dritten Seite gehörige Höhe. Ist die kleinere Seite a gleich dieser Höhe, so fallen die beiden Schnittpunkte B und B' in einen einzigen zusammen, d. i. der Kreisbogen berührt die dritte Seite, und man erhält ein recht-

winkliges Dreieck. Ist endlich a kleiner als die Höhe, so entsteht kein Dreieck. Welche Eigenschaft muss der gegebene Winkel haben?

§. 73. Ein Dreieck zu construieren, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Die Construction ist nur möglich, wenn die dritte Seite kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden ersten Seiten ist; die ersten zwei Seiten können willkürlich gewählt werden.

Fig. 78.



Es seien (Fig. 78) a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke $AB = a$ auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt; der 3. Eckpunkt muss der Durchschnittspunkt zweier Kreise sein, welche von den Mittelpunkten A und B mit den Radien b und c beschrieben werden. Da sich aber die beiden Kreise in zwei Punkten C und C' schneiden, so erhält man zwei Dreiecke ABC und ABC', welche die gegebenen drei Seiten haben. Diese zwei Dreiecke haben jedoch dieselbe Größe und Gestalt, da sich, wenn das Dreieck ABC' um die Seite AB umgewendet und auf das Dreieck ABC gelegt wird, beide Dreiecke decken; denn AB ist die Symmetrale von CC'.

Daraus folgt:

1. Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. **(IV. Congruenzsatz.)** Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Aufgaben.

1. Construiere mit den Seiten 38 *mm*, 30 *mm*, 41 *mm* ein Dreieck.
2. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn die Grundlinie 24 *mm* und ein Schenkel 29 *mm* ist.
3. Construiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 28 *mm*.

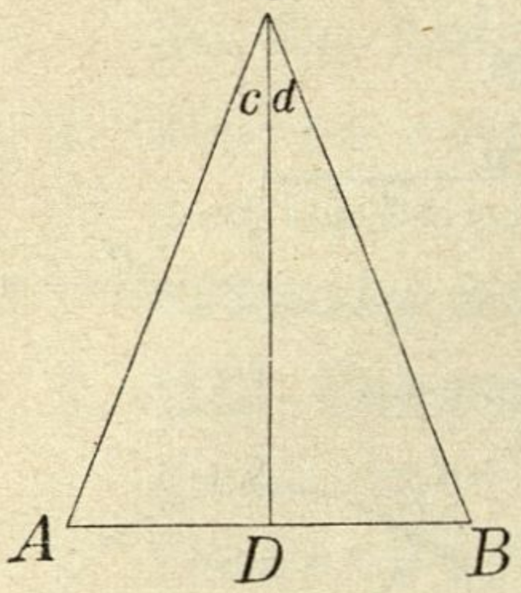
§. 74. Ein Dreieck zu übertragen.

Um diese Construction auszuführen, darf man nur drei Stücke des gegebenen Dreieckes nehmen, welche ein Dreieck bestimmen, und mit denselben das neue Dreieck construieren. Am einfachsten ist die Construction mittelst der drei Seiten.

3. Symmetrie des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes.

§. 75. Es sei (Fig. 79) $AC = BC$, also das Dreieck ABC gleichschenklig. Die Symmetrale der Grundlinie muss durch C gehen. (§. 60 *a*.) Dreht man das Dreieck BCD um CD um 180^0, so deckt es ACD. Folglich ist $c = d$.

Fig. 79.



Die Symmetrale der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, die Höhe und die Symmetrale des Winkels am Scheitel fallen in dieselbe Gerade.

Das gleichschenklige Dreieck ist mithin eine einachsig symmetrische Figur. Seine Symmetrieachse ist die Höhe.

§. 76. Aus den Sätzen über das gleichschenklige Dreieck §. 75 ergibt sich:

In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

Das gleichseitige Dreieck ist eine dreiachsig symmetrische Figur; jede seiner drei Höhen ist eine Symmetrieachse des Dreieckes.

Aufgaben.

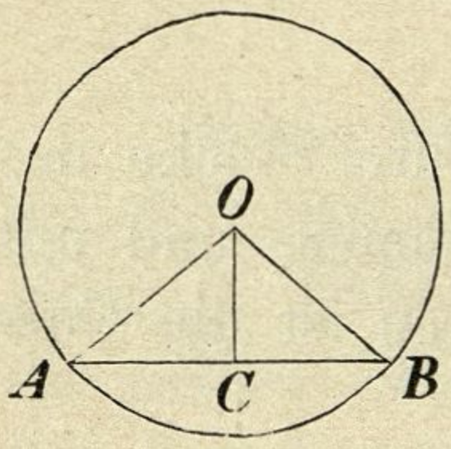
1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construieren, wenn die Grundlinie (32 *mm*) und die Höhe (22 *mm*) gegeben sind.
2. Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck zu construieren, wenn die Höhe (35 *mm*) gegeben ist.
3. In welcher Linie liegen die Scheitel aller gleichschenkligen Dreiecke über derselben Grundlinie?
4. Ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Höhe (30 *mm*) zu construieren.

V. Grundeigenschaften des Kreises.

1. Gerade und Winkel in Beziehung auf den Kreis.

§. 77. Jede Sehne AB (Figur 80) eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden.

Fig. 80.



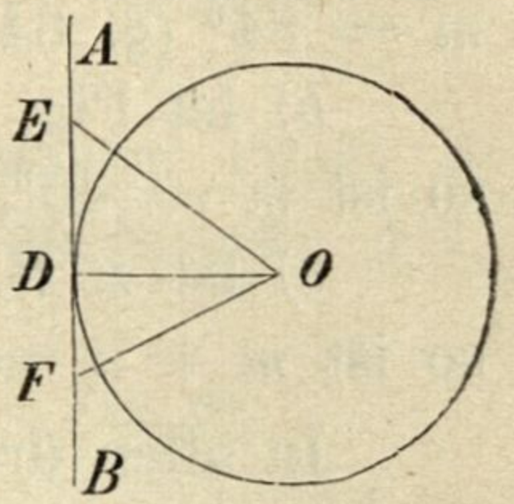
Aus §. 75 folgt:

1. Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte die Senkrechte auf eine Sehne, so wird diese dadurch halbiert.

2. Die Symmetrale einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 78. Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf denselben die Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Fig. 81.



Beweis. Es sei (Fig. 81) $AB \perp OD$. Jede zu AB gezogene schiefe Strecke, wie OE, OF,..., ist länger als die Senkrechte OD; also liegen die Punkte E, F... außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, ist also eine Tangente des Kreises.

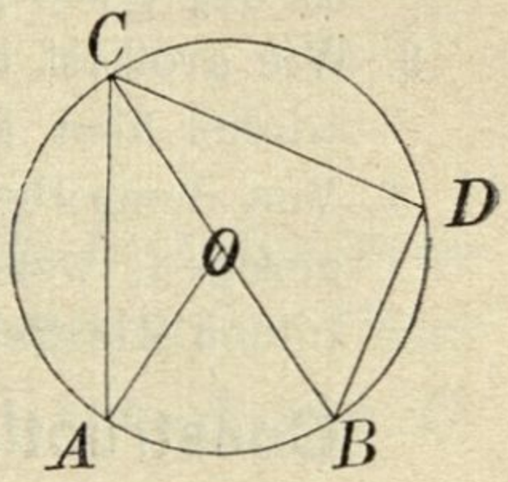
Zusatz. Die auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt eines Kreises heißt der Centralabstand. Ist der Centralabstand einer Geraden kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius, so ist beziehungsweise die Gerade eine Secante, eine Tangente, oder sie liegt ganz außerhalb des Kreises. Und umgekehrt.

§. 79. Über die auf die Centriwinkel sich beziehenden Sätze siehe §. 58.

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

Fig. 82.



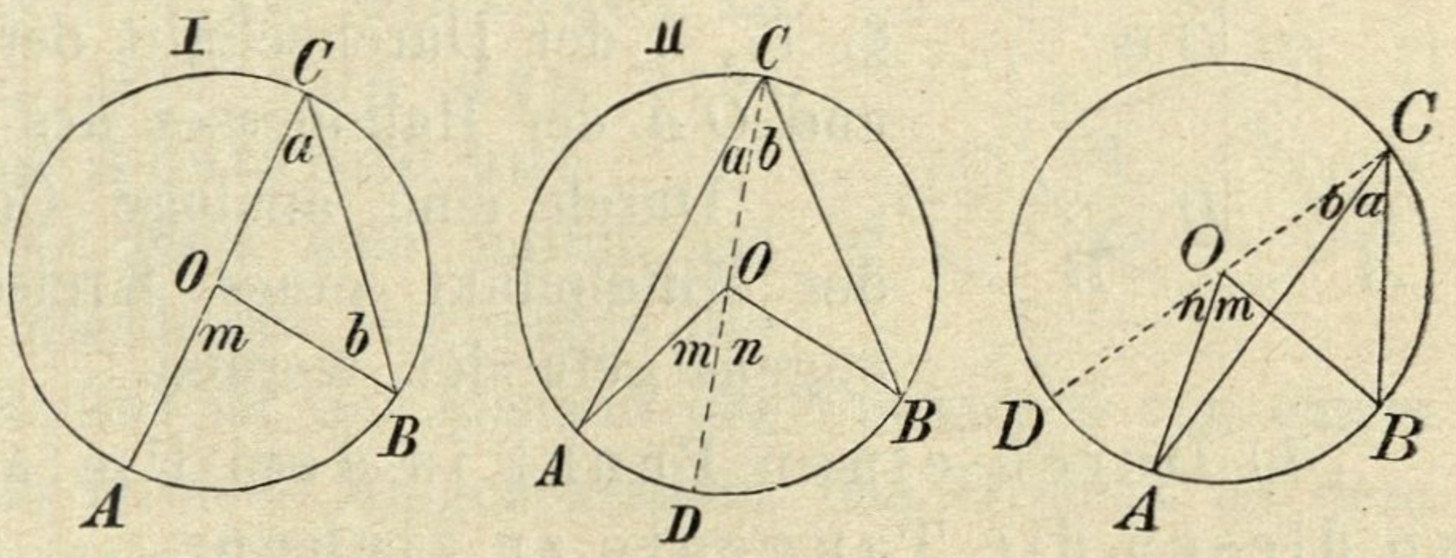
AOB (Fig. 82) ist ein Centriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

Ein Peripheriewinkel BDC, dessen zugehöriger Bogen ein Halbkreis ist, heißt ein Winkel im Halbkreise.

§. 80. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels, der auf demselben Bogen aufsteht.

Beweis. Der Mittelpunkt eines Kreises kann in Beziehung auf einen Peripheriewinkel eine dreifache Lage haben: er liegt entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 83, I), oder er liegt in der

Fig. 83.



Winkelfläche des Peripheriewinkels (Fig. 83, *II*), oder er liegt außerhalb der Winkelfläche desselben (Fig. 83, *III*).

a) Ist Fig. 83, *I* z. B. $\sphericalangle a = 42^0$, so ist auch $b = 42^0$ und $m = 84^0$ (§. 64.)

b) Ist Fig. 83, *II* z. B. $a = 20^0$, $b = 33^0$, also $a + b = 53^0$, so ist $m = 40^0$, $n = 66^0$ und $m + n = 106^0$.

c) Ist z. B. Fig. 83, *III* $a = 34^0$, $b = 17^0$, also $a + b = 51^0$, so ist $m + n = 102^0$, $n = 34^0$; mithin $m = 68^0$.

In allen drei Fällen ist also der Centriwinkel doppelt so groß als der zugehörige Peripheriewinkel.

Da ein Centriwinkel durch den ganzen zugehörigen Bogen gemessen wird, so hat ein Peripheriewinkel die Hälfte des zugehörigen Bogens zum Maß.

Daraus folgt:

1. Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.

2. Ein Winkel im Halbkreise ist ein rechter. Denn er hat die Hälfte des Halbkreises zum Maß.

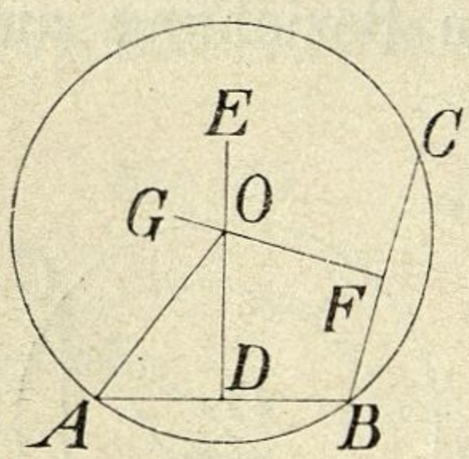
§. 81. Aufgaben.

1. Ein Centriwinkel eines Kreises sei *a)* 64^0, *b)* $87^0\ 45'$, *c)* $128^0\ 13'\ 50''$, *d)* $64\frac{2}{3}^0$; wie groß ist der Peripheriewinkel über demselben Bogen?
2. Ein Peripheriewinkel eines Kreises sei *a)* 56^0, *b)* $41^0\ 37'$, *c)* $108^0\ 12'\ 12''$, *d)* $64\frac{2}{3}^0$; wie groß ist der Centriwinkel über demselben Bogen?
3. Wie groß ist ein Peripheriewinkel eines Kreises, wenn der zugehörige Centriwinkel über $\frac{3}{8}$ der Peripherie aufsteht?
4. Von demselben Punkt auf der Peripherie eines Kreises werden zwei Sehnen gezogen, welche Bogen von $130\frac{1}{2}^0$ und $70\frac{2}{3}^0$ abschneiden; welchen Winkel bilden die Sehnen?

Constructionsaufgaben.

§. 82. *a)* Durch drei Punkte *A*, *B*, *C* (Fig. 84), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Fig. 84.



Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte die Symmetralen derselben; dann ist nach §. 77, 2 der Durchschnitt derselben der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Durch eine analoge Construction kann auch der Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens gefunden werden.

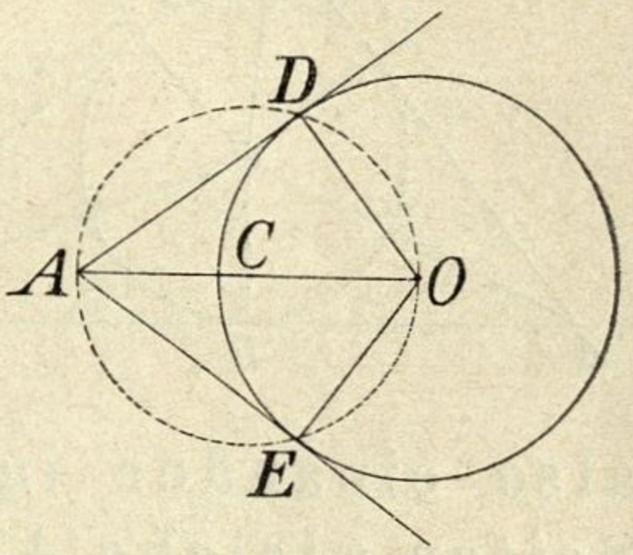
b) Durch einen Punkt in dem Umfange eines Kreises an diesen die Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man errichte in dem gegebenen Punkte auf den Halbmesser die Senkrechte; diese ist die verlangte Tangente (§. 78).

c) Durch einen Punkt *A* außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man verbinde (Fig. 85) den gegebenen Punkt *A* mit dem Mittelpunkte *O* des gegebenen Kreises durch die Strecke *AO*, halbiere diese in *C*, und beschreibe aus *C* mit dem Halbmesser *CA* einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten *D* und *E* schneidet. Zieht man nun *AD* und *AE*, so sind diese beiden Geraden, da die Winkel *ADO* und *AEO* als Winkel im Halbkreise rechte sind, Tangenten des Kreises.

Fig. 85.



Aus der Congruenz der Dreiecke *ADO* und *AEO* folgt, dass die Tangenten *AE* und *AD* einander gleich sind.

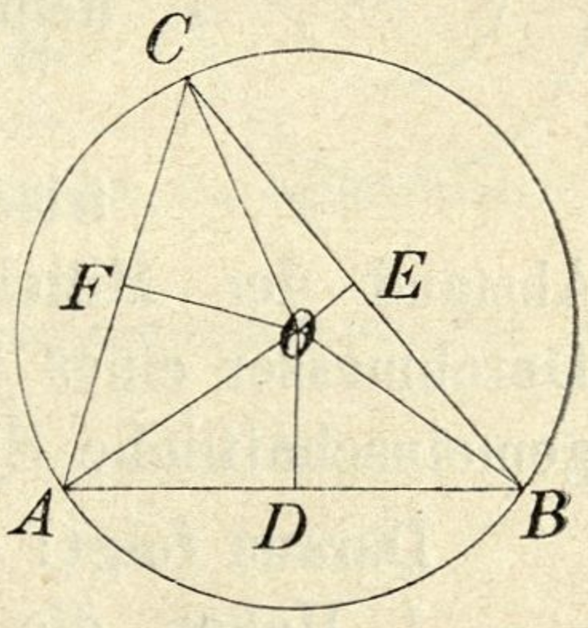
§. 83. Übungsaufgaben:

1. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.
2. Einen Kreis zu zeichnen. welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.
3. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

2. Sehnen- und Tangentendreiecke.

§. 84. Es sei in dem Dreiecke *ABC* (Fig. 86) *DO* die Symmetrale der Seite *AB*, und *FO* die Symmetrale der Seite *AC*. Dann ist der Schnittpunkt *O* der beiden Symmetralen sowohl von *A* und *B*, als auch von *A* und *C*, somit auch von *B* und *C* gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt *O* von *B* und *C* gleiche Abstände, so muss er auch in der Symmetrale der Seite *BC* liegen.

Fig. 86.



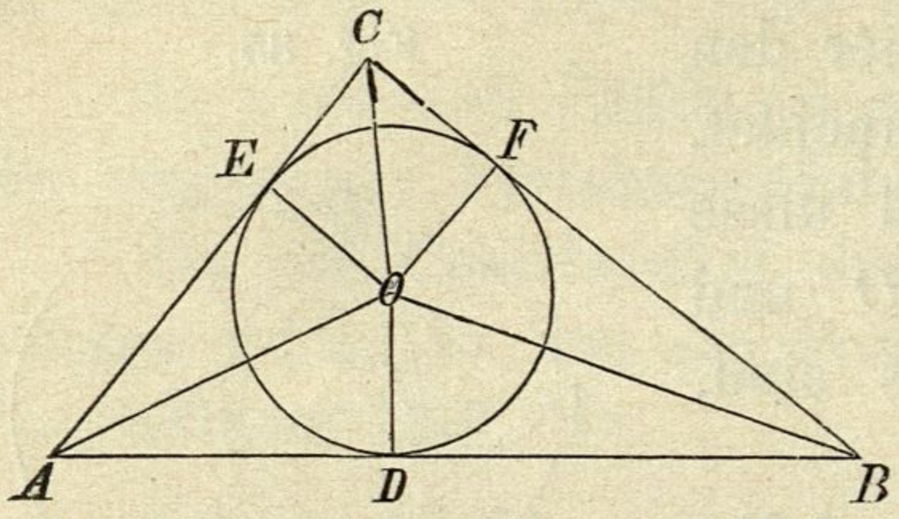
Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Eckpunkten gleiche Abstände hat.

Von dem Punkt *O* lässt sich mithin ein Kreis beschreiben, der durch die Eckpunkte des Dreieckes geht. Sein Radius ist der Abstand des Punktes *O* von einem Eckpunkt. Er heißt dem Dreieck umgeschrieben, das Dreieck ist dem Kreise eingeschrieben (Sehnendreieck).

Wo liegt der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises *a*) bei einem spitzwinkligen, *b*) bei einem rechtwinkligen, *c*) bei einem stumpfwinkligen Dreieck?

§. 85. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 87) AO die Symmetrale des Winkels BAC und CO die Symmetrale des Winkels ACB. Dann ist der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen sowohl von den Schenkeln AB und AC, als auch von den Schenkeln AC und BC, somit auch von AB und BC gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von den Schenkeln AB und BC gleiche Abstände, so muss er auch in der Symmetrale des Winkels ABC liegen.

Fig. 87.



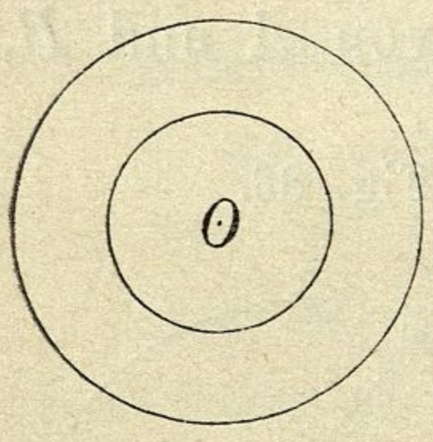
Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

Von dem Punkte O lässt sich ein Kreis beschreiben, der die Seiten des Dreieckes berührt. Sein Radius ist der Abstand des Punktes O von einer Seite. Er heißt dem Dreieck eingeschrieben. (Tangentendreieck.)

Im gleichseitigen Dreieck fallen die Mittelpunkte des ein- und umgeschriebenen Kreises zusammen; denn jede Seitensymmetrale eines gleichseitigen Dreieckes ist zugleich eine Winkelsymmetrale desselben.

3. Lage zweier Kreise gegeneinander.

Fig. 88.



§. 86. Zwei Kreise heißen concentrisch oder excentrisch, je nachdem sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, oder nicht. Die zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise liegende Fläche heißt Kreisring. (Fig. 88.)

§. 87. Die durch die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise gelegte Gerade heißt Centrale, der Abstand der Mittelpunkte Centralabstand. Da in die Centrale ein Durchmesser eines jeden der beiden Kreise fallen muss, so ist sie die gemeinschaftliche Symmetrale derselben.

Daraus folgt:

1. Haben die Umfänge zweier Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich, so muss dieser in der Centrale liegen. In diesem Falle berühren sich die beiden Kreise, der gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt.

2. Haben die Umfänge zweier Kreise zwei Punkte gemeinschaftlich, so liegen diese symmetrisch bezüglich der Centrale. Die Centrale ist daher auch die Symmetrale der gemeinschaftlichen Sehne, der zugehörigen Centriwinkel und Bogen. Die Kreise schneiden sich.

Die Berührung kann von außen (Fig. 89) oder von innen (Fig. 90) stattfinden, je nachdem der kleinere Kreis außerhalb oder innerhalb des größeren liegt. Im ersten Falle ist der Centralabstand der Summe, im zweiten der Differenz der beiden Radien gleich.

Fig. 89.

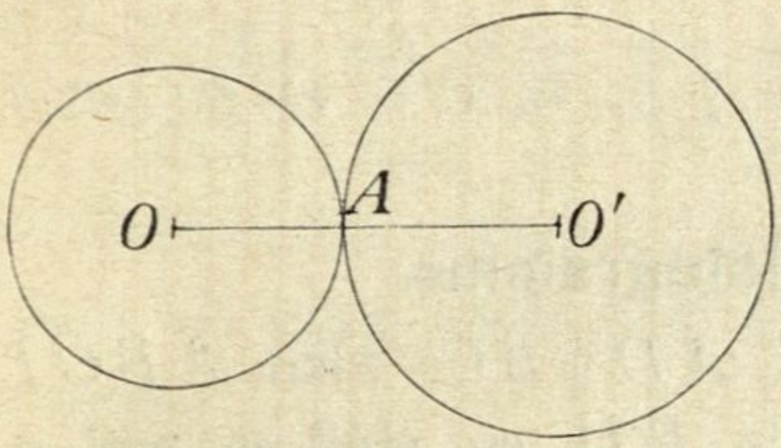


Fig. 90.

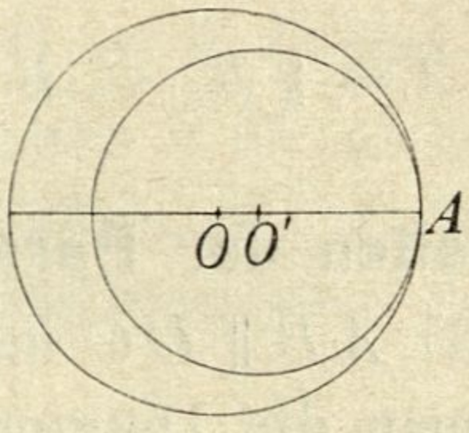
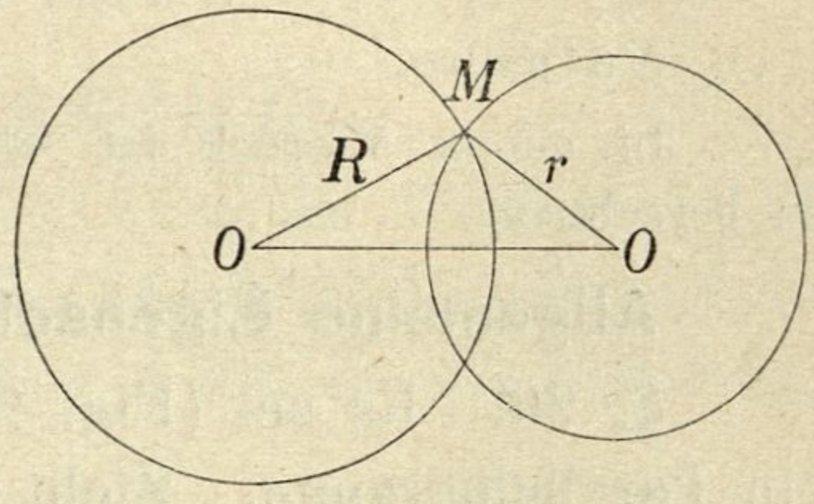


Fig. 91.



Da in einem Dreiecke jede Seite zwischen der Summe und der Differenz der beiden andern liegt, so ist (Fig. 91) $R + r > O\,O' > R - r$. Schneiden sich also zwei Kreise, so ist der Centralabstand kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der beiden Radien.

Von zwei excentrischen Kreisen, welche sich weder berühren noch schneiden, kann der kleinere innerhalb oder außerhalb des größeren liegen. Im ersten Falle ist der Centralabstand kleiner als die Differenz, im zweiten größer als die Summe der Halbmesser.

§. 88. Übungsaufgaben.

1. Die Lage zweier Kreise zu bestimmen, für welche der Centralabstand und die Halbmesser folgende Werte haben:
   a) Centralabstand 8 *dm*, Halbmesser 5 *dm* und 3 *dm*;
   b) „ 2 *dm*, „ 7 *dm* „ 4 *dm*;
   c) „ 9 *dm*, „ 6 *dm* „ 2 *dm*;
   d) „ 6 *dm*, „ 8 *dm* „ 3 *dm*;
   e) „ 4 *dm*, „ 9 *dm* „ 5 *dm*;
   f) „ 0, „ 6 *dm* „ 3 *dm*.
2. Mit den Halbmessern 35 *mm* und 21 *mm* zwei Kreise zu construieren, die sich *a)* von außen, *b)* von innen berühren.
3. Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu construieren, welcher einen gegebenen Kreis berührt.

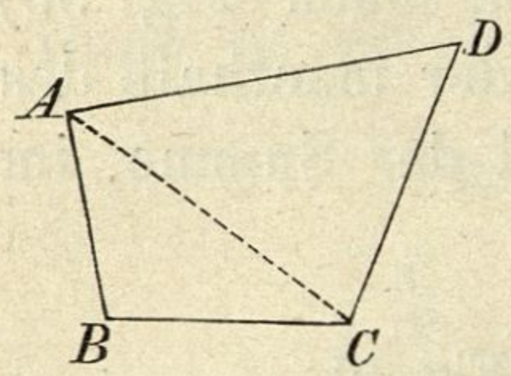
VI. Das Viereck.

Winkelsumme eines Viereckes.

§. 89. Zieht man in dem Vierecke $A\,B\,C\,D$ (Fig. 92) die Diagonale $A\,C$, so wird dadurch das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt und es sind

die vier Winkel des Viereckes so groß, als die sechs Winkel der zwei Dreiecke zusammengenommen; die Winkel der beiden Dreiecke betragen nun 4 *R*.

Fig. 92.



Daraus folgt:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten oder 360°.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder derselben?

Wie viele spitze, rechte, stumpfe oder erhabene Winkel kann ein Viereck enthalten?

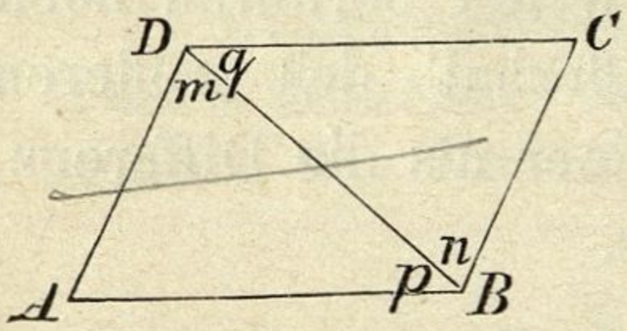
Aufgabe.

In einem Viereck ist $\sphericalangle A = \frac{2}{3} R$, $\sphericalangle B = \frac{3}{4} R$, $\sphericalangle C = 1\frac{1}{6} R$; $\sphericalangle D$ zu berechnen.

Allgemeine Eigenschaften der Parallelogramme.

§. 90. Es sei (Fig. 93) $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$, also $ABCD$ ein Parallelogramm. Zieht man die Diagonale BD, so sind m und n, und ebenso p und q einander gleich, denn sie sind paarweise Wechselwinkel bei Parallelen; daher ist $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (I. Congruenzsatz), und folglich $AB = CD$ und $AD = BC$.

Fig. 93.



1. Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.
2. In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich; oder

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Sind in einem Parallelogramme zwei anstoßende Seiten gleich, so sind es alle.

Nach der Länge der Seiten unterscheidet man daher gleichseitige und ungleichseitige Parallelogramme.

Aus dem obigen zweiten Satze folgt auch:

Normale zwischen Parallelen sind einander gleich.

Die Normale zwischen zwei Parallelen gibt den Abstand derselben an.

Aufgabe.

Zu einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Abstand die Parallele zu ziehen.

Man errichte zu der Geraden eine Normale, mache diese gleich dem gegebenen Abstand und ziehe zu ihr im Endpunkte wieder die Normale; diese ist zu der gegebenen Geraden in dem gegebenen Abstand parallel (§. 56).

§. 91. *a)* Es sei in dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 93) $AB = CD$ und $AD = BC$.

Zieht man die Diagonale BD, so ist $\triangle ABD \cong BCD$ (IV. Congruenzsatz); da $AB = CD$ ist, muss auch $m = n$, daher, da diese Winkel Wechselwinkel sind, $AD \parallel BC$ sein; wegen $AD = BC$ folgt ebenso $p = q$, und somit $AB \parallel DC$. Es ist also $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$, mithin das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm.

Sind also in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

b) Es sei (Fig. 93) $AB = CD$ und $AB \parallel CD$.

Zieht man die Diagonale BD, so ist $p = q$ als Wechselwinkel bei Parallelen, daher $\triangle ABD \cong BCD$ (II.), und folglich $AD = BC$. Dann ist aber nach dem vorhergehenden Satze $ABCD$ ein Parallelogramm.

Sind also in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. 92. Da die Schenkel zweier gegenüberliegender Winkel eines Parallelogrammes parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, so sind sie gleich.

Welche Eigenschaft haben zwei an derselben Seite liegende Winkel eines Parallelogrammes?

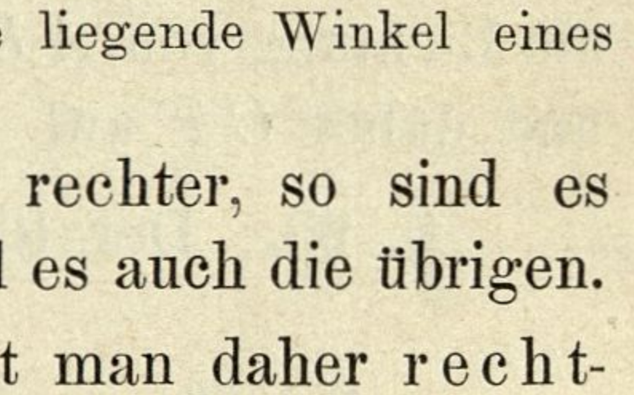
Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die übrigen; ist ein Winkel ein schiefer, so sind es auch die übrigen.

Nach der Größe der Winkel unterscheidet man daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

In einem Parallelogramme ist ein Winkel *a)* 48° 18′, *b)* 94° 35′ 40″, *c)* 108° 28′ 15″; wie groß ist jeder der drei andern?

§. 93. Zieht man in dem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 94) die Diagonalen AC und BD, so ist $\triangle AOB \cong COD$ (I. Congruenzsatz), weil $AB = CD$, $a = c$, $b = d$ ist; es müssen daher die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich sein, also $BO = DO$, $AO = CO$. Daraus folgt:

Fig. 94.



In jedem Parallelogramme halbieren die Diagonalen einander.

Jede in einem Parallelogramme durch den Schnittpunkt O (Fig. 94) der Diagonalen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbiert.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der Congruenz der Dreiecke AOF und EOC. Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des Parallelogramms. Es folgt daraus, dass jedes Parallelogramm eine centrische Figur ist; das Centrum ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen.

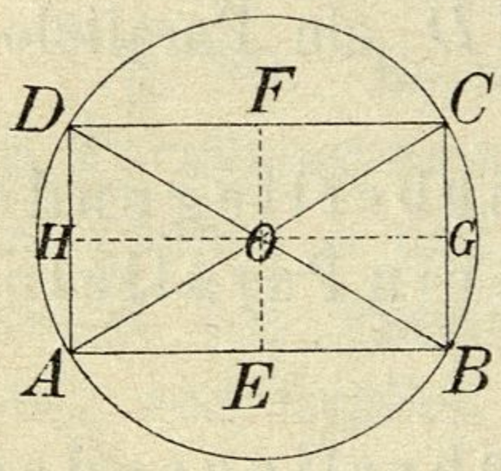
Das Rechteck, der Rhombus und das Quadrat.

§. 94. Das Rechteck hat folgende besondere Eigenschaften:

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Es sei $ABCD$ (Fig. 95) ein Rechteck; dann ist $\triangle ABC \cong ABD$ (II. Congruenzsatz) und daher $AC = BD$.

Fig. 95.



2. Dem Rechteck lässt sich ein Kreis umschreiben, d. h. es ist ein Sehnenviereck; der Mittelpunkt desselben ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen. (§. 93 u. 94, 1.)

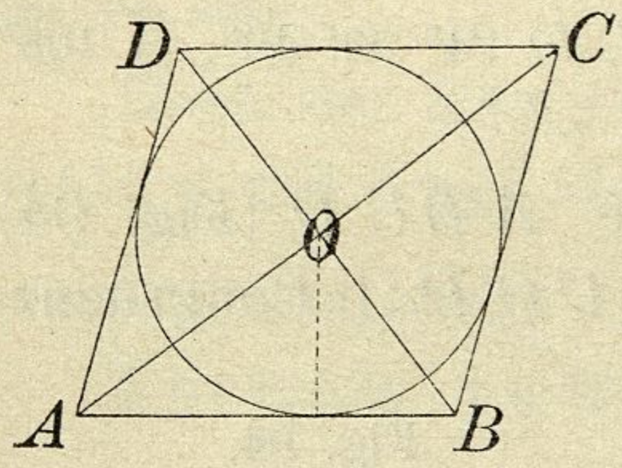
3. Das Rechteck ist zweiachsig symmetrisch; jede der zwei Seitensymmetralen ist eine Symmetrieachse des Rechteckes.

Dass die Symmetrale EF der Seite AB das Rechteck in zwei symmetrisch liegende Theile theilt, ergibt sich, wenn man den einen Theil $EBCF$ um diese Linie als Achse um 180° dreht; es fällt dabei B auf A, BC in die Richtung von AD wegen $\sphericalangle B = \sphericalangle A$, C auf D wegen $BC = AD$, und daher CF auf DF.

§. 95. Der Rhombus hat folgende besondere Eigenschaften:

1. Jede Diagonale eines Rhombus ist die Symmetrale der andern.

Fig. 96.



2. Der Rhombus ist zweiachsig symmetrisch; jede der zwei Diagonalen ist eine Symmetrieachse desselben.

Die Sätze 1 und 2 ergeben sich aus $AD = CD = BC = AB$ (Fig. 96). Da mithin AO mit CO durch eine Drehung um 180° um BD zur Deckung gebracht werden kann, so ist dies auch mit ABD und CBD der Fall, ebenso bei ADC und ABC. Daraus folgt, dass die Diagonalen eines Rhombus zugleich die Symmetralen der Winkel sind.

3. Dem Rhombus lässt sich ein Kreis einschreiben, d. h. er ist ein Tangentenviereck. Der Mittelpunkt ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen, der Radius der Abstand desselben von einer Seite. (§. 95, 2 und §. 60 *b*.)

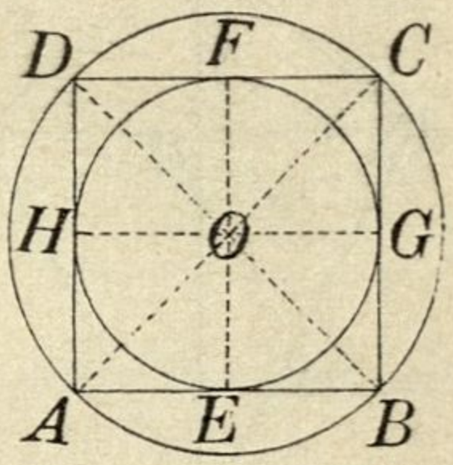
Aufgabe.

Zu beweisen, dass ein Rhombus durch die beiden Diagonalen in vier congruente Dreiecke getheilt wird.

§. 96. Ein Quadrat $ABCD$ (Fig. 97) vereinigt in sich die Eigenschaften des Rechteckes und des Rhombus.

Man hat daher folgende Sätze:

Fig. 97.



1. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und zueinander normal; sie sind die Symmetralen der Winkel, welche sie durchschneiden.

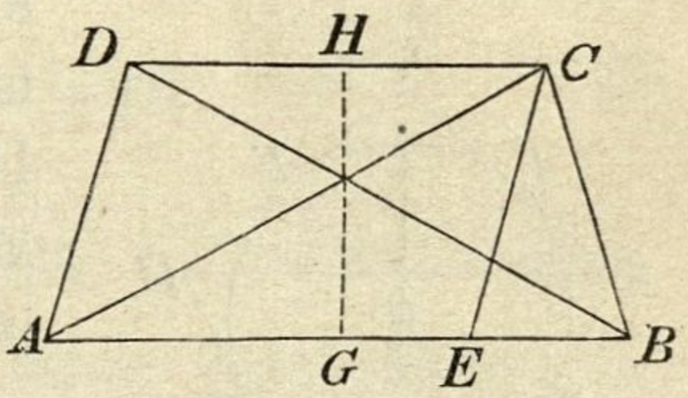
2. Das Quadrat ist vierachsig symmetrisch; sowohl jede der zwei Seitensymmetralen als jede der zwei Diagonalen ist eine Achse desselben.

3. Dem Quadrate lässt sich ein Kreis ein- und umschreiben. Denn der Durchschnittspunkt der Diagonalen hat *a)* von den Seiten, *b)* von den Ecken gleiche Abstände.

Das Trapez und das Deltoid.

§. 97. Zieht man in dem Trapeze $ABCD$ (Fig. 98) $CE \parallel DA$, so zerfällt dasselbe in ein Parallelogramm $AECD$ und in ein Dreieck ECB, welches letztere die zwei Schenkel und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat.

Fig. 98.



Ist das Trapez $ABCD$ gleichschenklig, so ist in dem Dreieck EBC auch $CE = CB$, daher ist Winkel $B = E = A$. Dann sind auch die Winkel BCD und ADC gleich als Supplemente zu den gleichen Winkeln B und A.

Das gleichschenklige Trapez hat daher folgende Eigenschaften:

1. Die Winkel an jeder der zwei Parallelseiten sind einander gleich;

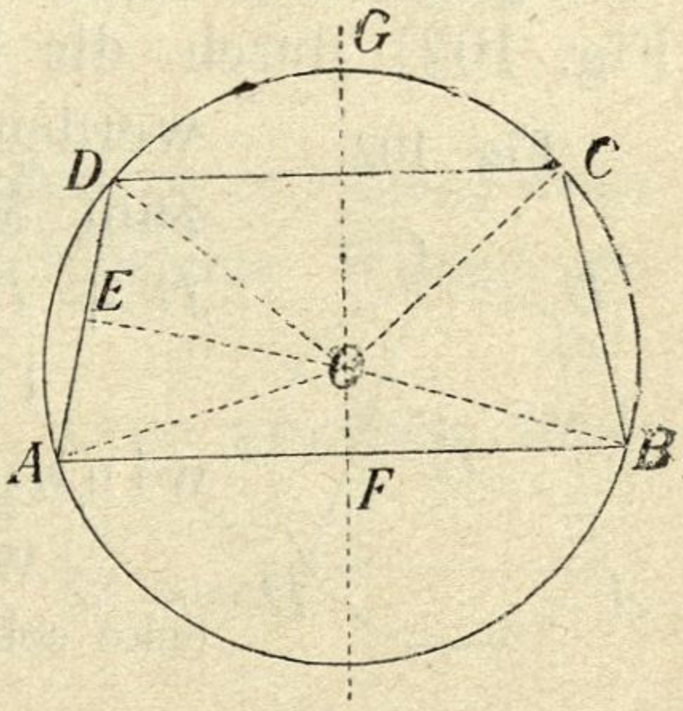
2. Die Diagonalen sind einander gleich.

Folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABC und ABD.

3. Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch; seine Achse ist die Symmetrale einer Parallelseite. (Beweis durch Umwenden; vgl. §. 94, 3.)

4. Das gleichschenklige Trapez ist ein Sehnenviereck; der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt der Symmetralen zweier anstoßender Seiten. (Fig. 99.) Denn es ist $AO = DO = CO = BO$.

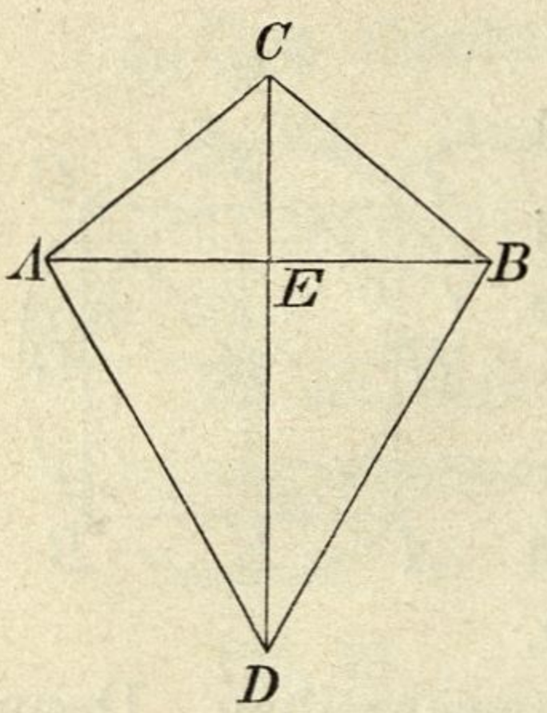
Fig. 99.



Aufgabe.

Wie viele Winkel *a)* eines Trapezes, *b)* eines gleichschenkligen Trapezes müssen bekannt sein, um die andern berechnen zu können?

Fig. 100.



§. 98. Ein Viereck, das zwei Paare gleicher anstoßender Seiten hat, heißt ein Deltoid. Ist (Fig. 100) $AC = BC$ und $AD = BD$, so ist $ACBD$ ein Deltoid; dasselbe besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Grundlinie die Diagonale AB ist.

Besondere Eigenschaften:

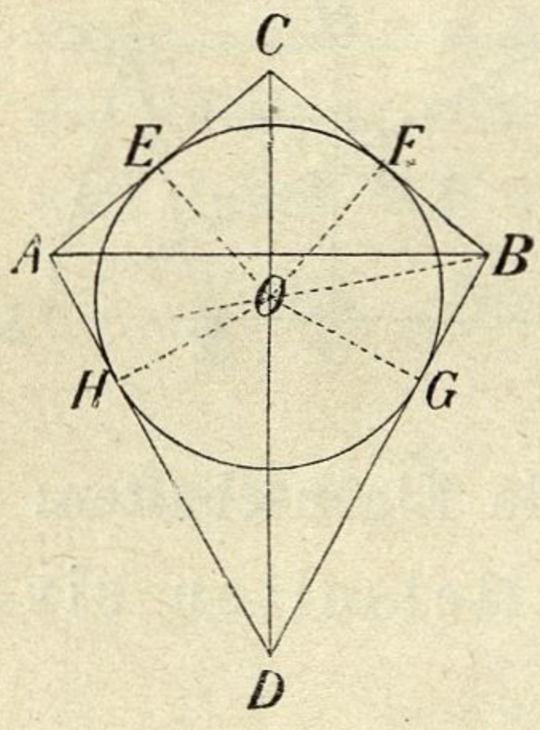
1. Die Diagonalen eines Deltoids sind zueinander normal.

Da $AC = BC$ und $AD = BD$ ist, so ist CD die Symmetrale von AB, somit zu ihr normal.

2. Das Deltoid ist einachsig symmetrisch; seine Symmetrieachse ist die Diagonale, welche die Ecken miteinander verbindet, an welchen die gleichen Seiten sich schneiden.

3. Die Winkel, in deren Scheitelpunkten zwei ungleiche Seiten zusammenstoßen, sind einander gleich.

Fig. 101.



4. Das Deltoid ist ein Tangentenviereck. Der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt der Symmetrale des Deltoides und der Symmetrale eines der beiden gleichen Winkel desselben. (Fig. 101.) Denn es ist $OE = OF = OG = OH$.

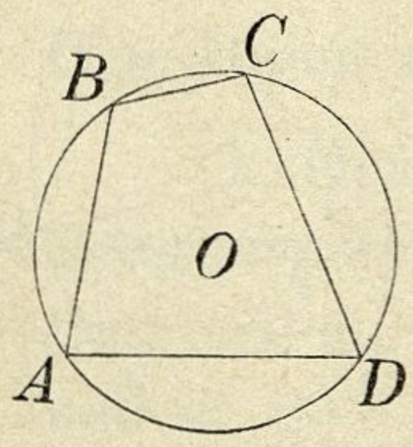
Aufgaben.

1. Die Winkel eines Deltoides, welche die Symmetrale desselben durchschneidet, sind $74\frac{2}{3}^0$ und $106\frac{5}{6}^0$; wie groß sind die beiden andern?
2. $\sphericalangle A$ (Fig. 100) $= 120^0\ 34'\ 35''$, $\sphericalangle C = 87^0\ 45'\ 46''$; die Winkel B und D zu berechnen.

Sehnen- und Tangentenvierecke.

§. 99. Da die Winkel A und C des Sehnenviereckes $ABCD$ (Fig. 102) durch die Hälfte der Bogen BCD und BAD gemessen werden (§. 80), so hat ihre Summe die halbe Peripherie zum Maß; mithin ist $A + C = 180^0$, daher auch $B + D = 180^0$.

Fig. 102.

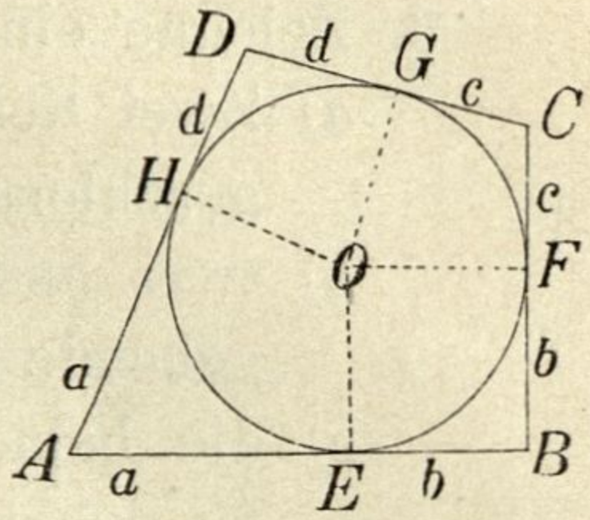


In jedem Sehnenviereck sind zwei Gegenwinkel supplementär.

Welche Parallelogramme können daher nur Sehnenvierecke sein?

§. 100. In Fig. 103 sind die mit a, b, c und d bezeichneten Tangenten einander gleich. Da $AB + CD = a + b + c + d$ und $AD + BC = a + b + c + d$ ist, so ist $AB + CD = AD + BC$.

Fig. 103.



In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern.

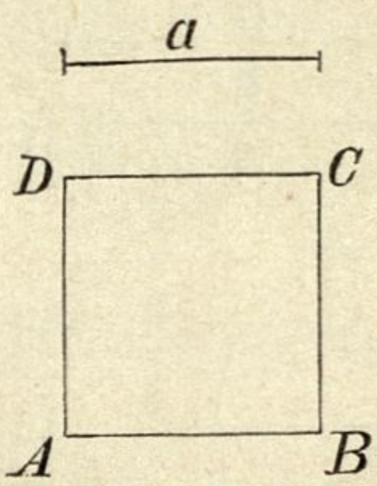
Welche Parallelogramme können nur Tangentenvierecke sein?

Constructionsaufgaben.

§. 101. 1. Mit der gegebenen Seite a (Fig. 104) ein Quadrat zu beschreiben.

Man construiere den rechten Winkel A, schneide auf den Schenkeln $AB = AD = a$ ab und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser a Kreisbogen, welche sich in C schneiden. Zieht man BC und CD, so ist $ABCD$ das verlangte Quadrat.

Fig. 104.



2. Construiere ein Quadrat, dessen Umfang 1 *dm* ist.

3. Zeichne ein Quadrat, welches mit einem gegebenen Rechtecke gleichen Umfang hat.

4. Ein Quadrat zu construieren, wenn dessen Diagonale (36 *mm*) gegeben ist.

Durch welche und wie viele Bestandstücke wird ein Quadrat bestimmt?

5. Einem Kreis ein Quadrat *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben.

§. 102. 1. Ein Rechteck zu construieren, wenn zwei anstoßende Seiten a und b gegeben sind.

2. Zeichne ein Rechteck, wenn eine Seite (22 *mm*) und die Diagonale (31 *mm*) gegeben sind.

3. Zeichne ein Rechteck, in welchem die Diagonale 32 *mm* beträgt und die beiden Diagonalen einen Winkel von 60^0 bilden.

Wie viele Bestandstücke bestimmen ein Rechteck?

4. Einem Kreis ein Rechteck einzuschreiben, wenn eine Seite desselben gegeben ist.

§. 103. 1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm zu zeichnen, wenn zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

2. Es soll ein Rhombus construiert werden, wenn gegeben sind:

a) die Seite und ein Winkel (34 *mm*, 30^0);

b) die Seite und eine Diagonale (24 *mm*, 32 *mm*);

c) die beiden Diagonalen (18 *mm*, 28 *mm*);

d) eine Diagonale und ein Winkel. (Die gegebene Diagonale kann durch den Scheitel des gegebenen Winkels gehen, oder nicht.)

3. Zeichne ein Rhomboid, wenn gegeben sind:

a) Zwei Seiten (25 *mm* und 33 *mm*) und der von ihnen eingeschlossene Winkel 60°;

b) zwei anstoßende Seiten und die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonale (22 *mm*, 29 *mm*, 35 *mm*);

c) die beiden Diagonalen und eine Seite (31 *mm*, 34 *mm*, 25 *mm*);

d) die beiden Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel (36 *mm*, 43 *mm*, 60°).

Durch wie viele Stücke wird *a)* ein Rhombus, *b)* ein Rhomboid bestimmt?

§. 104. 1. Ein Trapez zu construieren, wenn eine Parallelseite *a*, die zwei Schenkel *b* und *c* und der von *a* und *b* eingeschlossene Winkel gegeben sind. (Fig. 105.)

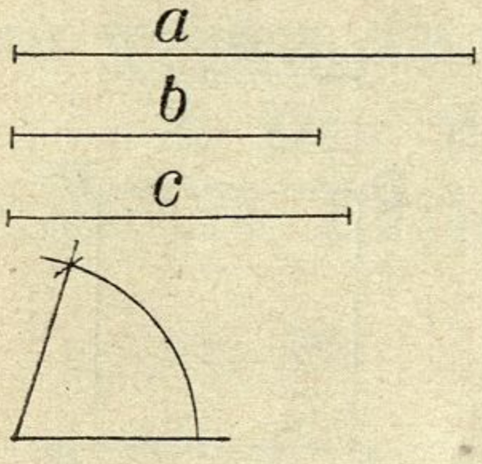
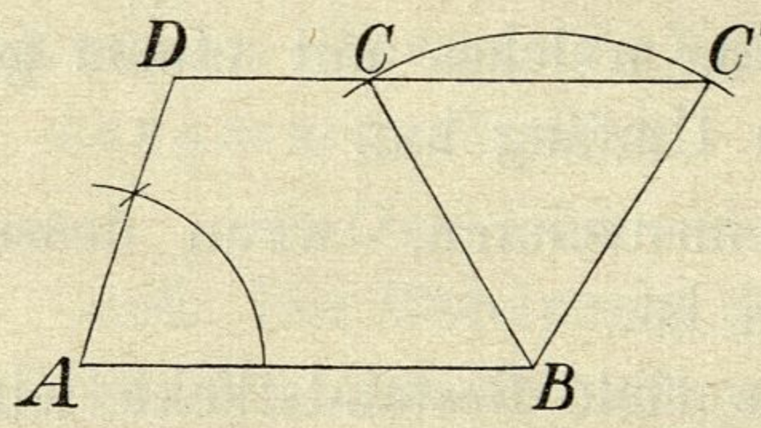


Fig. 105.



Man construiere den gegebenen Winkel *A*, mache $AB = a$, $AD = b$. Durch *D* ziehe man die Parallele mit *AB* und beschreibe aus *B* mit dem Halbmesser *c* einen Kreisbogen, welcher jene Parallele in *C* schneidet. Zieht man nun *BC*, so erhält man das Trapez *ABCD*, welches die vier gegebenen Stücke enthält. Da aber der aus *B* beschriebene Kreisbogen die Parallele *DC* noch in einem zweiten Punkte *C'* schneidet, so gibt es auch noch ein zweites Trapez *ABC'D*, welches dieselben vier Stücke enthält. Die Aufgabe lässt also im allgemeinen zwei Auflösungen zu. Wann erhält man nur ein, wann gar kein Trapez?

Sind unter den Bestimmungsstücken die beiden Parallelseiten gegeben, so geschieht die Construction mit Hilfe eines Dreieckes, dessen Grundlinie der Differenz der Parallelseiten gleich ist; die beiden andern Seiten sind die Schenkel des Trapezes. (Siehe Figur 98.)

2. Zeichne ein Trapez, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten und die Schenkel (42 *mm*, 30 *mm*, 36 *mm*, 28 *mm*);

b) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (45 *mm*, 28 *mm*, 45°, 60°);

c) die zwei Parallelseiten, ein Schenkel und ein demselben anliegender Winkel (42 *mm*, 29 *mm*, 33 *mm*, 75°).

3. Construiere ein gleichschenkliges Trapez, von welchem gegeben sind:

a) die Parallelseiten (36 *mm*, 32 *mm*) und der Schenkel (28 *mm*);

b) die Parallelseiten und die Höhe (38 *mm*, 3 *cm*, 26 *mm*);

c) die Parallelseiten und ein Winkel (32 *mm*, 24 *mm*, 120°).

Durch wie viele Stücke wird *a)* ein Trapez überhaupt, *b)* ein gleichschenkliges Trapez bestimmt?

4. Einem gleichschenkligen Trapez einen Kreis umzuschreiben.

5. Ein Deltoid zu construieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten und die Symmetrale (30 *mm*, 36 *mm*, 45 *mm*);

b) zwei Seiten und die Diagonale, welche nicht die Symmetrale ist (42 *mm*, 31 *mm*, 37 *mm*).

6. Einem Deltoid einen Kreis einzuschreiben.

7. Ein Viereck zu construieren, wenn gegeben sind:

a) alle vier Seiten und ein Winkel (25 *mm*, 30 *mm*, 35 *mm*, 20 *mm*, 70°);

b) alle vier Seiten und eine Diagonale (20 *mm*, 24 *mm*, 30 *mm*, 36 *mm*, 28 *mm*);

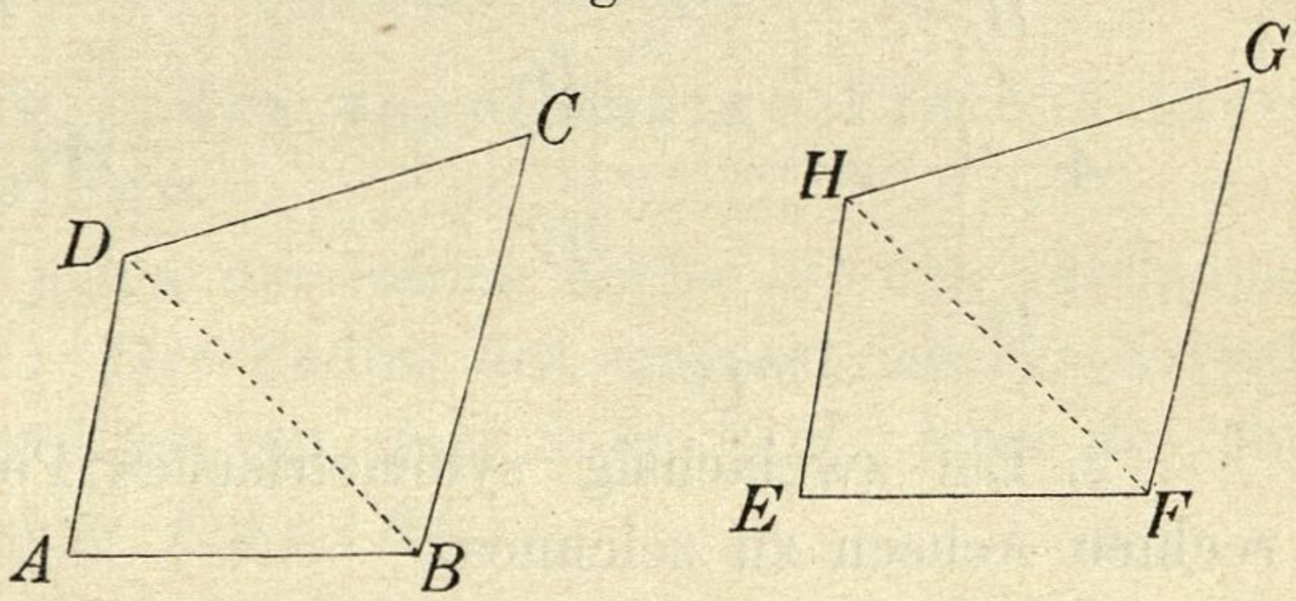
c) drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel (18 *mm*, 24 *mm*, 20 *mm*, 60°, 80°);

d) drei Seiten und die beiden Diagonalen (20 *mm*, 25 *mm*, 34 *mm*, 28 *mm*, 40 *mm*).

§. 105. Ein Viereck zu construieren, welches mit einem gegebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 106) congruent ist.

Zieht man die Diagonale BD, construiert $\triangle EFH \cong \triangle ABD$, und über FH das Dreieck $FGH \cong \triangle BCD$, so ist das Viereck $EFGH \cong ABCD$. Es ist übrigens nicht nöthig, die Diagonale BD wirklich zu ziehen; man braucht nur die Eckpunkte E, F, G, H des neuen Viereckes entsprechend zu bestimmen.

Fig. 106.



VII. Das Vieleck.

§. 106. Zahl der Diagonalen eines Vieleckes von einem Eckpunkte aus.

Ein Polygon heißt concavwinklig, wenn es nur concave Winkel enthält. Nur solche sollen besprochen werden.

Von einem Eckpunkte eines Vieleckes ist zu drei Eckpunkten keine Diagonale möglich; die Zahl der Diagonalen, die von einem Eckpunkte aus gezogen werden können, ist daher gleich der um drei verminderten Seitenzahl. Sie ist also $n - 3$. (n Seitenzahl.)

Jede dieser Diagonalen schneidet von dem Polygon ein Dreieck ab, die letzte liefert zwei. Folglich ist die Zahl der Dreiecke um eins größer als die der Diagonalen; d. h. $n - 3 + 1 = n - 2$.

§. 107. Lehrsatz. In jedem n-Eck ist die Summe aller Winkel gleich 180^0 multipliciert mit $n - 2$.

Beweis. Jedes n-Eck wird durch die von einem Eckpunkte gezogenen Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke zerlegt, deren Winkelsumme jener des Polygons gleich ist.

Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe aller Winkel eines *a)* Fünfeckes, *b)* Sechseckes *c)* Achteckes, *d)* Zehneckes, *e)* Zwölfeckes?
2. Wie groß ist jeder Winkel eines regelmäßigen *a)* Fünfeckes, *b)* Sechseckes, *c)* Achteckes, *d)* Zehneckes, *e)* Zwölfeckes?

§. 108. Constructionsaufgaben.

1. Ein einachsig symmetrisches Polygon zu zeichnen.

Man nehme auf einer Seite der Achse Punkte als Ecken des Polygones an und zeichne die symmetrisch liegenden; liegt ein Punkt in der Achse, so ist er selbst sein symmetrisch liegender Punkt.

Fig. 107.

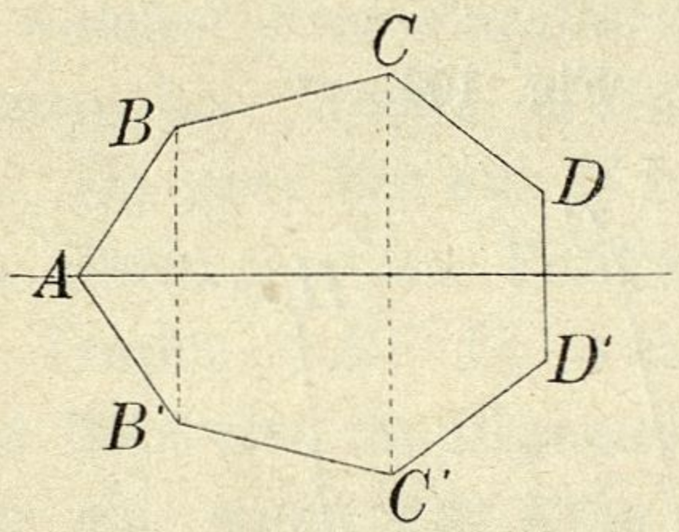
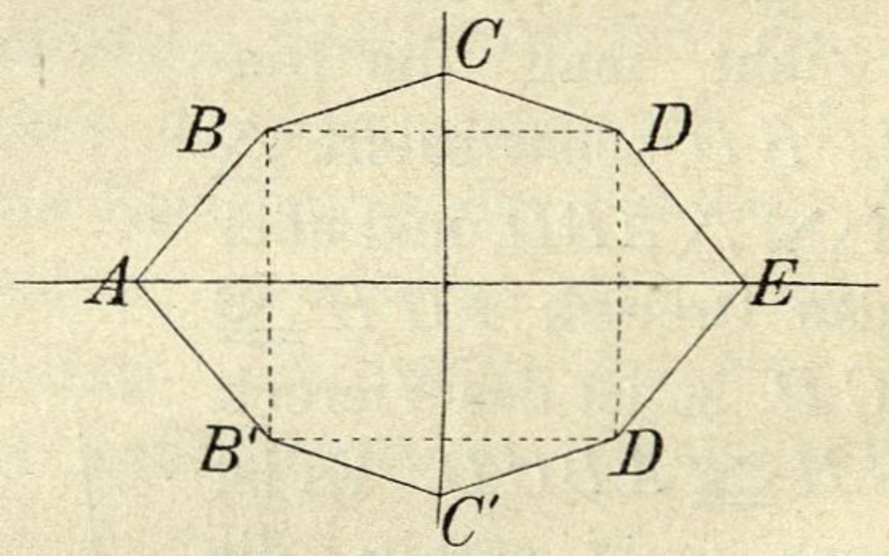


Fig. 108.



2. Ein zweiachsig symmetrisches Polygon mit aufeinander senkrechten Achsen zu zeichnen.

Die Auflösung ist aus Fig. 108 ersichtlich. Ein solches Polygon ist centrisch. Sein Mittelpunkt ist der Durchschnitt der Achsen.

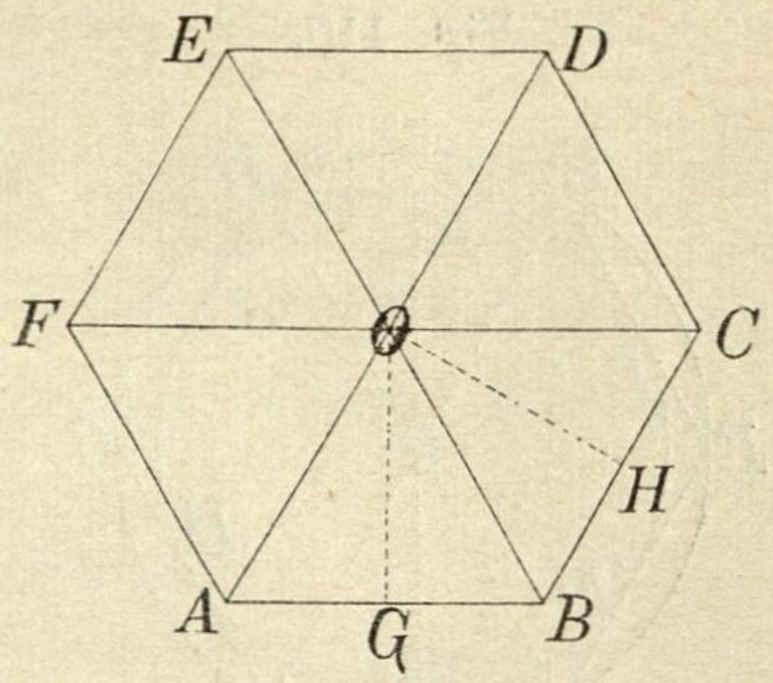
Das regelmäßige Polygon.*)

§. 109. Es sei $ABCDEF$ Fig. 109 ein regelmäßiges Polygon (§. 36). Es seien AO und BO die Symmetralen der Winkel A und B,

*) Der Schüler versuche die in §. 37 über die achsiale Symmetrie der regelmäßigen Polygone ausgesprochenen Sätze nach dem Vorgang von §. 94, 3 nachzuweisen.

die sich in O schneiden. Dreht man das Polygon um O in seiner Ebene so weit, dass C auf A und D auf B fällt, so müssen die Symmetralen der Winkel C und D mit AO und BO zusammenfallen, also ebenfalls durch O gehen. Durch Fortsetzung der Drehung kann man dasselbe von den Symmetralen der übrigen Winkel zeigen. Der Punkt O hat mithin von allen Eckpunkten des Polygones denselben Abstand. Verbindet man O mit allen Eckpunkten, so zerfällt das Polygon in congruente gleichschenklige Dreiecke. Die Symmetralen der Grundlinien derselben sind die der Seiten des regelmäßigen Polygones, diese gehen also ebenfalls durch O. Da diese Dreiecke in Bezug auf die gleichen Seiten auch gleiche Höhen haben, so ist O auch von allen Seiten des Polygones gleich weit entfernt. $OG = OH$....

Fig. 109.



In jedem regelmäßigen Polygon gibt es einen Punkt, den Durchschnitt aller Seiten- nnd Winkelsymmetralen, der von allen Ecken und von allen Seiten gleich weit absteht. Er heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygones.

Aufgabe.

Vom Mittelpunkte eines regelmäßigen *a)* Dreieckes, *b)* Viereckes, *c)* Fünfeckes, *d)* Sechseckes, *e)* Achteckes, *f)* Zehneckes, *g)* Zwölfeckes sind zu allen Eckpunkten Strecken gezogen; wie groß ist 1. der Winkel am Scheitel, 2. der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten Dreiecke?

§. 110. Um und in jedes regelmäßige Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben.

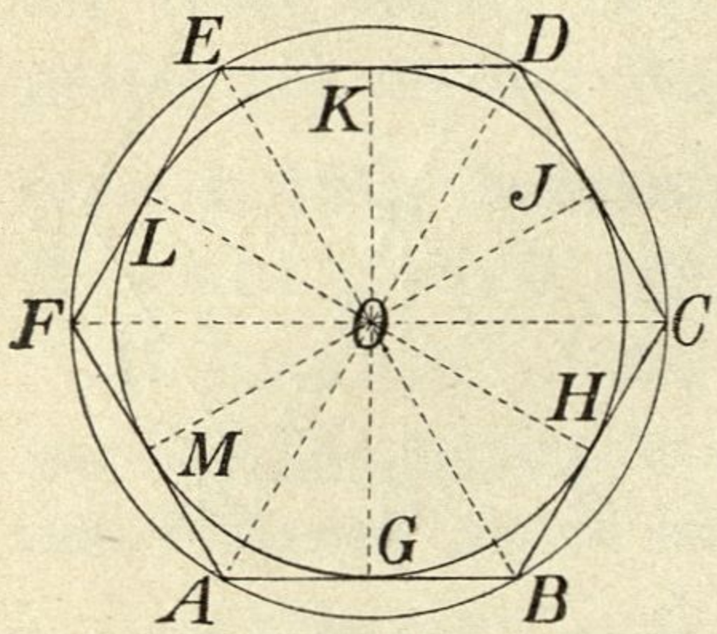
Der Mittelpunkt eines jeden der beiden Kreise ist der Mittelpunkt O des Polygones. (Fig. 109.) Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite (OG), jener des umgeschriebenen Kreises von einer Ecke (AO).

§. 111. 1. Theilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile und zieht durch je zwei benachbarte Theilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen begrenzte Vieleck regelmäßig.

Beweis. Ist (Fig. 110) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FA, so sind in dem Vielecke $ABCDEF$ die Seiten als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören,

und die Vieleckswinkel als Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen aufstehen, einander gleich. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig.

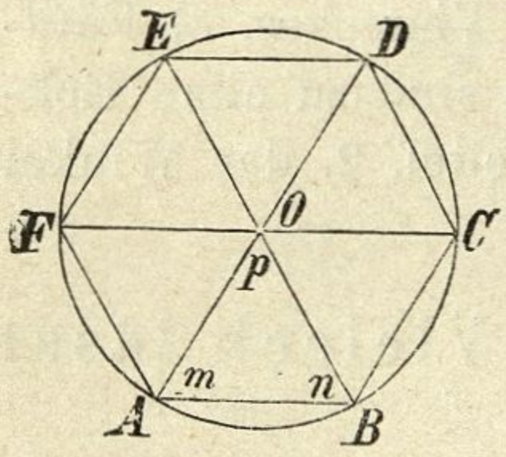
Fig. 110.



2. Theilt man einen Kreis in mehrere gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Tangente, so wird von diesen Tangenten ein regelmäßiges Vieleck eingeschlossen.

Beweis. Ist (Fig. 110) die aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt und errichtet man in den Punkten G, H, J, K, L, M auf die zu denselben gezogenen Halbmesser Senkrechte, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck $ABCDEF$. Dieses Vieleck ist regelmäßig; denn dreht man dasselbe um den Mittelpunkt, bis jeder Theilungspunkt mit dem nächst folgenden zusammenfällt, so deckt auch jeder Halbmesser den folgenden, daher auch jede Tangente die folgende. Das Vieleck ist also gleichwinklig und gleichseitig, d. i. regelmäßig.

Fig. 111.



§. 112. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises (Fig. 111).

Beweis. Es sei das Sechseck $ABCDEF$ regelmäßig. Der Winkel p muss als Centriwinkel zu einem Sextant $= 60^0$ sein, also ist $m = n = 60^0$, daher muss das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist $AB = OA$.

§. 113. Aufgaben.

1. Die Peripherie eines Kreises *a)* in 6, *b)* in 3, *c)* in 12 gleiche Theile zu theilen.
2. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges *a)* Dreieck, *b)* Viereck, *c)* Sechseck, *d)* Achteck, *e)* Zwölfeck einzuschreiben und umzuschreiben.
3. Einem gegebenen Kreise mit Hilfe des Transporteurs ein regelmäßiges *a)* Fünfeck, *b)* Zehneck ein- und umzuschreiben.
4. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, wenn jede Seite eine bestimmte Länge haben soll.

   Hier kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende wird das Dreieck ABO (Fig. 110) construiert, indem man für AB die gegebene Seite und für BAO und ABO die halben Vieleckswinkel annimmt. Man berechne daher zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Strecke, welche der

gegebenen Seite gleich ist, trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf, aus dem Schnittpunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man durch die Endpunkte der gezogenen Strecke einen Kreis und trage darin die gegebene Seite als Sehne herum.

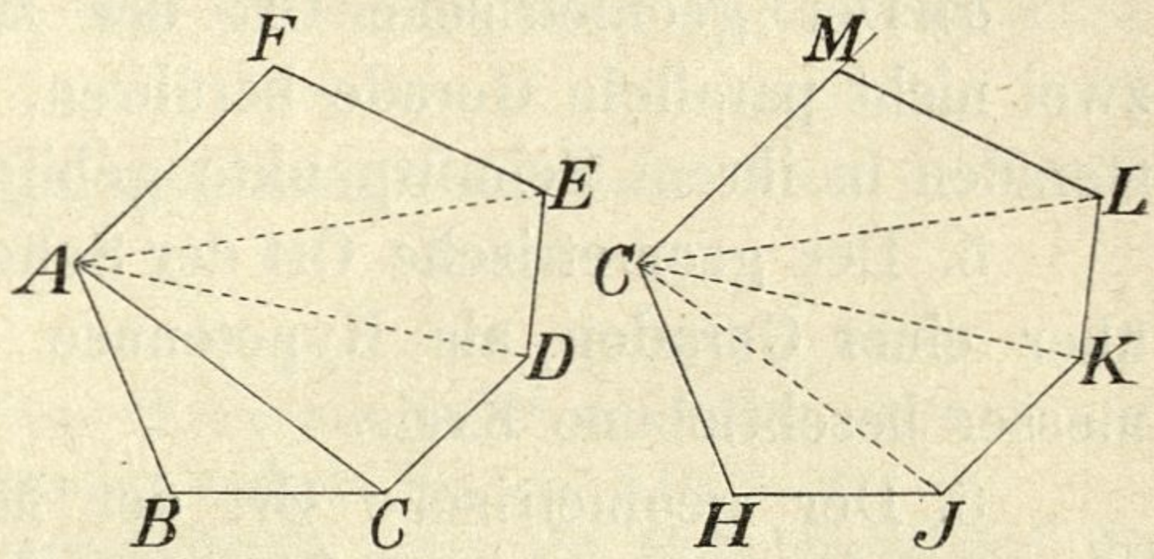
Ein regelmäßiges Polygon ist also durch zwei Stücke bestimmt. In diesem Falle durch die Seite und einen Winkel.

5. Zeichne eine Strecke von 2 *cm* Länge und construiere über derselben ein regelmäßiges *a)* Sechseck, *b)* Achteck.

§. 114. Constructionsaufgabe. Ein Vieleck *ABCDEF* zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, welches mit dem Vielecke *ABCDEF* congruent ist.

Auflösung. Man zerlege das gegebene Vieleck von *A* aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe eben so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes congruent sind; dann ist Vieleck *GHJKLM* $\cong$ *ABCDEF*.

Fig. 112.



Auf dem Zeichnen congruenter Vielecke beruht das geometrische Copieren der Gebilde in gleicher Größe.

VIII. Geometrische Örter.

§. 115. Erfüllen alle Punkte, welche in einer Linie liegen, aber auch nur diese Punkte, eine gewisse Bedingung, so heißt die Linie der geometrische Ort jener Punkte.

Die Sätze über die geometrischen Örter sind bereits bekannte, und nur in anderer Form ausgedrückte Lehrsätze. Die wichtigsten derselben sind:

1. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben, ist der um jenen Punkt als Mittelpunkt mit jenem Abstande als Halbmesser beschriebene Kreis.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und durch einen gegebenen Punkt gehen, ist der um diesen Punkt mit jenem Halbmesser beschriebene Kreis.

2. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleich weit abstehen, ist die Symmetrale dieser Strecke.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, ist die Symmetrale der Verbindungslinie derselben.

3. *a*) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden auf einer bestimmten Seite derselben einen gegebenen Abstand haben, ist die mit der Geraden auf derselben Seite in dem gegebenen Abstande gezogene Parallele.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkt aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und eine gegebene Gerade auf einer bestimmten Seite derselben berühren, ist die mit der Geraden auf derselben Seite in einem Abstande gleich dem gegebenen Halbmesser gezogene Parallele.

4. *a*) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale dieses Winkels.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nicht parallele Gerade berühren, ist die Symmetrale des von den Geraden in ihrem Schnittpunkte gebildeten Winkels.

5. Der geometrische Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke über einer Geraden als Hypotenuse ist der über dieser als Durchmesser beschriebene Kreis.

6. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkte auf der Geraden errichtete Senkrechte.

7. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade.

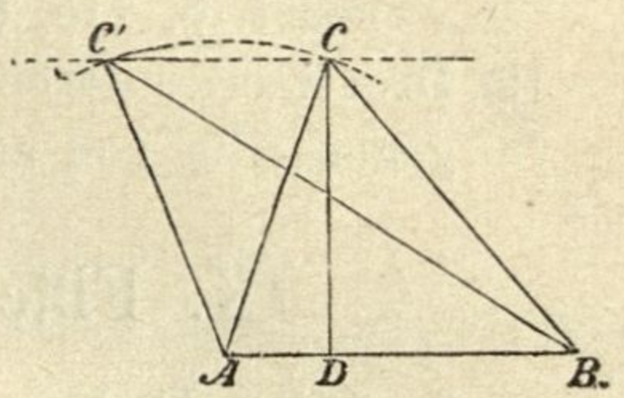
8. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

§. 116. Ist für einen Punkt ein einziger geometrischer Ort gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht bestimmt, da es unzählig viele Punkte gibt, welche in diesem geometrischen Orte liegen; ein geometrischer Ort enthält daher die Lösungen einer unbestimmten Aufgabe. Sind dagegen für einen Punkt zwei geometrische Örter bekannt, so gibt es nur einen, oder eine bestimmte Anzahl von Punkten, welche in beiden geometrischen Örtern liegen; zwei geometrische Örter eines Punktes enthalten daher die Auflösung einer bestimmten Aufgabe.

Die geometrischen Örter sind für die Lösung geometrischer Constructionsaufgaben von großer Wichtigkeit, indem es bei diesen eigentlich nur auf die Bestimmung von Punkten ankommt.

§. 117. Ein Dreieck ABC (Fig. 113) zu construieren, wenn zwei Seiten AB und AC und die Höhe CD auf die erste dieser Seiten gegeben sind.

Fig. 113.



Durch die gegebene Seite AB sind die beiden Eckpunkte A und B bestimmt. Für den dritten Eckpunkt C ist ein geometrischer Ort der um A mit dem Halbmesser AC beschriebene Kreis, und ein zweiter die zu AB im Abstande CD gezogene Parallele; somit ist auch C bestimmt.

Construction. Man ziehe AB, beschreibe um A mit dem Halbmesser AC einen Kreis und die zu AB in dem Abstande CD parallele Gerade, welche den Kreis in C und C' schneidet; ABC und ABC' sind die verlangten Dreiecke.

Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, oder eine, oder keine. Wann tritt jeder dieser drei Fälle ein?

§. 118. Übungsaufgaben.

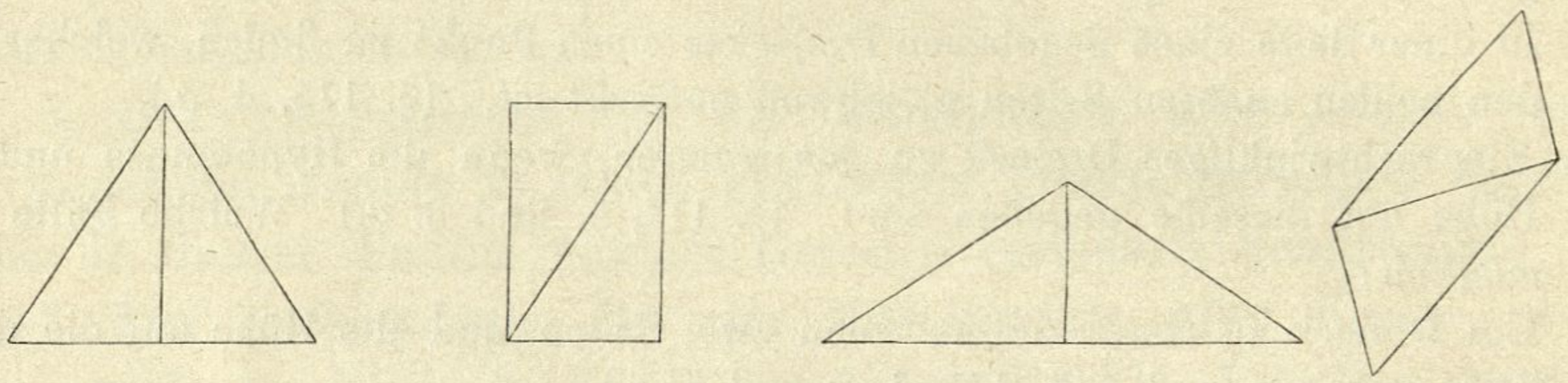
1. In einer Seite eines gegebenen Dreieckes einen Punkt zu finden, welcher von den beiden anderen Seiten gleichweit entfernt ist. (§. 115, 4. *a.*)
2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe gegeben sind. (§. 115, 5. und 3. *a.*) Welche Fälle sind möglich?
3. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und die Höhe auf die dritte Seite gegeben sind. (§. 115, 1. *a* und 3. *a.*)
4. Einen Rhombus zu construieren, wenn die Höhe und ein Winkel (28 *mm*, 70^0) gegeben sind.
5. Einen Rhombus zu construieren, wenn ein Winkel und der Radius des eingeschriebenen Kreises (15 *mm*, 65^0) gegeben sind.
6. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Parallelseiten, ein Winkel an denselben und die Höhe (40 *mm*, 32 *mm*, 60^0, 26 *mm*) gegeben sind.
7. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Schenkel eine Parallelseite und die Höhe (34 *mm*, 42 *mm*, 48 *mm*, 27 *mm*) gegeben sind.
8. Ein gleichschenkliges Trapez zu zeichnen, wenn der Schenkel die Diagonale und die Höhe (36 *mm*, 46 *mm*, 28 *mm*) gegeben sind.
9. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher
   a) durch zwei gegebene Punkte geht (§. 115, 1. *b)*;
   b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt (§. 115, 1. *b)* und 3. *b)*;
   c) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt (§. 115, 1. *b* und 8.);
   d) zwei gegebene Gerade berührt (§. 115, 3. *b)*;
   e) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt (§. 115, 3. *b* und 8.);
   f) zwei gegebene Kreise berührt (§. 115, 8.).
10. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt und dessen Peripherie
    a) durch zwei gegebene Punkte geht (§. 115, 2. *b)*;
    b) zwei gegebene Gerade berührt (§. 115, 4. *b)*.

11. Einen Kreis zu beschreiben, welcher
   a) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.
   b) zwei gegebene Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt (§. 115, 6. und 4. *b)*.
12. Drei Kreise, deren Halbmesser gegeben sind, so zu construieren, dass sie sich gegenseitig von außen berühren. (§. 115, 7. und 8.)

IX. Flächengleichheit der ebenen Figuren.

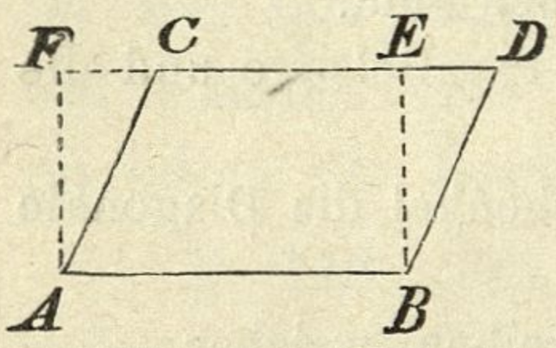
§. 119. Unter dem Flächeninhalte einer Figur versteht man die Größe des Theiles der Ebene, welchen ihre Grenzlinien einschließen. Zwei Figuren, welche denselben Flächeninhalt haben, heißen flächengleich. Zwei congruente Figuren sind auch flächengleich. Figuren, welche aus congruenten Theilen bestehen, sind im allgemeinen nicht congruent, aber stets flächengleich. (Fig. 114.)

Fig 114.



§. 120. Lehrsatz. Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist flächengleich einem Rechtecke, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 115.



Beweis. Zieht man (Fig. 115) von den Eckpunkten A und B des schiefwinkligen Parallelogrammes $ABDC$ zu der Seite CD die Senkrechten AF und BE, so erhält man das Rechteck $ABEF$, welches mit dem Parallelogramme $ABDC$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Die rechtwinkligen Dreiecke BED und AFC sind congruent; addiert man jedes derselben zu dem Trapeze $ABEC$, so müssen auch die Summen gleich sein, d. i.

Parallelogramm $ABDC$ = Rechteck $ABEF$.

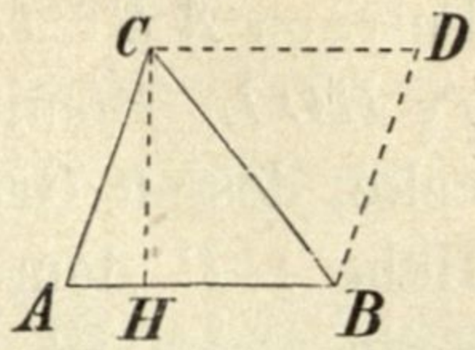
Aus diesem Lehrsatze folgt:

Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich; denn jedes ist mit demselben Rechteck flächengleich.

§. 121. Lehrsatz. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Beweis. Zieht man (Fig. 116) durch zwei Eckpunkte C und B des Dreieckes ABC Parallele mit den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht das Parallelogramm $ABDC$, welches mit dem $\triangle ABC$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat und von welchem $\triangle ABC$ die Hälfte ist. (§. 90, 1.)

Fig. 116.



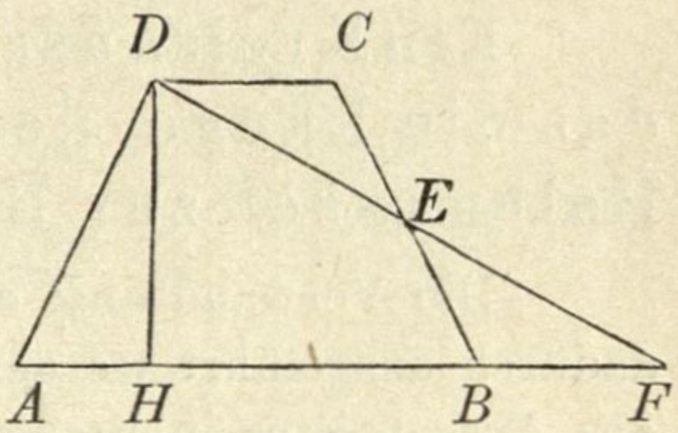
Hieraus folgt:

Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

§. 122. Lehrsatz. Jedes Trapez ist flächengleich einem Dreiecke, das mit ihm gleiche Höhe hat und dessen Grundlinie gleich ist der Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

Beweis. Halbiert man in dem Trapez $ABCD$ (Fig. 117) den Schenkel BC in E und zieht durch D und E die Gerade DF, so ist $\triangle CDE \cong BFE$. (I. Congruenzsatz.) Addiert man daher zu dem Viereck $ABED$ einmal das $\triangle CDE$, und dann das $\triangle BFE$, so müssen die Summen gleich sein, d. i. Trapez $ABCD$ = Dreieck AFD.

Fig. 117.

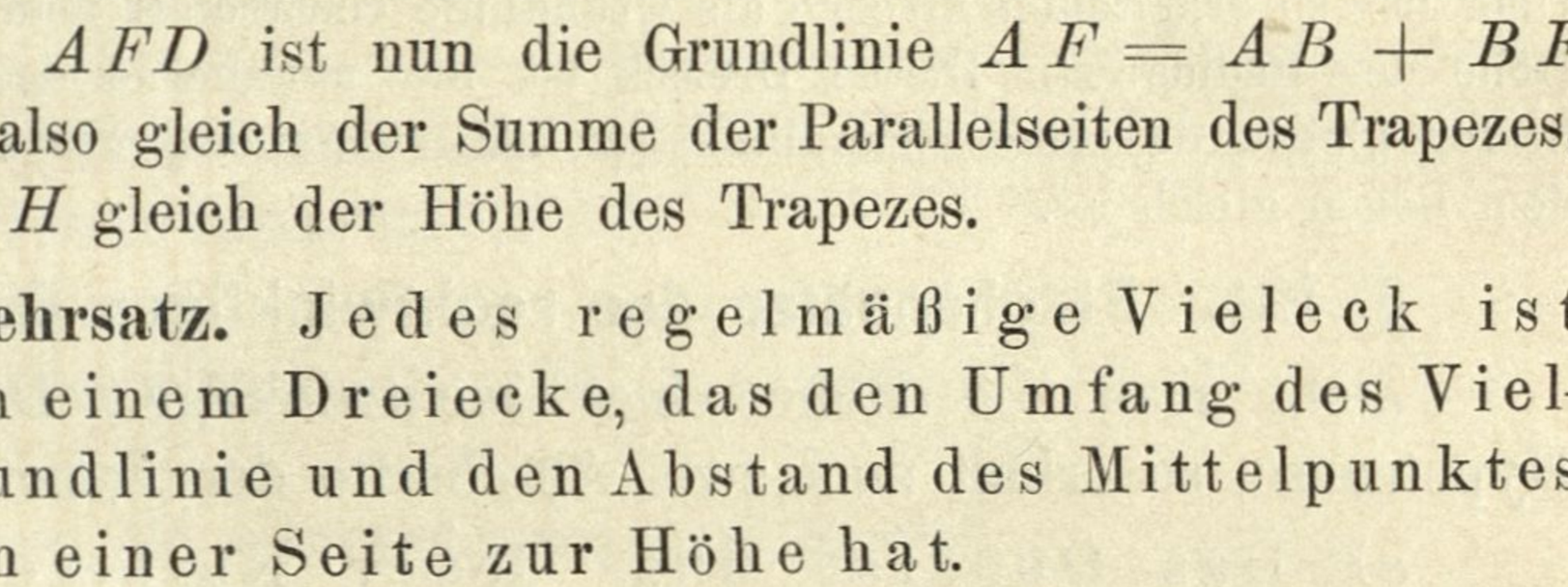


In dem $\triangle AFD$ ist nun die Grundlinie $AF = AB + BF = AB + CD$, also gleich der Summe der Parallelseiten des Trapezes, und die Höhe DH gleich der Höhe des Trapezes.

§. 123. Lehrsatz. Jedes regelmäßige Vieleck ist flächengleich einem Dreiecke, das den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes desselben von einer Seite zur Höhe hat.

Beweis. Es sei (Fig. 118) O der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes $ABCDEF$ und $OP \perp AB$. Zieht man die Strecken OA, OB, OC, . . , so wird das Vieleck in lauter congruente Dreiecke zerlegt. Trägt man nun alle Seiten des Vieleckes auf der verlängerten AB auf und zieht von den End-

Fig. 118.



punkten zu dem Punkte O Strecken, so ist $\triangle HOL = \triangle AOB \times 6$, Polygon $ABCDEF = \triangle AOB \times 6$. Daher Polygon $ABCDEF = \triangle HOL$. Somit ist das regelmäßige Vieleck flächengleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie HL dem Umfange des Vieleckes, und dessen Höhe OP dem Abstande des Mittelpunktes des Vieleckes von einer Seite gleich ist.

Lässt man in einem regelmäßigen Vielecke die Anzahl der Seiten ohne Ende zunehmen, so nähert sich das Vieleck ohne Ende einem Kreise, der Umfang des Vieleckes der Peripherie, und der Abstand des Mittelpunktes des Vieleckes von einer Seite dem Halbmesser des Kreises.

Daraus ergibt sich:

Ein Kreis ist flächengleich einem Dreiecke, das die Peripherie des Kreises zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ebenso findet man:

Ein Kreisausschnitt ist flächengleich einem Dreiecke, das die Länge des Kreisbogens zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Die Verwandlung eines Kreises oder Kreisausschnittes in ein Dreieck kann dadurch ausgeführt werden, dass man die Peripherie beziehungsweise den Bogen des Ausschnittes in kleine Theile theilt und dieselben auf eine Gerade überträgt. Über der so erhaltenen Strecke als Grundlinie construiert man ein Dreieck, dessen Höhe der Radius ist. Dieses Dreieck ist nur annähernd dem Kreise oder dem Sector gleich, da seine Grundlinie nur näherungsweise der Peripherie bezüglich dem Bogen gleich ist.

§. 124. Flächensätze des rechtwinkligen Dreieckes.

Zieht man die Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes auf die Hypotenuse, so erhält man zwei Abschnitte der Hypotenuse.

a) Das Quadrat über jeder Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Abschnitte derselben;

b) das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz);

c) das Quadrat über der Höhe ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

1. Es ist (Fig. 119) $\triangle ABF \cong ACG$ (§. 71).

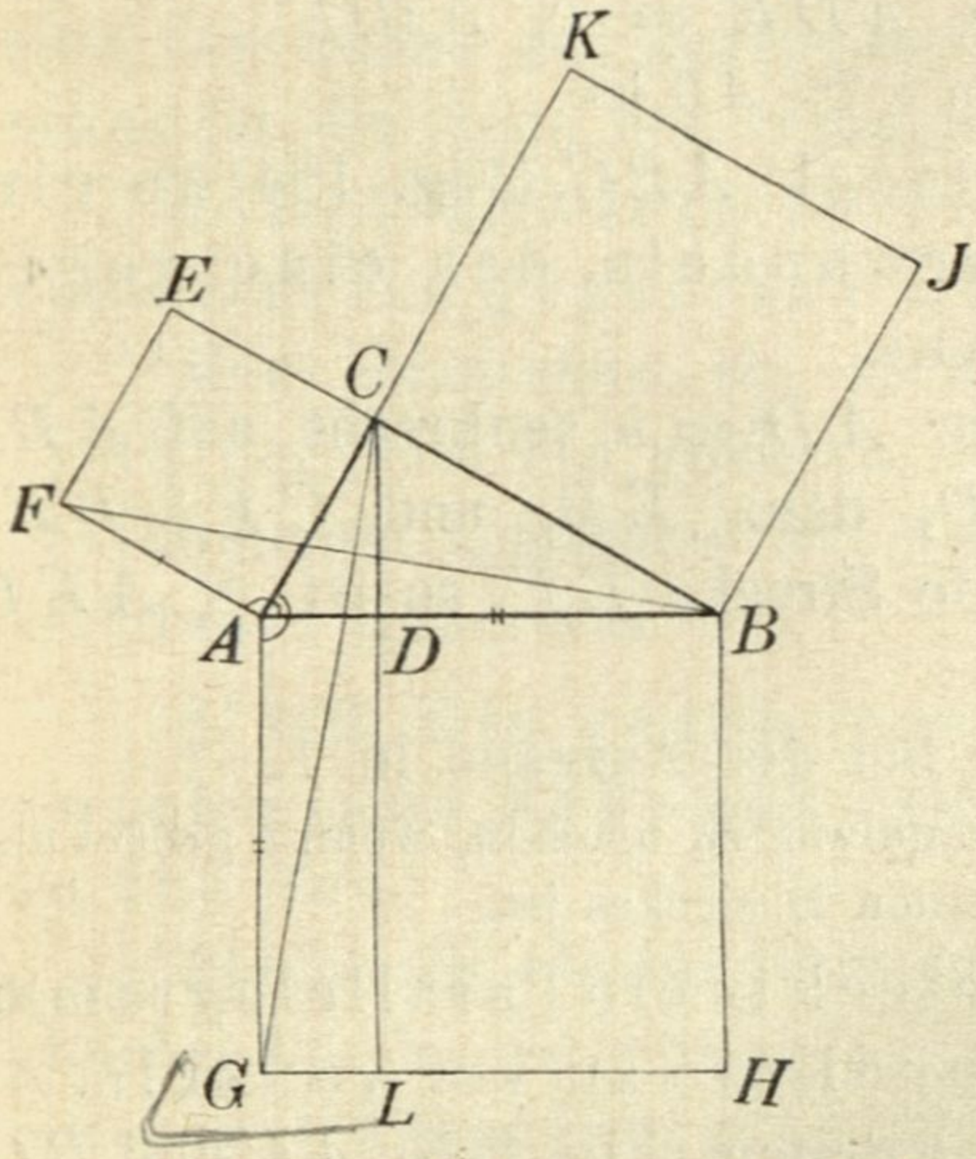
Da $\triangle ABF = \frac{1}{2} AFEC$ und $\triangle ACG = \frac{1}{2} ADLG$, so ist $AFEC = ADLG$.

Ebenso kann bewiesen werden, dass $BCKJ = DBHL$.

2. Da die Summe der Rechtecke $ADLG$ und $BDLH$ das Quadrat der Hypotenuse ist, so ist der Satz *b)* erwiesen.

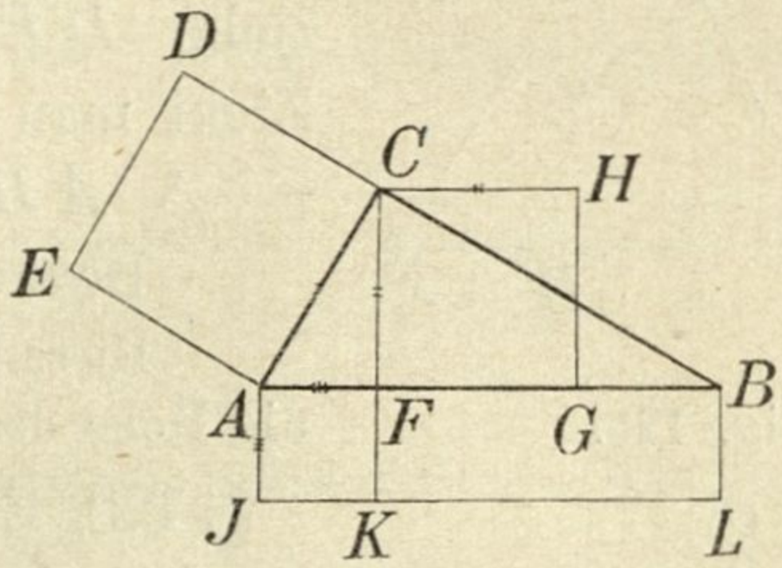
Daher ist das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der anderen Kathete.

Fig. 119.



3. Es ist (Fig. 120) $CHGF = ACDE - AFKJ$ oder $CHGF = ABLJ - AFKJ = BFKL$, wodurch die Richtigkeit des Satzes *c)* erwiesen ist.

Fig. 120.



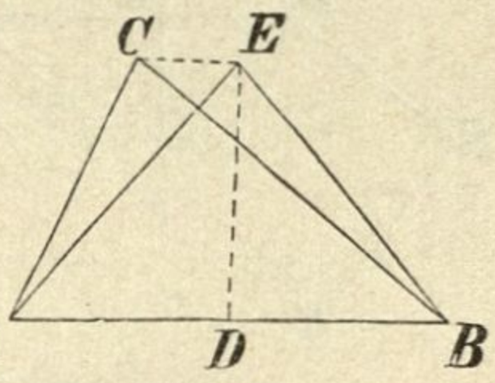
Verwandlung und Theilung von ebenen Figuren.

§. 125. Ein gegebenes Gebilde in ein anderes verwandeln heißt ein Gebilde construieren, welches bestimmten Bedingungen entspricht und mit dem gegebenen flächengleich ist.

Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 121) in ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie AB zu verwandeln.

Man construiere die Symmetrale von AB und ziehe $CE \parallel AB$; verbindet man den Schnittpunkt E mit A und B, so ist ABE das verlangte gleichschenklige Dreieck.

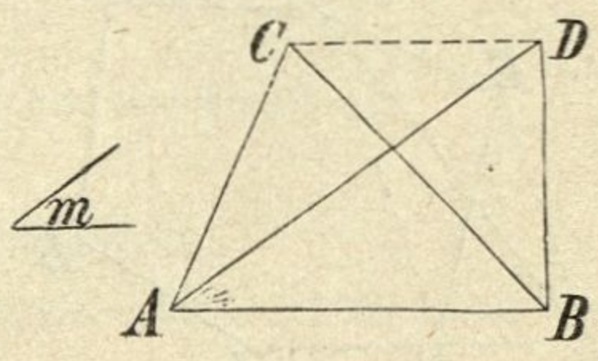
Fig. 121.



§. 126. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 122) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

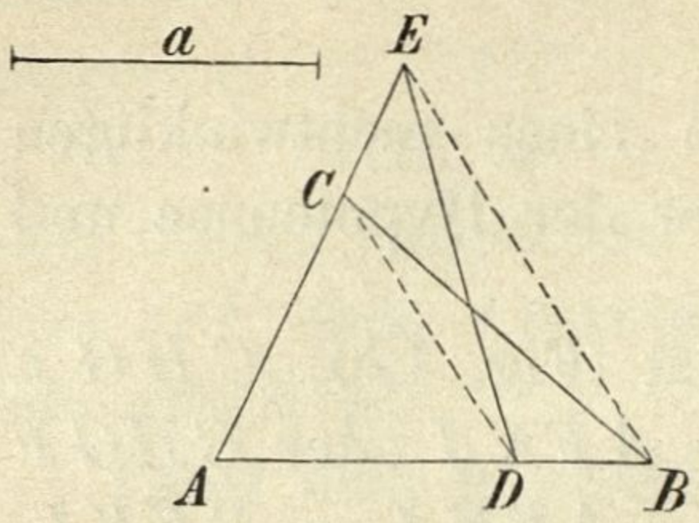
Man construiere den Winkel $BAD = m$ und ziehe $CD \parallel AB$; zieht man noch DB, so ist ABD das verlangte Dreieck.

Fig. 122.



§. 127. 1. Ein Dreieck ABC (Fig. 123) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 123.

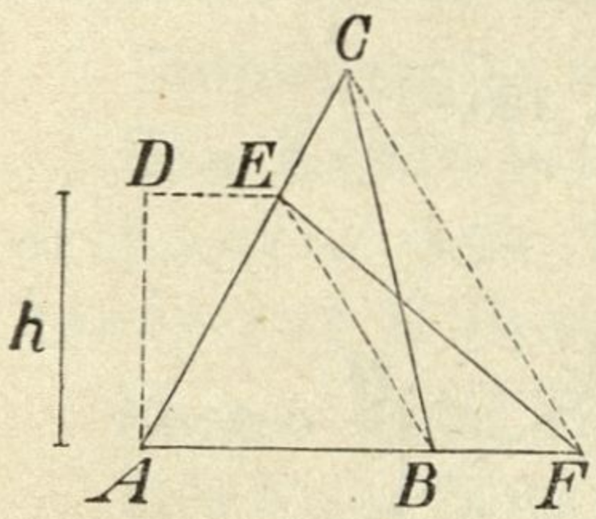


Man mache $AD = a$, ziehe CD und $BE \parallel CD$; ADE ist nun das verlangte Dreieck. Denn es ist

$$\triangle ACD = \triangle ACD,$$
$$\triangle CDE = \triangle CDB, \text{ also}$$
$$\triangle ACD + \triangle CDE = \triangle ACD + \triangle CDB,$$
oder $\triangle ADE = \triangle ABC$.

Dieselbe Verwandlung zu machen, wenn $a > AB$ ist.

Fig. 124.



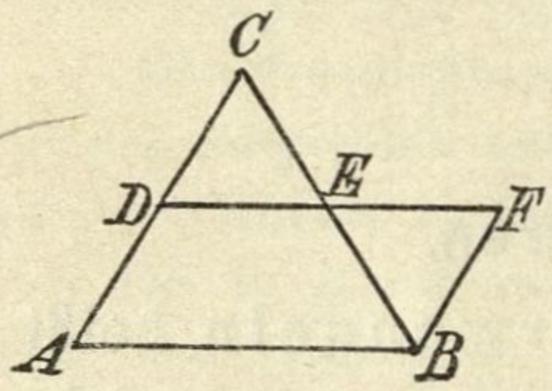
2. Ein Dreieck ABC (Fig. 124) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Man errichte $AD = h$ senkrecht auf AB, ziehe $DE \parallel AB$, dann EB, und $CF \parallel BE$. Zieht man nun die Strecke EF, so ist $\triangle AEF = \triangle ABC$.

Beweis wie bei der Aufgabe in 1.

Dieselbe Verwandlung zu machen, wenn h größer als die Höhe des gegebenen Dreieckes ist.

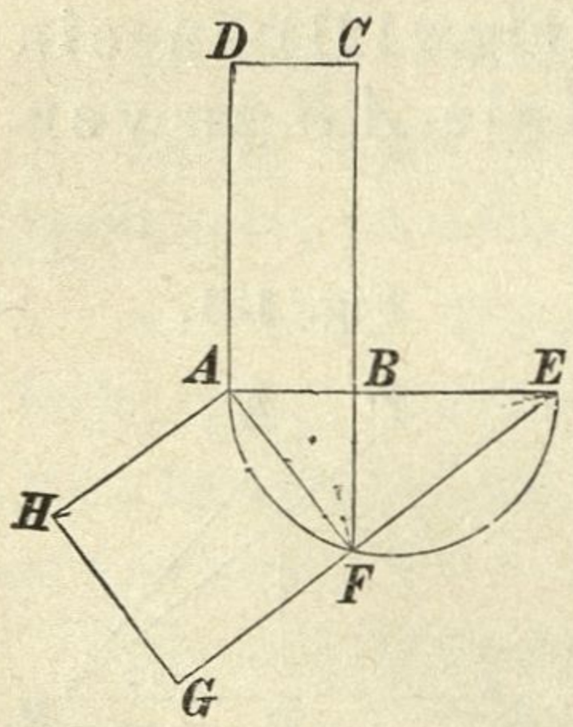
Fig. 125.



§. 128. Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.

Man halbiere die Seiten (Fig. 125) AC und BC in D und E, ziehe durch diese Punkte die Gerade und $BF \parallel AC$; dann ist $\triangle BEF \cong CED$, daher auch $ABED + BEF = ABED + CED$, also Parallelogramm $ABFD = \triangle ABC$.

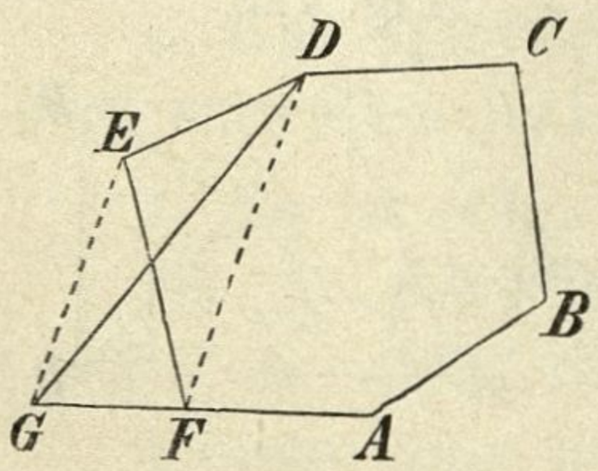
Fig. 126.



§. 129. Ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 126) in ein Quadrat zu verwandeln.

Man verlängere die kleinere Seite AB bis E, so dass $AE = AD$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher die verlängerte Seite CB in F trifft. Zieht man AF und beschreibt darüber das Quadrat $AFGH$, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke gleich (§. 124, a).

Fig. 127.



§. 130. Ein Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 127) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Man ziehe die Diagonale DF und $EG \parallel DF$, und verlängere AF bis G. Zieht man DG, so ist das Vieleck $ABCDG$ gleich dem Vielecke $ABCDEF$, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden. Da sich nun jedes Dreieck in ein Parallelogramm, dieses in ein Rechteck, und letzteres in ein Quadrat verwandeln lässt, so kann auch jedes Vieleck durch bloße Construction in ein Quadrat verwandelt werden.

§. 131. 1. Ein Quadrat zu construieren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man construiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der gegebenen Quadrate; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates.

2. Ein Quadrat zu construieren, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man construiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Seite des größeren, und dessen eine Kathete gleich der Seite des kleineren Quadrates ist; dann ist die zweite Kathete die Seite des verlangten Quadrates.

§. 132. Ein gegebenes Dreieck durch Strecken, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Theile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Theile, als verlangt werden, und verbinde die Theilungspunkte mit jenem Eckpunkte durch Strecken.

§. 133. Ein Parallelogramm (ein Rechteck) in mehrere gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien zwei Gegenseiten schneiden.

Theile die zwei Gegenseiten in die verlangte Anzahl gleicher Theile und verbinde je zwei gegenüberliegende Theilungspunkte durch eine Strecke.

§. 134. Ein Trapez in mehrere gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden,

Durch Theilung der Parallelseiten in gleiche Theile und Verbindung der Theilungspunkte.

§. 135. Übungsaufgaben.

1. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.
2. Construiere ein Dreieck mit den Seiten 31 *mm* und 17 *mm* und dem eingeschlossenen Winkel 45^0 und verwandle es dann in ein Dreieck mit der Grundlinie 26 *mm* und einem anliegenden Winkel von 60^0.
3. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.
4. Einen Rhombus in ein Rechteck zu verwandeln.
5. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.
6. Ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, von dem eine Seite und ein Winkel gegeben sind.

7. Ein Parallelogramm in ein anderes *a)* mit einer gegebenen Seite, *b)* mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.
8. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.
9. Ein ungleichschenkliges Trapez in ein gleichschenkliges zu verwandeln.
10. Ein hohlwinkliges Trapezoid in ein Rechteck zu verwandeln.
11. Ein unregelmäßiges Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln.
12. Construiere ein Dreieck, welches gleich ist einem regelmäßigen Achtecke über der Seite 12 *mm*.
13. Construiere ein Quadrat, welches flächengleich ist einem regelmäßigen Sechsecke über der Seite 2 *cm*.
14. Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.
15. Zwei Parallelogramme mit gleichen Höhen *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.
16. Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.
17. Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.
18. Ein Quadrat zu construieren, welches *a)* doppelt so groß, *b)* halb so groß als ein gegebenes Quadrat ist.
19. Ein Quadrat zu construieren, das
    a) der Summe dreier oder mehrerer gegebener Quadrate gleich ist;
    b) 3mal, 4mal, 5mal so groß ist als ein gegebenes Quadrat.
20. Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.
21. Ein Parallelogramm von einem in einer Seite liegenden Punkte aus zu halbieren.
22. Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte aus in vier gleiche Theile zu theilen.

X. Ausmessung der ebenen Figuren.

1. Ausmessung der geradlinigen Figuren.

§. 136. Umfang und Flächeninhalt. Bei der Ausmessung der ebenen Gebilde kommt der Umfang und der Flächeninhalt derselben in Betracht.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Seiten derselben messen und die gefundenen Maßzahlen addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite multipliciert mit der Anzahl der Seiten.

§. 137. Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, d. i. um die Fläche der Figur zu messen, muss man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft dieselbe in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

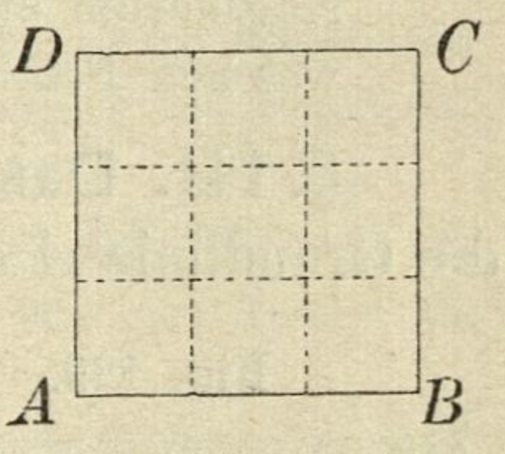
Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein

Quadratmeter (m^2), ein Quadratdecimeter (dm^2) . . . , je nach dem die Seite einem Meter, Decimeter, . . . gleich ist.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht übrigens nicht durch unmittelbares Auftragen der genannten Quadratmaße auf die zu messende Fläche, da dieses sehr mühsam und meistens auch unausführbar wäre. Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt mittelbar, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße misst und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch Rechnung findet.

§. 138. Das Quadrat. Beträgt eine Seite des Quadrates $ABCD$ (Fig. 128) 3 dm, so kann man jede Seite in 3 gleiche Theile theilen, deren jeder 1 dm lang ist. Verbindet man nun die gegenüberstehenden Theilungspunkte durch Strecken, so zerfällt das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes 1 dm^2 vorstellt; und zwar enthält jeder Streifen 3 dm^2. Da drei Streifen vorhanden sind, so ist der Inhalt des Quadrates $3\ dm^2 \times 3 = 9\ dm^2$.

Fig. 128.



Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 4 cm ist, und bestimme auf gleiche Weise, wie viel cm^2 dasselbe enthält.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliciert.

Eine Zahl mit sich selbst multiplicieren heißt dieselbe zur zweiten Potenz erheben. Daher kommt es, dass man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch s, und die Maßzahl seines Flächeninhaltes durch f, so ist

$$f = s^2.$$

Zusatz. Die zweite Potenz s^2 oder AB^2 ist im geometrischen Sinne als ein Quadrat über der Seite s oder AB aufzufassen.

Sind F und f die Flächeninhalte zweier Quadrate mit den Seiten S und s, so ist $F = S^2$, $f = s^2$, mithin $F : f = S^2 : s^2$; d. h.

Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

Wie ändert sich demnach die Fläche eines Quadrates, wenn die Seite mit 2, 3, 4 . . . multipliciert wird?

§. 139. Ein Quadrat, dessen Seite 10 dm beträgt, hat $10\ dm^2 \times 10 = 100\ dm^2$ Inhalt. Ein solches Quadrat ist nun 1 m^2, also ist

$$1\ m^2 = 100\ dm^2.$$

Eben so folgt:

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$. $1\ km^2 = 1000000\ m^2$.

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$. $1\ \mu m^2 = 100\ km^2$.

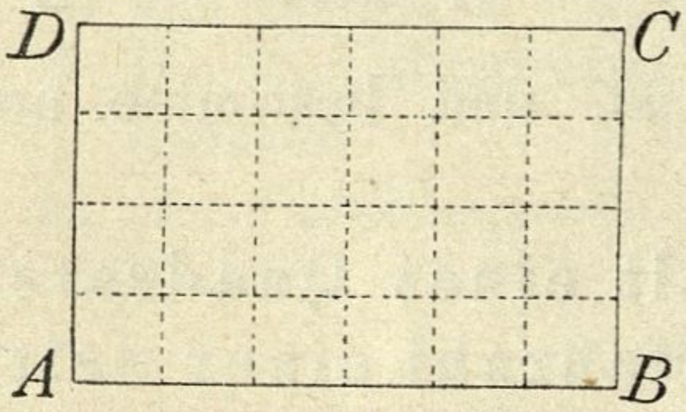
Beim Bodenflächenmaße heißt eine Fläche von 100 m^2 ein Ar (a), eine Fläche von 100 Ar ein Hektar (ha); daher ist $1\ \mu m^2 =$ 10000 Hektar.

§. 140. Aufgaben.

1. Die Seite eines Quadrates ist *a)* 21 m, *b)* 5 m 4 dm, *c)* 359 mm, *d)* 0·715 m, *e)* 3·4752. . . m; wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist 23 m 2 dm; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wie viel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 m Seitenlänge, wenn man das m^2 mit 11 K 20 h bezahlt?
4. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58 m 5 dm ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1 m 2 dm haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

§. 141. Das Rechteck. Es sei in dem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 129) die Grundlinie $AB = 6\ cm$, und die Höhe $AD = 4\ cm$. Theilt man AB in 6, AD in vier gleiche Theile, und zieht zu den Seiten durch die Theilungspunkte parallele Linien, so ist jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 cm^2, und man hat vier Reihen solcher Quadrate, je von 6 cm^2; der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD$ beträgt daher $6\ cm^2 \times 4 = 24\ cm^2$.

Fig. 129.



Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes wird also gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe (oder die Maßzahl der Länge mit der Maßzahl der Breite) multipliciert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Rechteckes und f die Maßzahl seines Flächeninhaltes, so ist

$$f = g \cdot h.$$

Wird das Product zweier Factoren durch den einen Factor dividiert, so erhält man den andern Factor.

Es ist daher $g = \frac{f}{h}$ und $h = \frac{f}{g}$.

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus.

Zusatz. Das Product $g \cdot h$ oder $AB \cdot AD$ ist im geometrischen Sinne als ein Rechteck, dessen zwei zusammenstoßende Seiten g und h oder AB und AD sind, aufzufassen.

§. 142. Aufgaben.

1. Bestimme 1) den Umfang, 2) den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
   a) Grundlinie 9·2 *m*, Höhe 5·8 *m*;
   b) „ 12 *m* 3 *dm* 3 *cm*, „ 9 *m* 2 *cm*;
   c) „ 3·2152... *m*, „ 1·0647... *m*.
2. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist 34·2 m^2, die Grundlinie 9 *m*; wie groß ist die Höhe?
3. Ein Rechteck ist 2 *m* 8 *dm* breit und enthält 16 m^2 91 dm^2 20 cm^2; wie groß ist seine Länge?
4. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 87 *m* 4 *dm*, eine Seite 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
5. Ein Quadrat hat mit einem Rechtecke, dessen Seiten 62 *cm* und 34 *cm* sind, gleichen Umfang; um wie viel ist der Flächeninhalt des Quadrates größer als der des Rechteckes?
6. Eine Tischplatte ist 1·4 *m* lang und 1·2 *m* breit; wie groß ist ihre Fläche?
7. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *dm* 5 *cm* Höhe; wie groß ist *a)* der Umfang, *b)* der Flächeninhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?
8. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, 34 *m* 4 *dm* lang und 19 *m* 2 *dm* breit, und bezahlt das m^2 zu $10\frac{1}{2}$ K; wie viel kostet der Bauplatz?
9. Wie viel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?
10. Ein Acker ist 116 *m* lang und 18 *m* 5 *dm* breit; wie viel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf ein Ar $2\frac{1}{2}$ Liter Weizen aussäet?
11. Ein Cassatisch, der 1·3 *m* lang und 0·8 *m* breit ist, soll eine Steinplatte erhalten, die 1 *dm* Holzrand stehen lässt; wie viel kostet die Platte, wenn das m^2 mit $17\frac{1}{2}$ K bezahlt wird?
12. Ein Hof von 18 *m* Länge und 12 *m* Breite soll mit Steinplatten belegt werden, welche 3 *dm* lang und ebenso breit sind; *a)* wie viel Platten sind erforderlich? *b)* wie hoch kommt die Pflasterung, das m^2 zu $16\frac{2}{5}$ K gerechnet?
13. Ein Dach von 7·4 *m* Länge und 5·8 *m* Breite soll mit Zinkplatten belegt werden; *a)* wie viel Platten von 1·5 *m* Länge und 8 *dm* Breite sind dazu erforderlich, wenn an jeder Seite der Platte 3 *cm* durch die Falze verloren gehen? *b)* wie viel kosten dieselben, wenn jede Platte 6 Kilogramm wiegt und 1 Kilogramm Zinkplatte mit 1 K 10 h bezahlt wird?

§. 143. Das schiefwinklige Parallelogramm. 1. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §. 120 und §. 141.

Sind P und p die Flächeninhalte zweier Parallelogramme mit den Grundlinien G und g und der Höhe H und h, so ist $P = G.H$, $p = gh$, mithin $P : p = GH : gh$; d. h.

Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Parallelogramme *a)* von gleicher Grundlinie, *b)* von gleicher Höhe?

§. 144. Aufgaben.

1. In einem Rhomboid ist die Grundlinie 108 *dm*, die Höhe 64 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Von einer Wiese, welche die Form eines Rhomboids hat, worin die Grundlinie 66·4 *m* und die Höhe 45·2 *m* beträgt, wird ein Stück von 14 *m* Höhe parallel mit der Grundlinie abgeschnitten und zu Ackerland gemacht; *a)* wie groß war die Wiese? *b)* wie groß ist das übrig bleibende Stück derselben?
3. Die Fläche eines Parallelogramms ist 19·43725... m^2, die Grundlinie 6·238... *m*; die Höhe zu berechnen.

§. 145. Das Dreieck. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §. 121 und §. 143.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Dreieckes und f seinen Flächeninhalt, so hat man

$$f = \frac{g \,.\, h}{2}, \quad g = \frac{2f}{h} \text{ und } h = \frac{2f}{g},$$

oder

$$g = f : \frac{h}{2} \text{ und } h = f : \frac{g}{2}.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen; die andere Kathete stellt dann die Höhe vor. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der beiden Katheten.

Wie verhalten sich die Flächen zweier Dreiecke *a)* von verschiedener Grundlinie und Höhe, *b)* von gleicher Grundlinie, *c)* von gleicher Höhe?

§. 146. Aufgaben.

1. Berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn gegeben sind:

Grundlinie	*a)* 3·5 *m*,	*b)* 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*,	*c)* 794 *cm*,
Höhe	3·2 *m*,	5 *dm* 9 *cm*,	563 *cm*.

2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29 *m* 3 *dm*, die andere 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes, wenn die Höhe 5·6 *m*, und der Flächeninhalt 40·32 m^2 beträgt?
4. Ein Dreieck hat 20 m^2 67 dm^2 Flächeninhalt, und 5 *m* 3 *dm* zur Grundlinie; wie groß ist die Höhe?
5. In einem rechtwinkligen Dreiecke, welches 21 m^2 5 dm^2 enthält, ist eine Kathete 7 *m* 4 *dm*; wie groß ist die zweite Kathete?
6. Ein Dreieck hat mit einem Parallelogramme gleichen Flächeninhalt und gleiche Grundlinie; wie groß ist die Höhe des Dreieckes?
7. Die Fläche eines Dreieckes ist 12·4786... m^2, die Grundlinie ist 8·3452... *m*; die Höhe zu berechnen.

§. 147. Das Trapez. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Producte aus der Maßzahl der Summe der Parallelseiten und der Maßzahl der Höhe.

Folgt aus §. 122 und §. 145.

Sind a und b die Maßzahlen der zwei Parallelseiten, h die Maßzahl der Höhe eines Trapezes und f der Flächeninhalt, so hat man

$$f = \frac{(a + b) \,.\, h}{2}.$$

Daraus folgt $(a + b).\ h = 2f$, daher $h = \frac{2f}{a + b}$, oder

$$h = f : \frac{a + b}{2}.$$

Wie findet man aus der Fläche, der Höhe und einer der Parallelseiten die zweite Parallelseite eines Trapezes?

§. 148. Aufgaben.

1. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
   a) Parallelseiten 36 *m* und 27 *m*, Höhe 18 *m*;
   b) „ 3·5 *m* und 2·8 *m*, Höhe 1·6 *m*;
   c) „ 2 *m* 5 *dm* 4 *cm* und 5 *m* 3 *dm* 9 *cm*, Höhe 4 *m* 2 *dm* 8 *cm*.
2. In einem Trapeze, dessen Flächeninhalt 18·81 m^2 beträgt, sind die Parallelseiten $5\frac{1}{2}$ *m* und $4\frac{2}{5}$ *m*; wie groß ist die Höhe?
3. Ein Trapez ist flächengleich mit einem Quadrate, dessen Seite 2·5 *m* beträgt; die Höhe des Trapezes ist 1·2 *m*, eine Parallelseite 1·6 *m*; wie groß ist die andere Parallelseite?
4. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand ist 34·5 *m*; wie viel ist der Garten wert, das Ar zu 50 K gerechnet?
5. Wie viel kostet die Pflasterung eines Hofes von der Form eines Trapezes mit den Parallelseiten 27·6 *m* und 24·5 *m*, die 11·2 *m* voneinander abstehen, wenn 1 m^2 Pflaster zu $6\frac{1}{2}$ K gerechnet wird?
6. Die Fläche eines Trapezes ist 13·4725... m^2, die Höhe 2·4735... *m*, eine der beiden Parallelseiten 4·2738... *m*; die zweite Parallelseite zu suchen.

§. 149. Das regelmäßige Vieleck. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen des Umfanges und des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite.

Folgt aus §. 123 und §. 145.

Bezeichnen a, r, u und f folgeweise die Maßzahlen für die Seite eines regelmäßigen n-Eckes, für den Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite, für den Umfang und den Flächeninhalt, so ist

$$u = na \text{ und } f = \frac{u \,.\, r}{2} = \frac{na \,.\, r}{2};$$

und umgekehrt

$$a = \frac{u}{n},\quad u = \frac{2f}{r},\quad r = \frac{2f}{u} \text{ und } a = \frac{2f}{nr}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muss man, wie hier nicht bewiesen wird, die Maßzahl der gegebenen Seite

in einem		gleichseitigen Dreiecke	mit	0·28868...,
„	„	Quadrate	„	0·50000,
„	„	regelmäßigen Fünfecke	„	0·68819...,
„	„	Sechsecke	„	0·86603...,
„	„	Achtecke	„	1·20711...,
„	„	Zehnecke	„	1·53884...,
„	„	Zwölfecke	„	1·86603...

multiplicieren.

§. 150. Aufgaben.

1. Wie groß ist in jedem der eben angeführten regelmäßigen Vielecke *a)* der Umfang, *b)* der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, *c)* der Flächeninhalt, wenn eine Seite 12·54 *cm* beträgt?
2. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21·5 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Es soll eine regelmäßige achtseitige Laube, deren Seite 2 *m* lang ist, ausgesteckt werden; wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

§. 151. Das unregelmäßige Vieleck.

Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen:

a) Man zerlegt das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, berechnet jedes derselben und addiert alle Dreiecksflächen.

b) Man zieht die längste Diagonale des Vieleckes und fällt darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte; dadurch zerfällt das Vieleck in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, aus denen der Flächeninhalt berechnet werden kann. Dabei werden die Senkrechten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abschnitte der Diagonale als Höhen betrachtet.

§. 152. Aufgaben.

Man berechne die Flächeninhalte folgender Vielecke:

1.*) In dem Vielecke $ABCDEFG$ (Fig. 130) ist gegeben: $BG = 39\ m$, $BE = 42{\cdot}5\ m$, $CD = 31{\cdot}5\ m$, $GE = 39{\cdot}5\ m$, $Aa = 11{\cdot}6\ m$, $Cc = 19{\cdot}7\ m$, $Ee = 12{\cdot}1\ m$, $Bb = 35{\cdot}4\ m$, $Ff = 16{\cdot}4\ m$.

---

*) Bei den Berechnungen der einzelnen Flächen in den Aufgaben 1 und 2 kommt bei jeder Fläche die Division durch 2 vor; welcher Rechnungsvortheil ist möglich?

2. In dem Vielecke $ABCDEFGHJ$ (Fig. 131) ist gegeben: $Bb = 60{\cdot}5\ m$, $Cc = 57{\cdot}2\ m$, $Dd = 46\ m$, $Ff = 52{\cdot}3\ m$, $Gg = 12{\cdot}1\ m$, $Hh = 17{\cdot}1\ m$, $Ji = 63{\cdot}4\ m$; ferner $Ai = 9{\cdot}1\ m$, $ih = 29{\cdot}2\ m$, $hb = 22{\cdot}1\ m$, $bg = 3{\cdot}1\ m$, $gc = 19{\cdot}2\ m$, $cf = 15{\cdot}4\ m$, $fd = 16{\cdot}8\ m$, $dE = 34{\cdot}8\ m$.

Fig. 130.

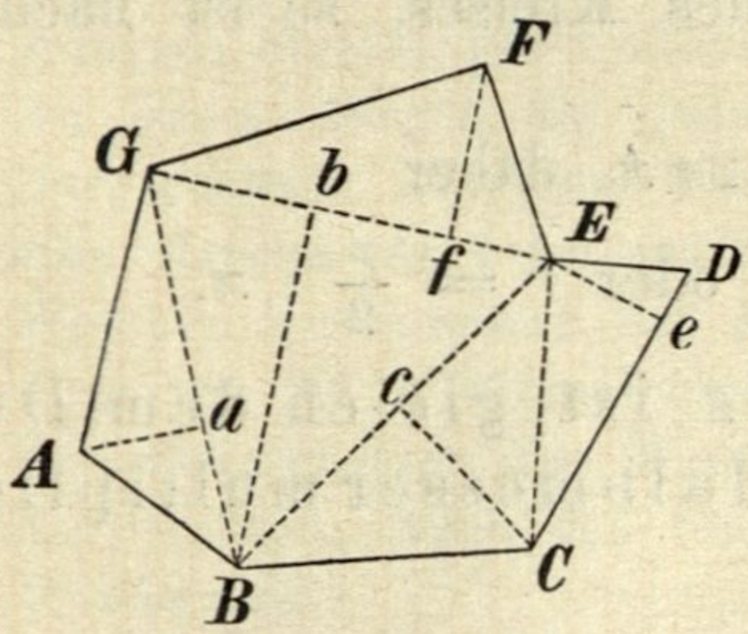
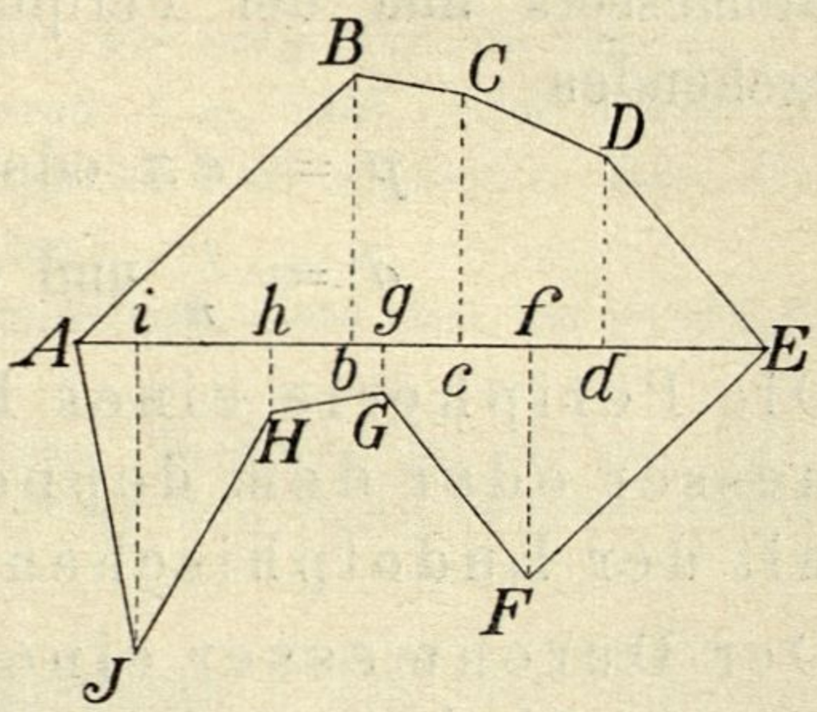


Fig. 131.



2. Ausmessung des Kreises.

§. 153. Umfang eines Kreises. Das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene regelmäßige Sechseck einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen die Peripherie des Kreises liegt. Noch enger wird die Peripherie durch die Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen 12-, 24-, 48ecke, u. s. w., eingeschlossen. So findet man bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenanzahl:

Umfang des eingeschr. regelm. 3072eckes $= 3{\cdot}141592....\times d$,
„ „ umgeschr. „ „ $= 3{\cdot}141594....\times d$,
wenn d die Länge des Durchmessers bedeutet.

Welche Grenzen für die Peripherie liefern das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck und das umgeschriebene Quadrat?

Da nun die Peripherie des Kreises immer zwischen den Umfängen der ein- und der umgeschriebenen Vielecke liegt, so müssen die Decimalstellen, in welchen die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen 3072eckes übereinstimmen, nothwendig auch für die Peripherie des Kreises gelten. Man hat daher auf 5 Decimalstellen genau

$$\text{Peripherie des Kreises} = 3{\cdot}14159..\times d.$$

Die Zahl $3{\cdot}14159...$, mit welcher man den Durchmesser eines Kreises multiplicieren muss, um die Peripherie zu erhalten, heißt die Ludolphische Zahl, da sie von Ludolph van Ceulen auf eine größere Zahl von Decimalstellen berechnet wurde, und wird mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet. Sie ist die Verhältniszahl zwischen dem Kreisumfang und dem Durchmesser. Sie lässt sich nicht durch einen endlichen

Decimalbruch genau ausdrücken, kann aber mit jedem Grade der Annäherung bestimmt werden. In Rechnungen, welche keine große Genauigkeit erfordern, ist der Näherungswert $\pi = 3{\cdot}14$ oder $\pi = 3\frac{1}{7}$ ausreichend.

Bezeichnen d, r und p folgeweise die Maßzahlen des Durchmessers, des Halbmessers und der Peripherie eines Kreises, so ist nach dem Vorhergehenden

$$p = d\pi \text{ oder } p = 2r\pi, \text{ daher}$$

$$d = \frac{p}{\pi} \text{ und } r = \frac{p}{2\pi} \text{ oder } r = \frac{p}{2} : \pi.$$

1) Die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser multipliciert mit der Ludolphischen Zahl.
2) Der Durchmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie dividiert durch die Ludolphische Zahl.
3) Der Halbmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie dividiert durch die doppelte Ludolphische Zahl, oder gleich der halben Peripherie dividiert durch die Ludolphische Zahl.

Sind P und p die Peripherien zweier Kreise mit den Radien R und r, so ist $P = 2R\pi$, $p = 2r\pi$, mithin $P : p = 2R\pi : 2r\pi = R : r$; d. h.

Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien.

§. 154. Aufgaben.

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 13 m; wie groß ist die Peripherie?

$$\begin{array}{r} p = 3{\cdot}1416\ldots \times 26 \\ \hline 62 \\ \hline 6283_2 \\ 1885_0 \\ \hline 81{\cdot}68\ldots \end{array}$$

$p = 81{\cdot}68\ldots\ m = 81\ m\ 6\ dm\ 8\ldots\ cm.$

2. Der Durchmesser d eines Kreises ist *a)* $5{\cdot}8$ m, *b)* $3{\cdot}85$ m, *c)* 5 m 8 dm 3 cm, *d)* $2{\cdot}8743\ldots$ m; wie groß ist die Peripherie? ($\pi = 3{\cdot}1416\ldots$).
3. Wie groß ist der Umfang p eines Kreises, dessen Halbmesser r *a)* 2 m, *b)* $3{\cdot}8$ dm, *c)* 715 cm, *d)* $3{\cdot}4792\ldots$ m ist?
4. Wie groß ist *a)* der Durchmesser, *b)* der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie 20 m beträgt?
5. Wie groß ist r für
   a) $p = 2{\cdot}5$ m, *b)* $p = 131{\cdot}95$ dm, *c)* $p = 18$ m 3 dm $4{\cdot}69$ cm?
6. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 cm lang; welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?
7. Der Umfang eines Baumes ist 8 dm 6 cm; wie groß ist der Durchmesser?

8. Man will einen kreisrunden Tisch für 8 Personen machen; wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 *dm* des Umfanges rechnet?
9. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang; wie groß ist *a)* der Umfang, *b)* der Halbmesser des Äquators?
10. Ein Erdglobus hat 6 *dm* im Durchmesser; welche Länge hat daran der Äquator?
11. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·1 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht; wie lang war die Strecke?
12. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m*, und jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser; wie viele Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 *km* zurückgelegt hat?
13. Welchen Durchmesser hat ein Locomotivrad, das sich auf einem Schienenwege von 990 *m* 315mal umdreht?
14. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 37 *cm*; wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, das bis auf den Boden reicht, 12mal um die Winde geht?

§. 155. Länge eines Kreisbogens. Da der Umfang eines Kreises $2r\pi$ ist, so ist die Länge eines Bogengrades $\frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$; hat ein Bogen m Bogengrade, so ist seine Länge *(b)* im Längenmaß $b = \frac{r\pi m}{180}$.

Da mithin $r\pi m = 180\,b$ ist, so erhält man $r = \frac{180\,b}{\pi m}$ und $m = \frac{180\,b}{r\pi}$.

Aufgaben.

1. Bestimme die Bogenlänge von *a)* 56°, *b)* 120°, *c)* 270° in einem Kreise vom Halbmesser 1 *m*.
2. Der Durchmesser eines Kreises ist *a)* 1 *m*, *b)* 2 *m*, *c)* 3 *m*; welche Länge hat in jedem dieser Kreise ein Bogen von 60°?
3. Ein Bogen von 48° hat 1·26 *m* Länge; wie groß ist der Halbmesser dieses Kreises?
4. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15° *a)* 3 *dm*, *b)* 7·5 *dm*, *c)* 25·2 *dm*, *d)* 4·5 *cm*, *e)* 8·6274... *m* lang ist?
5. Wie viel Grade hat ein Bogen von 7·853 *dm* Länge, wenn der Kreisdurchmesser 2 *m* lang ist?

Flächeninhalt eines Kreises und seiner Theile.

§. 156. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der Peripherie und des Halbmessers.

Folgt aus § 123 und § 145.

Bezeichnet f den Flächeninhalt und p die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so hat man

$$f = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Da aber $p = 2r\pi$ ist, so ist auch $f = \frac{2r\pi \cdot r}{2}$ oder,

$$f = r^2\pi.$$

Man kann daher auch sagen:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der zweiten Potenz der Maßzahl des Halbmessers multipliciert mit der Ludolphischen Zahl.

Sind F und f die Flächen zweier Kreise mit den Radien R und r, so ist $F = R^2\pi$, $f = r^2\pi$, mithin $F : f = R^2\pi : r^2\pi = R^2 : r^2$; d. h.

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihren Radien.

Wie ändert sich *a)* die Peripherie, *b)* die Fläche eines Kreises, wenn der Radius verdoppelt wird?

§. 157. Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächeninhalte der beiden concentrischen Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und voneinander subtrahiert.

Sind R und r die Maßzahlen der Halbmesser zweier concentrischer Kreise und f der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Kreisringes, so hat man

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi, \text{ oder}$$
$$f = (R + r)\ (R - r)\pi.$$

§. 158. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der Länge des Bogens und des Halbmessers.

Folgt aus §. 123 und §. 145.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit dem Halbmesser r und der Bogenlänge b, so hat man

$$f = \frac{b \cdot r}{2},\ b = \frac{2f}{r} \text{ und } r = \frac{2f}{b},$$
$$\text{oder } b = f : \frac{r}{2} \text{ und } r = f : \frac{b}{2}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes kann auch aus dem Radius und dem Centriwinkel m berechnet werden; da $b = \frac{r\pi m}{180}$, so ist $f = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r^2\pi m}{360}$.

Zusatz. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, berechnet man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiert davon den Inhalt des Dreieckes, um welches der Ausschnitt größer als der Abschnitt ist.

§. 159. Aufgaben.

1. Der Flächeninhalt eines Kreises zu suchen, wenn der Radius 8 *dm* ist.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}1416\ldots \times 64 \\ 46 \\ \hline 188\,49_6 \\ 12\,56_6 \\ \hline 201{\cdot}06\ldots \end{array}$$

$f = 201{\cdot}06\ldots\ dm^2 = 2\ m^2\ 1\ dm^2\ 6\ldots\ cm^2.$

2. In einem Kreise ist der Halbmesser *a)* 2·65 *m*, *b)* 1 *m* 7 *dm* 8 *cm*, *c)* $35\frac{1}{2}$ *dm*, *d)* 3·4756... *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser *a)* 15 *m*, *b)* 5·135 *m*, *c)* 8 *dm* 3 *cm* 4 *mm*, *d)* 8·473... *dm* beträgt?
4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Peripherie 24·41 *cm* beträgt?
5. Eine Scheibe hat 1 *m* 48 *cm* im Umfange; wie groß ist ihr Flächeninhalt?
6. Der Umfang eines Baumes ist $2\frac{4}{5}$ *m*; wie groß ist der Flächeninhalt eines Querschnittes?
7. Wie viel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 *m* ist, wenn ein Mensch $17\frac{1}{2}$ dm^2 Raum einnimmt?
8. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die zwei concentrischen Kreise 5 *m* 6 *dm* und 4 *m* 4 *dm* zu Durchmessern haben?
9. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315·8 *mm* und 410·5 *mm* betragen.
10. Auf einer Schießscheibe beträgt der Durchmesser des inneren schwarzen Kreises 0·15 *m* und die Breite des weißen Ringes 0·3 *m*; wie groß ist der weiße Ring?
11. Um einen kreisrunden Thurm von 32 *m* Umfang wird ein 3 *m* breiter Graben gezogen; welchen Flächenraum nimmt dieser ein?
12. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn
    a) der Halbmesser 5·8 *m*, der Bogen 8·2 *m*,
    b) „ „ 0·17 *dm*, „ „ 0·25 *dm* ist?
13. Ein Kreisausschnitt von 23 *cm* Bogenlänge hat 161 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist der Halbmesser?
14. Der Halbmesser eines Kreises ist 4 *m*, ein Centriwinkel beträgt 36°. Den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes zu berechnen.
15. Ein Kreisausschnitt mit dem Centriwinkel 57° 17′ 43″ hat 12 *cm* Halbmesser; wie groß ist sein Flächeninhalt?
16. Ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser 6 *cm* ist, hat 41·357 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist der zugehörige Centriwinkel?
17. Einem Kreise, dessen Radius 2·7 *m* beträgt, ist ein Quadrat eingeschrieben; wie groß ist das durch eine Seite desselben abgeschnittene Segment?

XI. Ähnlichkeit der ebenen Figuren.

1. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

§. 160. Verhältnis zweier Strecken.

Unter dem Verhältnis zweier Strecken versteht man das Verhältnis ihrer Maßzahlen, wenn beide durch dieselbe Längeneinheit gemessen werden. Ist z. B. $a = 5\ dm$, $b = 2\ dm$, so verhalten sich diese beiden Strecken wie 5 : 2.

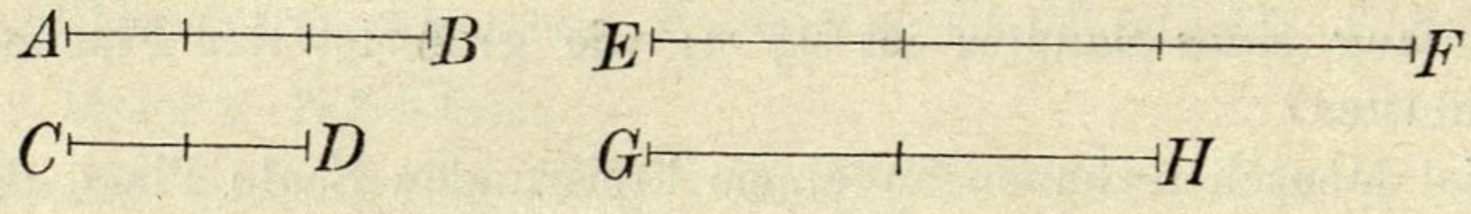
Als Maßeinheit kann jede beliebige Strecke genommen werden.

In Fig. 132 ist $AB : CD = 3 : 2$ und

$$EF : GH = 3 : 2.$$

Die Verhältnisse $AB : CD$ und $EF : GH$ sind daher einander gleich, und geben die Proportion $AB : CD = EF : GH$. Man sagt die Strecken AB und CD sind den Strecken EF und GH proportional; GH heißt die vierte Proportionale zu AB, CD und EF.

Fig. 132.



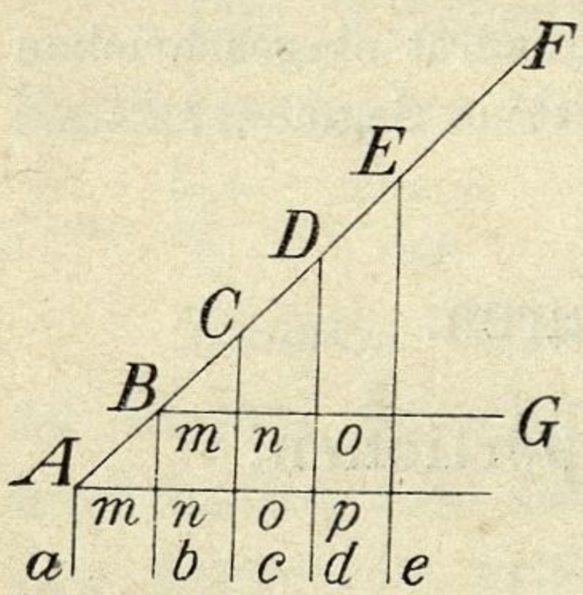
Eine Proportion, in welcher die inneren Glieder gleich sind, z. B. $a : b = b : c$, heißt eine stetige Proportion. b heißt die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und c und c die dritte stetige Proportionale zu a und b. Dass b die mittlere stetige Proportionale zu a und c ist, kann auch durch die Gleichung $b^2 = ac$ ausgedrückt werden.

Bilden die Strecken a, b, c, d die Proportion $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$; d. h. das Rechteck aus den äußeren Gliedern der Proportion ist dem Rechteck aus den inneren Gliedern flächengleich.

Ist eine Strecke b die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Strecken a und c, so ist $b^2 = ac$, d. h. das Quadrat aus der Strecke b ist dem Rechteck aus den beiden anderen Strecken flächengleich.

§. 161. Es seien auf dem Schenkel AF des Winkels A die gleichen Theile AB, BC, CD, DE aufgetragen und gegen den anderen Schenkel die Parallelen a, b, c, d, e durch die Theilungspunkte gezogen. Verschiebt man die Figur längs AF bis A nach B gelangt, so fällt jeder der Punkte B, C, D... auf den folgenden, jede der Parallelen a, b, c auf die folgende, die Geraden m, n, o, p kommen in die neuen Lagen m, n, o, p auf der Parallelen BG. Aus den entstandenen Parallelogrammen ergibt sich

Fig. 133.



$$m = n, \quad n = o, \quad o = p,$$

oder $m = n = o = p$. Es gilt der Satz:

Trägt man auf einem Schenkel eines Winkels gleiche Theile auf und zieht durch die Theilungspunkte Parallele gegen den anderen Schenkel, so werden auf diesem ebenso viele gleiche Theile abgeschnitten.

§. 162. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 134) in mehrere, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen.

a) Man zieht durch den einen Endpunkt A unter einem beliebigen Winkel einen Strahl AX, trägt darauf fünf gleiche Strecken von beliebiger Größe bis C auf, verbindet C mit dem zweiten Endpunkte B und zieht durch die übrigen Theilungspunkte von AC Parallele mit BC gegen AB.

Fig. 134.

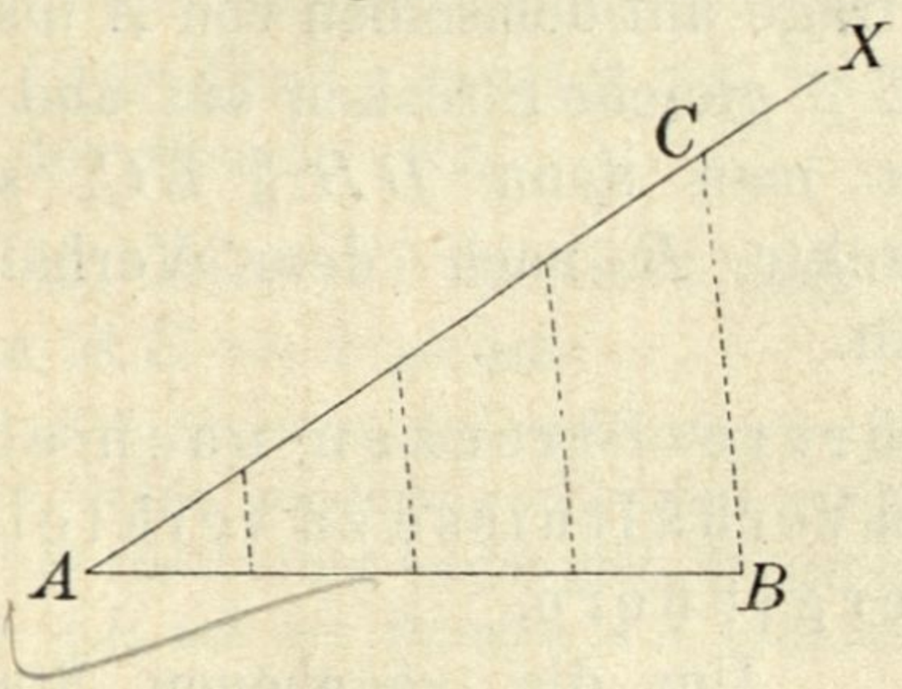
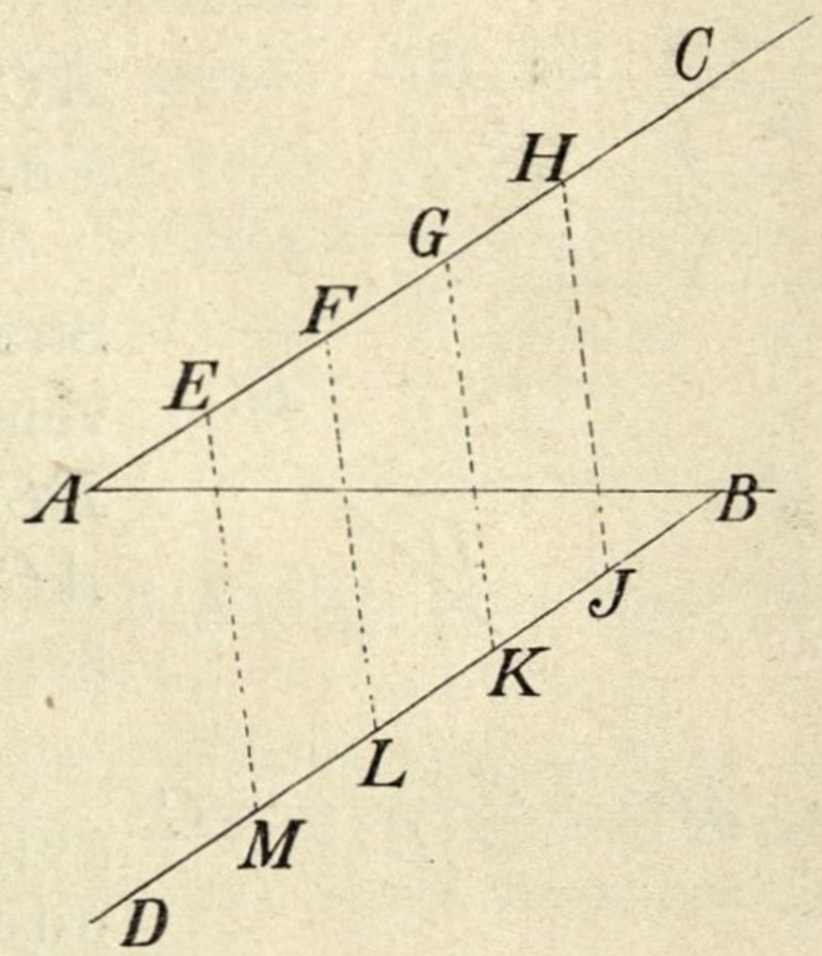


Fig. 135.

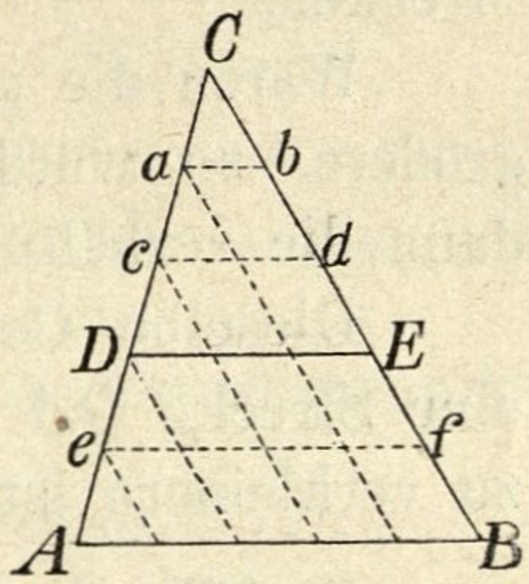


b) Um das Ziehen der vielen Parallelen zu vermeiden, lege man an AB (Fig. 135) durch A die beliebige Gerade AC, und durch B die Gerade $BD \parallel AC$, trage sowohl auf AC, als auf BD 4 gleiche Theile auf, und ziehe durch die Theilungspunkte die Strecken EM, FL, GK, HJ; diese theilen AB in fünf gleiche Theile.

Der Parallelismus der Geraden HJ, GK, FL etc. folgt aus §. 91.

§. 163. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden 1. die beiden anderen Seiten proportional getheilt, 2. die Seiten des abgeschnittenen Dreieckes sind den gleichliegenden Seiten des Dreieckes proportional.

Fig. 136.

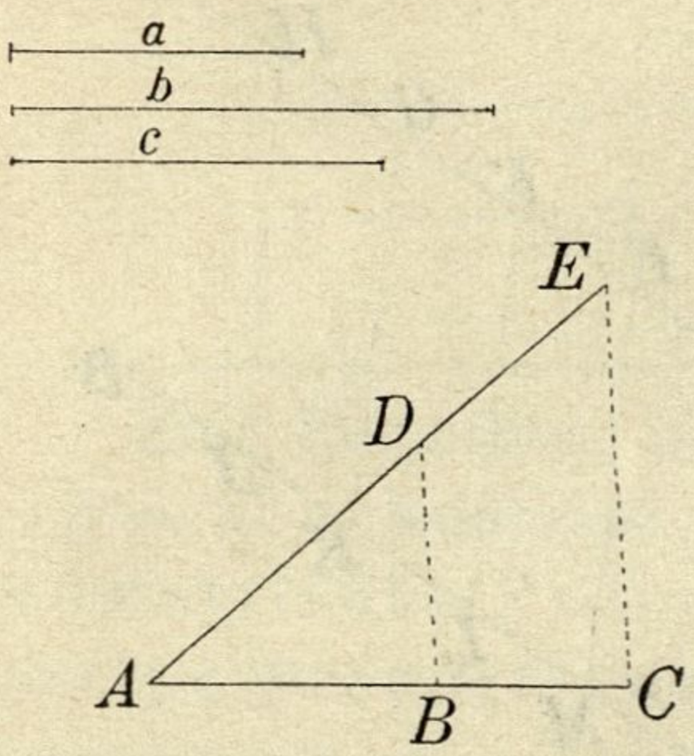


Beweis. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 136) $DE \parallel AB$ und Ca ein Maß, das in AD 2mal, in DC 3mal enthalten sei. Zieht man durch die Theilungspunkte von AC Parallele zu AB und CB, so werden durch diese auch CB und AB in je 5 gleiche Theile getheilt, und zwar ist jeder Theil von CB gleich Cb und jeder Theil von AB gleich ab; DE aber wird in 3 gleiche Theile getheilt, deren jeder gleich ab ist, da Parallele zwischen Parallelen gleich sind. Man hat also:

1. $AD : DC = 2 : 3$ und $BE : EC = 2 : 3$; daher
$$AD : DC = BE : EC.$$
2. $AC : DC = 5 : 3$ und $BC : EC = 5 : 3$, $AB : DE = 5 : 3$; demnach:
$$AB : DE = AC : DC = BC : EC.$$

Umgekehrt: Wird ein Dreieck durch eine Transversale so geschnitten, dass eine der obigen Proportionen stattfindet, so ist die Transversale mit der nicht geschnittenen Dreieckseite parallel.

Fig. 137.

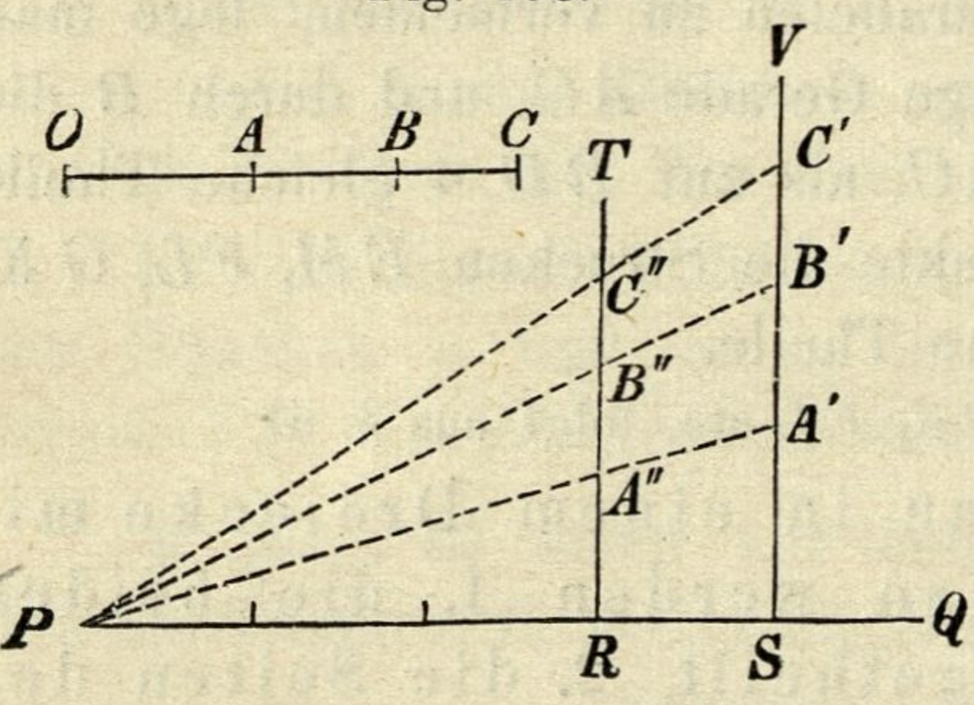


§. 164. *a)* Eine gegebene Strecke AC (Fig. 137) nach einem gegebenen Verhältnisse, z. B. 3 : 2, zu theilen.

Man lege durch A den willkürlichen Strahl AE, trage auf demselben von A bis D 3, von D bis E 2 gleiche Strecken auf und ziehe EC. Macht man dann $DB \parallel EC$, so ist AC im Punkte B nach dem Verhältnisse 3 : 2 getheilt.

b) Mehrere Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu verkleinern oder zu vergrößern.

Fig. 138.



Um die gegebenen Strecken OA, OB, OC (Fig. 138) z. B. in dem Verhältnis 4 : 3 zu verkleinern, ziehe man eine Gerade PQ, trage von P bis S 4 gleiche Theile auf; in den Punkten R und S errichte man die Senkrechten RT und SV, trage auf SV die gegebenen Strecken von S bis A', B', C' auf, und ziehe durch den Punkt P und die Punkte A', B', C' gerade Linien, welche RT in A'', B'', C'' treffen; die Geraden RA'', RB'', RC'' sind dann die gesuchten verhältnismäßig verkleinerten Strecken.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so würde man sie auf RT auftragen; auf SV erhielte man dann die verhältnismäßig vergrößerten Strecken.

Dieselbe Construction ist natürlich auch anwendbar, wenn nur eine Strecke OA nach einem gegebenen Verhältnis zu vergrößern oder zu verkleinern ist.

§. 165. Zu drei gegebenen Strecken a, b, c (Fig. 137) die vierte Proportionale zu finden.

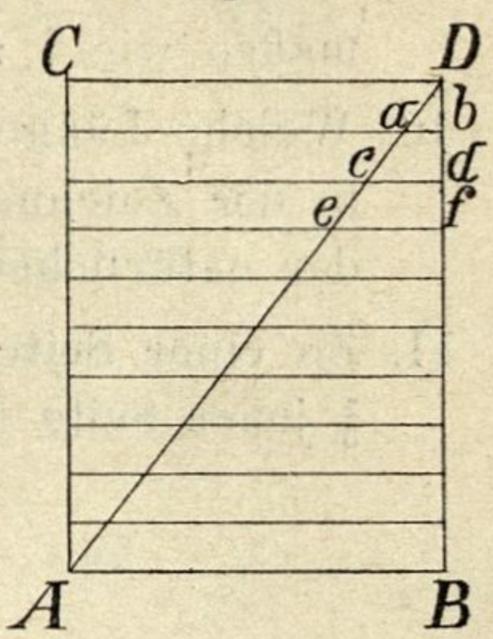
Auflösung. Construiere einen beliebigen Winkel A, schneide auf dessen Schenkeln $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ ab, und ziehe $CE \parallel BD$. Dann ist $AB : AC = AD : AE$, oder: $a : b = c : AE$.

Ist $c = b$, so ist AE die dritte stetige Proportionale zu a und b.

§. 166. Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man errichte auf der zu theilenden Strecke AB (Fig. 139) in den Endpunkten die Senkrechten AC und BD, trage auf jede z. B. 10 gleich große Theile bis C und D auf und ziehe durch je zwei zusammengehörige Theilungspunkte eine Gerade. Zieht man nun die Transversale AD, so ist ab der 10te Theil von AB, cd ist $\frac{2}{10}$, ef $\frac{3}{10}$, u. s. w. von der Strecke AB.

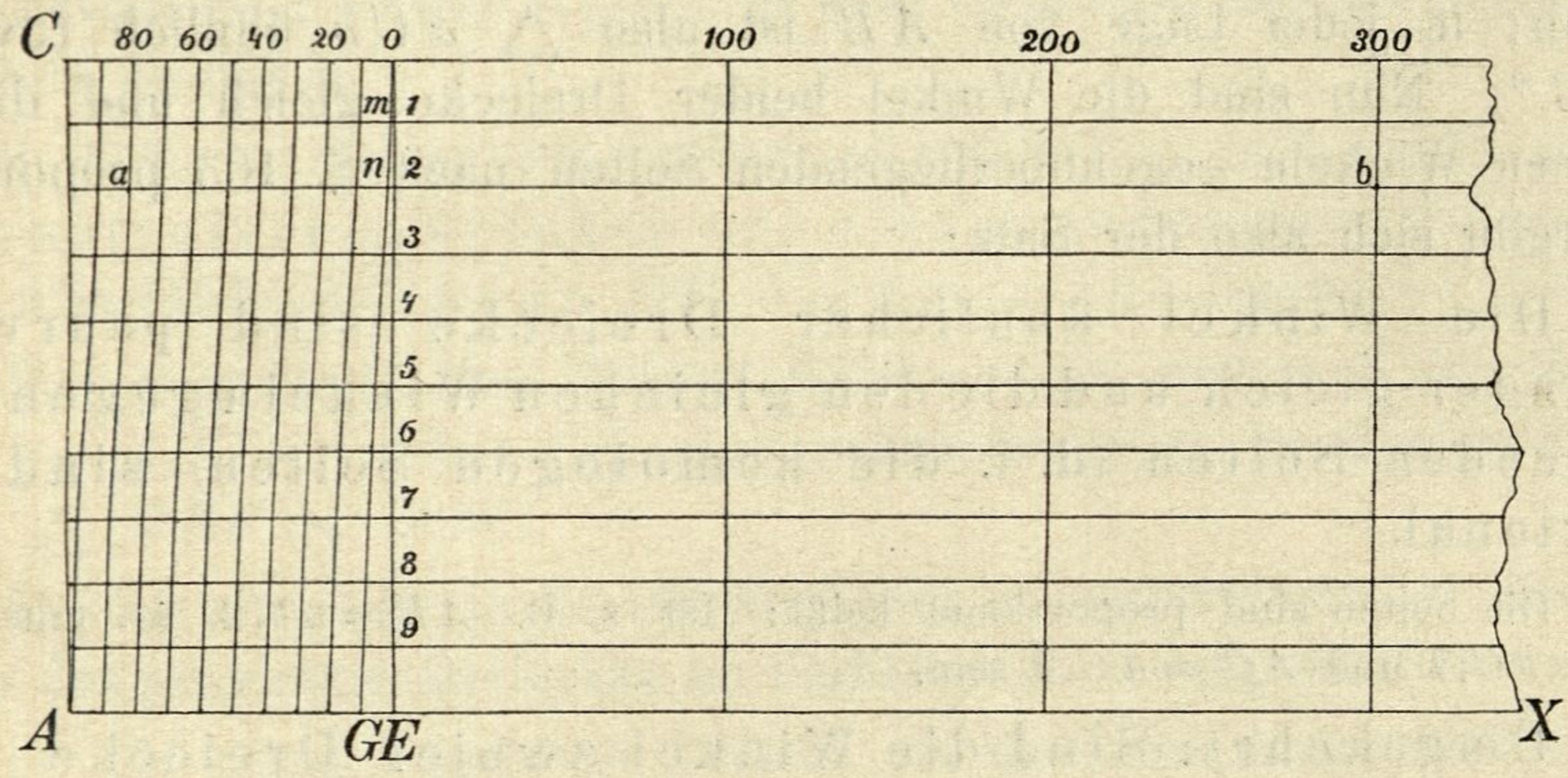
Fig. 139.



§. 167. Es ist die Länge der Strecke ab (Fig. 140) anzugeben wenn $AE = 1\ m$ ist.

Ein Maßstab, auf welchem die üblichen Längeneinheiten nicht in ihrer wirklichen Größe sondern verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab. Fig. 140 stellt einen verjüngten Transversalmaßstab dar. Es ist ein tausendtheiliger, wenn AE auf der Strecke AX zehnmal aufgetragen wird.

Fig. 140.



§. 168. Übungsaufgaben.

1. Construiere einen verjüngten tausendtheiligen Maßstab, auf welchem 2 *cm* der natürlichen Größe 1 *dm* vorstellen.
2. Trage mit Hilfe dieses Maßstabes auf einer Geraden eine Strecke von 3 *dm*, 2 *dm* 8 *cm*, 1 *dm* 7 *cm* 5 *mm*, 239 *mm*, 304 *mm* auf.
3. Zeichne mit den Seiten 21 *cm*, 18 *cm* und 16 *cm* ein Dreieck.
4. Zeichne mit der Seite 145 *mm* ein Quadrat.
5. Ziehe drei Strecken und bestimme nach dem obigen Maßstabe, wie viel Millimeter jede enthält.
6. Zeichne ein 4-, 5-, 6 seitiges Vieleck und bestimme dessen Umfang.
7. Zwei Strecken verhalten sich wie 3 : 4, die erste ist 126 *mm* lang; zeichne die beiden Strecken.
8. Gegeben sind vier ungleiche Strecken; man soll sie *a)* in dem Verhältnisse 3 : 5 vergrößern; *b)* in dem Verhältnisse 5 : 3 verkleinern.

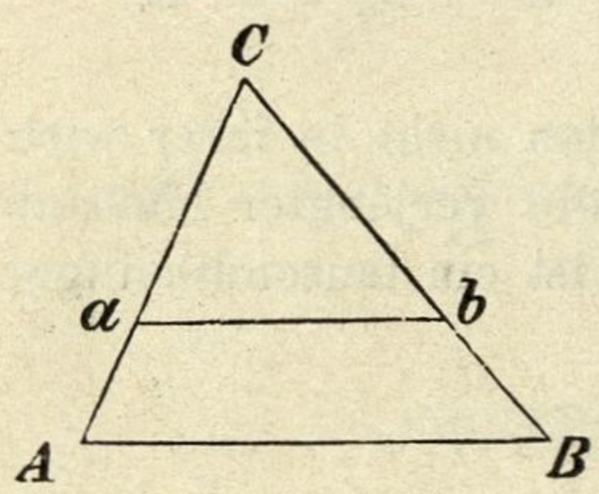
9. Auf einem Katastralplane beträgt eine Strecke 5·7 *cm*; wie groß ist die natürliche Länge derselben, *a)* wenn 1 *cm* der Zeichnung zu 30 *m* angenommen wird, *b)* wenn sich die Maße des Planes zu den natürlichen Längenmaßen wie 1 : 2500 verhalten?

10. Welche Länge wird eine Strecke, welche in der Wirklichkeit 648 *m* misst, in der Zeichnung erhalten, wenn die Längenmaße im Verhältnisse 1 : 7500 der natürlichen Größe gezeichnet werden sollen?

11. Zu einer Seite eines gegebenen Dreieckes eine Parallele zu ziehen, welche $\frac{1}{3}$ jener Seite ist.

2. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Fig. 141.



§. 169. Zwei Raumgrößen heißen ähnlich, wenn sie dieselbe Gestalt besitzen.

Um die Bedingungen zu erkennen, welche die Bestandstücke ähnlicher Dreiecke erfüllen müssen, werde die Seite AB des $\triangle ABC$ parallel zu sich selbst verschoben; dadurch ändert sich nur die Größe des Dreieckes ABC, nicht aber die Gestalt; in jeder Lage von AB ist also $\triangle aCb$ ähnlich ($\sim$) mit ACB.*) Nun sind die Winkel beider Dreiecke gleich und die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten nach §. 163 proportional. Es ergibt sich also der Satz:

Die Winkel ähnlicher Dreiecke sind paarweise einander gleich und die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten (d. i. die homologen Seiten) sind proportional.

Die Seiten sind proportional heißt: Ist z. B. $AB = ab.2$, so muss auch $BC = bC.2$ und $AC = aC.2$ sein.

Umgekehrt: Sind die Winkel zweier Dreiecke paarweise gleich und die Seiten derselben proportional, so sind die Dreiecke ähnlich.

Infolge des Zusammenhanges der Bestandstücke eines Dreieckes ist es aber für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke nicht nothwendig, dass alle diese Bedingungen als vorhanden erkannt werden, sondern es reicht eine geringere Zahl derselben hin, aus welchen die andern sich von selbst ergeben, ähnlich wie bei der Congruenz der Dreiecke. Darnach unterscheidet man auch hier die Ähnlichkeitssätze der Dreiecke. Es gibt vier, von welchen der erste der wichtigste ist.

---

*) Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$, ein liegendes *s* von similis, ähnlich. Da congruente Raumgrößen gleich und ähnlich sind, so vereinigt das Zeichen der Congruenz ($\cong$) die Zeichen der Gleichheit und Ähnlichkeit.

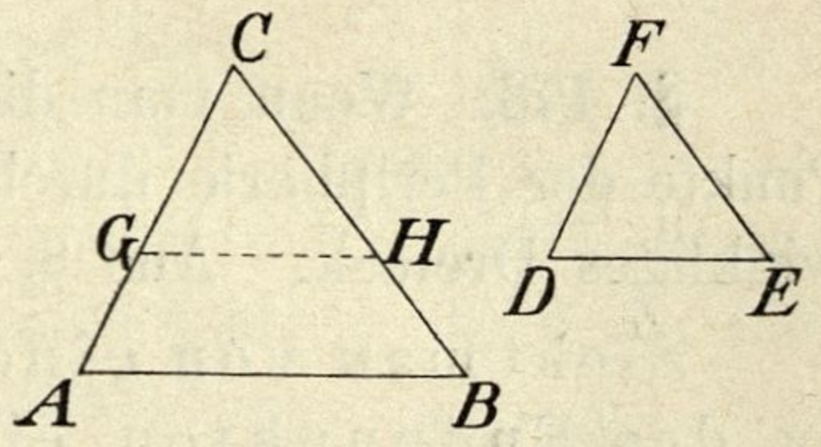
§. 170. Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn in denselben alle drei Winkel paarweise gleich sind.

Voraussetzung. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 142) der Winkel $A = D$, $B = E$ und daher $C = F$.

Behauptung. $\triangle ABC \sim DEF$.

Beweis. Man schneide von der Seite AC ein Stück CG ab, welches der Seite DF gleich ist, und ziehe $GH \parallel AB$; dann ist $\triangle ABC \sim GHC$ (§. 169). Das letztere Dreieck GHC ist nun mit DEF congruent, denn es ist $CG = DF$, der Winkel $G = D$, weil beide dem Winkel A gleich sind, und der Winkel $C = F$. Wenn aber das Dreieck ABC mit GHC ähnlich, und GHC mit DEF congruent ist, so muss auch $\triangle ABC \sim DEF$ sein.

Fig. 142.



Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel paarweise gleich haben, auch die dritten Winkel gleich sein müssen, so kann man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Ähnlichkeit derselben schließen.

§. 171. *a*) Über einer Strecke DE (Fig. 142) ein Dreieck zu construieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist, wenn DE die homologe Seite zu AB ist.

Man trage in D den Winkel $EDF = BAC$ und in E den Winkel $DEF = ABC$ auf; ihre Schenkel schneiden sich im Punkte F und es ist $\triangle DEF \sim ABC$.

b) Zu einem Dreiecke ein ähnliches zu construieren, so dass die Seiten des gegebenen Dreieckes im Verhältnis 4 : 3 vergrößert erscheinen.

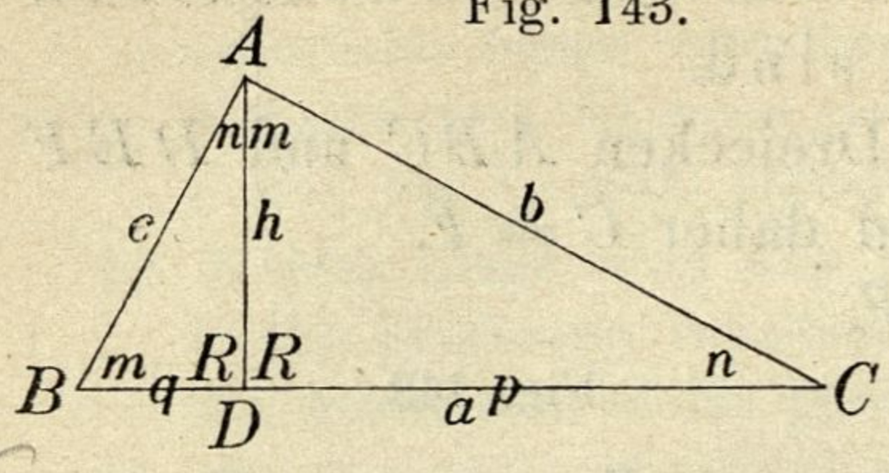
c) Zu einem gegebenen Dreieck ein ähnliches zu construieren, so dass die Seiten im Verhältnis 3 : 5 verkleinert werden.

d) In einem Dreieck sind die Seiten 38 *cm*, 32 *cm*, 28 *cm*; wie groß sind die Seiten eines ähnlichen Dreieckes, wenn das Verhältnis der gleichliegenden Seiten *a*) 4 : 3, *b*) 2 : 5 ist?

3. Anwendungen der Ähnlichkeit der Dreiecke.

§. 172. Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke die Höhe auf die Hypotenuse, so ist 1. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben; 2. die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 143.



Jedes der Dreiecke ABC, ABD und ACD enthält dieselben Winkel m, n, R, folglich sind sie paarweise ähnlich.

$\triangle ABC \sim ABD$. Daher ist $a : c = c : q$.
$\triangle ABC \sim ACD$. „ „ $a : b = b : p$.
$\triangle ABD \sim ACD$. „ „ $q : h = h : p$.

§. 173. Wenn man die Endpunkte eines Durchmessers mit einem Punkte der Peripherie durch Sehnen verbindet, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Aus §. 172 ergibt sich daher:

Zieht man von einem Punkte einer Kreislinie Sehnen zu den Endpunkten eines Durchmessers und die Senkrechte auf diesen, so ist 1. jede Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem jener Sehne anliegenden Abschnitte desselben; 2. die Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

§. 174. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so bilden die Abschnitte der einen Sehne die äußeren, die Abschnitte der andern die inneren Glieder einer Proportion.

Zieht man (Fig. 144) die Strecken RS' und $R'S$, so ist $\triangle MRS' \sim MR'S$, da $\sphericalangle R = R'$ (§. 80, 1) und die Winkel bei M ebenfalls gleich sind; daher $MR : MS' = MR' : MS$.

Fig. 144.

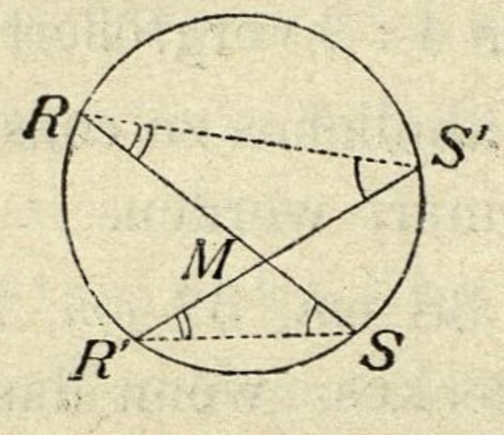
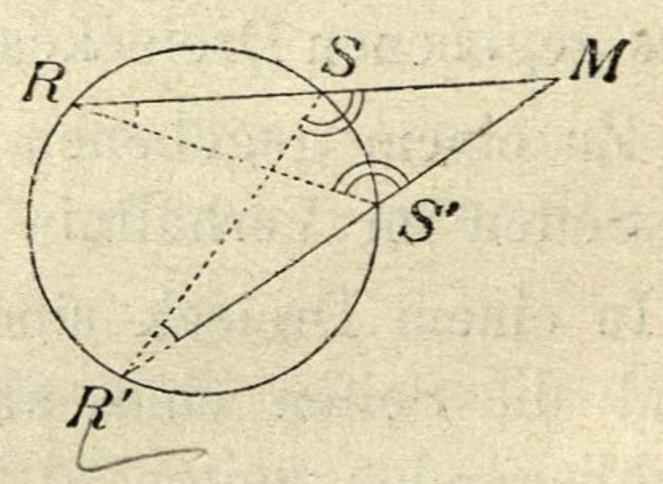


Fig. 145.



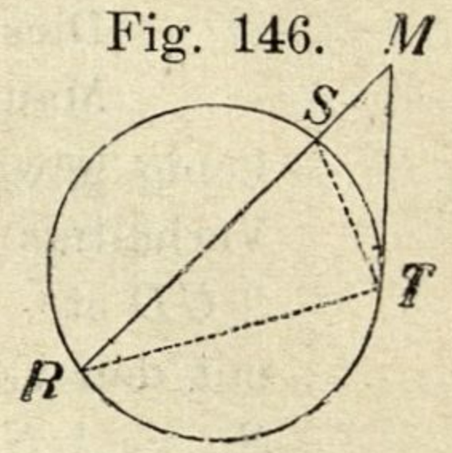
§. 175. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zu diesem zwei Secanten, so bilden die eine Secante und ihr äußerer Abschnitt die äußeren, die andere Secante und ihr äußerer Abschnitt die inneren Glieder einer Proportion.

Zieht man (Fig. 145) die Strecken RS' und $R'S$, so ist Winkel $R = R'$, $\sphericalangle M = M$, daher $\triangle MRS' \sim MR'S$, und folglich $MR : MS' = MR' : MS$.

§. 176. Dreht man die Secante MR' (Fig. 145) um den Punkt M so weit, dass aus derselben die Tangente MT (Fig. 146) wird, so ist $MS' = MR' = MT$ und $MR : MT = MT : MS$.

Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zu diesem eine Secante und eine Tangente, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitte.

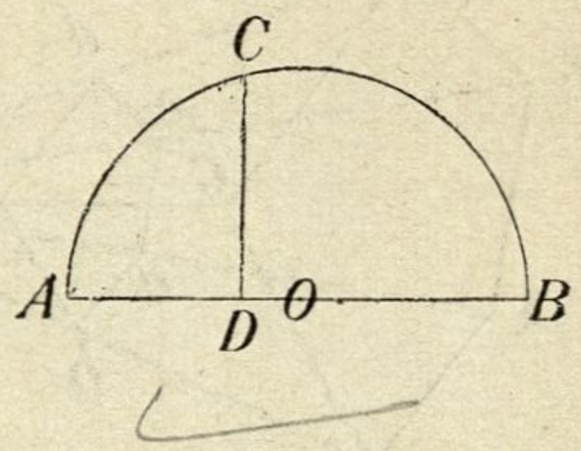
Fig. 146.



§. 177. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu construieren.

Man mache (Fig. 147) $AD = a$, $DB = b$, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte $DC \perp AB$, so ist DC die mittlere Proportionale zwischen AD und DB (§. 173, 2).

Fig. 147.



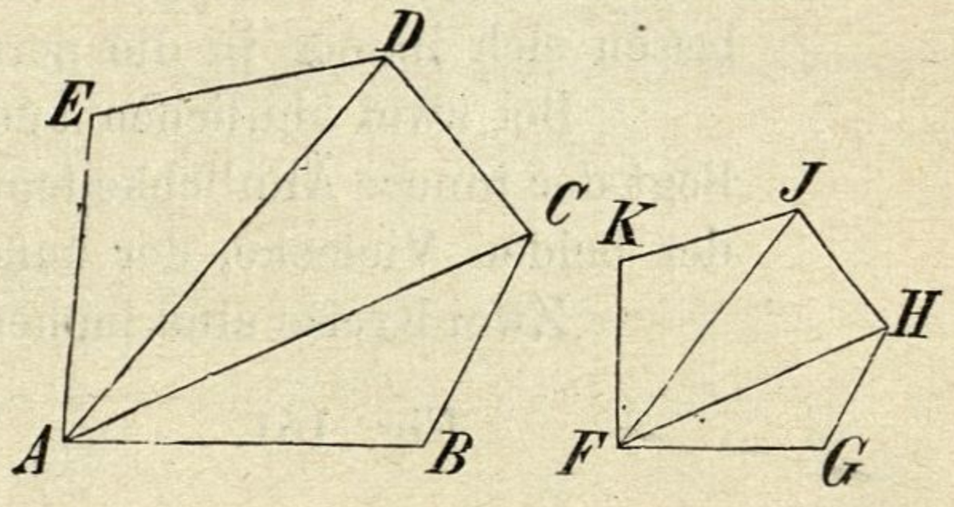
4. Ähnlichkeit der Vielecke.

§. 178. *a)* Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus gleich vielen paarweise ähnlichen Dreiecken in übereinstimmender Weise zusammengesetzt sind.

Ist (Fig. 148) $ABC \sim FGH$, $ACD \sim FHJ$, $ADE \sim FJK$, so ist $ABCDE \sim FGHJK$.

Mithin sind in ähnlichen Vielecken die Winkel paarweise gleich und je zwei einander entsprechende Seiten (Diagonalen) haben dasselbe Verhältnis.

Fig. 148.



Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

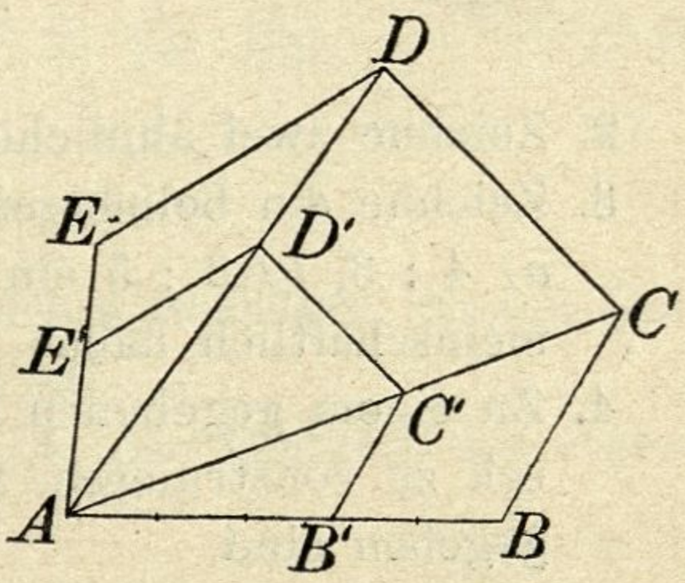
b) Umgekehrt gilt auch der Satz: Ähnliche Polygone werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

§. 179. Aufgaben.

1. Über einer Strecke m ein Polygon zu construieren, das einem gegebenen Polygon ähnlich ist.

   a) Es sei (Fig. 149) $ABCDE$ das gegebene Polygon und m die zu AB homologe Seite. Man ziehe die Diagonalen von A aus, mache $AB' = m$ und construiere $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$; dann ist $AB'C'D'E' \sim ABCDE$ (§. 178 a).

Fig. 149.



b) Zu $ABCDE$ (Fig. 149) ein ähnliches Polygon zu zeichnen, wenn das Verhältnis der Seiten 5 : 3 ist.

Man bestimme in der Seite AB den Punkt B' so, dass $AB : AB' = 5 : 3$ ist und verfahre wie unter *a)*.

Diese Aufgabe kann noch in anderer Weise gelöst werden.

Man verbinde die Eckpunkte des gegebenen Polygones mit dem beliebig gewählten Punkte S (Fig. 150a), theile AS in a nach dem gegebenen Verhältnis (z. B. $SA : Sa = 2 : 1$) und ziehe $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ etc. Dann ist $abcde \sim ABCDE$. Oder man verbinde S (Fig. 150b) mit den Eckpunkten des gegebenen Polygones, verlängere AS und mache $Sa = \frac{1}{2} SA$ und verfahre jetzt wie früher. Dann ist $abcde \sim ABCDE$.

Fig. 150 *a*.

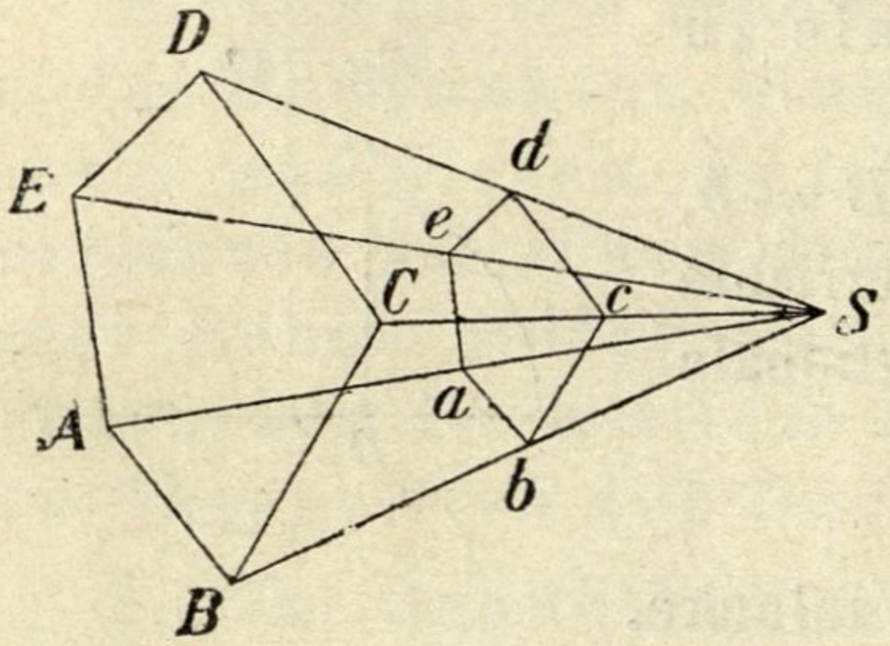
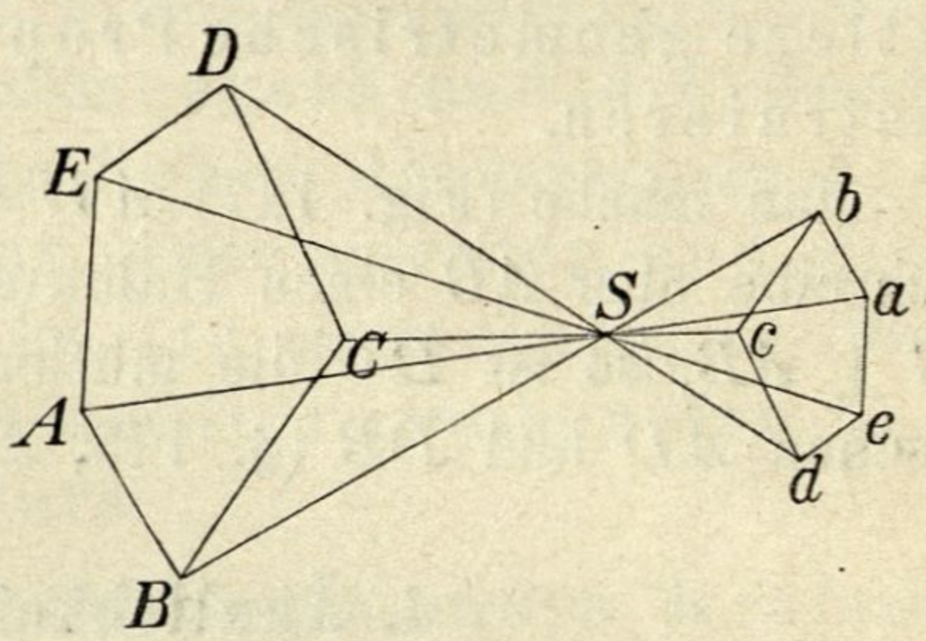


Fig. 150 *b*.

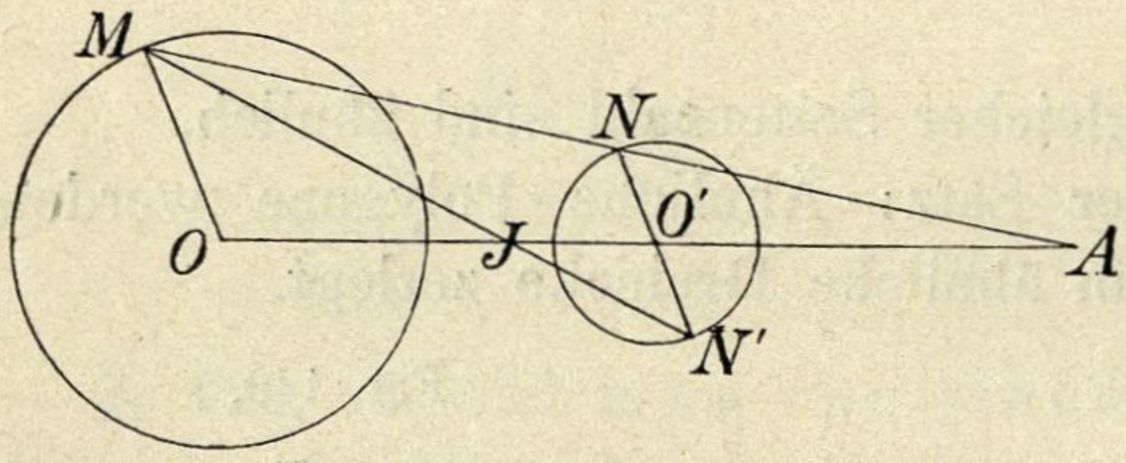


In beiden Fällen heißt der Punkt S der Ähnlichkeitspunkt der beiden Polygone. In Fig. 150a ist er ein äußerer in Fig. 150b ein innerer. Im ersten Falle sind die Seiten der ähnlichen Polygone parallel und gleich gerichtet, im zweiten parallel und entgegengesetzt gerichtet. Die dargestellte Lage der Polygone heißt die perspectivische. Ähnliche Polygone lassen sich immer in die perspectivische Lage bringen.

Bei zwei ähnlichen und perspectivisch liegenden regulären Vielecken liegt der innere Ähnlichkeitspunkt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Vielecke, der äußere auf der Verlängerung dieser Strecke.

Zwei Kreise sind immer ähnlich und perspectivisch liegend; sie haben sowohl einen äußeren als auch einen inneren Ähnlichkeitspunkt. Der erste liegt auf der Verlängerung der Centrale, der zweite in der Centrale selbst. Außerdem liegen sie in der Verbindungslinie der Endpunkte zweier paralleler Radien, welche für den äußeren Ähnlichkeitspunkt gleich gerichtet, für den inneren entgegengesetzt gerichtet sind. (Fig. 151.)

Fig. 151.



2. Zeichne zwei ähnliche Vierecke, deren Seiten sich wie 2 : 5 verhalten.
3. Zeichne ein beliebiges Fünfeck und construiere nach dem Seitenverhältnisse *a)* 4 : 3, *b)* 3 : 5 ein ihm ähnliches Fünfeck so, dass beide einen Winkel gemeinschaftlich haben.
4. Zu einem gegebenen Vierecke ein ihm ähnliches perspectivisch liegendes Viereck zu construieren, wenn ein Eckpunkt desselben und der Ähnlichkeitspunkt gegeben sind.

5. Umfangs- und Flächenverhältnisse ähnlicher Figuren.

§. 180. Wenn jede Seite eines Vieleckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist, als die gleichliegende Seite eines ähnlichen Vieleckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Vieleckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Vieleckes.

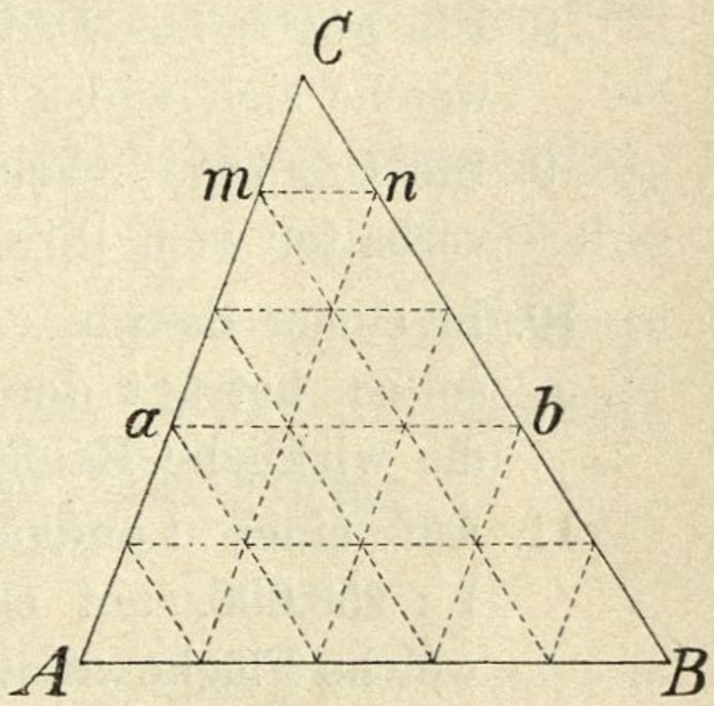
Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie je zwei gleichliegende Seiten.

§. 181. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Beweis. Es seien (Fig. 152) ABC und abC zwei ähnliche Dreiecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 5 : 3 verhalten. Theilt man AC in 5 gleiche Theile, von denen auf aC 3 kommen, und zieht durch die Theilungspunkte von AC Parallele mit AB und BC, durch die auf BC Parallele mit AC, so zerfallen die gegebenen Dreiecke in lauter congruente Dreiecke, und zwar ist $\triangle ABC = 25\ mnC$, $\triangle abC = 9\ mnC$, daher

$$ABC : abC = 25 : 9.$$

Fig. 152.



Dasselbe Verhältnis 25 : 9 haben aber auch die Quadrate zweier gleichliegender Seiten.

§. 182. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Denn zerlegt man zwei ähnliche Vielecke, deren Seiten sich z. B. wie 5 : 3 verhalten, durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so verhalten sich nach §. 181 je zwei gleichliegende Dreiecke der beiden Vielecke wie 25 : 9; es müssen sich demnach auch die Summen aller dieser Dreiecke d. i. die beiden Vielecke selbst wie 25 : 9 verhalten.

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf dem Papier dargestellt, so dass jede Strecke auf dem Papier nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, ... von der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papier $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$, ... von dem Flächeninhalte der Figur in der wahren Größe.

§. 183. Übungsaufgaben.

1. Ein Sechseck ist gegeben; zeichne ein ihm ähnliches Sechseck, dessen Umfang die Hälfte von dem Umfange des gegebenen ist.
2. Das Verhältnis der Seiten zweier Dreiecke ist 5 : 4, der Umfang des ersten ist 55 *cm*; wie groß ist der Umfang des zweiten?

3. In zwei ähnlichen Dreiecken betragen zwei gleichliegende Seiten 0·24 *m* und 0·4 *m*, der Umfang des ersten ist 0·63 *m*; wie groß ist der Umfang des zweiten?
4. Der Umfang eines Dreieckes beträgt 4·37 *m*; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreieckes sind 4·55 *m*, 4·445 *m* und 6·3 *m*; wie groß sind die Seiten des ersten Dreieckes?
5. Die Seiten zweier Quadrate sind 2·4 *dm* und 3·6 *dm*; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?
6. Die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 4 : 5; die Fläche des ersten Dreieckes ist 8 m^2; wie groß ist die Fläche des zweiten?
7. Der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen eine Seite 4 *cm* ist, beträgt 12 cm^2; wie groß ist der Flächeninhalt eines ähnlichen Dreieckes, in welchem die entsprechende Seite 15 *cm* beträgt?
8. Ein gegebenes Dreieck von einem Eckpunkte aus in drei Theile zu theilen, welche sich wie 2 : 3 : 4 verhalten.
9. Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke sind: 23·52 *cm* und 17·84 *cm*; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?
10. In einem Bauplane, in welchem 4 *cm* des gewählten Maßstabes 3 *m* vorstellen sollen, beträgt der Flächeninhalt des Grundrisses 5 dm^2 20 cm^2; wie groß ist die wirkliche Baufläche?
11. Auf einer Landkarte sind die natürlichen Längen in dem Verhältnisse 1 : 250.000, auf einer zweiten in dem Verhältnisse 1 : 50.000 dargestellt; welche Fläche nimmt auf der ersten Karte ein Land ein, das auf der zweiten eine Fläche von 1·6 dm^2 hat?

XII. Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

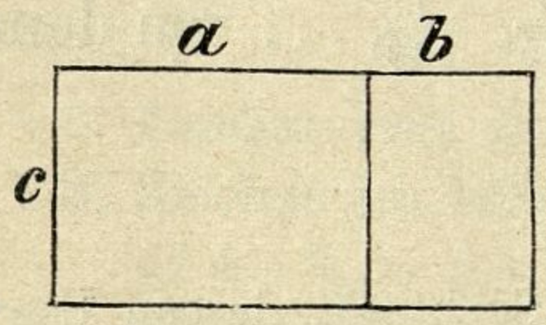
§. 184. Geometrische Bedeutung algebraischer Formeln.

1. a, b, c, d seien die Maßzahlen von Strecken, $(a > b, c > d)$; die geometrische Bedeutung der Ausdrücke $a + b$, $a - b$, ab, a^2, $(a + b)\,c$, $(a + b)\,(c + d)$, $(a + b)\,(c - d)$, $(a - b)\,(c + d)$, $(a - b)\,(c - d)$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ anzugeben.

2. Die Richtigkeit nachstehender Gleichungen in geometrischer Hinsicht zu prüfen und die sich ergebenden Sätze auszusprechen:

a) $ac + bc = (a + b)\,c$ (Fig. 153).

Fig. 153.



b) $ac - bc = (a - b)\,c$.

c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$ (Fig. 154).

d) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab$ (Fig. 155).

e) $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ (Fig. 156).

Die geometrische Darstellung der beiden ersten Gleichungen bringt die Addition und Subtraction zweier Rechtecke mit gleichen Grundlinien oder gleichen Höhen zur Anschauung.

Fig. 154.

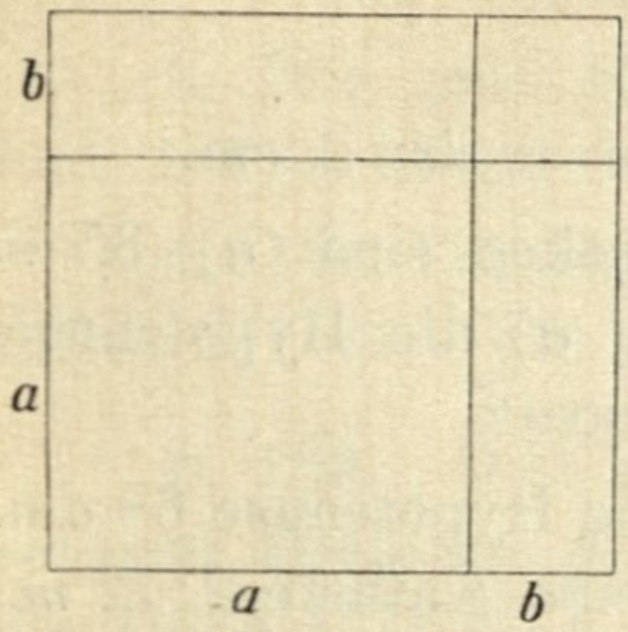


Fig. 155.

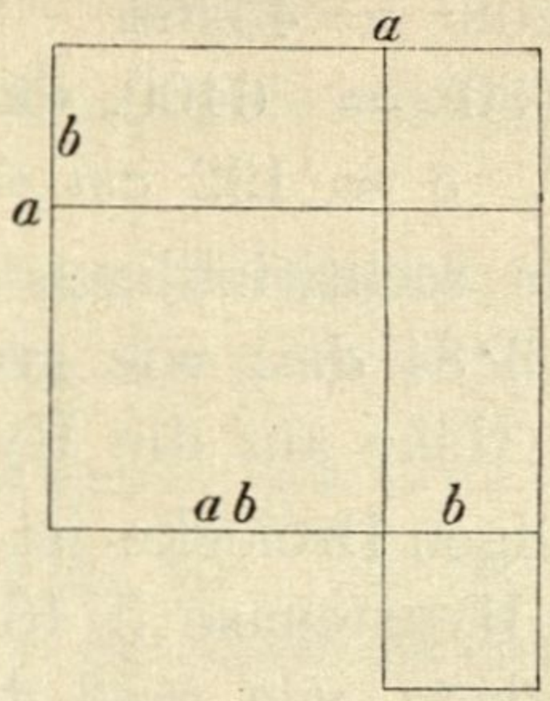
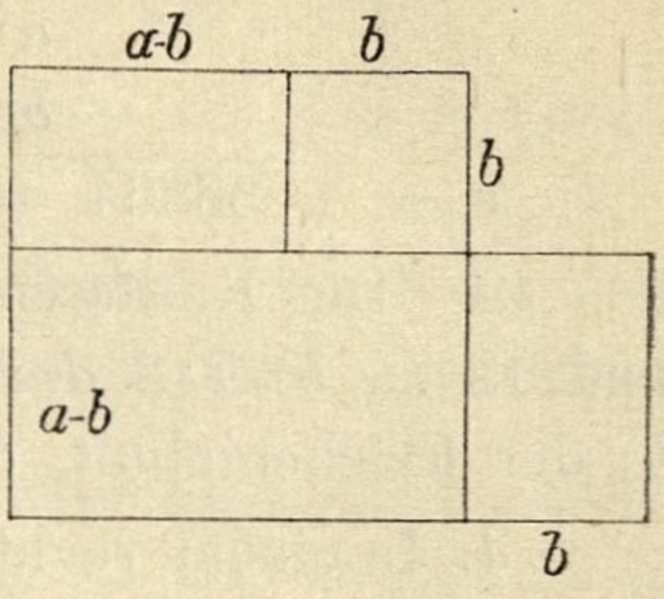


Fig. 156.



§. 185. Arithmetischer Ausdruck für den Pythagoreischen Lehrsatz.

Ist a die Maßzahl der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Maßzahlen b und c haben, so sind a^2, b^2, c^2 die Maßzahlen der Inhalte der über den Seiten des Dreieckes errichteten Quadrate. Somit erhält der Pythagoreische Lehrsatz, dessen Richtigkeit im geometrischen Sinne in §. 124 bewiesen wurde, die Form:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Dies ist der arithmetische Ausdruck für den Pythagoreischen Lehrsatz.

Aus $a^2 = b^2 + c^2$ folgt:

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ und } c^2 = a^2 - b^2.$$

Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes.

§. 186. Das rechtwinklige Dreieck. 1. Gegeben sind die Katheten b und c eines rechtwinkligen Dreieckes; man suche die Hypotenuse a.

Nach dem Pythagoreischen Satze ist $a^2 = b^2 + c^2$. Daher ist

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Z. B. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 36 *cm* und 160 *cm* sind?

$$b^2 = 36^2 = 1296$$
$$c^2 = 160^2 = 25600, \text{ daher}$$

$a = \sqrt{26896} = 164$. $a = 164$ *cm* $= 1$ *m* 6 *dm* 4 *cm*.

2. Gegeben ist die Hypotenuse a und eine Kathete b; zu suchen die andere Kathete c.

Aus $c^2 = a^2 - b^2$ erhält man

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ist z. B. die Hypotenuse 208 *cm*, eine Kathete 80 *cm*, so hat man

$$a^2 = 208^2 = 43264$$
$$b^2 = 80^2 = 6400, \text{ daher}$$
$$c = \sqrt{36864} = 192. \quad c = 192\ cm = 1\ m\ 9\ dm\ 2\ cm.$$

3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind *a*) 35 *m* und 12 *m*, *b*) 7·2 *dm* und 3·84 *dm*; wie groß ist *a*) die Hypotenuse, *b*) der Flächeninhalt, *c*) die Höhe auf die Hypotenuse?

4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist *a*) die Hypotenuse 68 *dm*, eine Kathete 32 *dm*; *b*) die Hypotenuse 5·46 *m*, eine Kathete 2·72 *m*; wie groß ist die andere Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

§. 187. Das Quadrat. Es seien a, d und f die Maßzahlen der Seite, der Diagonale und des Flächeninhaltes eines Quadrates.

1. Aus der Seite a eines Quadrates die Diagonale d zu berechnen.

Nach §. 185 ist $d^2 = a^2 + a^2$, oder $d^2 = 2a^2$; mithin $d = \sqrt{2a^2}$ oder $d = a\sqrt{2}$.

2. Gegeben die Diagonale d; zu suchen die Seite a und der Flächeninhalt f.

Da $2a^2 = d^2$, so ist $a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{2d^2}{4}$, daher $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Aus $f = a^2$ folgt dann $f = \frac{d^2}{2}$.

3. Gegeben der Flächeninhalt f; gesucht wird a und d.

Aus $a^2 = f$ ergibt sich $a = \sqrt{f}$.

Aus $d^2 = 2a^2$ folgt ferner $d^2 = 2f$, somit $d = \sqrt{2f}$.

4. Die Diagonale eines Quadrates beträgt 1·4 *m*; wie groß ist *a*) die Seite, *b*) der Flächeninhalt?

5. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist 15·1321....dm^2; wie groß ist *a*) die Seite, *b*) die Diagonale?

6. Wie lang ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als zwei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten 2·58 *dm* und 9·34 *cm* sind?

§. 188. Das Rechteck. Man bezeichne die Maßzahlen der Seiten eines Rechteckes durch a und b, die Maßzahl der Diagonale durch d und die Maßzahl des Flächeninhaltes durch f.

1. Gegeben die Seiten a und b eines Rechteckes; zu suchen d und f.

Es ist $d^2 = a^2 + b^2$, daher $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. $f = ab$.

2. Gegeben ist eine Seite a und die Diagonale d; man berechne b und f.

Es ist $b = \sqrt{d^2 - a^2}$.

Für den Flächeninhalt hat man $f = a\,b = a\,\sqrt{d^2 - a^2}$.

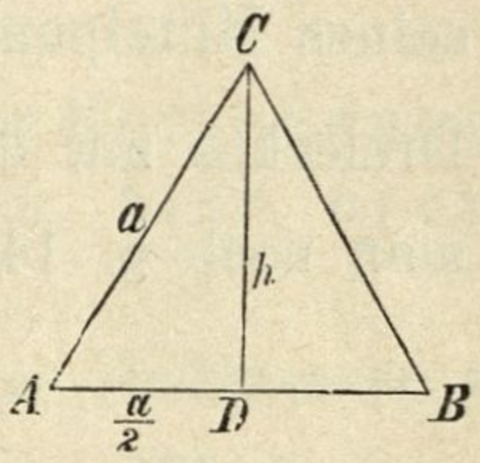
3. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes von $5{\cdot}6$ *m* Länge und $3{\cdot}3$ *m* Breite?

4. Die Diagonale eines Rechteckes ist $7{\cdot}3$ *dm*, eine Seite desselben $4{\cdot}8$ *dm*; wie groß ist die Seite eines flächengleichen Quadrates?

§. 189. Das gleichseitige Dreieck. Es sei in dem gleichseitigen Dreiecke $A\,B\,C$ (Fig. 157) die Seite $A\,B = B\,C = A\,C = a$, die Höhe $C\,D = h$, und f die Maßzahl des Flächeninhaltes.

1. Gegeben sei die Seite a; zu suchen h und f.

Fig. 157.



Es ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\,a^2}{4}$,

daher $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$f = \frac{a\,h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2. Gegeben die Fläche, zu suchen a und h.

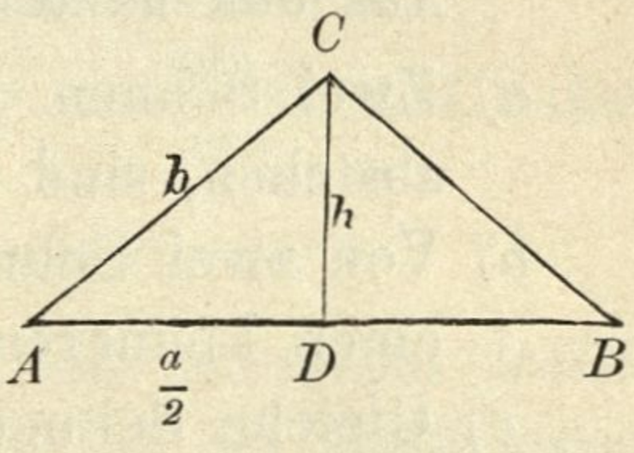
Es ist $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $a^2\sqrt{3} = 4\,f$, $a^2 = \frac{4f}{\sqrt{3}} = \frac{4f\sqrt{3}}{3}$, daher $a = \sqrt{\frac{4f\sqrt{3}}{3}}$.

3. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 *dm*; wie groß ist *a*) die Höhe, *b*) der Flächeninhalt?

4. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, das mit einem Quadrate von 15 *dm* Seitenlänge flächengleich ist?

§. 190. Das gleichschenklige Dreieck. Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke $A\,B\,C$ (Fig. 158) die Grundlinie $A\,B = a$, der Schenkel $A\,C = B\,C = b$ und die Höhe $C\,D = h$; die Maßzahl des Flächeninhaltes sei f.

Fig. 158.



1. Aus der Grundlinie a und dem Schenkel b die Höhe h und den Flächeninhalt f zu berechnen.

Man hat $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$,

daher $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; sodann $f = \frac{a\,h}{2}$.

2. Gegeben die Höhe h und der Schenkel b; zu suchen a und f.

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$, daher $\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}$, und

$a = 2\sqrt{b^2 - h^2}$ und damit $f = \frac{a\,h}{2}$.

3. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie $4 \cdot 8$ *dm*, und jeder Schenkel $2 \cdot 5$ *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Flächeninhalt?

4. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie $3 \cdot 36$ *m* und die Höhe $4 \cdot 25$ *m*; wie groß ist ein Schenkel?

5. Bei einem gewöhnlichen Hausdache ist der Dachstuhl 14 *m* breit; wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl 6 *m* hoch sein soll?

§. 191. Das regelmäßige Sechseck. 1. Aus der Seite *a* eines regelmäßigen Sechseckes den Flächeninhalt *f* zu bestimmen.

Da der Umfang des regelmäßigen Sechseckes $6a$, der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite aber die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge *a* und daher gleich $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist, so erhält man nach §. 149

$$f = \frac{6a \cdot a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seitenlänge $4 \cdot 24$ *dm*?

3. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck haben gleichen Umfang, nämlich $2 \cdot 4$ *m*; um wie viel ist der Flächeninhalt des Quadrates kleiner als der des Sechseckes?

Der Kreis.

§. 192. 1. Der Halbmesser eines Kreises sei *r*, die Länge einer Sehne *s* und ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises *a*; aus zweien dieser Größen die dritte zu berechnen.

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}}, \quad s = 2\sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Aus den letzten zwei Ausdrücken ergibt sich:

a) Zwei Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpunkte gleichweit abstehen, sind einander gleich.

b) Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die größere, welche einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

c) Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

d) Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Beispiele. 1. Gegeben $s = 24$ *cm*, $a = 7$ *cm*; zu suchen *r*.
2. „ $r = 29$ *cm*, $a = 21$ *cm*; „ „ *s*.
3. „ $r = 35$ *cm*, $s = 28$ *cm*; „ „ *a*.

2. Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser r und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist, zu berechnen.

Da die dem Halbmesser gleiche Sehne den sechsten Theil der Peripherie abschneidet, so ist der zugehörige Kreisausschnitt $\frac{r^2\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreieckes über der Seite r ist $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Der Flächeninhalt des Kreisabschnittes ist also

$$\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

3. Der Halbmesser eines Kreisabschnittes ist r, seine Sehne ist die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen Quadrates; wie groß ist der Flächeninhalt des Abschnittes?

§. 193. Zur Ergänzung der Lehre von der Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises folgen hier noch einige Umkehrungsaufgaben.

1. Aus dem Flächeninhalte f eines Kreises den Halbmesser r desselben zu berechnen.

Es ist $r^2\pi = f$, daher $r^2 = \frac{f}{\pi}$, und somit

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

2. Der Flächeninhalt eines Kreises ist *a)* 10 dm^2, *b)* 0·8659 m^2, *c)* 31·47 cm^2, *d)* 23·476325…m^2; wie groß ist der Halbmesser?

3. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite 2 m 3 dm.

4. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 4·0115 dm^2; wie groß ist die Peripherie?

5. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes und der zugehörige Centriwinkel m^0 sind gegeben; man suche den Halbmesser r.

Nach §. 158 ist $mr^2\pi = 360\,f$, folglich $r^2 = \frac{360\,f}{m\pi}$, und daher

$$r = \sqrt{\frac{360\,f}{m\pi}}.$$

6. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, der zu einem Centriwinkel von 30^0 gehört, beträgt 37·7 dm^2; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

ZWEITER THEIL.

Die Stereometrie.

I. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. 194. Bestimmung der Ebene. Eine Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass jede gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte derselben verbindet, ganz in dieselbe hineinfällt, heißt eine ebene Fläche, kurz Ebene. In den folgenden Betrachtungen wird sowohl die Gerade als auch die Ebene als unbegrenzt angesehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben oder aus dem Satze ersichtlich ist.

Durch zwei Punkte lässt sich eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade eine Ebene, so kann man dieselbe um die Gerade drehen, wodurch sie unzählig viele verschiedene Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie ist demnach eine Ebene nicht bestimmt. Nimmt man aber außer der Geraden noch einen dritten Punkt an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in welcher die Ebene durch die gerade Linie und den außer ihr liegenden Punkt geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt, oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte, kann nur eine Ebene gelegt werden.

Die Lage einer Ebene ist vollkommen bestimmt:

1.) durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte,
2.) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben,
3.) durch zwei sich schneidende Gerade,
4.) durch zwei parallele Gerade.

1. Hauptlagen von Geraden und Ebenen.

§. 195. Zwei gerade Linien können eine dreifache Lage haben: 1. sie schneiden sich; 2. sie sind parallel; 3. sie schneiden sich weder, noch sind sie parallel. In den ersten beiden Fällen lässt sich durch die beiden Geraden eine Ebene legen, im dritten Falle ist dies nicht möglich. In diesem Falle sagt man, die Geraden kreuzen einander oder sie sind windschief.

Für jeden der drei Fälle sind Beispiele an den Kanten im Schulzimmer anzugeben.

§. 196. Bewegt man zwei sich schneidende Gerade parallel zu sich selbst, so bleiben die Winkel zwischen ihnen ungeändert.

Wie für Winkel in der Ebene, gilt daher auch für Winkel des Raumes der Satz:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind *a)* einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, dagegen *b)* supplementär, wenn nur ein Paar nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

§. 197. Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Haben sie gemeinschaftliche Punkte, so sagt man, dass die Ebenen einander schneiden. Die gemeinschaftlichen Punkte zweier sich schneidenden Ebenen liegen in einer Linie, welche die Durchschnittslinie der beiden Ebenen heißt. Diese muss eine Gerade sein. Denn verbindet man zwei gemeinschaftliche Punkte der beiden Ebenen durch eine Gerade, so kann kein Punkt außerhalb dieser Geraden beiden Ebenen angehören; die beiden Ebenen würden dann zusammenfallen, da durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt eine Ebene bestimmt ist.

2. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. 198. Eine Gerade im Raume kann mit einer Ebene zwei Punkte, oder einen, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Im ersten Falle liegt sie ganz in der Ebene; im zweiten schneidet sie die Ebene, im dritten heißt die Gerade zu der Ebene parallel.

Die unbegrenzte Ebene wird durch jede in ihr liegende Gerade in zwei Halbebenen getheilt.

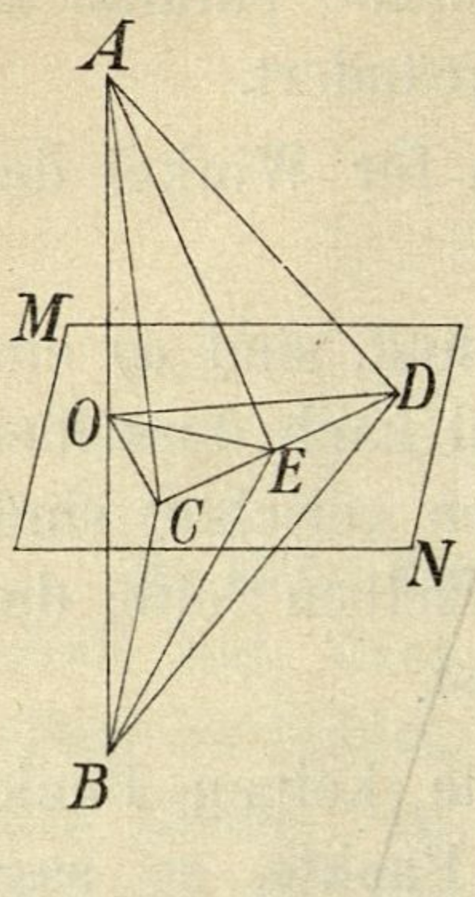
Der Punkt, in welchem eine Gerade eine Ebene schneidet, wird der Fußpunkt der Geraden in dieser Ebene genannt.

Eine Gerade kann auf einer durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht oder schief stehen.

§. 199. Lehrsatz. Steht eine gerade Linie auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, senkrecht, so steht sie auch auf jeder andern durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht.

Beweis. Es sei (Fig. 159) die Gerade AO auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene MN gezogenen Geraden OC und OD

Fig. 159.



senkrecht, und OE eine dritte durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene willkürlich gezogene Gerade. Man ziehe CD, welche OE in E schneidet, verlängere AO unter die Ebene MN bis B, so dass $OB = OA$ wird, und ziehe AC und BC, AD und BD, ferner AE und BE. Es ist $AC = BC$, da C ein Punkt einer Symmetrale von AB ist. Es ist $AD = BD$, da D einer Symmetrale von AB angehört. Daher ist $\sphericalangle ACD \cong BCD$. Dreht man $\triangle BCD$ um CD, so muss es das Dreieck ACD decken, mithin ist $BE = AE$. Deshalb gehört E einer Symmetrale von AB an, also ist $OE \perp AB$.

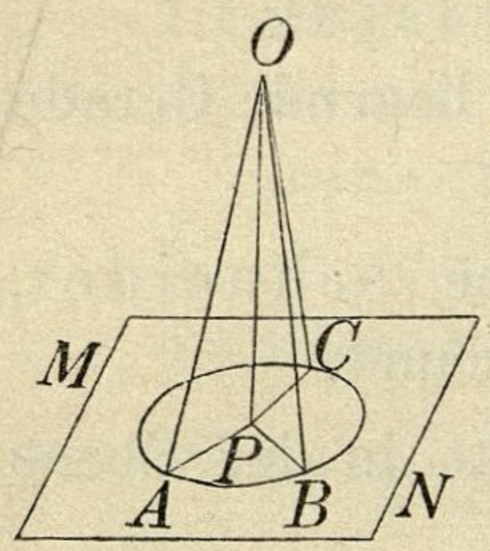
Die Gerade AO heißt in diesem Falle auf der Ebene MN senkrecht oder normal, und umgekehrt die Ebene MN auf der Geraden AO senkrecht; jede andere durch A zu der Ebene MN gezogene Gerade AD ist zu dieser Ebene schief. Denn in dem $\triangle AOD$ ist $\sphericalangle O = 90^0$, daher $\sphericalangle D < 90^0$.

Es lässt sich also von einem Punkt außerhalb einer Ebene auf diese nur eine Senkrechte errichten.

Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch in einem Punkt einer Ebene auf diese nur eine Normale möglich ist.

§. 200. Lehrsatz. Die Senkrechte ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden kann.

Fig. 160.



Beweis. Ist (Fig. 160) $PO \perp$ Ebene MN und OA irgend eine andere von O zu der Ebene gezogene Strecke, so ist, wenn man AP zieht, in dem rechtwinkligen Dreiecke APO die Kathete OP kleiner als die Hypotenuse OA.

Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene gibt die Entfernung jenes Punktes von der Ebene an.

§. 201. Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte einer Geraden, die auf einer Ebene senkrecht steht, zu dieser mehrere gleich lange schiefe Strecken, so liegen die Fußpunkte derselben in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt der Fußpunkt der Senkrechten ist.

Beweis. Es sei (Fig. 160) $OP \perp MN$ und $OA = OB = OC$. Zieht man AP, BP und CP, so sind die rechtwinkligen Dreiecke

APO, BPO und CPO congruent, weil sie gleiche Hypotenusen und eine gemeinschaftliche Kathete haben; es ist demnach $AP = BP = CP$. Die Punkte A, B und C stehen also vom Punkte P gleichweit ab, d. i. sie liegen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt P ist.

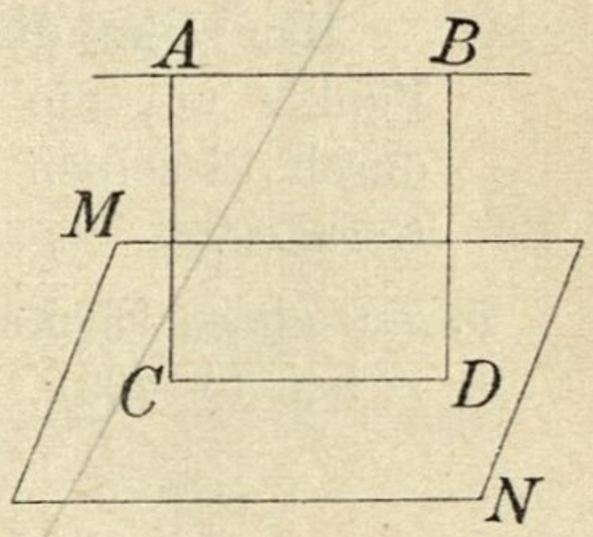
Dieser Satz kann anschaulich auch so abgeleitet werden:

Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck APO um die eine Kathete OP herum, so beschreibt die zweite Kathete AP während dieser Drehung eine Kreisebene, auf welcher die erste Kathete OP senkrecht steht. Die Hypotenuse AO stellt dabei nach und nach alle gleich langen Strecken vor, die von O zur Ebene des Kreises schief gezogen werden können. Ihre Fußpunkte liegen daher in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt P ist.

§. 202. 1. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so ist auch jede mit ihr parallele Gerade auf derselben Ebene senkrecht.

Beweis. Es sei die Gerade AC (Fig. 161) auf der Ebene MN senkrecht. Wenn nun AC längs CD mit sich selbst parallel fortschreitet, bis sie in die Lage BD kommt, so wird während dieser Bewegung die Lage der Geraden AC gegen die Ebene nicht geändert; es wird daher AC auch in der Lage BD auf der Ebene senkrecht stehen.

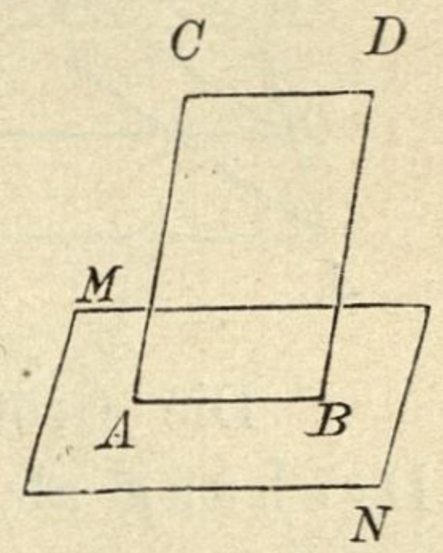
Fig 161.



2. Umgekehrt: Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

§. 203. Ist (Fig. 162) MN eine Ebene, AB eine in dieser Ebene liegende Gerade, mit welcher CD parallel ist, so muss auch CD mit MN parallel sein. Denn durch die beiden Parallelen AB und CD ist die Ebene $ABDC$ bestimmt; würde CD die Ebene MN schneiden, so müsste sich der Durchschnittspunkt nicht nur in MN, sondern auch in der Ebene $ABDC$ befinden, weil CD in dieser Ebene liegt; er müsste daher der Durchschnittslinie beider Ebenen, d. h. AB angehören, was nicht möglich ist, da $AB \parallel CD$ ist.

Fig. 162.



Daraus folgt:

Ist eine Gerade zu einer Geraden in einer Ebene parallel, so ist sie auch zur Ebene selbst parallel.

Umgekehrt: Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so ist sie auch zu jeder Geraden in dieser Ebene parallel, welche mit ihr in derselben Ebene liegt.

§. 204. Aufgaben.

1. Auf eine Ebene von einem außerhalb derselben liegenden Punkte die Normale zu fällen.

   Man ziehe von dem gegebenen Punkte zu der Ebene drei gleich lange Strecken, und suche den Mittelpunkt des Kreises, welcher durch ihre Fußpunkte geht; die Strecke, welche diesen Mittelpunkt mit dem gegebenen Punkte verbindet, ist die gesuchte Senkrechte.

2. Von einem Punkte sind zu einer Ebene mehrere gleich lange Strecken, jede 32 *cm* lang, gezogen; ihre Fußpunkte liegen in einer Kreislinie von 48 *cm* Umfang; wie lang ist die von dem gegebenen Punkte auf die Ebene gefällte Senkrechte?

3. In einem Punkte C (Fig. 161) einer Ebene MN auf diese die Normale zu errichten.

   Man fälle von irgend einem Punkte B außerhalb der Ebene auf diese die Normale BD, lege durch C und BD die Ebene, und ziehe in dieser AC parallel mit BD; die Gerade AC ist die gesuchte Senkrechte (§. 202, 1).

4. Durch einen Punkt einer Geraden auf diese die senkrechte Ebene zu legen.

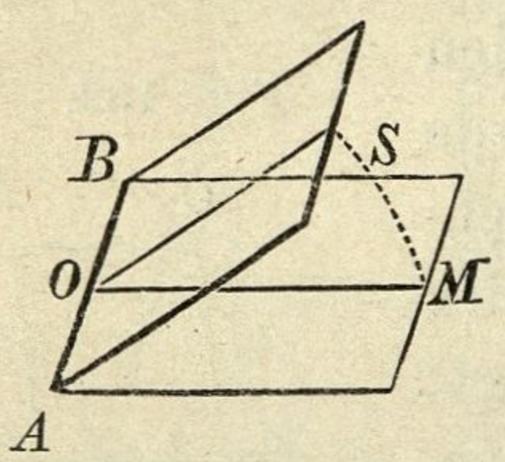
   Man lege durch die Gerade zwei Ebenen, errichte in dem gegebenen Punkte auf die Gerade in den beiden Ebenen je eine Senkrechte und lege durch dieselben die Ebene; diese steht dann senkrecht auf der gegebenen Geraden.

5. Zu einer Ebene durch einen gegebenen Punkt eine parallele Gerade zu ziehen (§. 203).

3. Lage der Ebenen gegeneinander.

§. 205. Dreht sich eine Halbebene ABM (Fig. 163) um die Grenzlinie AB bis ABS, so heißt der von ihr beschriebene Raum ein Flächenwinkel oder Keil; die beiden Halbebenen bilden die Schenkelflächen oder Seiten, die gemeinschaftliche Grenzlinie AB die Kante des Keils.

Fig. 163.



Den Keil bezeichnet man durch $M(AB)S$, oder auch bloß durch (AB), wenn die Kante AB nur einem einzigen Keile angehört.

Die Größe eines Keiles $M(AB)S$ hängt von der Größe der Drehung ab, welche die eine Schenkelfläche AM um die Kante AB machen muss, um in die Lage der zweiten Schenkelfläche AS zu gelangen. Die Größe dieser Drehung aber wird gemessen durch den Linienwinkel MOS, welchen eine auf der Kante senkrechte Gerade MO während der Drehung beschreibt. Der Linienwinkel MOS heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen AM und AS, welche den Keil bilden; man erhält ihn, wenn man auf die Kante in einem be-

liebigen Punkte derselben zwei Senkrechte so errichtet, dass die eine Senkrechte in die eine, die zweite in die andere Schenkelfläche fällt.

Den Neigungswinkel zweier Ebenen kann man durch die oberen oder unteren Ränder eines aufgeschlagenen Buches veranschaulichen.

§. 206. Da die Keile durch die zugehörigen Neigungswinkel gemessen werden, so gelten alle Beziehungen und Sätze, welche in der Planimetrie von den Winkeln entwickelt wurden, auch von den Keilen, wenn man die Ausdrücke

Winkel, Scheitel, Schenkel, Gerade

bezüglich durch die Ausdrücke

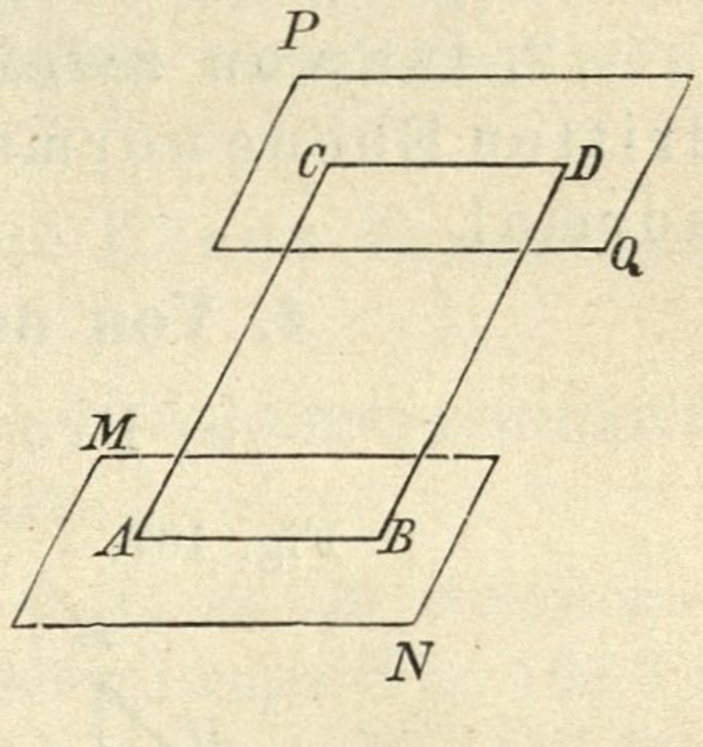
Keil, Kante, Schenkelfläche, Ebene

ersetzt.

Man unterscheidet auch hier hohle und erhabene, spitze, rechte, stumpfe und gestreckte Keile; ferner Neben- und Scheitelkeile.

§. 207. Die beiden parallelen Ebenen MN und PQ (Fig. 164) werden durch die Ebene $ABDC$ geschnitten; die Durchschnittslinien sind AB und CD. Diese können als Gerade derselben Ebene $ABDC$ nur parallel sein, oder sie müssen sich schneiden. Würden sie sich etwa in dem Punkte E schneiden, so müsste E sowohl in MN als auch in PQ liegen, weil AB und CD diesen Ebenen angehören; dann aber würden die Ebenen sich schneiden.
AB und CD müssen daher parallel sein.

Fig. 164.



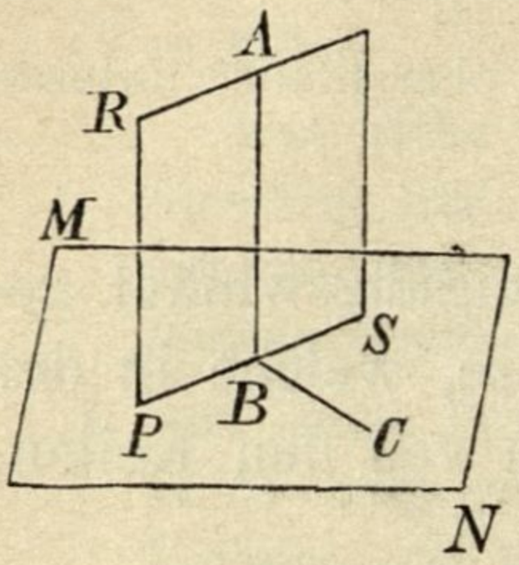
Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Es seien (Fig. 164) AC und BD parallele Strecken zwischen den parallelen Ebenen MN und PQ. Legt man durch AC und BD die Ebene $ABDC$, so ist $AB \parallel CD$, daher ist $ABDC$ ein Parallelogramm und mithin $AC = BD$.

Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

§. 208. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so heißen diese aufeinander senkrecht oder normal, sonst schief.

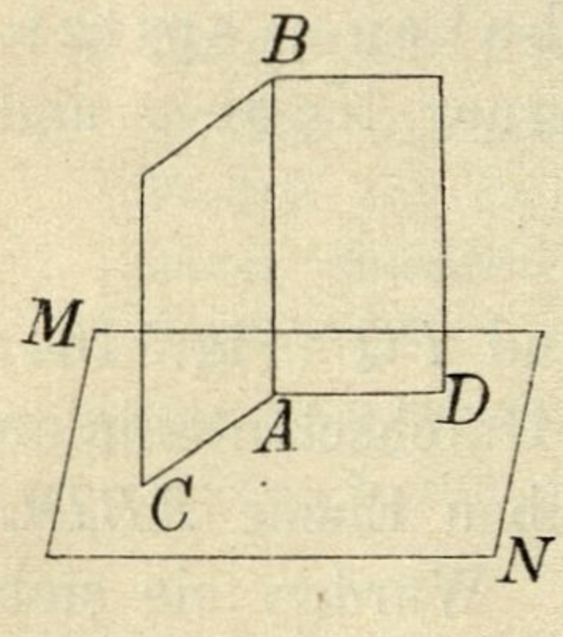
Fig. 165.



1. Es sei (Fig. 165) die Gerade $AB \perp$ Ebene MN, und man lege durch AB eine Ebene RS, welche die Ebene MN in der Geraden PS schneidet; dann muss auch Ebene $RS \perp$ Ebene MN sein. Denn zieht man in der Ebene MN die Gerade $BC \perp PS$, so ist ABC der Neigungswinkel der Ebenen RS und MN; dieser Winkel ist aber ein rechter, da $AB \perp MN$ und daher auch $AB \perp BC$ ist; folglich Ebene $RS \perp$ Ebene MN.

Ist daher eine Gerade zu einer Ebene normal, so ist auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zu der ersten Ebene normal.

Fig. 166.



2. Ist $AB \perp MN$ (Fig. 166), so ist auch Ebene $ABC \perp MN$. Dreht man die Ebene ABC um AB, so ist sie in jeder Lage z. B. $ABD \perp$ Ebene MN. Daraus folgt:

Sind zwei einander schneidende Ebenen zu einer dritten Ebene normal, so ist auch ihre Durchschnittslinie zu dieser Ebene normal.

§. 209. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ändert sich nicht, wenn die eine der beiden Ebenen parallel zu sich selbst fortschreitet. Daraus folgt:

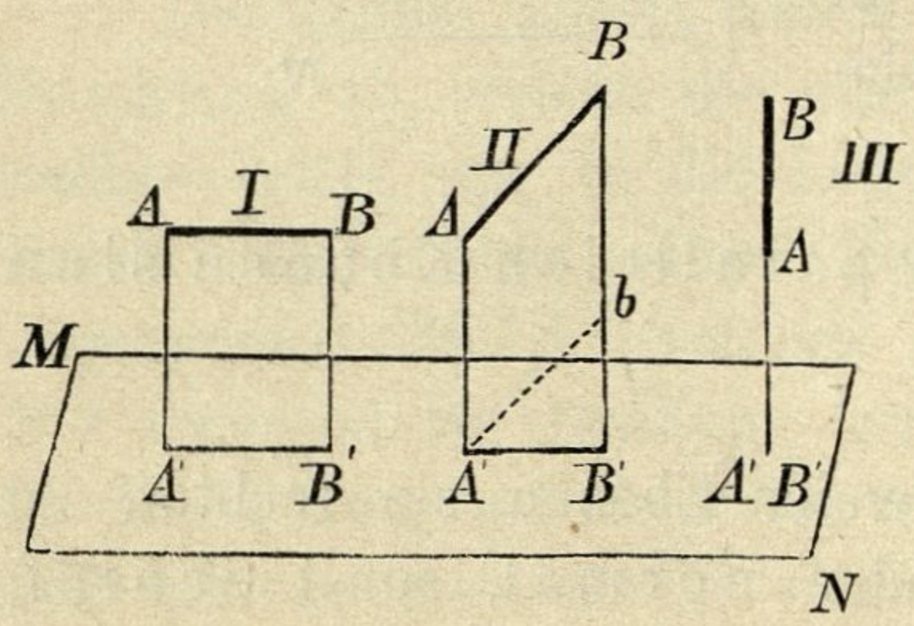
1. Zwei parallele Ebenen haben gegen dieselbe dritte Ebene gleiche Neigungswinkel.

2. Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer dritten Ebene normal, so ist auch die andere zu derselben normal.

4. Von den orthogonalen Projectionen.

a) Projectionen auf eine Ebene.

Fig. 167.



§. 210. Zieht man von dem Punkte A (Fig. 167) im Raume die Normale AA' auf die Ebene MN, so heißt der Fußpunkt A' dieser Normalen die Projection und zwar die Normalprojection oder die orthogonale Projection des Punktes A auf die Ebene; die Normale AA' heißt die projicierende Gerade, die Ebene MN die Projections-

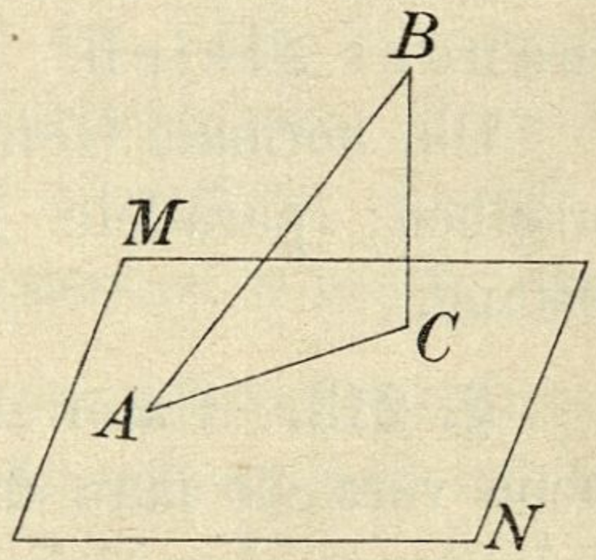
ebene. Liegt der zu projicierende Punkt in der Projectionsebene, so ist er selbst seine Projection.

Unter Projection einer Linie auf eine Ebene versteht man den Inbegriff der Projectionen sämmtlicher Punkte jener Linie auf diese Ebene. Ist eine Strecke zu projicieren, so projiciert man die Endpunkte derselben, die Verbindungslinie dieser Projectionen ist die Projection der Strecke. Ist die Linie eine Curve, so projiciert man eine hinreichende Anzahl von Punkten derselben und verbindet die Projectionen derselben in der Projectionsebene.

In Fig. 167 I ist demnach $A'B'$ die Projection von AB.

§. 211. Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Normalprojection auf diese Ebene bildet.

Fig. 168.



Steht (Fig. 168) AB schief, BC dagegen normal auf der Ebene MN, so ist AC die Projection der Geraden AB auf die Ebene MN und BAC ihr Neigungswinkel gegen diese Ebene.

Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist der kleinste unter allen Winkeln, welche sie mit Geraden bildet, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gehen.

Welcher dieser Winkel ist der größte?

Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ändert sich nicht, wenn die Gerade parallel zu sich selbst verschoben wird. Daraus folgt:

Parallele Gerade haben gegen eine Ebene denselben Neigungswinkel.

Zwischen den Strecken, ihren Projectionen und Neigungswinkeln zu einer Ebene finden folgende Beziehungen statt:

1. Ist eine Strecke zu der Ebene parallel, d. i., ist ihr Neigungswinkel gleich Null, so ist ihre Projection von gleicher Länge (Fig. 167, I); wächst der Neigungswinkel, so wird die Projection kleiner (Fig. 167, II); wird der Neigungswinkel 90°, d. h., steht die Strecke auf der Ebene normal, so ist die Projection ein Punkt (Fig. 167, III).

2. Bei gleichen Neigungswinkeln haben gleiche Strecken auch gleiche Projectionen, und umgekehrt; zu einer größeren Strecke gehört auch eine größere Projection, und umgekehrt.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

§. 212. Der Neigungswinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene ändert sich nicht, wenn die Ebene parallel zu sich selbst fortschreitet. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1. Zwei parallele Ebenen bilden mit derselben Geraden gleiche Neigungswinkel.

2. Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere.

Der 2. Satz lässt auch die Umkehrung zu:

Zwei normale Ebenen derselben Geraden sind parallel.

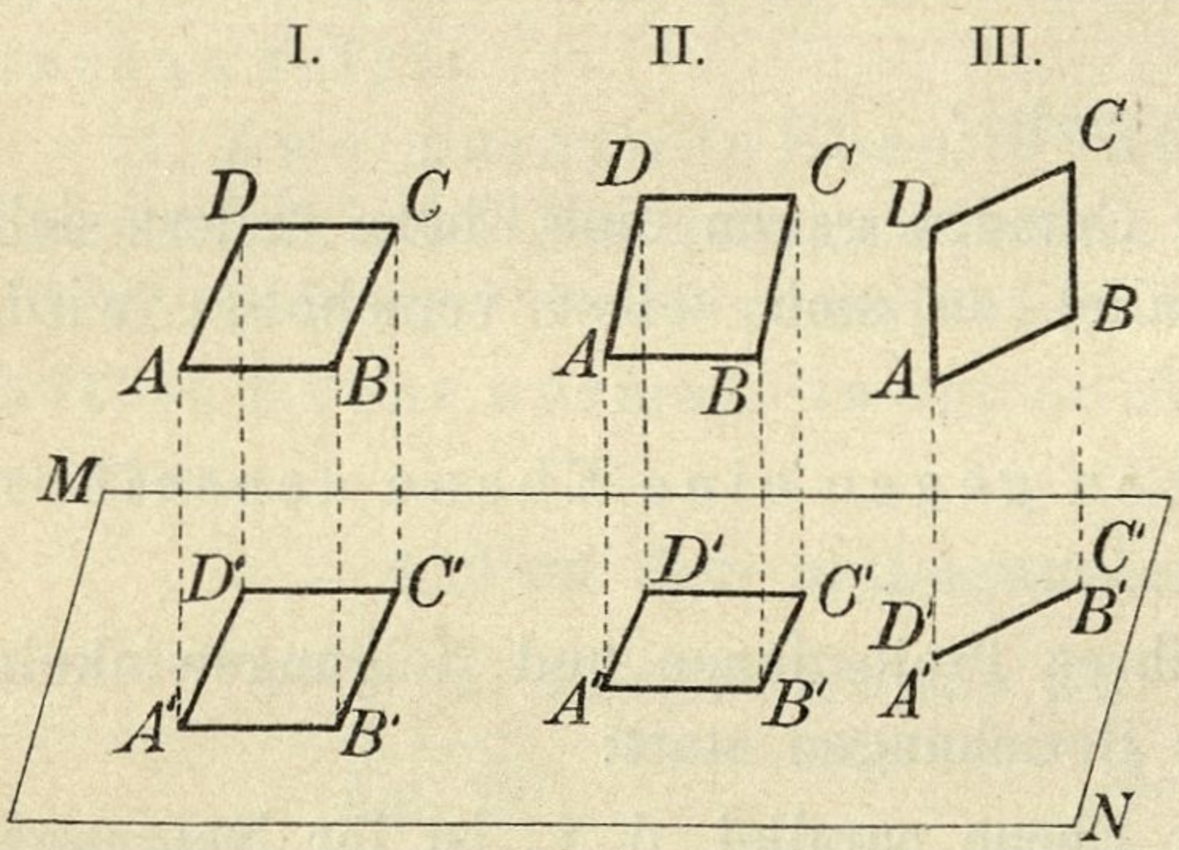
Da Gerade, die auf zwei parallelen Ebenen normal stehen, parallel sind, so gilt (§. 207) der Satz:

Normale Gerade zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

Die normale Gerade zwischen parallelen Ebenen heißt der Abstand derselben; parallele Ebenen haben also in allen Punkten denselben Abstand.

§. 213. Unter der Projection eines geradlinigen Gebildes auf eine Ebene versteht man das Gebilde, welches erhalten wird, wenn man die Projectionen der Eckpunkte desselben auf diese Ebene durch Strecken verbindet. Die Form und Größe der Projection des Gebildes ist von der Lage desselben gegen die Projectionsebene abhängig. Die Projection eines Quadrates z. B. ist ein gleich großes Quadrat I (Fig. 169), oder ein flächenkleineres Parallelogramm II, oder eine Strecke III, je nachdem die Ebene des Quadrates mit der Projectionsebene parallel, oder gegen die Projectionsebene schief, oder auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Fig. 169.



Ist ein ebenes Gebilde krummlinig, so ist auch seine Projection im allgemeinen krummlinig, und nur dann eine Strecke, wenn die Ebene des Gebildes auf der Projectionsebene senkrecht steht.

So ist die Projection eines Kreises auf eine Ebene entweder wieder ein Kreis von gleichem Halbmesser, oder eine Ellipse, oder eine Strecke von gleicher Länge mit dem Durchmesser, je nachdem die Ebene des Kreises mit der Projectionsebene parallel, oder gegen dieselbe geneigt, oder auf ihr senkrecht ist.

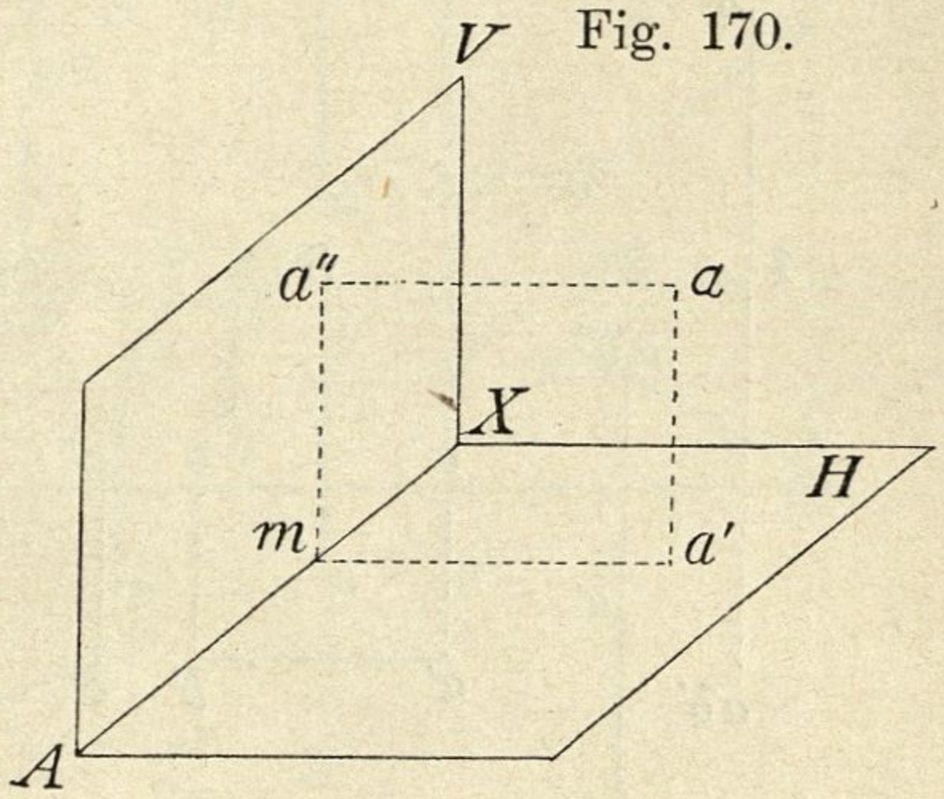
b) Projectionen auf zwei Ebenen.

§. 214. Ist ein Punkt, eine Gerade, ein Polygon gegeben, so ist die Projection bestimmt. Umgekehrt ist durch die Projection ein Punkt, eine Gerade, ein Polygon nicht bestimmt. Stehen z. B. mehrere Gerade auf einer Ebene senkrecht, so haben alle Gebilde, deren Eckpunkte in denselben Senkrechten liegen, dieselbe Projection auf diese Ebene. Aus der Projection eines Gebildes auf eine Ebene kann man daher weder auf die Lage desselben im Raum noch auf dessen Größe schließen.

Um nun Gebilde geometrisch so darzustellen, dass man aus der Darstellung selbst ihre Lage im Raum und ihre Ausdehnungen entweder unmittelbar entnehmen oder durch einfache Constructionen finden kann, projiciert man dieselben auf zwei sich senkrecht schneidende Ebenen, von denen die eine horizontal, die andere vertical ist. Die Horizontalebene H heißt auch erste Projectionsebene, die Verticalebene V zweite Projectionsebene. Die Projection auf H heißt der Grundriss, die auf V Aufriss. Die Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen heißt Achse.

§. 215. Projectionen eines Punktes. Der Grundriss eines Raumpunktes a (Fig. 170) wird mit a', der Aufriss desselben mit a'' bezeichnet. aa' heißt der erste, aa'' der zweite Projectionsstrahl.

Fig. 170.



Legt man durch aa' und aa'' die Ebene, so steht diese sowohl auf H als auch auf V senkrecht, daher steht auch die Durchschnittslinie beider, d. i. die Achse auf dieser Ebene senkrecht (§. 208). Mithin ist auch $a'm \perp AX$ und $a''m \perp AX$. In dem Rechteck $aa''ma'$ ist $aa' = a''m$ und $aa'' = a'm$.

Der Abstand des Raumpunktes von H ist also dem Abstand der zweiten Projection von der Achse gleich.

Der Abstand des Raumpunktes von V ist dem Abstand der ersten Projection von der Achse gleich.

Denkt man sich (Fig. 171) die Ebene H um die Achse AX um 90^0 so gedreht, dass sie in die Erweiterung der Ebene V zu liegen kommt, so kommen Grundriss und Aufriss in dieselbe Ebene. Von den beiden Projectionsebenen braucht man nur die Achse zu zeichnen. Der Grundriss erscheint unterhalb, der Aufriss oberhalb der Achse; beide befinden sich in derselben Normalen der Achse, da oben gezeigt wurde, dass $a''m \perp AX$ und $a'm \perp AX$ ist.

Fig. 171.

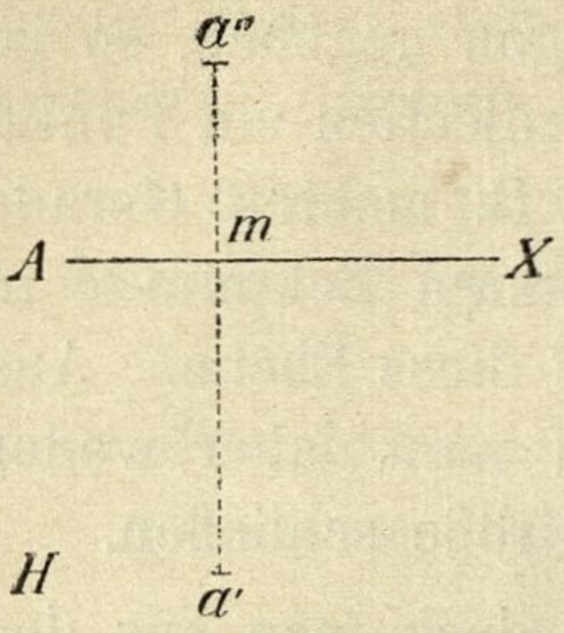
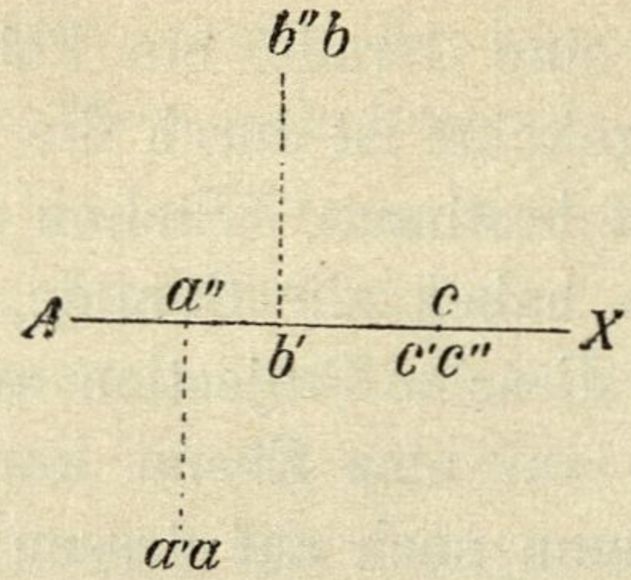


Fig. 172.



Liegt ein Punkt *a* (Fig. 172) in der Ebene *H*, so ist er selbst seine erste Projection, seine zweite Projection liegt in der Achse.

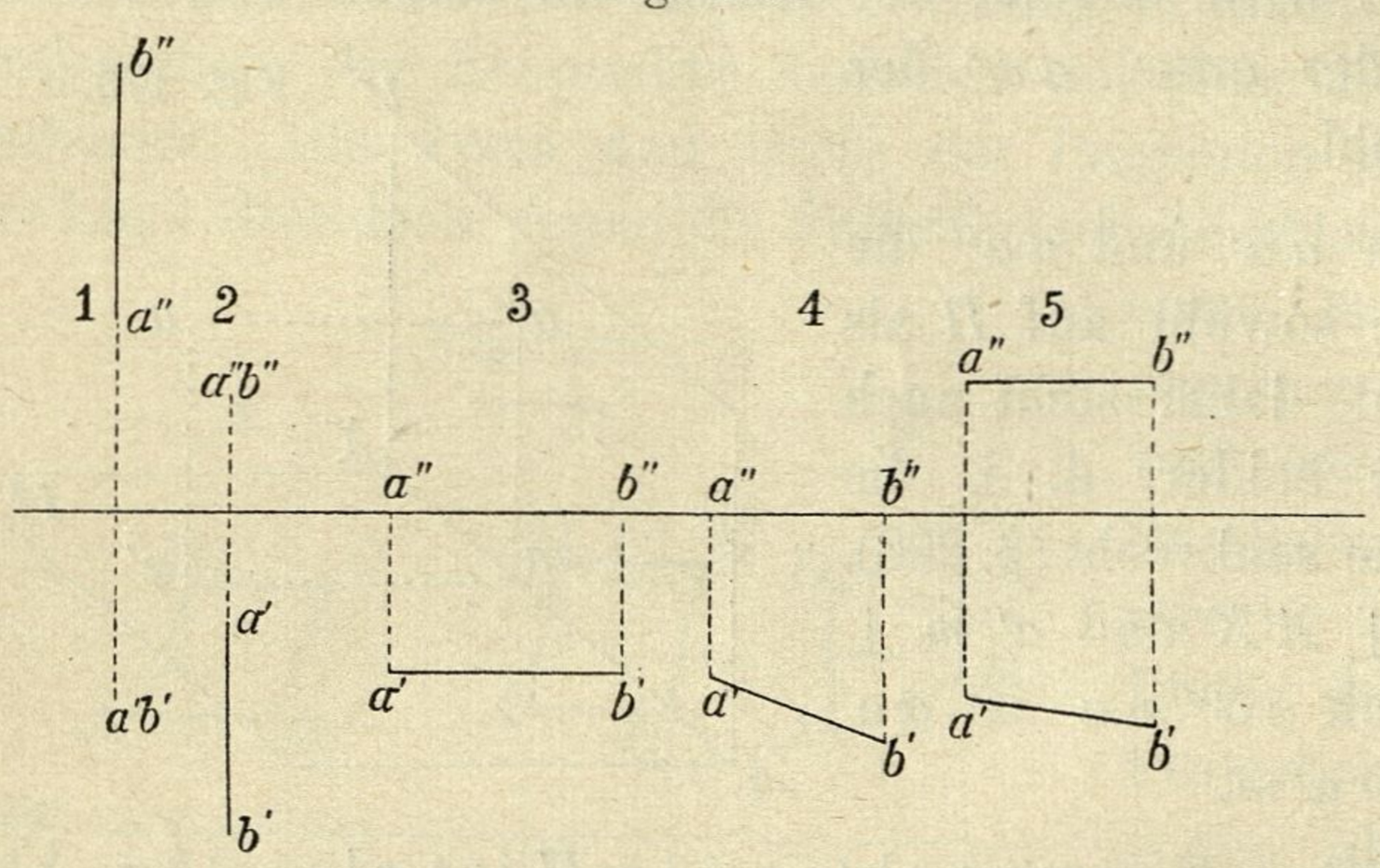
Liegt ein Punkt *b* (Fig. 172) in der Ebene *V*, so ist er selbst seine zweite Projection, seine erste liegt in der Achse.

Liegt ein Punkt *c* in der Achse, so ist er selbst seine erste und zweite Projection.

§. 216. Projectionen *a)* **einer Strecke,** *b)* **zweier Strecken.** *a)* Um die Horizontal- und Verticalprojection einer Strecke zu erhalten, hat man die Strecke zwischen den gleichnamigen Projectionen ihrer Endpunkte zu ziehen.

1. Ist die Raumgerade gegen eine der Projectionsebenen normal, so ist ihre gleichnamige Projection ein Punkt, die ungleichnamige hingegen eine Gerade, die zur Achse normal und mit der Raumgeraden gleich lang ist. (Fig. 173, 1, 2.)

Fig. 173.



2. Liegt die Raumgerade in einer der beiden Projectionsebenen, so ist sie selbst ihre gleichnamige Projection; die ungleichnamige fällt in die Achse und ist gleich lang oder verkürzt, je nachdem die Raumgerade zur zweiten Projectionsebene parallel ist oder nicht. (Fig. 173, 3, 4.)

3. Ist die zu projicierende Gerade mit nur einer der Projectionsebenen parallel, so ist ihre gleichnamige Projection mit ihr parallel, von gleicher Länge und schief gegen die Achse; die ungleichnamige ist zur Achse parallel und verkürzt. (Fig. 173, 5.)

4. Ist die zu projicierende Gerade gegen beide Projectionsebenen schief, so sind beide Projectionen ebenfalls schief gegen die Achse und verkürzt. (Fig. 174 *a*, *b*.) Die wahre Länge der Raumgeraden findet man durch Construction des projicierenden Trapezes aus einer der nicht parallelen und den auf ihr senkrecht stehenden parallelen Seiten;

die nicht parallele Seite ist eine der beiden Projectionen, die parallelen sind die zugehörigen Projectionsstrahlen. Die vierte Seite des Trapezes gibt die Raumgerade in ihrer wahren Größe an (Fig. 175).

Fig. 174 *a*.

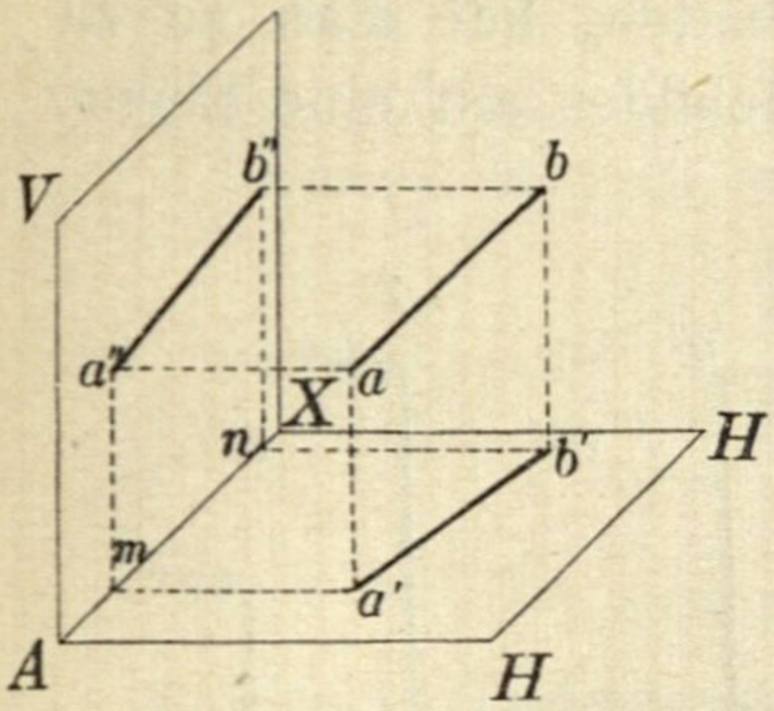


Fig. 174 *b*.

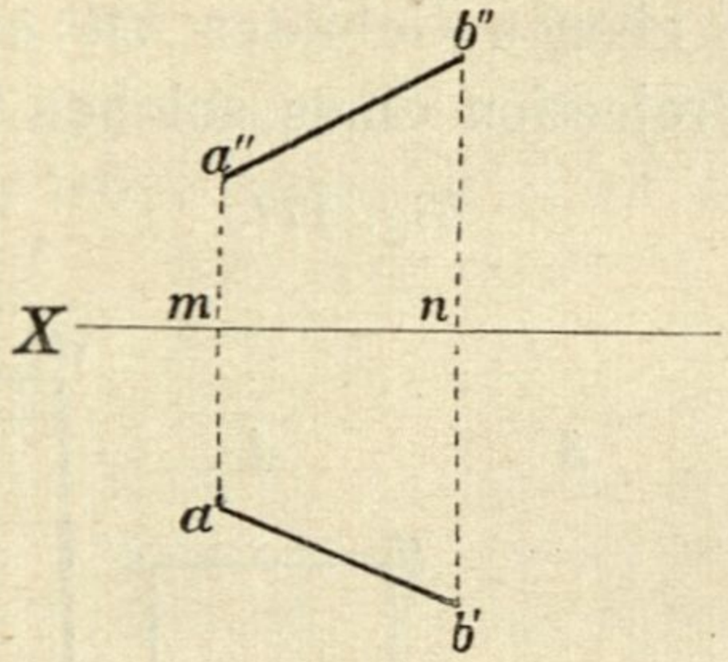
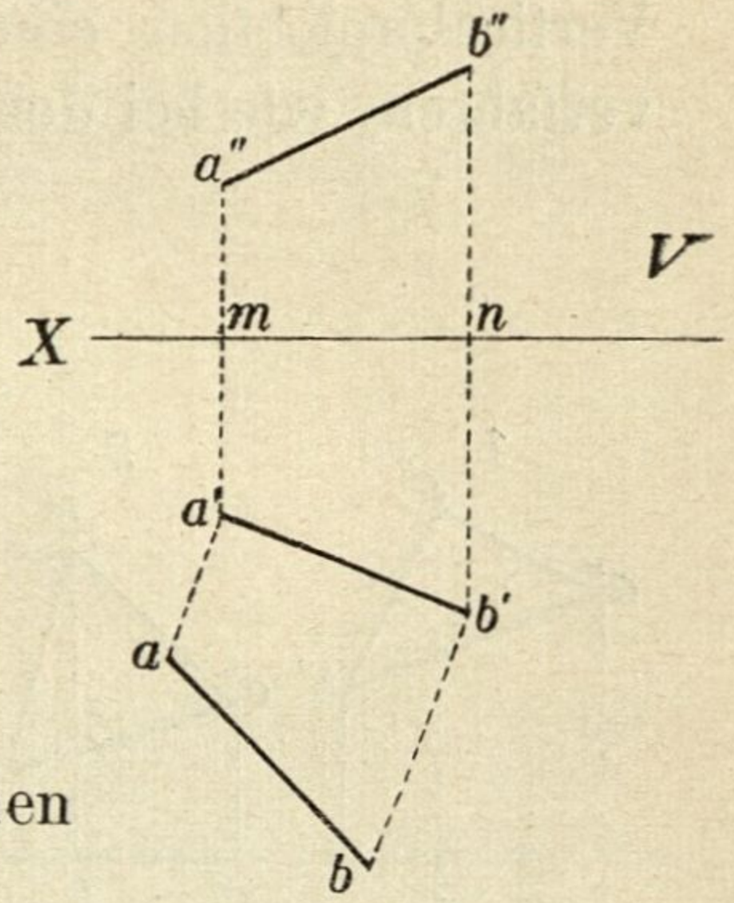


Fig. 175.



Die Lage der Raumgeraden, deren Projectionen in Fig. 176 *a* enthalten sind, anzugeben.

Fig. 176 *a*.

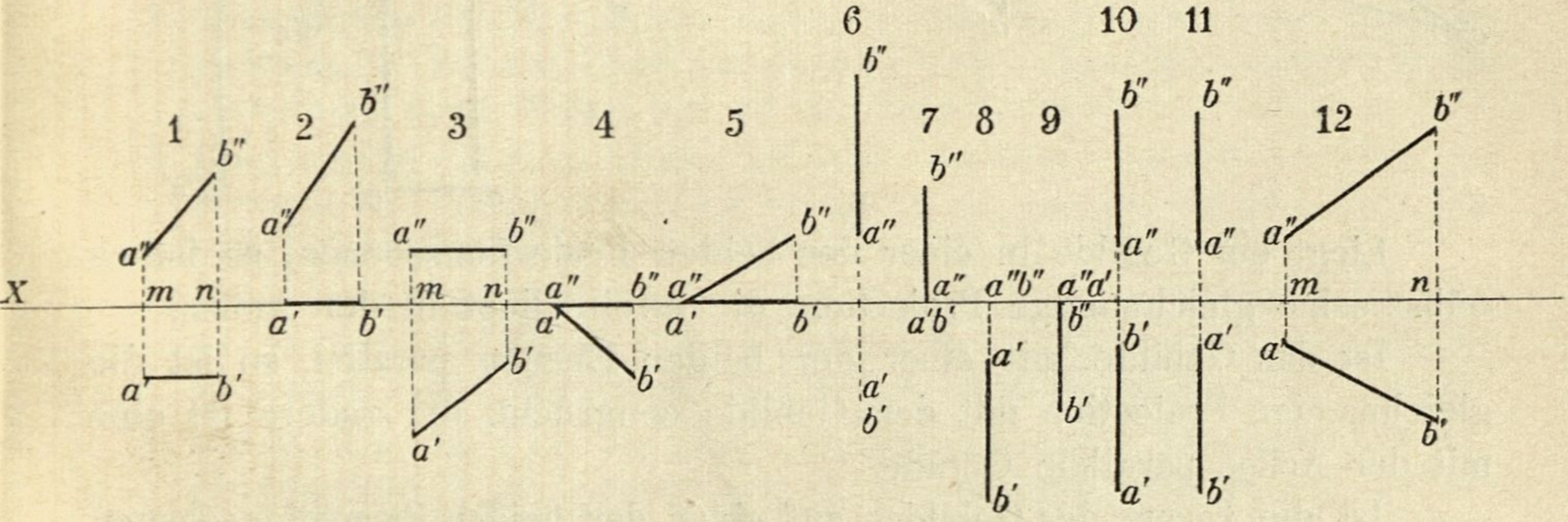
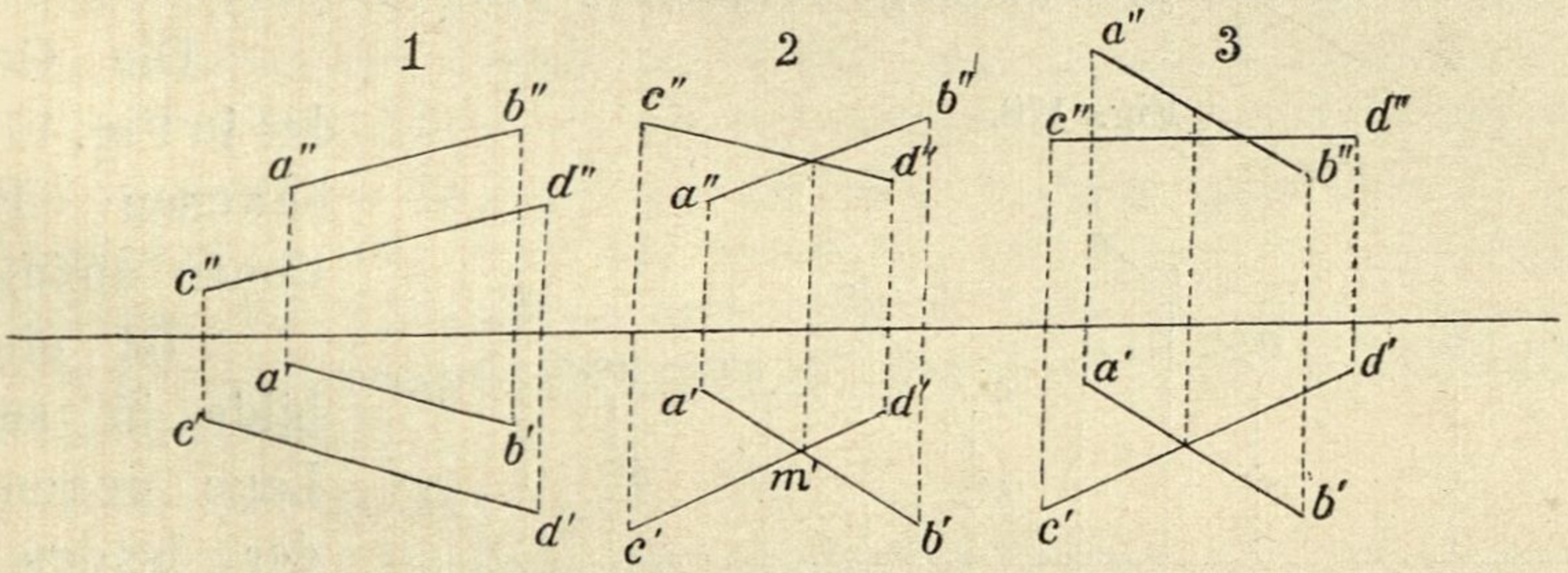


Fig. 176 *b*.



b) Bezüglich der Projectionen zweier Strecken gelten die Sätze:

1. Die gleichnamigen Projectionen paralleler Strecken sind parallel (Fig. 176 *b*, 1).

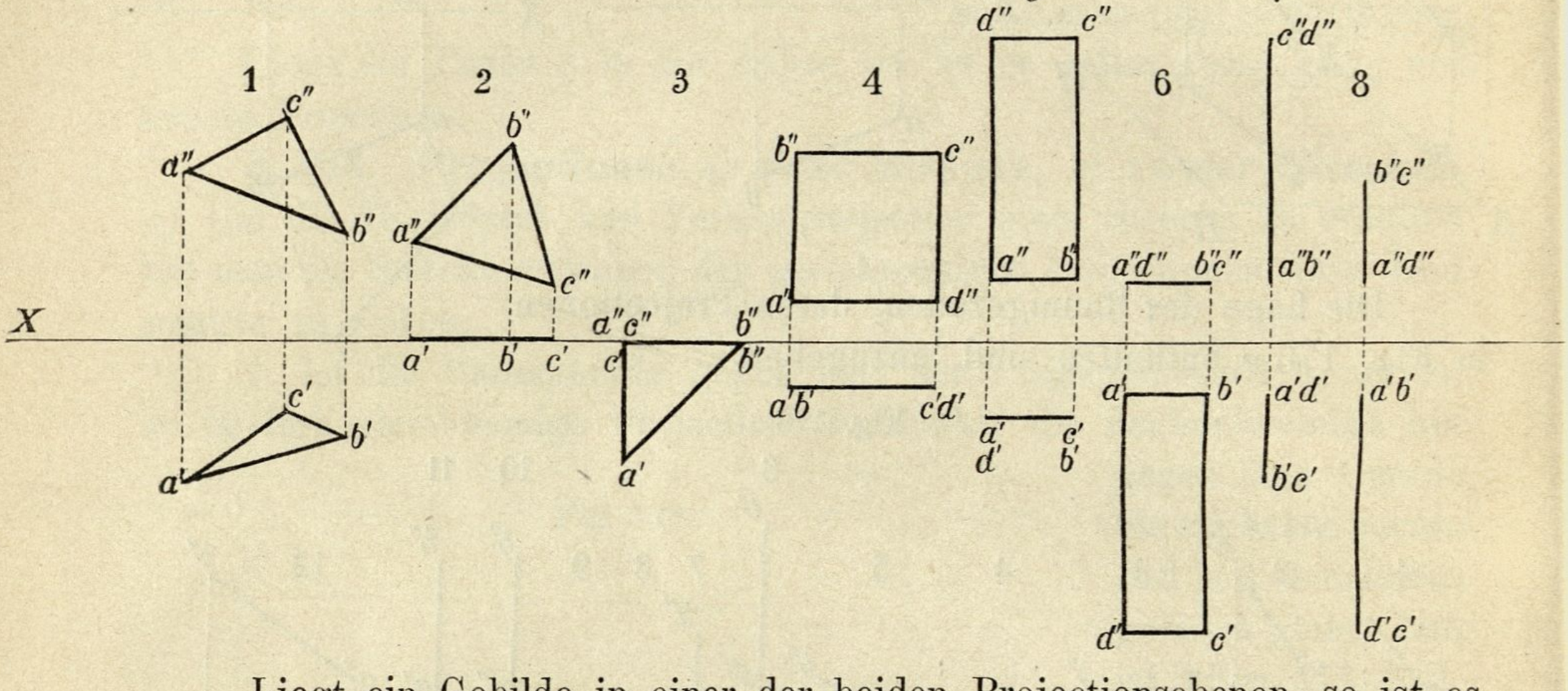
2. Wenn zwei Strecken sich schneiden, so schneiden sich auch die gleichnamigen Projectionen derselben

(Fig. 176 *b*, 2). Die Verbindungslinie der beiden Projectionen des Schnittpunktes steht auf der Achse normal.

Fig. 176 *b*, 3 enthält die Projection von zwei windschiefen Geraden.

§. 217. Projectionen ebener Gebilde. Um die Horizontal- und Verticalprojection eines ebenen Gebildes zu erhalten, hat man so zu verfahren, wie bei der Projection eines solchen Gebildes auf eine Ebene.

Fig. 177.

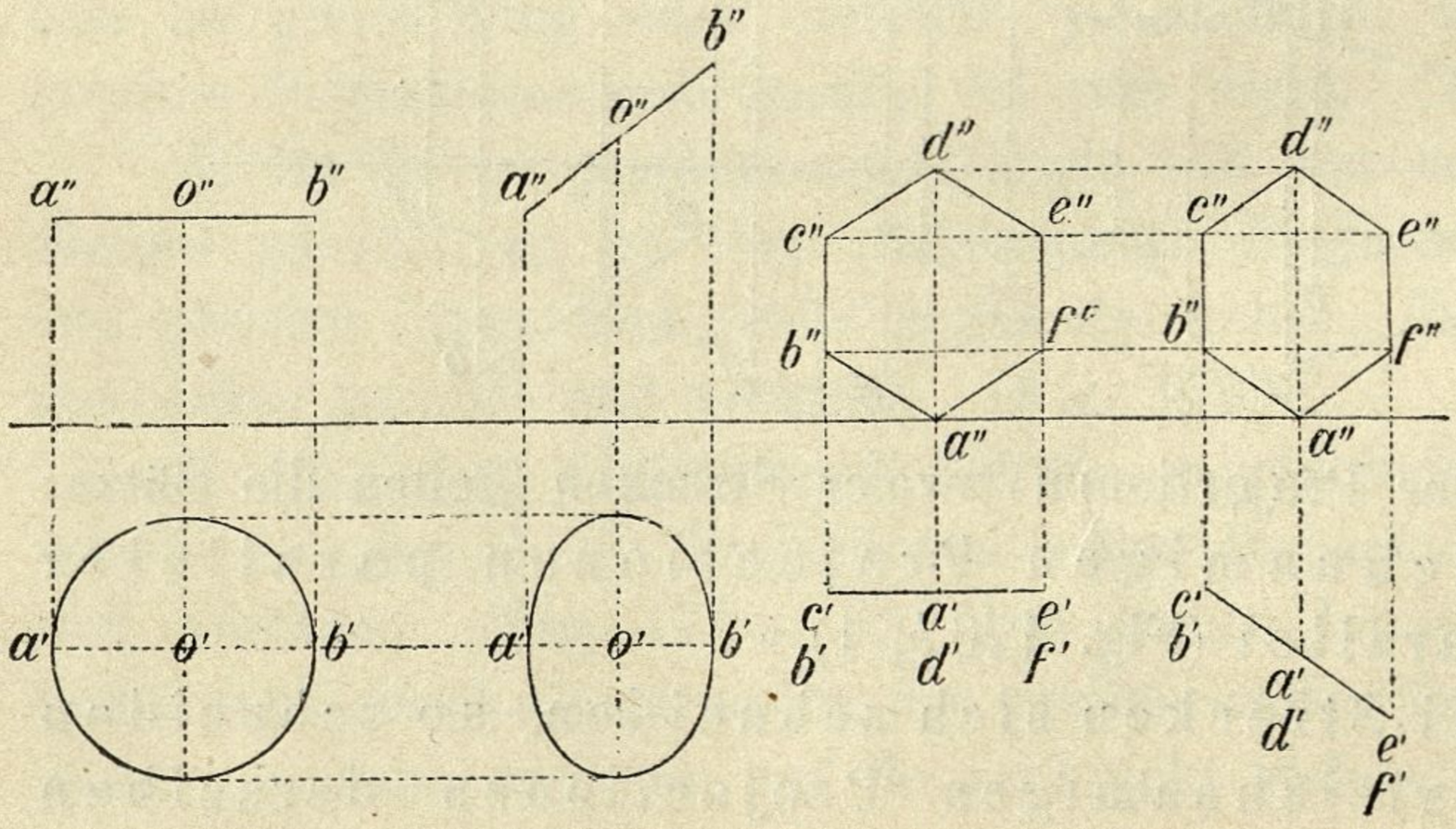


Liegt ein Gebilde in einer der beiden Projectionsebenen, so ist es selbst seine gleichnamige Projection, die zweite liegt in der Achse.

Ist das Gebilde mit einer der beiden Ebenen parallel, so ist die gleichnamige Projection mit dem Gebilde congruent, die andere ist eine mit der Achse parallele Gerade.

Ist die Ebene des Gebildes auf einer der beiden Projectionsebenen senkrecht, so ist die gleichnamige Projection eine Strecke.

Fig. 178.



Die Gebilde der in Fig. 177 enthaltenen Projectionen anzugeben.

Ist ein Gebilde in schiefer Lage gegen eine der beiden Projectionsebenen, so leite man die Projection aus der parallelen Lage ab (Fig. 178).

§. 218. Aufgaben.

Ein Raumpunkt a soll mit $a\ (p, q)$ bezeichnet werden; p bedeutet den ersten q den zweiten Projectionsstrahl, beide in *cm* gemessen.

1. Die Projectionen folgender Punkte zu zeichnen und ihre Lage zu bestimmen:

   $a\ (2{\cdot}4,\ 3{\cdot}7)$, $b\ (0,\ 4{\cdot}1)$, $c\ (3{\cdot}8,\ 0)$, $d\ (0,\ 0)$.

2. Die Projectionen folgender Strecken, deren Endpunkte a und b sind, zu zeichnen, die Lage und wahre Länge derselben zu bestimmen: (Fig. 174 *b*.)

   $a\ (3,\ 4)$ $b\ (2{\cdot}7,\ 3{\cdot}6)$, $mn = 4\ cm$.
   $a\ (0,\ 2)$ $b\ (3{\cdot}5,\ 4)$, $mn = 3{\cdot}7\ cm$.
   $a\ (2,\ 3{\cdot}2)$ $b\ (2,\ 0)$, $mn = 5\ cm$.
   $a\ (0,\ 0)$ $b\ (3,\ 4)$, $mn = 4{\cdot}2\ cm$.
   $a\ (0,\ 0)$ $b\ (0,\ 0)$, $mn = 2{\cdot}9\ cm$.
   $a\ (2,\ 3)$ $b\ (1,\ 4)$, $mn = 0$.

3. Was für Projectionen gibt eine Strecke des Raumes, wenn dieselbe *a)* mit der verticalen, *b)* mit der horizontalen, *c)* mit beiden Projectionsebenen parallel ist; *d)* auf der verticalen, *e)* auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht; *f)* in der verticalen, *g)* in der horizontalen Projectionsebene liegt?

4. Eine Strecke von 3 *cm* Länge liegt in H; der Punkt, welcher der Achse am nächsten ist, hat von dieser den Abstand 1 *cm*; sie schließt mit der Achse nach rechts einen Winkel von 30^0 ein. Ihre Projectionen zu zeichnen.

5. Eine Strecke von 4 *cm* Länge liegt in V; der Punkt, welcher der Achse am nächsten ist, hat von dieser den Abstand 2 *cm*; sie schließt mit der Achse nach links einen Winkel von 40^0 ein. Ihre Projectionen zu zeichnen.

6. Eine Strecke von 5 *cm* Länge ist mit H parallel in dem Abstand 2 *cm*; der am nächsten der Ebene V links liegende Punkt hat von V 3 *cm* Abstand; sie schließt mit V den Winkel von 50^0 ein. Ihre Projectionen zu zeichnen.

7. Ein Quadrat von 3 *cm* Seitenlänge ist parallel mit H in dem Abstand 4 *cm*; die Diagonale d_1 ist senkrecht auf V, ihr nächster Punkt hat von V 2 *cm* Abstand. Die Projectionen zu zeichnen. Das Quadrat um 45^0 um d_1 als Achse zu drehen.

8. Wie gestalten sich Grund- und Aufriss eines ebenen Gebildes, wenn dieses *a)* mit der horizontalen, *b)* mit der verticalen Projectionsebene parallel ist?

9. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 2 *cm* ist parallel mit V in dem Abstand 5 *cm*, eine Seite des Sechseckes liegt in H. Die Projectionen zu zeichnen. Das Sechseck um eine verticale Achse um 50^0 zu drehen, wenn diese geht *a)* durch einen Eckpunkt, *b)* durch den Mittelpunkt der horizontalen Winkelsymmetrale.

10. Von einem Kreise ist
    a) der Grundriss ein Kreis, der Aufriss eine Strecke;
    b) der Grundriss eine Strecke, der Aufriss ein Kreis;
    c) Grundriss und Aufriss sind Strecken;
    d) der Grundriss ist eine Strecke, der Aufriss eine Ellipse;
    e) der Grundriss eine Ellipse, der Aufriss eine Strecke;
    f) Grundriss und Aufriss sind Ellipsen.

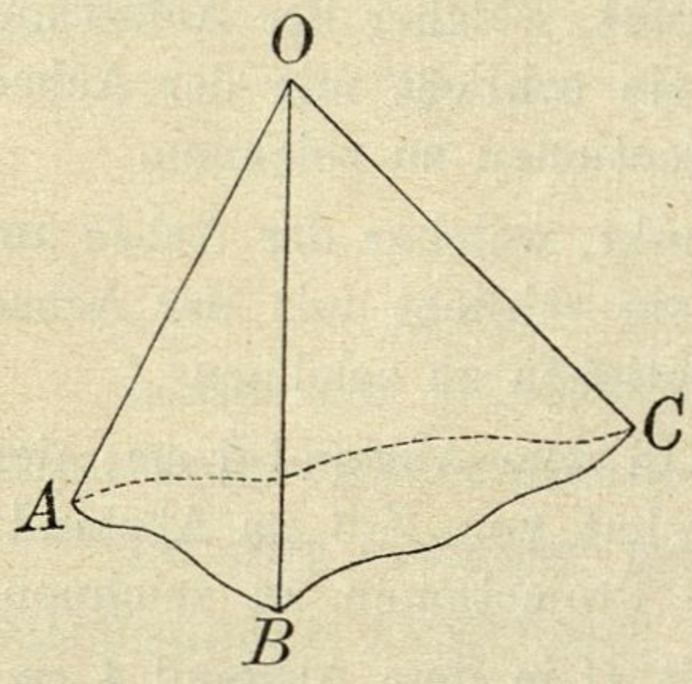
    Welche Lage gegen die Projectionsebenen hat der Kreis in jedem dieser Fälle?

5. Körperecken.

§. 219. Drei oder mehrere Ebenen, welche sich in eben so vielen Geraden schneiden, die in einem Punkte zusammentreffen, bilden einen körperlichen Winkel oder eine Ecke. Die Geraden, in denen sich je zwei aufeinander folgende Ebenen schneiden, nennt man die Kanten, die Ebenen selbst die Seitenflächen und den Punkt, in welchem alle Kanten zusammenstoßen, die Spitze oder den Scheitel der Körperecke. Ein Winkel, welcher von zwei aufeinander folgenden Kanten gebildet wird, heißt ein Kantenwinkel oder eine Seite der Ecke; der von zwei aufeinander folgenden Seitenflächen gebildete Winkel wird ein Flächenwinkel oder kurz Winkel der Ecke genannt.

Um eine Körperecke zu benennen, gibt man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel an, oder man nennt auch die Buchstaben an allen Kanten, so jedoch, dass der Buchstabe am Scheitel zuerst gesetzt wird. Die Ecke (Fig. 179) heißt die Ecke O, oder die Ecke $OABC$; O ist der Scheitel; OA, OB, OC sind die Kanten, AOB, BOC, COA die Kantenwinkel oder Seiten.

Fig. 179.



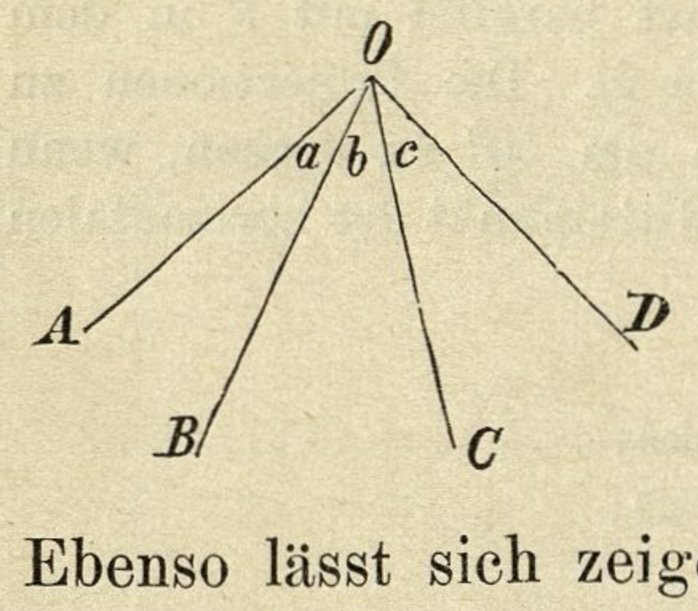
Eine Ecke heißt dreikantig, vierkantig (oder ein Dreikant, Vierkant . . . .) je nachdem sie von drei, vier, ... Ebenen gebildet wird.

Enthält eine Ecke gleiche Seiten und gleiche Winkel, so wird sie regelmäßig genannt.

§. 220. Lehrsatz. In jeder dreikantigen Ecke ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Beweis. Ist aus den Kantenwinkeln a, b, c (Fig. 180) eine Körperecke zu bilden, so braucht man nur die Ebenen AOB und DOC so lange um die Geraden OB und OC zu drehen, bis die Schenkel OA und OD ineinander fallen. Damit eine Körperecke entstehen könne, müssen OA und OD außerhalb der Ebene BOC zusammenfallen, was nur dann möglich ist, wenn die Winkel a und c zusammengenommen größer sind als b.

Fig. 180.



Ebenso lässt sich zeigen, dass $a + b$ größer als c, und $b + c$ größer als a sein muss. Aus diesem Satze folgt:

In jeder dreikantigen Ecke ist jeder Kantenwinkel größer als die Differenz der beiden andern.

Vergleiche damit die Sätze über die Seiten eines Dreieckes.

§. 221. Lehrsatz. In jeder Ecke ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Denn würden alle Kantenwinkel zusammen vier Rechte betragen, so müssten alle Seitenebenen in eine einzige Ebene fallen und könnten daher keine Ecke bilden.

Wenn mehrere ebene Winkel zusammengenommen 360° oder mehr als 360° betragen, so lässt sich aus denselben keine Ecke bilden.

§. 222. Zwei Ecken heißen congruent, wenn sie sich so in-einander legen lassen, dass sich alle ihre Kanten und Seitenflächen decken. Soll diese Deckung möglich sein, so müssen nicht nur die Kanten- und Flächenwinkel der beiden Ecken gleich sein, sondern auch in beiden in derselben Ordnung aufeinander folgen.

II. Körper.

Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Körper.

§. 223. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger oder eckiger Körper, auch Polyeder. Ein Körper, welcher entweder theils von ebenen theils von gekrümmten Flächen, oder nur von gekrümmten Flächen begrenzt wird, heißt ein krummflächiger oder runder Körper.

Wenn ein Körper auf einer Ebene aufliegt, so heißt diese die Grundfläche; und wenn mit dieser als Grundfläche betrachteten Ebene eine zweite Ebene parallel ist, so sagt man: der Körper hat zwei parallele Grundflächen. Die übrigen Grenzflächen eines Körpers werden Seitenflächen genannt.

Drei Ebenen bilden eine Ecke, schließen aber noch keinen Raum ein. Damit ein Raum nach allen Seiten abgeschlossen, d. i. damit ein Körper gebildet werde, sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die Schnittlinie je zweier Grenzebenen wird eine Kante des Körpers genannt.

§. 224. Zwei Körper, welche so ineinander gelegt werden können, dass sich alle ihre Grenzflächen decken, heißen congruent.

Zwei Körper, in denen je zwei entsprechende Grenzflächen ähnlich und je zwei entsprechende Flächenwinkel gleich sind, heißen ähnlich.

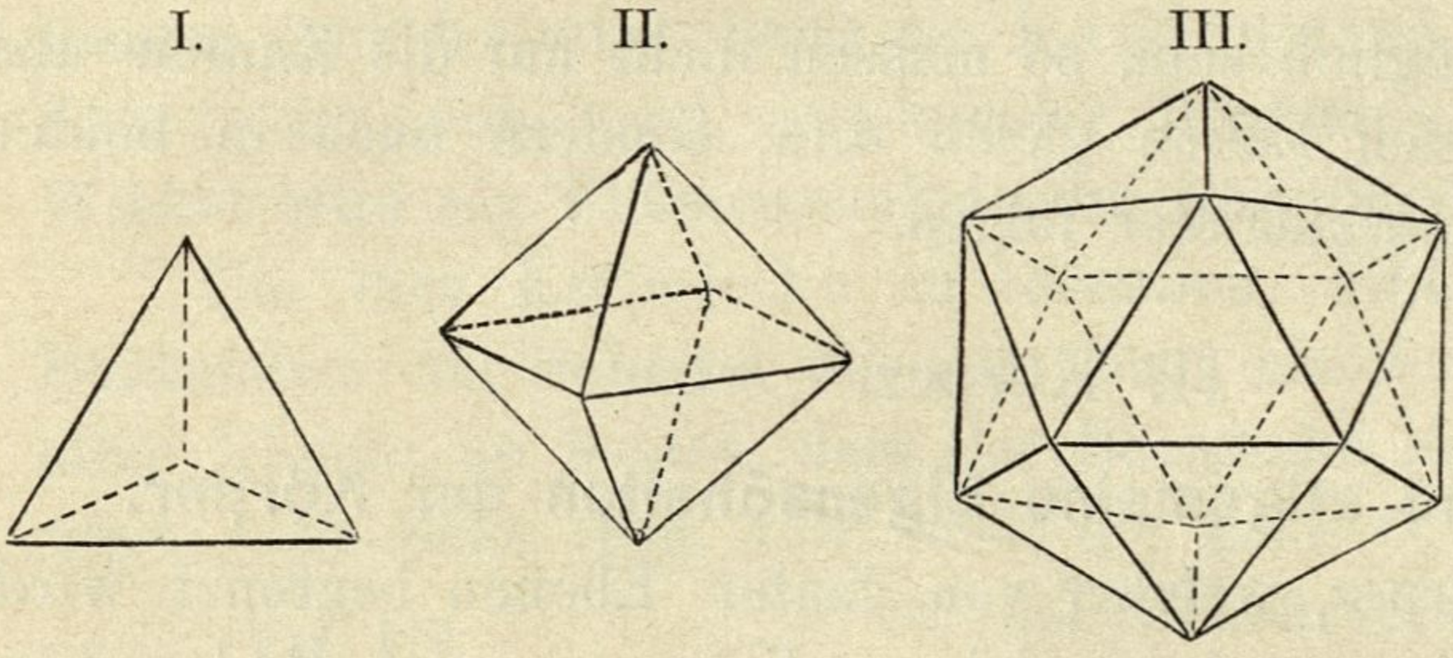
1. Regelmäßige Körper.

§. 225. Ein Körper, in welchem alle Grenzflächen congruente regelmäßige Vielecke sind und congruente Ecken bilden, heißt ein regelmäßiger Körper.

Aus dem Satze, dass die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° sein muss, folgt, dass es nur fünf regelmäßige Körper geben kann.

Denn der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360° beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das Tetraeder, das Octaeder und das Ikosaeder.

Fig. 181.



Das Tetraeder (Fig. 181, I) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Das Octaeder (Fig. 181, II) wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

Das Ikosaeder (Fig. 181, III) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je fünf eine Ecke bilden; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammentreffen; aus vier oder mehr als vier rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher nur einen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt Hexaeder, Cubus oder Würfel. Das Hexaeder (Fig. 182) wird von sechs Quadraten eingeschlossen und hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Fig. 182.

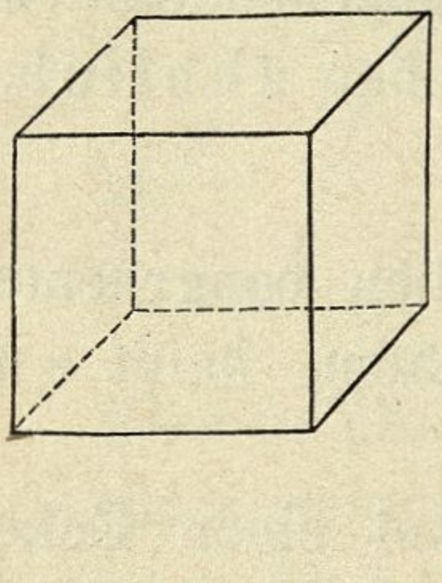
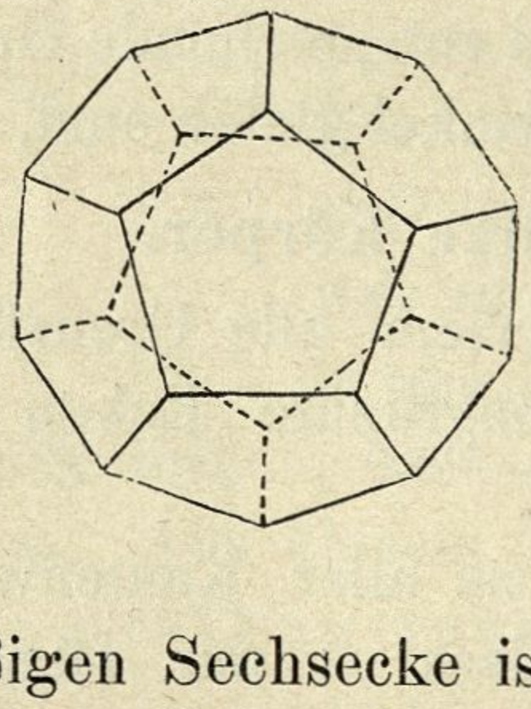


Fig. 183.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°; von solchen Winkeln können nur drei eine Ecke bilden. Es gibt demzufolge nur einen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper. Dieser heißt Dodekaeder (Fig. 183); er hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln kann keine Ecke gebildet werden, da schon drei zusammen

360^0 betragen. Eben so wenig kann aus den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten eine Ecke entstehen.

Es gibt daher nur fünf regelmäßige Körper.

§. 226. Die zusammenhängende Zeichnung der Grenzflächen eines Körpers auf einer einzigen Ebene heißt ein Körpernetz.

Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten, zeichne man (Fig. 184) ein gleichseitiges Dreieck, halbiere dessen Seiten und verbinde die Halbierungspunkte durch Strecken.

Das Netz eines Octaeders wird erhalten, wenn man (Fig. 185) zuerst das Netz eines Tetraeders construiert und dann an dieses ein zweites congruentes Netz so anlegt, dass beide eine Seite gemeinschaftlich haben.

Fig. 184.

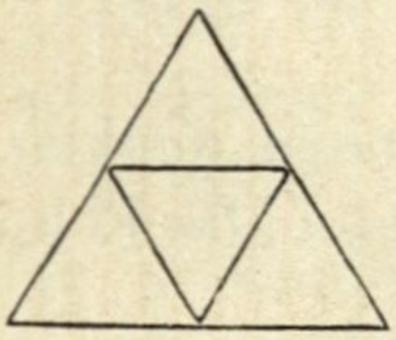


Fig. 185.

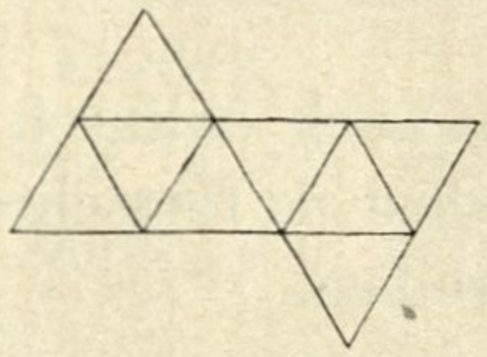
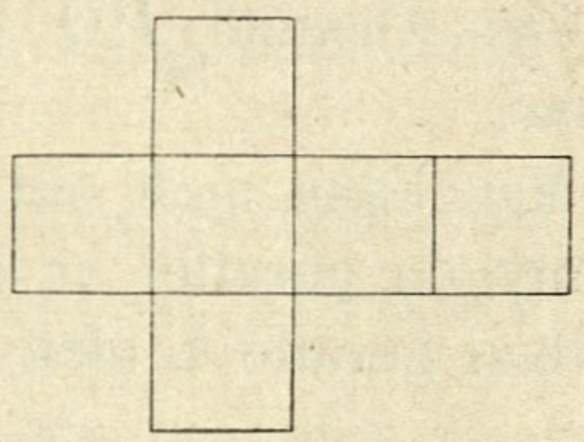


Fig. 186.



Das Netz eines Würfels (Fig. 186) entsteht, wenn man längs einer Geraden vier Quadrate nebeneinander aufträgt und überdies an den entgegengesetzten Seiten eines jener Quadrate noch zwei Quadrate construiert.

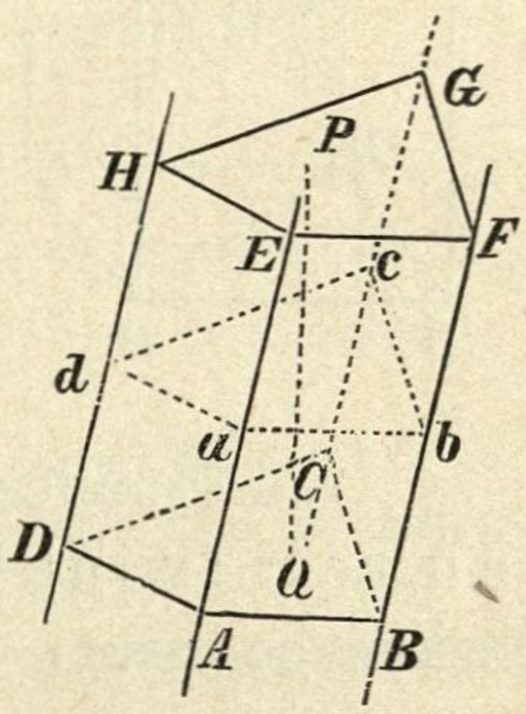
2. Das Prisma.

§. 227. Entstehung und Bestandstücke eines Prismas. Gleitet eine unbegrenzte Gerade AE (Fig. 187) parallel zu sich selbst längs des Umfanges eines Polygons $ABCD\ldots$ hin, so schließen die von ihr beschriebenen Ebenen, deren Schnittlinien BF, CG, DH,... parallel sind, einen nach zwei Seiten offenen Raum ein, welcher ein prismatischer Raum heißt. AE heißt die erzeugende Gerade, $ABCD$ das Leitpolygon.

Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Prisma; es ist nicht nothwendig, dass diese zwei Schnittebenen dem Leitpolygon parallel sind.

Die zwei parallelen Schnittflächen, von welchen die eine in Fig. 187 mit dem Leitpolygon selbst zusammenfällt, heißen die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen.

Fig. 187.



Die Grundflächen eines Prismas $ABCD$ und $EFGH$ sind congruent, da die Seiten und Winkel paarweise gleich sind. $AB = EF$ als Parallele zwischen Parallelen, der Winkel bei A ist gleich dem Winkel bei E, weil die Schenkel parallel und gleichgerichtet sind.

Die Schnittlinien der Seitenflächen untereinander heißen Seitenkanten; sie sind parallel, da die erzeugende Gerade parallel zu sich selbst bewegt wurde. Die Seitenflächen eines Prismas sind daher Parallelogramme.

Die Schnittlinien der Seitenflächen mit den Grundflächen heißen Grundkanten.

Ein Prisma ist also ein Körper, welcher von zwei parallelen und congruenten Vielecken als Grundflächen und von so vielen Parallelogrammen, als eine Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen begrenzt ist.

Der Abstand PQ der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

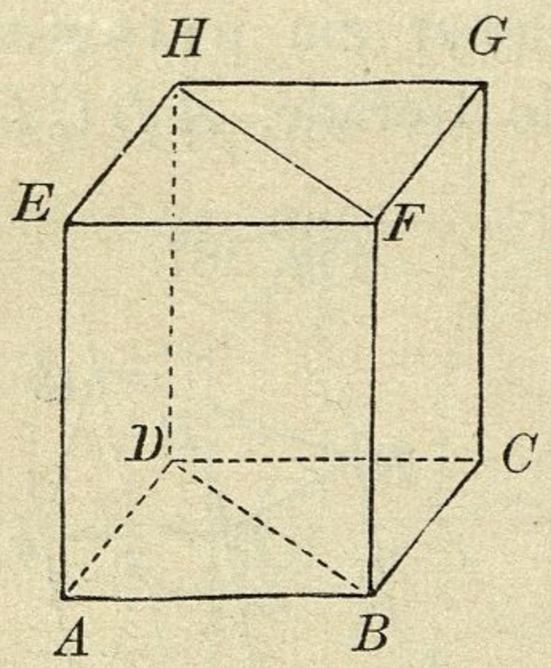
Man kann sich ein Prisma auch dadurch entstanden denken, dass ein Polygon parallel zu sich selbst so fortschreitet, dass alle Eckpunkte desselben gerade Linien beschreiben.

§. 228. Eintheilung der Prismen. Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man dreiseitige, vierseitige und mehrseitige Prismen.

Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche normal oder schief stehen.

In einem geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke, und jede Seitenkante ist der Höhe des Prismas gleich.

Fig. 188.



Jedes gerade Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Polygone sind, heißt ein regelmäßiges Prisma. Ein Prisma, in welchem alle Kanten gleich sind, heißt ein gleichkantiges Prisma.

Ein Prisma $ABCDEFGH$ (Fig. 188), dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Dasselbe kann, wie jedes andere Prisma, gerade oder schief sein. Ein Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen begrenzt.

Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Es wird von sechs Rechtecken begrenzt.

Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, heißt ein Würfel oder Cubus. Es wird von sechs Quadraten begrenzt.

Ein schiefes Parallelepiped, dessen sämmtliche Grenzflächen congruente Rhomben sind, heißt ein Rhomboeder.

§. 229. Schnitte der Prismen. 1. Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur $abcd$ (Fig. 187) mit der Grundfläche congruent. (Weshalb?)

2. Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten BF und DH (Fig. 188) eines Prismas eine Ebene, so ist der Durchschnitt $BFHD$ ein Parallelogramm und heißt ein Diagonalschnitt des Prismas. Jede Diagonale eines Diagonalschnittes eines Parallelepipedes heißt eine Diagonale des Parallelepipedes.

Jedes mehrseitige Prisma kann durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen zerlegt werden.

3. Wird ein Prisma durch eine auf den Seitenkanten normale Ebene geschnitten, so heißt die Schnittfigur ein normaler Querschnitt des Prismas.

Kann in einem Prisma die Grundfläche selbst als ein normaler Querschnitt angesehen werden?

§. 230. Lehrsatz. Das Quadrat der Maßzahl der Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der in einer Ecke zusammenstoßenden drei Kanten.

In einem rechtwinkligen Parallelepiped seien a und b die Kanten der Grundfläche, c die Seitenkante, d die Diagonale der Grundfläche, und D sei die Diagonale des Parallelepipeds.

d ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und b sind; daher $d^2 = a^2 + b^2$.

D ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten d und c sind; daher $D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Für den Würfel, in welchem $b = c = a$ ist, ergibt sich

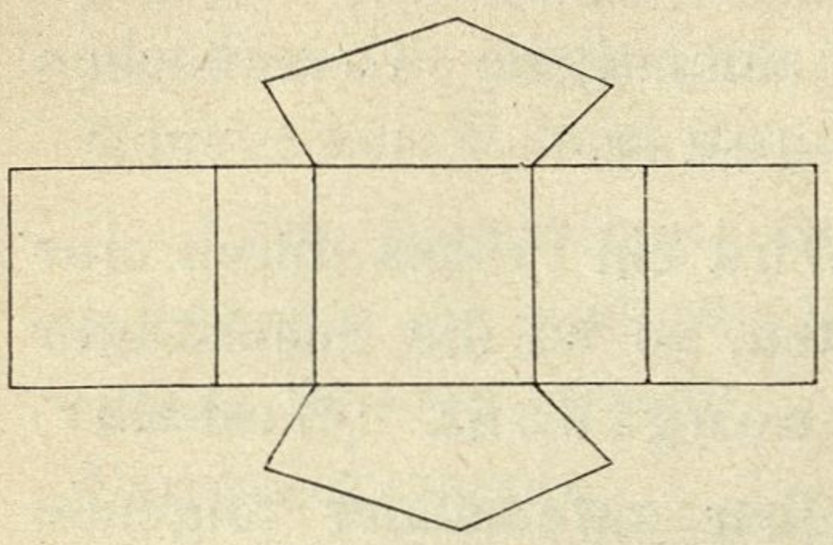
$$D^2 = 3a^2, \text{ daher } D = a\sqrt{3};$$

und umgekehrt
$$a = \frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{D\sqrt{3}}{3}.$$

Aufgaben.

1. Die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds sind *a)* 21 *cm*, 16 *cm* und 12 *cm*, *b)* 32 *cm*, 24 *cm* und 30 *cm*; wie groß ist in jedem Falle die Diagonale?
2. Wie groß ist die Diagonale eines Würfels, dessen Kante 3·25 *dm* ist?
3. Die Diagonale eines Würfels beträgt 0·275 *m*; wie groß ist die Kante?

Fig. 189.



§. 231. Netz eines Prismas. Um das Netz eines Prismas zu erhalten, zeichne man die Parallelogramme, welche die Seitenflächen bilden, so nebeneinander, dass je zwei eine gemeinschaftliche Seite haben, und construiere dann über und unter einem dieser Parallelogramme die Grundflächen. In einem geraden Prisma bildet die Summe der Seitenflächen ein Rechteck. (Fig. 189.)

Das Netz zu zeichnen *a)* eines rechtwinkligen Parallelepipeds, *b)* eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas, *c)* eines dreiseitigen geraden gleichkantigen Prismas.

§. 232. Projectionen von Körpern. Auch die Projectionen der Körper werden auf einer horizontalen und einer verticalen Ebene als Grundriss und Aufriss dargestellt. Bei der Entwerfung des Grundrisses hat man sich das Auge oberhalb H, für den Aufriss aber vor V in unendlicher Entfernung zu denken. Für jede der beiden Augenstellungen zerfällt der Körper in einen sichtbaren und unsichtbaren Theil. Diese beiden Theile werden durch diejenigen Kanten getrennt, deren Projectionen den Umriss (die Contour) in den gleichnamigen Projectionen bilden. Die Contour des Grundrisses ist im allgemeinen von den Projectionen anderer Kanten gebildet als die des Aufrisses. Die sichtbaren Kanten werden durch ausgezogene, die nicht sichtbaren durch gestrichelte Linien dargestellt.

§. 233. Projectionen des Prismas.

Fig. 190, I zeigt den Grundriss und den Aufriss eines Würfels, der mit einer Fläche auf der horizontalen Projectionsebene steht, zwei Seitenflächen desselben sind zur verticalen Projectionsebene parallel; beide Projectionen sind Quadrate.

Fig. 190.

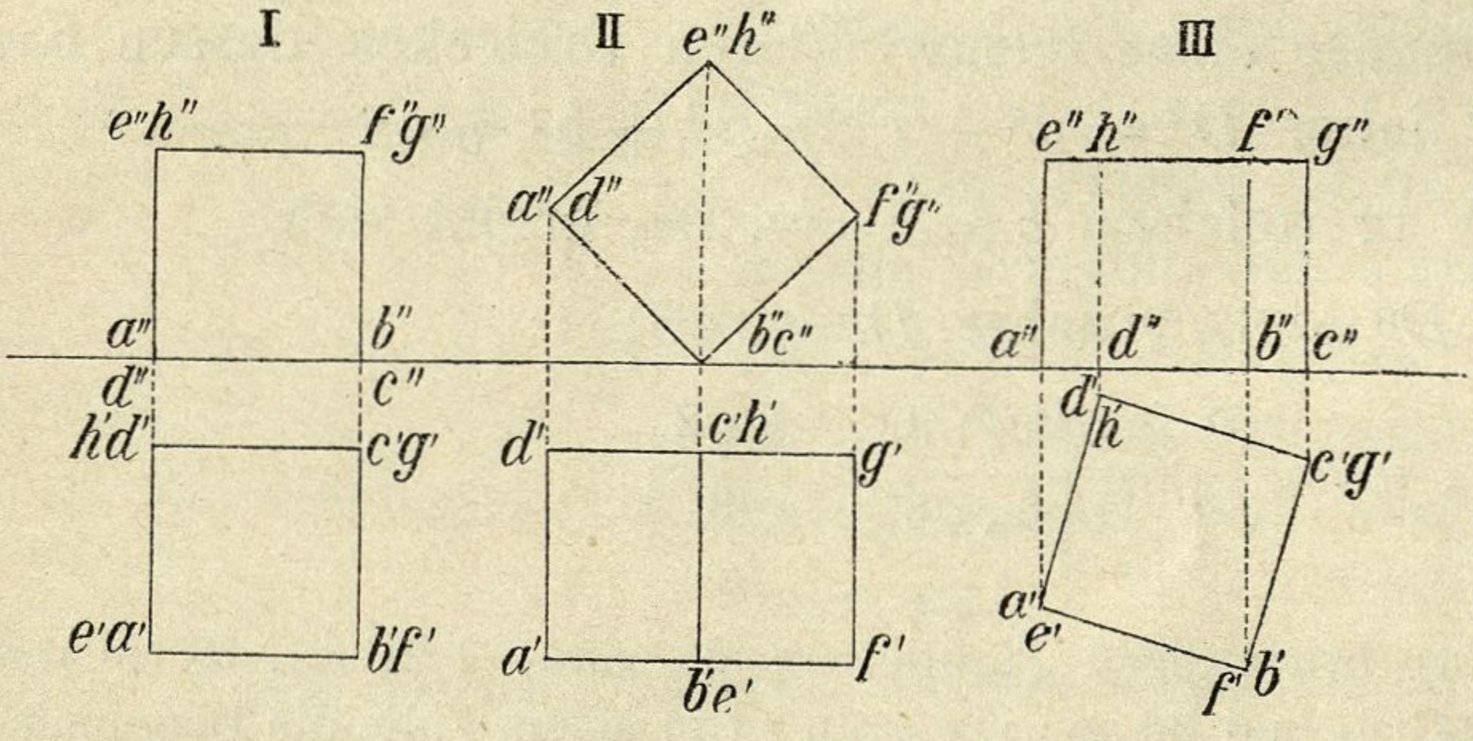


Fig. 190, II stellt die beiden Projectionen desselben Würfels vor, nachdem er um eine horizontale Kante so lange gedreht wurde, dass eine Diagonalebene auf den beiden Projectionsebenen senkrecht steht; als Grundriss ergibt sich ein Rechteck, als Aufriss ein Quadrat.

In Fig. 190, III kommen Grund- und Aufriss eines Würfels vor, dessen Grundfläche in der Horizontalebene liegt und in dem keine Seitenfläche der verticalen Projectionsebene parallel ist.

Gib in jedem der drei Fälle aus dem Grund- und Aufrisse *a)* die sichtbaren, *b)* die gedeckten Eckpunkte des Würfels an.

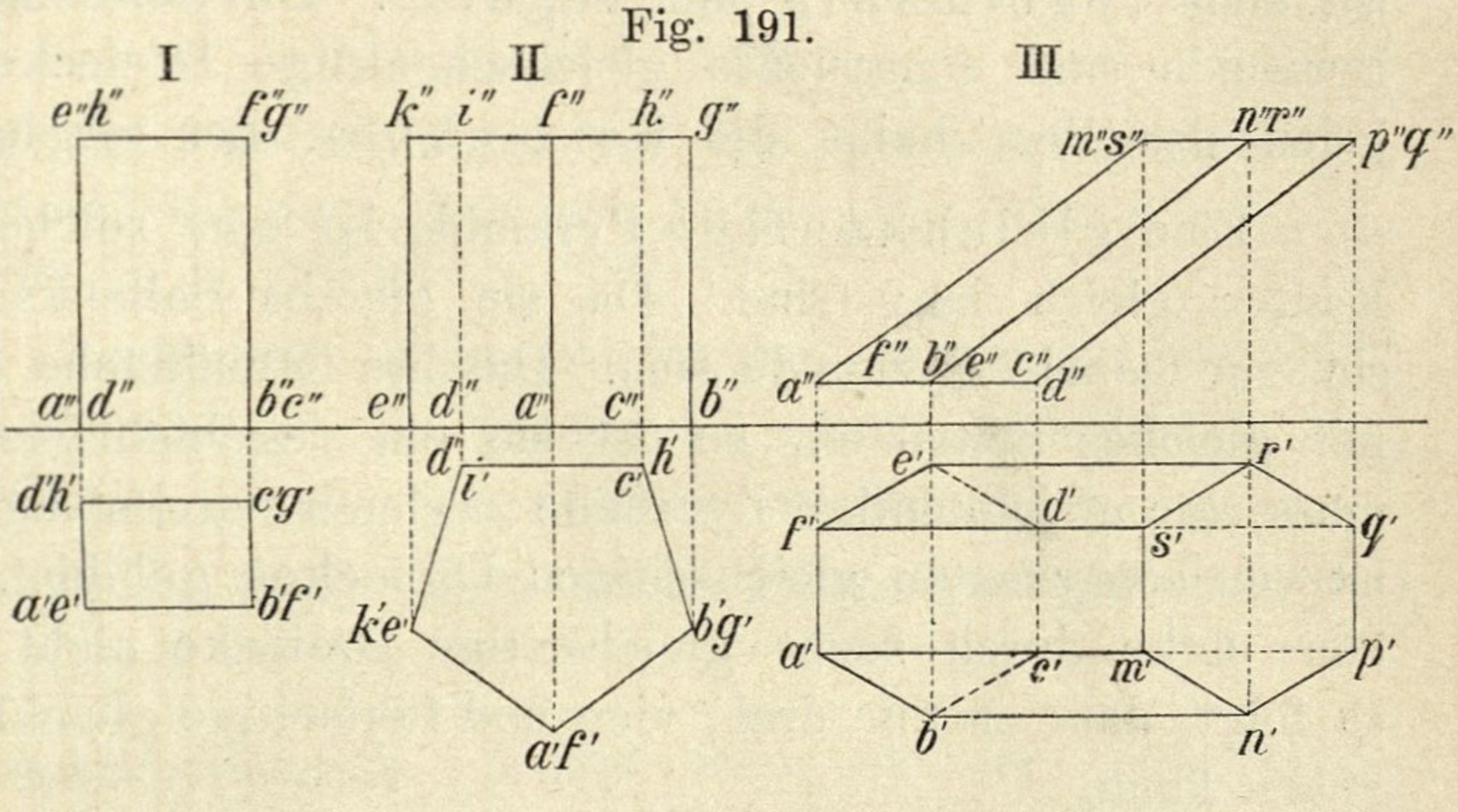
Gib in beiden Projectionen die Kanten des Würfels an, welche *a)* als sichtbare Strecken, *b)* als Punkte, *c)* als gedeckte Strecken erscheinen.

Gib die Flächen des Würfels an, welche *a)* als sichtbare Flächen, *b)* als Strecken, *c)* als gedeckte Flächen erscheinen.

Dasselbe wird in Beziehung auf die Projectionen der später folgenden Körper anzugeben sein.

Der Grund- und Aufriss in Fig. 191, I stellen ein rechtwinkliges Parallelepiped, in Fig. 191, II ein fünfseitiges, in Fig. 191, III ein sechsseitiges Prisma dar.

Fig. 191.



Gib in jedem Falle aus den beiden Projectionen die Lage des Prismas, seiner Grund- und Seitenflächen gegen die Projectionsebenen an.

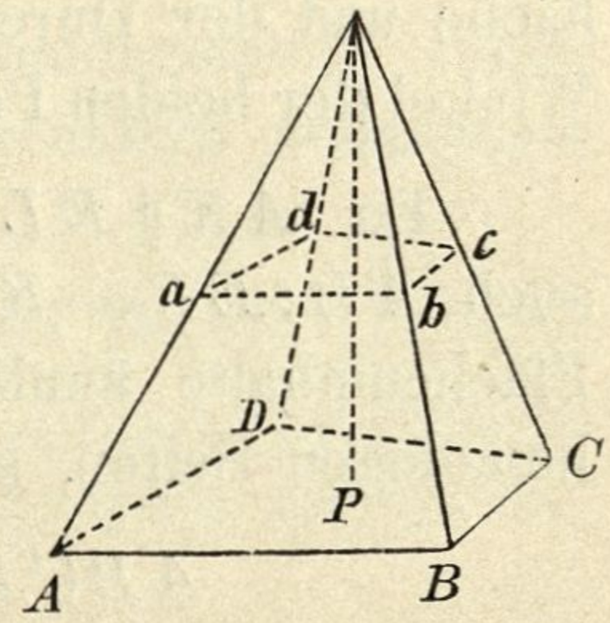
3. Die Pyramide.

§. 234. Entstehung und Bestandstücke einer Pyramide. Eine körperliche Ecke wird auch ein pyramidaler Raum genannt.

Wird ein pyramidaler Raum (Fig. 192) durch eine Ebene $ABCD$, welche alle Kanten desselben trifft, geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper eine Pyramide.

Die Schnittfläche $ABCD$ nennt man die Grundfläche, die Dreiecke AOB, BOC, COD... die Seitenflächen, und den Punkt O, in welchem alle Seitenflächen zusammentreffen, den Scheitel der Pyramide. Die Schnittlinien je zweier benachbarter Seitenflächen heißen Seitenkanten, die Schnittlinien der Seitenflächen mit der Grundfläche Grundkanten. Die Normale OP vom Scheitel auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

Fig. 192.



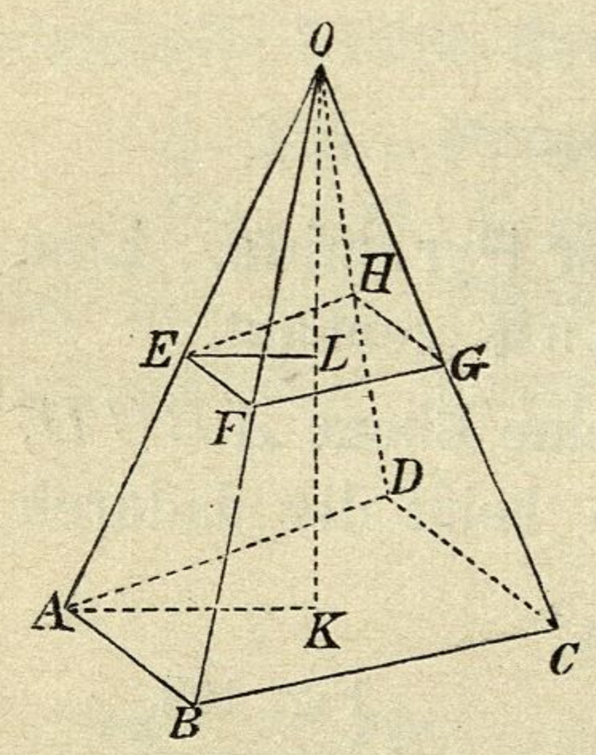
§. 235. Eintheilung der Pyramiden. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten ist eine Pyramide drei-, vier- oder mehrseitig.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, heißt gerade, jede andere schief. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvieleck, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises ist der Fußpunkt der Höhe (§. 201); die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist, heißt regelmäßig oder regulär. Die Seitenflächen einer solchen Pyramide sind congruente gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die Seitenhöhe der regelmäßigen Pyramide.

Eine gleichkantige Pyramide ist eine solche, bei welcher alle Kanten gleich lang sind. Da sie gleiche Seitenkanten besitzt, muss sie eine gerade Pyramide sein. Da ihre Grundfläche ein Sehnenpolygon mit gleichen Seiten ist, so ist sie ein regelmäßiges Polygon. Mithin muss eine gleichkantige Pyramide zugleich regelmäßig sein. Ihr Mantel ist von congruenten gleichseitigen Dreiecken gebildet. Da die Bildung einer Ecke durch sechs gleichseitige Dreiecke nicht mehr möglich ist, so folgt, dass es nur drei-, vier- und fünfseitige gleichkantige Pyramiden geben kann.

Fig. 193.



§. 236. Schnitte der Pyramide. 1. Es sei die Pyramide $OABCD$ (Fig. 193) durch die mit der Grundfläche $ABCD$ parallele Ebene $EFGH$ geschnitten; OK und OL seien die Abstände der beiden Flächen vom Scheitel O.

Da $AB \parallel EF$ und $BC \parallel FG$ (§. 207), so ergibt sich

$$AB : EF = BO : FO$$

$BC : FG = BO : FO$ daher

$AB : EF = BC : FG$; ebenso kann die Proportionalität aller Seitenpaare der Grundfläche und der Durchschnittsfigur bewiesen werden; überdies sind die Winkel der beiden Polygone paarweise gleich; daher $ABCD \sim EFGH$.

Da $AK \parallel EL$ ist (§. 207), so ist $AO : EO = KO : LO$, daher auch $AB : EF = KO : LO$ und $AB^2 : EF^2 = KO^2 : LO^2$; da sich die Flächeninhalte ähnlicher Polygone so verhalten wie die Quadrate der homologen Seiten, so folgt

$$ABCD : EFGH = AB^2 : EF^2 = KO^2 : LO^2.$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche ähnlich, und es verhalten sich die Inhalte beider Flächen wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Man kann sich daher eine Pyramide auch dadurch entstanden denken, dass ein Polygon $ABCD$ (Fig. 192) längs der Geraden AO parallel zu sich selbst fortschreitet, dabei in jeder Lage (wie $abcd$) sich ähnlich bleibt und stetig kleiner wird, bis es in dem Punkt O verschwindet.

Aufgabe.

In dem Abstand $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der Höhe, gerechnet vom Scheitel, wird durch eine Pyramide eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt. Der Inhalt der Durchschnittsfigur ist mit dem der Grundfläche zu vergleichen.

2. Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten einer Pyramide eine Ebene, so ist die Schnittfigur ein Dreieck und heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide.

Jede mehrseitige Pyramide kann durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

§. 237. Pyramidenstumpf. Durch einen mit der Grundfläche parallelen Querschnitt wird die gegebene Pyramide (Fig. 193) in zwei Theile getheilt, einen zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Körper, den man eine abgekürzte Pyramide oder einen Pyramidenstumpf nennt, und eine kleinere Pyramide, welche die Ergänzungspyramide des Stumpfes heißt. Ein Pyramidenstumpf $ABCDEFGH$ ist daher der Unterschied zweier Pyramiden $OABCD$ und $OEFGH$, deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche des Stumpfes sind, und deren gemeinschaftlicher Scheitel O in dem Schnittpunkte der verlängerten Seitenkanten des Stumpfes liegt.

Die Grundflächen eines Stumpfes sind ähnliche Polygone, die Seitenflächen sind Trapeze. Der Abstand LK der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes. Ist die ganze Pyramide regelmäßig, so ist auch der zugehörige Pyramidenstumpf regelmäßig; die Seitenflächen desselben sind gleichschenklige congruente Trapeze.

Die Pyramide und die Ergänzungspyramide sind ähnliche Körper.

§. 238. Aus der Höhe h eines Pyramidenstumpfes und zwei gleichliegenden Seiten der beiden Grundflächen die Höhen der ganzen Pyramide und der Ergänzungspyramide zu suchen.

Setzt man (Fig. 193) $AB = S$, $EF = s$, $LK = h$, $OL = h'$ und $OK = H$, so ist:

$$S : s = (h + h') : h'$$
$$Sh' = sh + sh'$$
$$Sh' - sh' = sh$$
$$h' \ (S - s) = sh$$
$$h' = \frac{sh}{S - s}$$

$$H = h + h' = h + \frac{sh}{S - s} = \frac{hS - hs + sh}{S - s} = \frac{hS}{S - s}.$$

§. 239. Das Netz einer Pyramide. Man construiere die Seitendreiecke nebeneinander so, dass sie die Spitze gemeinschaftlich haben, und lege dann an eines dieser Dreiecke die Grundfläche.

Um insbesonders das Netz einer geraden Pyramide zu erhalten, beschreibe man (Fig. 194) aus O einen Kreisbogen, ziehe darin die Sehnen AB, BC und CD gleich den Seiten der Grundfläche und zeichne unter eine derselben die Grundfläche.

Fig. 195 enthält das Netz eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes.

Fig. 194.

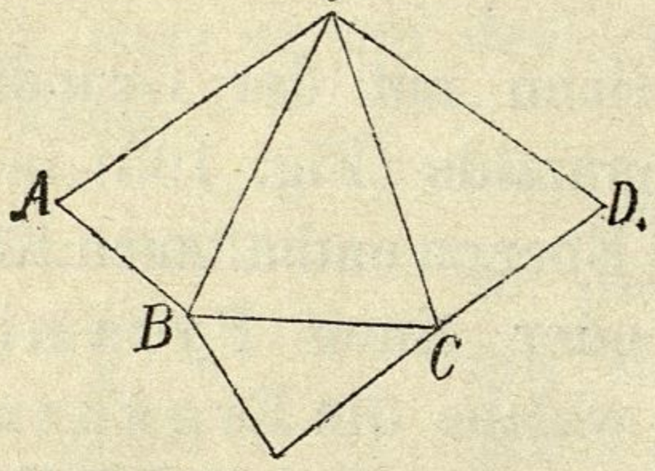
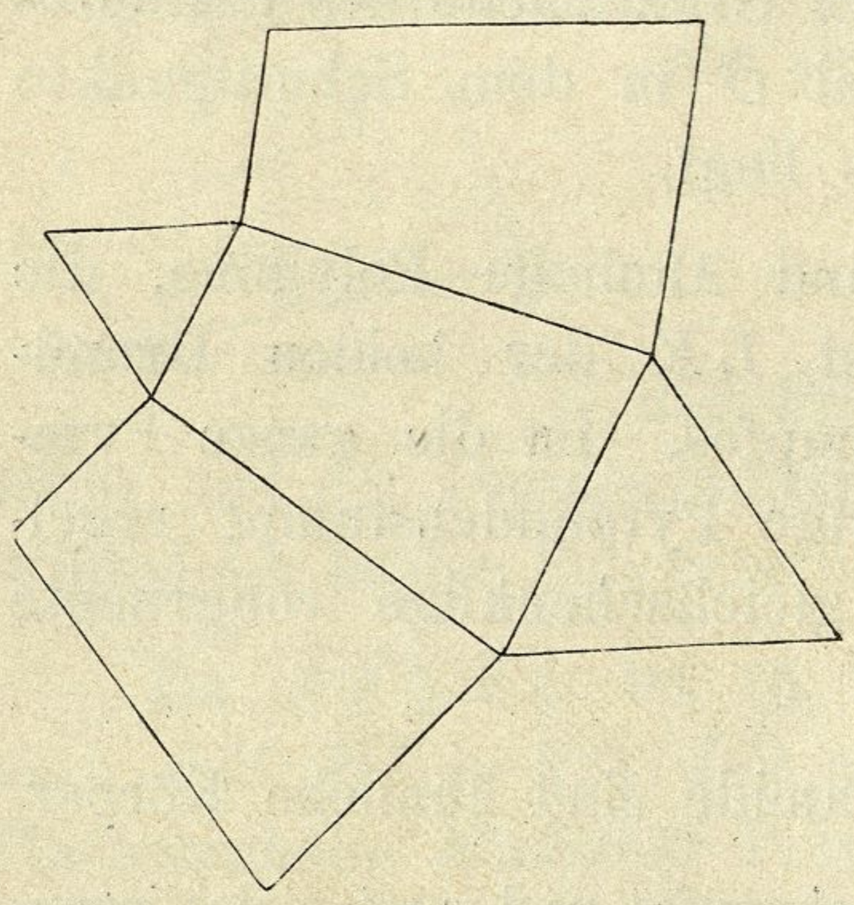


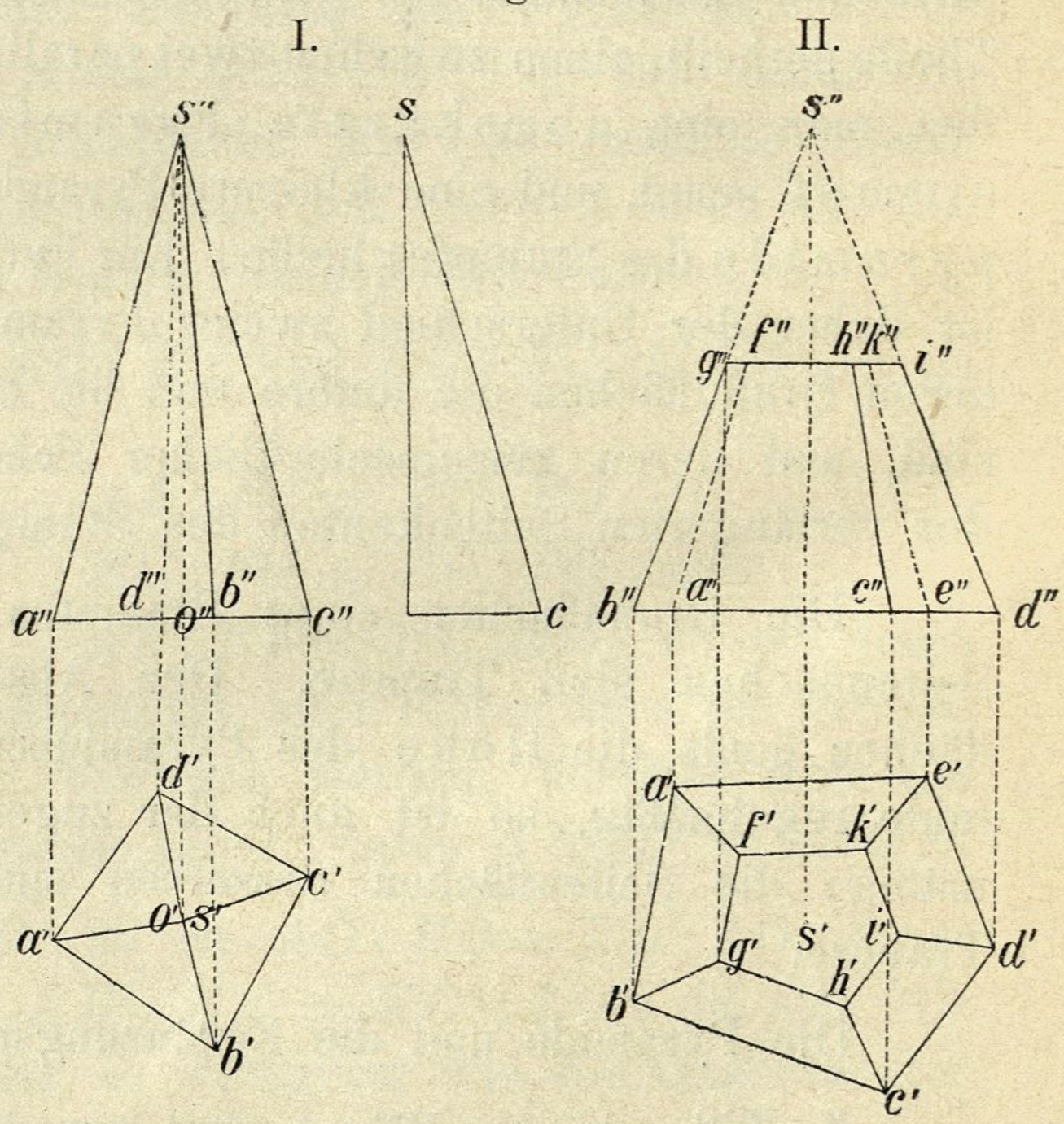
Fig. 195.



Aufgabe.

Das Netz *a)* einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, *b)* eines regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpfes zu zeichnen.

Fig. 196.



§. 240. Projectionen der Pyramide. Fig. 196, I stellt den Grund- und Aufriss einer auf der Horizontalebene aufgestellten vierseitigen

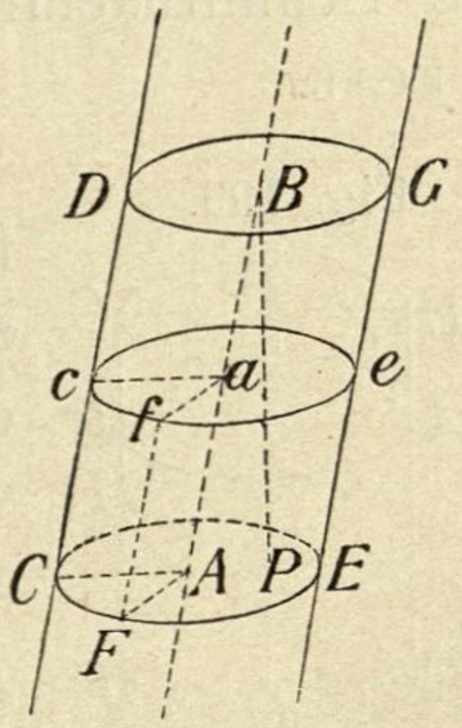
geraden Pyramide vor. Der Grundriss ist mit der Grundfläche congruent, der Aufriss gibt die Höhe $s'' o''$. Jede Seitenkante $s c$ kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt werden, dessen Katheten der Grundriss von $s c$ d. i. $s' c'$ und die Höhe $s o$ der Pyramide sind.

Fig. 196, II enthält Grundriss und Aufriss eines fünfseitigen geraden Pyramidenstumpfes, der mit seiner größeren Grundfläche auf der Horizontalebene steht.

4. Der Cylinder.

§. 241. Entstehung und Bestandstücke eines Cylinders. Gleitet eine unbegrenzte Gerade $C D$ (Fig. 197) parallel zu sich selbst längs des Umfanges des aus A mit dem Halbmesser $A C$ beschriebenen Kreises, so beschreibt sie eine krumme Fläche, welche Cylinderfläche heißt; $C D$ ist die erzeugende Gerade, der Kreis der Leitkreis; die durch den Mittelpunkt desselben parallel zur erzeugenden Geraden gezogene unbegrenzte Gerade $A B$ heißt die Achse der Cylinderfläche; der von der Cylinderfläche eingeschlossene nach zwei Seiten offene Raum ein cylindrischer Raum.

Fig. 197.



Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet die Cylinderfläche in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Denn es ist $a c = A C$, da $C A a c$ ein Parallelogramm ist, ebenso $a f = A F$, daher $a c = a f$.

Wird ein cylindrischer Raum durch zwei zu der Ebene des Leitkreises parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Cylinder.

Die beiden parallelen Schnittflächen, von denen die eine auch mit dem Leitkreise selbst zusammenfallen kann, heißen die Grundflächen, die gekrümmte Seitenfläche heißt der Mantel des Cylinders.

Die Grundflächen eines Cylinders sind demnach zwei congruente Kreise. Die Strecke $A B$, welche ihre Mittelpunkte verbindet, heißt die Achse des Cylinders. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei geraden Linien; eine solche Schnittlinie $C D$ heißt eine Seite des Cylinders. Alle Seiten eines Cylinders sind untereinander und der Achse gleich und parallel. Der Abstand $B P$ der beiden Grundflächen des Cylinders heißt die Höhe desselben.

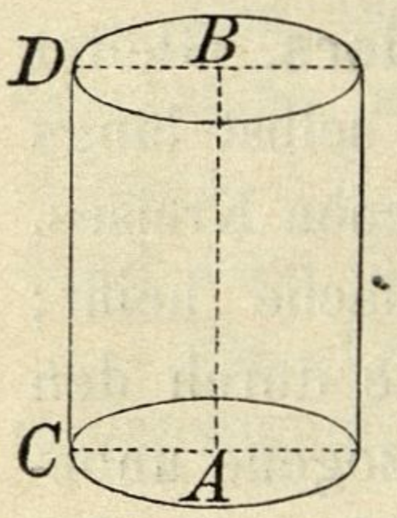
Man kann sich einen Cylinder $CEGD$ auch dadurch entstanden denken, dass eine Kreisfläche CE parallel zu sich selbst so fortschreitet, dass dabei ihr Mittelpunkt A eine Gerade AB beschreibt.

Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann man auch sagen:

Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind.

§. 242. Eintheilung der Cylinder. Ein Cylinder, dessen Achse auf der Grundfläche normal steht, heißt ein gerader (Fig. 198), jeder andere ein schiefer Cylinder. Einen geraden Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Rechteck $ABDC$ um eine seiner Seiten, z. B. AB, als Achse herumdreht. In einem geraden Cylinder ist die Höhe der Achse gleich.

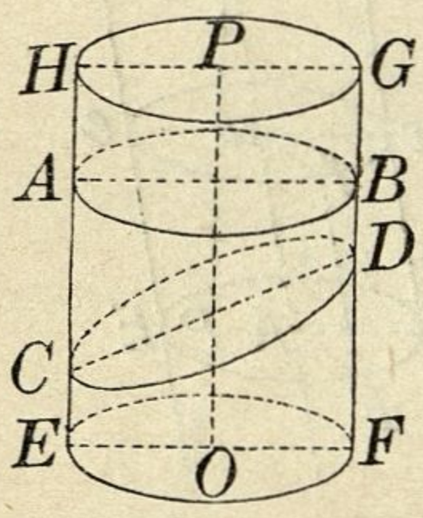
Fig. 198.



Ein gerader Cylinder, in welchem die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt gleichseitig.

§. 243. Schnitte des Cylinders. 1. Wird ein Cylinder (Fig. 199) durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche AB ein mit der Grundfläche congruenter Kreis.

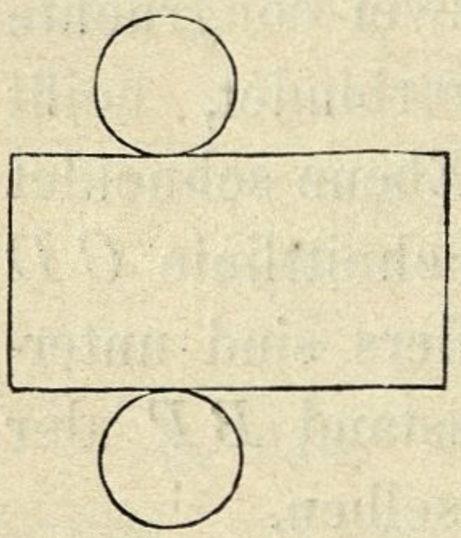
Fig. 199.



2. Ist die Schnittebene nicht parallel zur Grundfläche und trifft sie alle Seiten des Cylinders, so ist der Schnitt beim geraden Cylinder eine Ellipse CD, deren Mittelpunkt in der Achse liegt.

3. Geht die schneidende Ebene durch die Achse, so ist die Schnittfläche, welche in diesem Falle ein Achsenschnitt heißt, ein Parallelogramm, z. B. $EFGH$. (Weshalb?) In einem geraden Cylinder ist jeder Achsenschnitt ein Rechteck, in einem gleichseitigen Cylinder ein Quadrat.

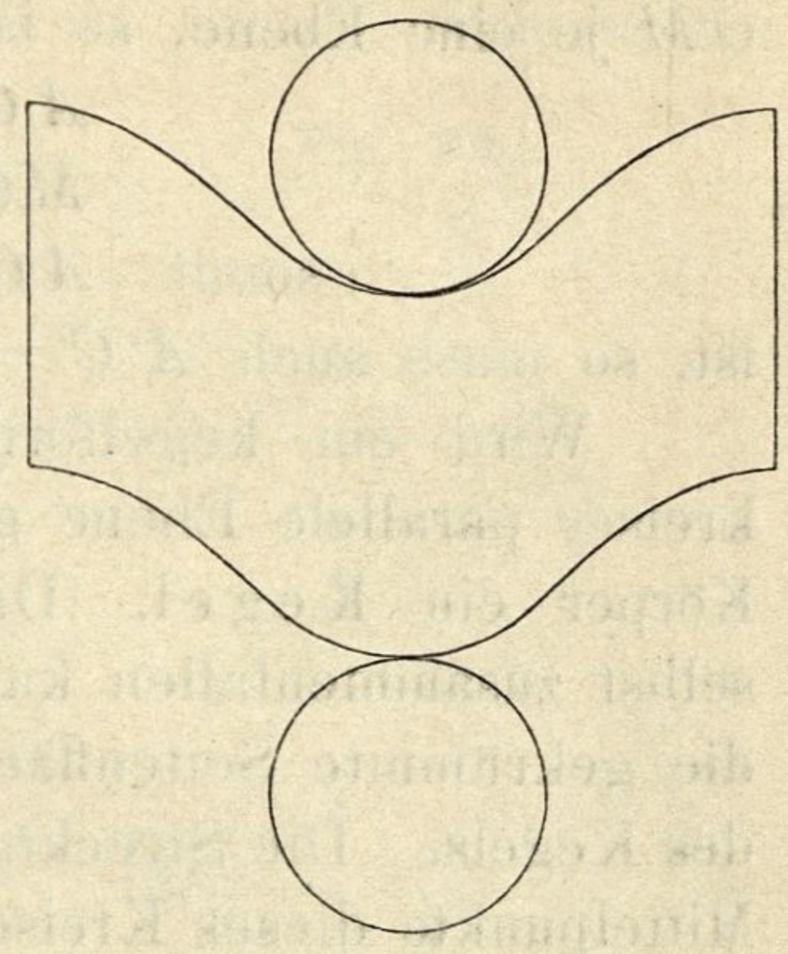
Fig. 200.



§. 242. Netz eines Cylinders. Um das Netz eines geraden Cylinders zu erhalten, zeichne man (Fig. 200) ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist, und beschreibe sodann zwei der Grundfläche gleiche Kreise, von denen der eine die Grundlinie, der andere die gegenüberliegende Seite des Rechteckes berührt.

Der Mantel eines schiefen Cylinders ist kein Parallelogramm, sondern eine von zwei parallelen Geraden und zwei krummen Linien begrenzte Figur (Fig. 201).

Fig. 201.

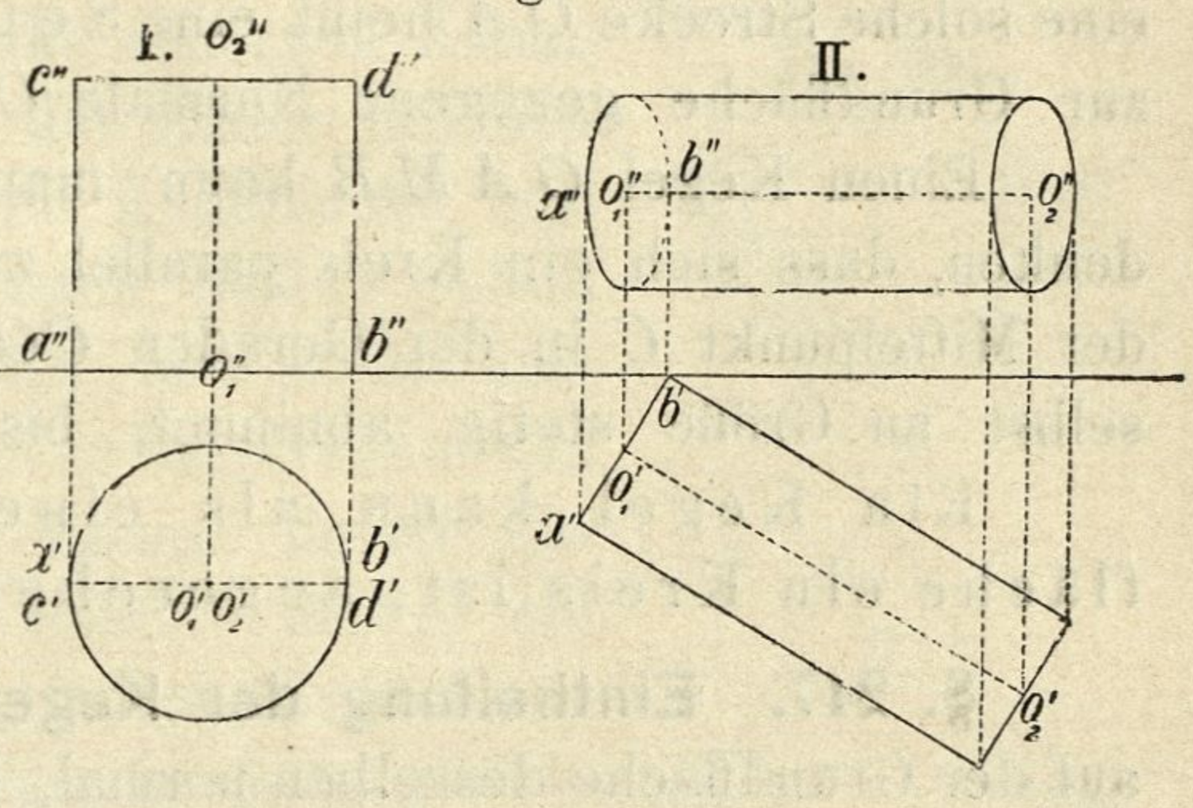


§. 245. Projectionen des Cylinders. Ist die Achse eines geraden Cylinders auf der Horizontalebene senkrecht (Fig. 202, I), so ist der Grundriss ein der Grundfläche gleicher Kreis, der Aufriss ein Rechteck, dessen Seiten der Durchmesser und die Höhe des Cylinders sind.

Ist die Achse des geraden Cylinders horizontal und zu der Verticalebene geneigt (Fig. 202, II), so ist sein Grundriss ein Rechteck, die Aufrisse seiner beiden Grundflächen aber sind Ellipsen.

Was für Gebilde sind der Grundriss und der Aufriss eines Cylinders, der mit seiner Mantelfläche auf der Horizontalebene ruht, und dessen Achse mit der Verticalebene parallel ist?

Fig. 202.



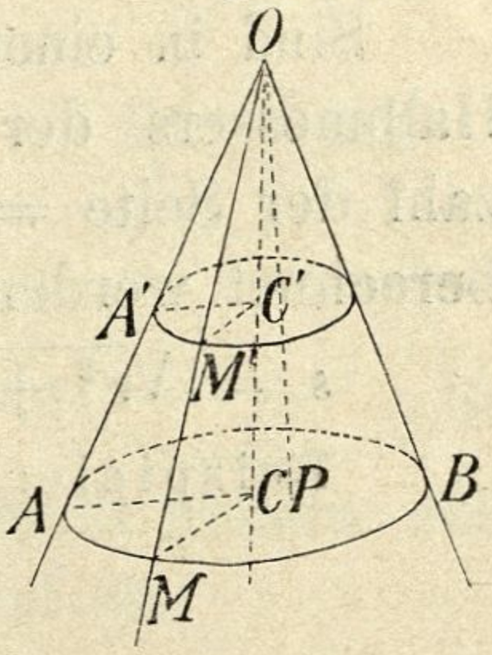
Aufgabe.

Die beiden Projectionen eines schiefen Cylinders zu zeichnen, der mit einer seiner beiden Grundflächen auf der Horizontalebene steht.

5. Der Kegel.

§. 246. Entstehung und Bestandstücke des Kegels. Gleitet ein Halbstrahl OA (Fig. 203), dessen Anfangspunkt O im Raume fest ist, längs des Umfanges des aus C mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreises hin, so beschreibt er eine krumme Fläche, welche Kegelfläche oder conische Fläche heißt. OA heißt die erzeugende Gerade, der Kreis Leitkreis, OC Achse der Kegelfläche, der von der Kegelfläche eingeschlossene nach einer Seite offene Raum heißt ein conischer oder kegelförmiger Raum. Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet die conische Fläche in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt.

Fig. 203.



Legt man nämlich durch OC und OA, ebenso durch OC und OM je eine Ebene, so ist $AC \parallel A'C'$ und $MC \parallel M'C'$, daher

$$AC : A'C' = OC : OC'$$
$$MC : M'C' = OC : OC'$$

somit $AC : A'C' = MC : M'C'$; da aber $AC = MC$ ist, so muss auch $A'C' = M'C'$ sein.

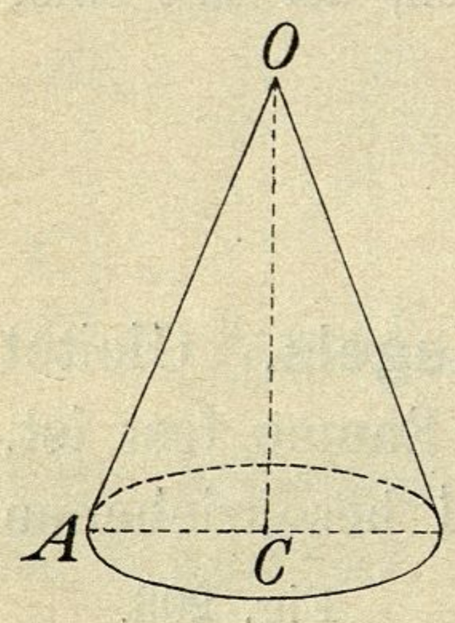
Wird ein kegelförmiger Raum durch eine zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Kegel. Die Schnittfläche, welche mit dem Leitkreise selbst zusammenfallen kann, ist ein Kreis und heißt die Grundfläche, die gekrümmte Seitenfläche der Mantel, der Punkt O der Scheitel des Kegels. Die Strecke OC, welche den Scheitel des Kegels mit dem Mittelpunkte dieses Kreises verbindet, heißt die Achse. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei geraden Linien; eine solche Strecke OA heißt eine Seite des Kegels. Die vom Scheitel zur Grundfläche gezogene Normale OP heißt die Höhe des Kegels.

Einen Kegel $OAMB$ kann man sich auch dadurch entstanden denken, dass sich ein Kreis parallel zu sich selbst so fortbewegt, dass der Mittelpunkt C in der Geraden CO fortrückt und dabei der Kreis selbst an Größe stetig abnimmt, bis er im Punkte O verschwindet.

Ein Kegel kann als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, angesehen werden.

§. 247. Eintheilung der Kegel. Steht die Achse eines Kegels auf der Grundfläche desselben normal, so heißt der Kegel ein gerader (Fig. 204), sonst ein schiefer. Ein gerader Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinkliges Dreieck ACO um eine Kathete CO als Achse herumdreht; die andere Kathete AC beschreibt dabei die Grundfläche, die Hypotenuse OA die Mantelfläche des Kegels. In einem geraden Kegel stellt die Achse zugleich die Höhe vor; alle Seiten desselben sind einander gleich.

Fig. 204.



Ein gerader Kegel, dessen Seite gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche, heißt gleichseitig.

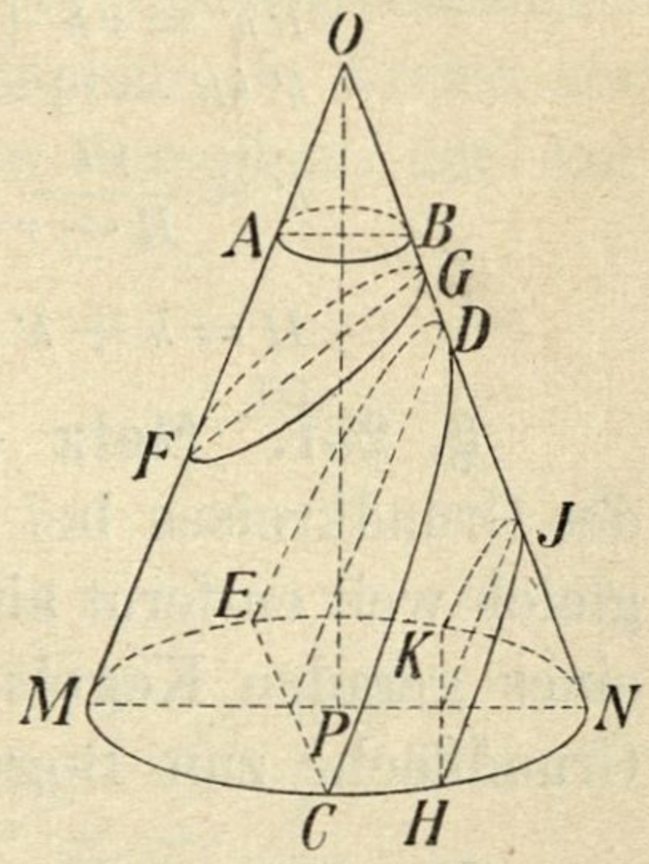
Sind in einem geraden Kegel von den drei Größen: Maßzahl des Halbmessers der Grundfläche $= r$, Maßzahl der Höhe $= h$ und Maßzahl der Seite $= s$, zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte berechnet werden. Man hat:

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}, \qquad h = \sqrt{s^2 - r^2}, \qquad r = \sqrt{s^2 - h^2}.$$

Beispiele: 1. Gegeben $r = 5\ cm$, $h = 12\ cm$; zu suchen s.
2. „ $r = 11\ cm$, $s = 61\ cm$; „ „ h.
3. „ $s = 2{\cdot}5\ dm$, $h = 2{\cdot}4\ dm$; „ „ r.

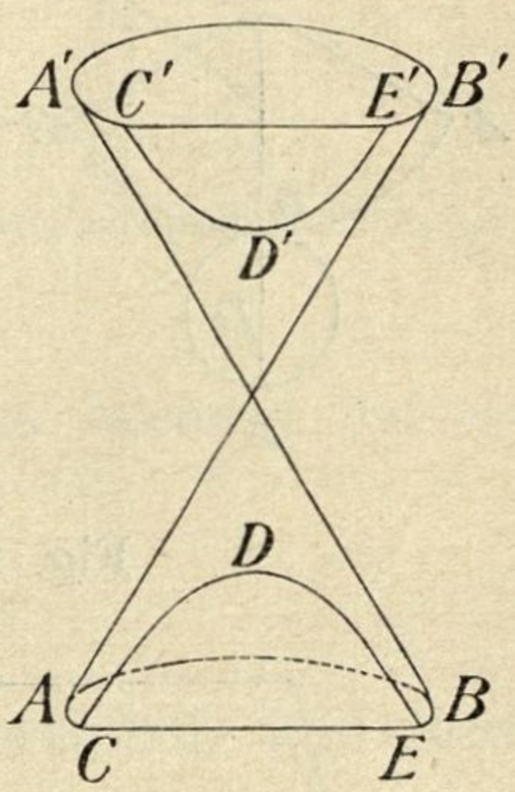
§. 248. Schnitte des Kegels. 1. Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein Kreis AB (Fig. 205). Die Schnittfläche und die Grundfläche verhalten sich, wie bei der Pyramide, so wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Fig. 205.



2. Ist die schneidende Ebene nicht parallel zur Grundfläche, so ist die Schnittfigur *a)* im allgemeinen eine Ellipse FG, wenn die Schnittebene alle Seiten des Kegels oder deren Verlängerungen trifft; *b)* eine Parabel CDE, wenn die Schnittebene nur zu einer Seite des Kegels parallel ist; und *c)* eine Hyperbel HJK, wenn die Schnittebene zu zwei Seiten parallel ist. Die Hyperbel besteht aus zwei Ästen, welche durch den Durchschnitt der Ebene mit den beiden Theilen einer vollständigen Kegelfläche entstehen, deren Erzeugende eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade ist. (Fig. 206.) Man nennt deshalb diese krummen Linien Kegelschnittslinien.

Fig. 206.

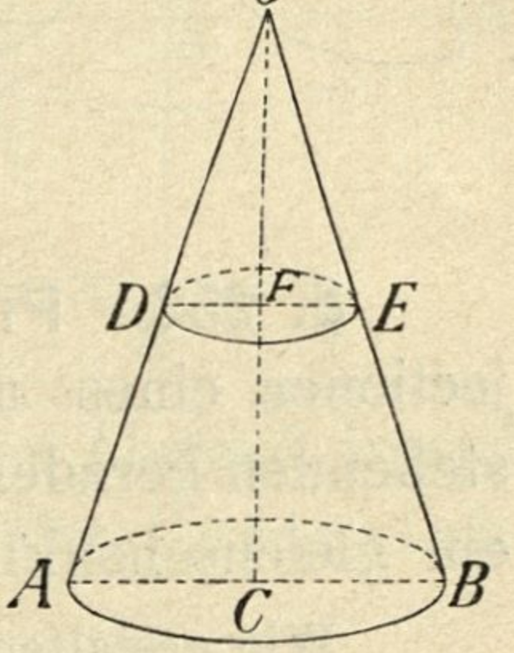


3. Geht die schneidende Ebene durch die Achse des Kegels, so ist der Schnitt MON ein Dreieck. In einem geraden Kegel sind alle Achsenschnitte congruente gleichschenklige, in einem gleichseitigen Kegel congruente gleichseitige Dreiecke.

Kegelstumpf.

§. 249. Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene DE (Fig. 207) geschnitten, so wird derselbe in zwei Theile getheilt, einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf genannt wird, und einen kleineren Kegel, welcher der Ergänzungskegel des Stumpfes heißt. Ein Kegelstumpf $ABED$ ist daher der Unterschied zweier Kegel, welche die Grundflächen des Stumpfes zu ihren Grundflächen haben, und deren Scheitel der Punkt ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Stumpfes zusammenläuft. Der Abstand CF der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstumpfes. Der Kegelstumpf heißt gerade oder schief, je nachdem der ganze Kegel gerade oder schief ist.

Fig. 207.



§. 250. Aus der Höhe h eines Kegelstumpfes und den Radien der Grundflächen R und r die Höhe des Ergänzungskegels h' und die des ganzen Kegels H zu berechnen.

Es ist $R : r = (h + h') : h'$

$$Rh' = rh + rh'$$

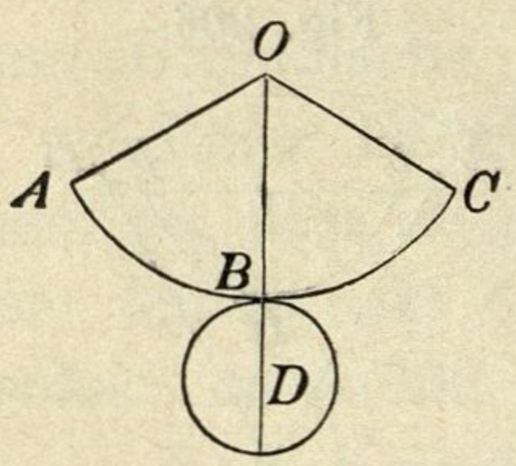
$$h'(R - r) = rh$$

$$h' = \frac{rh}{R - r}$$

$$H = h + h' = h + \frac{rh}{R - r} = \frac{Rh}{R - r}.$$

§. 251. Netz eines Kegels. Da alle Punkte der Peripherie des Grundkreises bei einem geraden Kegel von dem Scheitel desselben gleich weit entfernt sind, so erhält man durch das Aufrollen des Mantels eines geraden Kegels einen Kreisausschnitt, welcher die Peripherie der Grundfläche zum Bogen und die Seite des Kegels zum Halbmesser hat.

Fig. 208.



Um daher das Netz eines geraden Kegels zu erhalten, hat man an den Bogen des Kreisausschnittes, den man durch Aufrollen des Mantels erhält, noch den Grundkreis zu zeichnen (Fig. 208). Da die Seiten eines schiefen Kegels nicht gleich sind, so ist der Mantel desselben nach der Abwicklung kein Kreisausschnitt (Fig. 209). Figur 210 enthält die

E Zeichnung des Netzes eines geraden Kegelstumpfes.

Fig. 209.

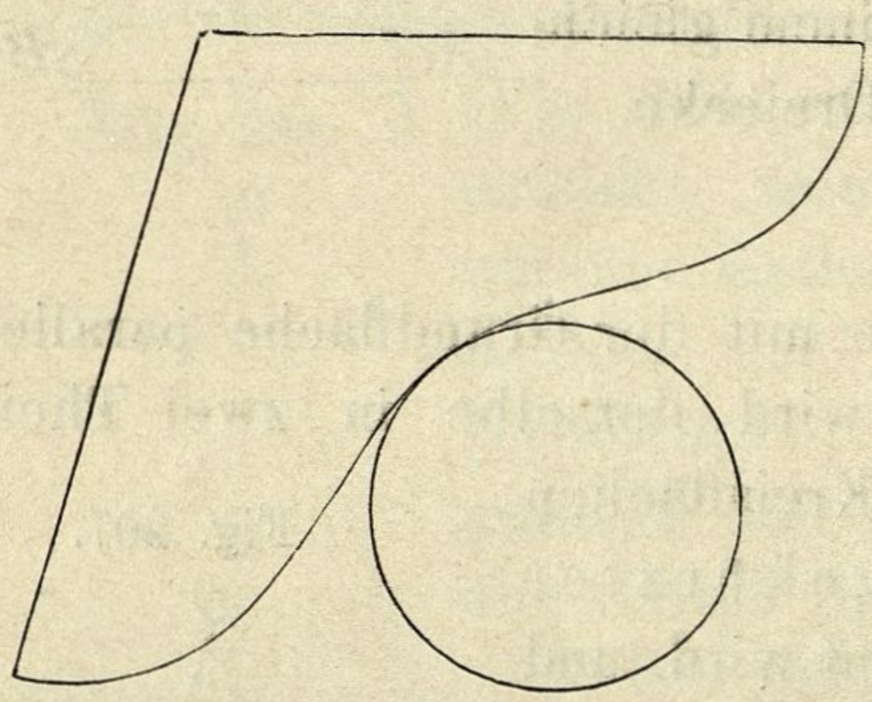
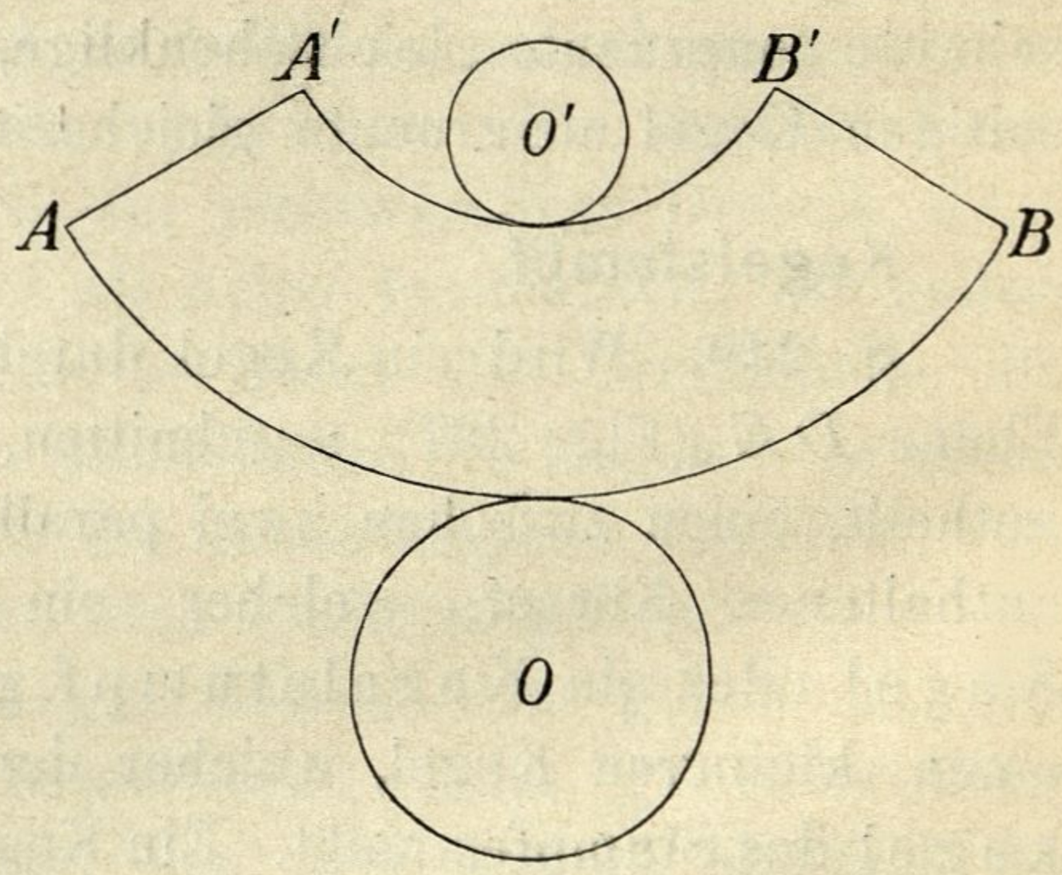


Fig. 210.



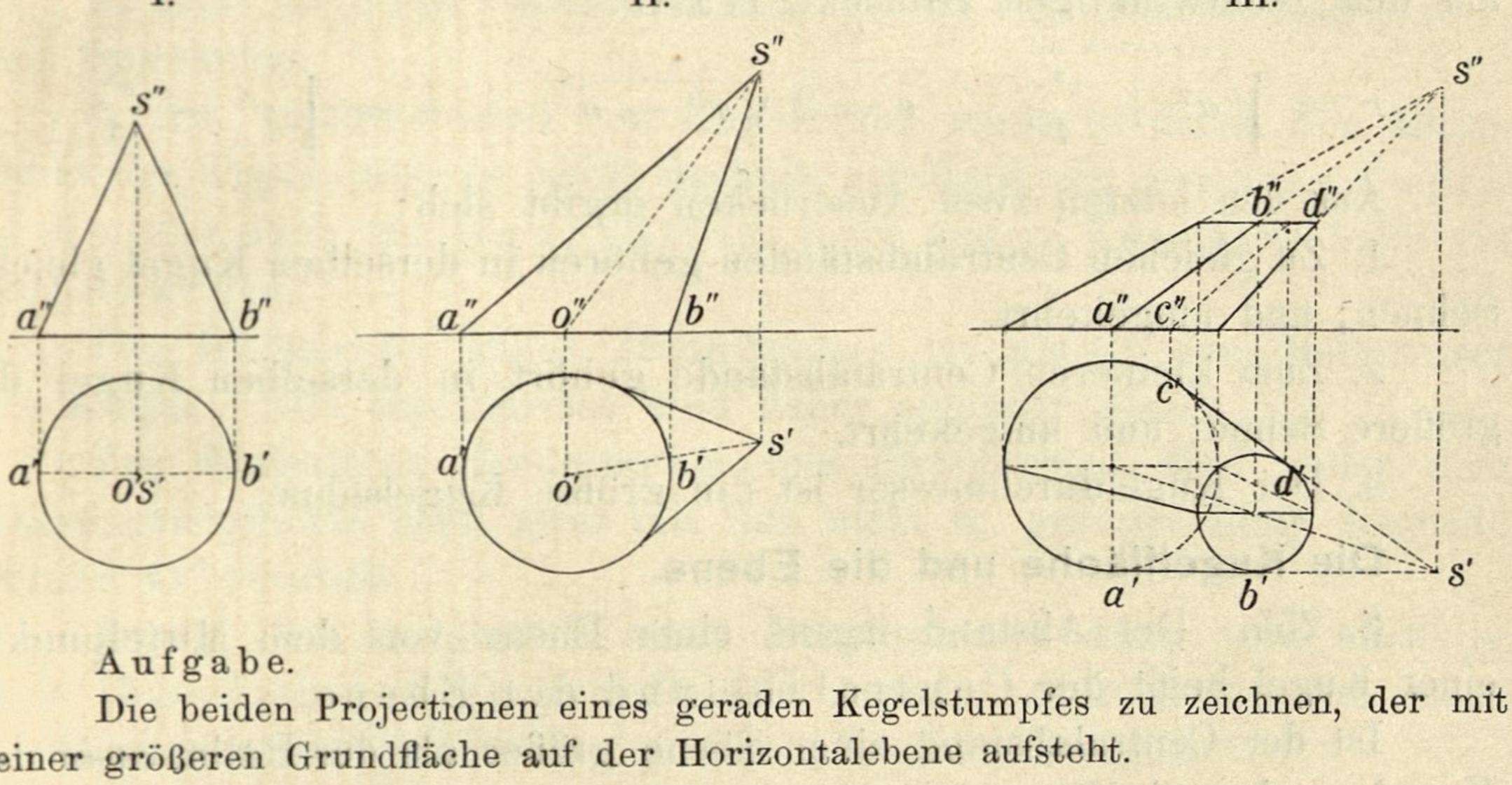
§. 252. Projectionen des Kegels. Fig. 211, I stellt die Projectionen eines mit der Grundfläche auf der horizontalen Ebene aufstehenden geraden Kegels dar. Der Grundriss ist ein Kreis, der Aufriss ein gleichschenkliges Dreieck.

Wie gestalten sich Grund- und Aufriss eines geraden Kegels, dessen Achse *a)* mit einer Projectionsebene (Horizontalebene) parallel und gegen die andere (Verticalebene) geneigt, *b)* gegen beide Projectionsebenen geneigt ist?

Fig. 211, II stellt die Projectionen eines schiefen Kegels dar, der mit seiner Grundfläche auf der Horizontalebene steht.

In Fig. 211, III sind Grundriss- und Aufriss eines mit der unteren Grundfläche auf der Horizontalebene aufstehenden schiefen Kegelstumpfes dargestellt. Im Grundrisse erscheinen die Grundflächen als Kreise und zwei Seitenkanten als gemeinschaftliche Tangenten derselben, der Aufriss ist ein Trapez.

Fig. 211.



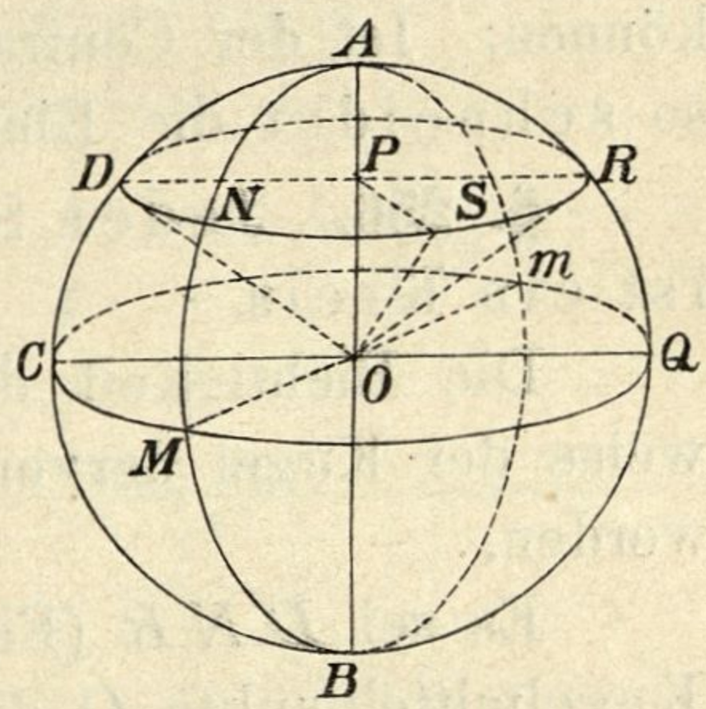
Aufgabe.

Die beiden Projectionen eines geraden Kegelstumpfes zu zeichnen, der mit seiner größeren Grundfläche auf der Horizontalebene aufsteht.

6. Die Kugel.

Die Entstehung einer Kugel, die Erklärung derselben und ihrer Theile ist in den §§. 42—43 enthalten.

Fig. 212.



§. 253. Die Kugelfläche und der Punkt. Der Abstand irgend eines Punktes vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der Centralabstand des Punktes.

Ein Punkt liegt auf der Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Centralabstand gleich dem Halbmesser der Kugel, kleiner oder größer als derselbe ist.

§. 254. Die Kugelfläche und die Gerade. Der Abstand irgend einer Geraden vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der Centralabstand der Geraden.

Ist der Centralabstand einer Geraden größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Gerade mit der Kugelfläche keinen Punkt

gemeinschaftlich. Ist der Centralabstand der Geraden gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, während alle anderen Punkte außerhalb der Kugel liegen; sie heißt eine Tangente der Kugelfläche. Ist endlich der Centralabstand der Geraden kleiner als der Halbmesser, so schneidet sie die Kugelfläche in zwei Punkten.

Ist (Fig. 212) der Halbmesser einer Kugel $OD = r$, die Länge der Sehne $DR = s$ und ihr Centralabstand $OP = a$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke DPO:

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}}, \qquad s = 2\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Aus den letzten zwei Ausdrücken ergibt sich:

1. Zu gleichen Centralabständen gehören in derselben Kugel gleiche Sehnen; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Centralabstande gehört in derselben Kugel die größere Sehne; und umgekehrt.

3. Der Kugeldurchmesser ist die größte Kugelsehne.

Die Kugelfläche und die Ebene.

§. 255. Der Abstand irgend einer Ebene von dem Mittelpunkte einer Kugel heißt der Centralabstand der Ebene.

Ist der Centralabstand einer Ebene größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Ebene mit der Kugelfläche keinen Punkt gemeinschaftlich. Ist der Centralabstand der Ebene gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich und heißt eine Berührungs- oder Tangentialebene; sie enthält alle Tangenten, welche im Berührungspunkte an die Kugel gelegt werden können. Ist der Centralabstand der Ebene kleiner als der Halbmesser, so schneidet die Ebene die Kugelfläche.

§. 256. Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Die Richtigkeit dieses Satzes geht schon aus der Entstehungsweise der Kugel hervor, kann aber auch für sich leicht nachgewiesen werden.

Es sei DNR (Fig. 212) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte O die Normale OP auf die Schnittebene, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Strecken PD und PS, ferner noch die Halbmesser OD und OS, so ist $PD = PS$ (§. 201). Daraus folgt, dass alle Umfangspunkte des Schnittes DNR von P gleichen Abstand haben, dass also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis DNR wird ein Kugelkreis genannt.

Zwischen dem Halbmesser $OD = r$ der Kugel, dem Halbmesser $PD = \varrho$ des Kugelkreises und dem Centralabstande $OP = a$ des letzteren bestehen, da das Dreieck DPO rechtwinklig ist, die Beziehungen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}, \qquad \varrho = \sqrt{r^2 - a^2}, \qquad a = \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Daraus folgt:

1. Zu gleichen Centralabständen gehören gleiche Kugelkreise; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Centralabstande gehört ein größerer Kugelkreis; und umgekehrt.

3. Am größten wird ein Kugelkreis, wenn er durch den Mittelpunkt der Kugel geht; er heißt deshalb geradezu ein größter Kugelkreis oder auch ein Hauptkreis; jeder andere Kugelkreis heißt ein Nebenkreis.

Der Halbmesser eines Hauptkreises ist gleich dem Halbmesser der Kugel. Alle Hauptkreise sind daher einander gleich.

Zur eindeutigen Bestimmung eines Hauptkreises sind außer dem Kugelmittelpunkte noch zwei mit ihm nicht in gerader Linie liegende Punkte erforderlich.

Durch die Endpunkte eines Durchmessers kann man unzählig viele Hauptkreise, durch zwei Punkte, welche nicht Endpunkte eines Durchmessers sind, nur einen einzigen Hauptkreis legen.

Ein durch zwei Punkte M und N (Fig. 212) der Kugelfläche gelegter Hauptkreis wird durch diese Punkte in zwei Bogen getheilt den Bogen MN und $MBmAN$. Der kleinere Bogen MN des durch zwei Punkte M und N gelegten Hauptkreises heißt der sphärische Abstand der beiden Punkte.

(Meridiane und Parallelkreise am Globus, Erdachse, Nord- und Südpol, Äquator, geographische Breite und Länge.)

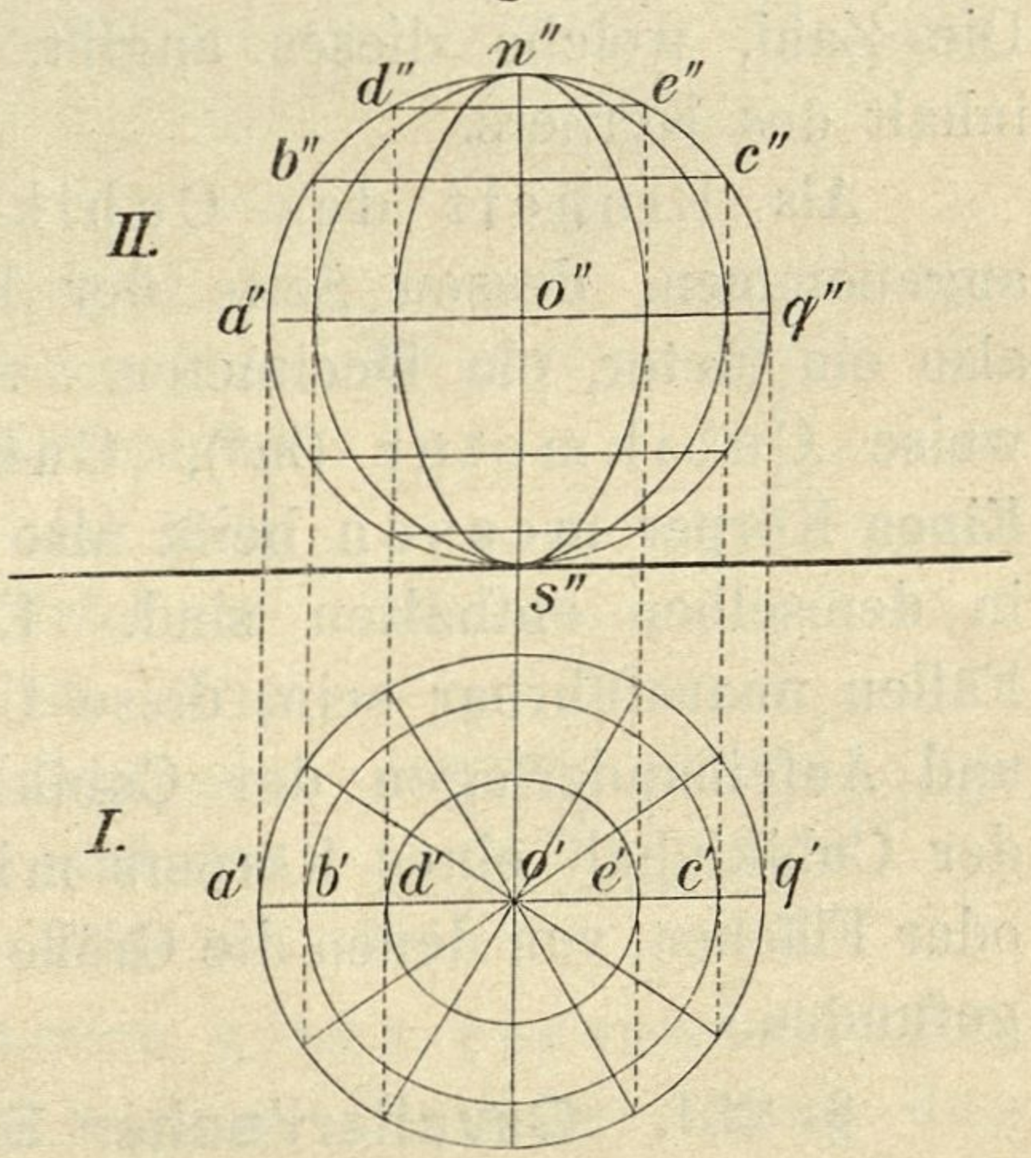
§. 257. Netz einer Kugel.

Die Fläche einer Kugel lässt sich, da sie doppelt gekrümmt ist, nicht in eine Ebene abwickeln; daher kann von der Kugelfläche kein genaues Netz construiert werden.

§. 258. Projectionen der Kugel.

In Fig. 213, I ist der Grundriss, in II der Aufriss einer Kugel dargestellt, deren Achse auf der Horizontalebene senkrecht steht.

Fig. 213.



Der Grund- und der Aufriss einer Kugel sind für jede Lage derselben Kreise, deren Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Steht die Achse der Kugel auf der Horizontalebene senkrecht, so erscheinen im Grundriss alle Meridiane als Durchmesser, im Aufriss einer als Kreis, einer als Durchmesser und alle übrigen als Ellipsen; die Parallelkreise erscheinen im Grundriss als concentrische Kreise, im Aufriss als parallele Sehnen.

III. Ausmessung der Körper.

Oberfläche und Cubikinhalt.

§. 259. Bei der Ausmessung der Körper hat man die Oberfläche und den Cubikinhalt derselben in Betracht zu ziehen.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Um daher die Oberfläche eines Körpers zu erhalten, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche für sich zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die Seitenoberfläche des Körpers.

§. 260. Der Raum, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt dessen Cubikinhalt oder Volumen.

Zwei Körper, welche gleichen Cubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

Um den Cubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Cubikmaßes an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl für den Cubikinhalt des Körpers.

Als Einheit des Cubikmaßes wird ein Würfel (Cubus) angenommen, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, also ein Meter, ein Decimeter, . . . beträgt, und der dann beziehungsweise Cubikmeter (m^3), Cubikdecimeter (dm^3), . . . heißt. Einen Körper messen heißt also untersuchen, wie viel m^3, dm^3 u. s. w. in demselben enthalten sind. Es würde zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Cubikeinheit vorzunehmen; einfacher wird der Cubikinhalt eines Körpers mittelbar aus dem Maße der Strecken oder Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

§. 261. Cavalieri'scher Satz. Zwei Körper, welche auf derselben Ebene aufstehen, und mit jeder zu dieser Ebene

parallelen Ebene gleiche Schnittflächen ergeben, haben dasselbe Volumen.

Denn man kann zwei Körper, welche diese Eigenschaft haben, in eine gleiche Zahl unendlich dünner Platten zerlegt denken, welche paarweise dasselbe Volumen haben; es müssen dann auch die Summen aller Platten für jeden der beiden Körper, d. h. die beiden Körper selbst, inhaltsgleich sein. Dieser Satz heißt der Cavalieri'sche Satz.

1. Das Prisma.

§. 262. Oberfläche eines Prismas. Um die Oberfläche eines Prismas zu berechnen, bildet man die Summe aus der doppelten Grundfläche und der Summe aller Seitenflächen, welche als Mantelfläche des Prismas bezeichnet wird. Sind O, G und M die Maßzahlen für die Oberfläche, eine der beiden Grundflächen und den Mantel, so ist

$$O = 2G + M.$$

Da der Mantel eines senkrechten Prismas in eine Ebene abgewickelt ein Rechteck gibt, dessen Grundlinie der Umfang u der Grundfläche des Prismas und dessen Höhe die Seitenkante s desselben ist, so ist für ein senkrechtes Prisma

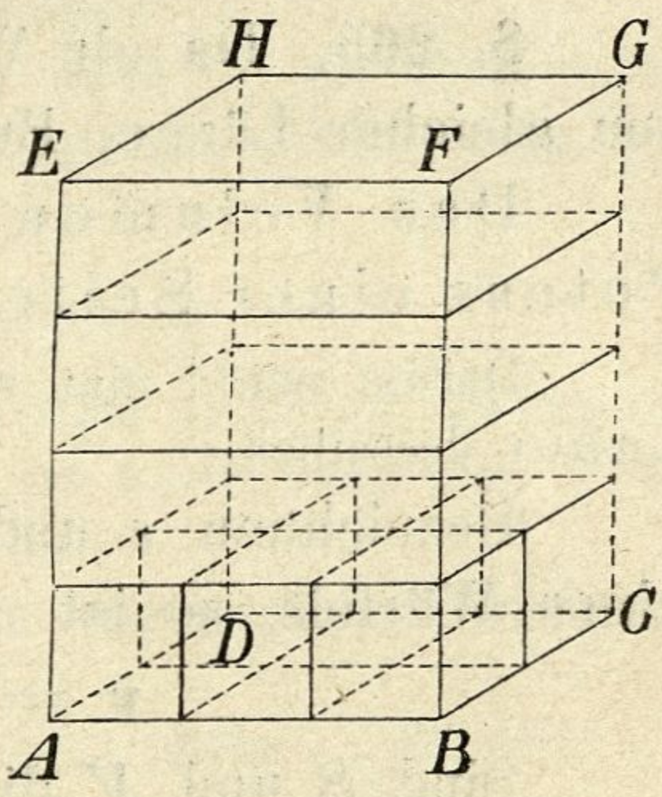
$$M = us.$$

Für einen Würfel ist $O = 6s^2$; also $s = \sqrt{\frac{O}{6}}$. Sind die Seiten zweier Würfel S und s, ihre Oberflächen O und o, so ist $O : o = S^2 : s^2$.

Volumen des Prismas.

§. 263. Es sei (Fig. 214) die Maßzahl für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu bestimmen, in welchem die Länge $AB = 3\,m$, die Breite $AD = 2\,m$ und die Höhe $AE = 4\,m$ ist. Da die Höhe 4 m beträgt, so kann man das Parallelepiped in 4 gleiche Parallelschichten zerlegen, deren jede 1 m hoch ist. Da ferner das Parallelepiped 3 m lang und 2 m breit ist, so lässt sich jede dieser Parallelschichten in 3×2 Würfel zerlegen, deren jeder 1 Cubikmeter ist. Die Maßzahl für das Volumen dieses Parallelepipeds ist sonach $3 \times 2 \times 4 = 24$ und zwar auf das Cubikmeter als Einheit bezogen.

Fig. 214.



Die Maßzahl für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist also gleich dem Producte aus den Maßzahlen dreier zusammenstoßender Kanten (Länge, Breite

und Höhe) oder dem Producte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Kürzer sagt man gewöhnlich:

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus drei zusammenstoßenden Kanten oder dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Sind allgemein a, b und c die Maßzahlen der in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten und v die Maßzahl des Volumens, so ist $v = a\,b\,c$, und umgekehrt $a = \frac{v}{b\,c}$, $b = \frac{v}{a\,c}$, $c = \frac{v}{a\,b}$.

Sind a und b die Seiten der Grundfläche g, so ist $g = a\,b$; c ist die Höhe h des rechtwinkligen Parallelepipeds; es ist dann $v = g\,h$.

§. 264. Da nach dem Satze von Cavalieri jedes Prisma gleiches Volumen mit einem rechtwinkligen Parallelepiped von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat, so gilt allgemein der Satz:

Das Volumen eines jeden Prismas ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe gleich.

Sind v, g, h die Maßzahlen für das Volumen, die Grundfläche und die Höhe eines Prismas, so ist $v = g\,h$; daher $g = \frac{v}{h}$, $h = \frac{v}{g}$.

Bezeichnen G und g die Maßzahlen der Grundflächen, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Prismen und V und v die Maßzahlen ihrer Cubikinhalte, so hat man:

1) $V : v = G\,.\,H : g\,.\,h.$
2) Für $G = g$ ist $V : v = H : h.$
3) Für $H = h$ ist $V : v = G : g.$

Drücke diese Proportionen mit Worten aus.

§. 265. Da ein Würfel (Cubus) ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe ist, so folgt:

Das Volumen eines Würfels ist gleich der dritten Potenz einer Seite.

Darum nennt man auch in der Arithmetik die dritte Potenz einer Zahl den Cubus derselben.

Bezeichnen s und v die Maßzahlen der Kante und des Volumens eines Würfels, so ist

$$v = s^3, \text{ und umgekehrt } s = \sqrt[3]{v}.$$

Sind S und V die Kante und das Volumen eines zweiten Würfels, so ist auch $V = S^3$, daher $V : v = S^3 : s^3$; d. h.:

Die Volumina zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Kanten.

Wie ändert sich demnach das Volumen eines Würfels, wenn die Seite desselben verdoppelt wird? Wie die Oberfläche?

Ein Würfel, dessen Kante 10 *dm* beträgt, hat

$$10.10.10\ dm^3 = 1000\ dm^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Cubikmeter; also ist

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3.$$

Ebenso folgt:

$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3.$$

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

1 Cubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

§. 266. Aufgaben.

a) Der Würfel.

1. Wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite *a)* 12 *dm*, *b)* 2 *m* 3 *dm*, *c)* 0·575 *m* ist?
2. Die Kante eines Würfels ist 5·2 *dm*; wie groß ist *a)* die Diagonale, *b)* die Oberfläche, *c)* der Cubikinhalt?
3. Die Diagonale eines Würfels ist 1·5 *m*; berechne *a)* die Kante, *b)* die Oberfläche, *c)* den Cubikinhalt.
4. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398·535 cm^2; wie groß ist eine Kante desselben?
5. Eine Seitenfläche eines Würfels beträgt 3 m^2 61 dm^2; wie groß ist der Cubikinhalt?
6. Der Cubikinhalt eines Würfels ist 6434·856 cm^3; wie groß ist dessen Oberfläche?
7. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertigt werden; wie viel m^2 Kupferblech braucht man?
8. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite; wie viel Liter fasst es?
9. Wie schwer ist ein Würfel mit der Seite 3 *dm* 7 *cm*, wenn 1 dm^3 des Materiales 0·86 *kg* wiegt?
10. Ein Würfel von 2 *dm* Seitenlänge wiegt 16 *kg*; wie viel wiegt ein anderer Würfel aus demselben Material von 6 *dm* Seitenlänge?
11. Es soll ein Würfel gemacht werden, welcher so groß ist als zwei andere Würfel, deren Kanten 5·4 *dm* und 4·9 *dm* sind; welche Länge muss man einer Kante desselben geben?

b) Das rechtwinklige Parallelepiped.

1. Die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds sind *a)* 12 *cm*, 16 *cm* und 48 *cm*, *b)* 1·04 *m*, 1·98 *m* und 2·64 *m*; wie groß ist 1.) die Diagonale, 2.) die Oberfläche, 3.) der Cubikinhalt?
2. Berechne 1.) die Oberfläche, 2.) den Cubikinhalt folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

   a) Länge 25 *dm*, Breite 18 *dm*, Höhe 36 *dm*;

   b) „ 1·264 *m*, „ 1·055 *m*, „ 0·843 *m*.
3. In einem rechtwinklichen Parallelepiped ist die Grundfläche 7 *dm* 3 *cm* lang und 2 *dm* 4 *cm* breit; wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt 64 dm^3 820 cm^3 beträgt?

4. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke von 28 *cm* Länge und 16 *cm* Breite sind, hat 672 cm^3 Cubikinhalt; wie groß ist seine Oberfläche?
5. Die beiden quadratischen Grundflächen eines geraden Parallelepipeds betragen zusammen 162 dm^2, die vier Seitenflächen 590·4 dm^2; wie groß ist der Cubikinhalt?
6. In einem rechtwinkligen Parallelepiped beträgt der Umfang der quadratischen Grundfläche 11·6 *dm*, die Seitenoberfläche 17·4 dm^2; wie groß ist die Kante eines inhaltsgleichen Würfels?
7. Ein viereckiges Gefäß von Blech ist 0·6 *m* lang, 0·5 *m* breit und 0·4 *m* hoch; wie viel m^2 Blech ist daran, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?
8. Wie hoch kommt eine Kiste zu stehen, die 2 *m* lang, 1·2 *m* breit und 1·3 *m* hoch ist, wenn 1 m^2 mit 1 K 60 h bezahlt wird?
9. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 2 *m*, die Breite 1 *m* 3 *dm* und die Höhe 1 *m* 4 *dm* ist? Wie viel Hektoliter Getreide kann derselbe aufnehmen?
10. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 *m* Länge und 1·2 *m* Breite; wie tief muss das Gefäß sein, um 12 Hektoliter zu fassen?
11. Die Länge einer Mauer ist 23 *m*, die Höhe 2 *m* 4 *dm*, die Dicke 8 *dm*; wie viel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel sammt Verbindungsmittel als 32 *cm* lang, 16 *cm* breit und 8 *cm* hoch anzunehmen ist?
12. Eine Mauer ist 21 *m* lang, 8 *dm* dick und 8 *m* hoch; welchen Druck übt dieselbe auf die Unterlage aus, wenn 1 m^3 Mauerwerk 1634 Kilogramm wiegt?
13. 1 cm^3 reines Wasser wiegt 1 Gramm; wie viel wiegt ein mit Wasser gefülltes Blechkästchen von 1·5 *dm* Länge, 1·2 *dm* Breite und 8 *cm* Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 Gramm wiegt?
14. Eine 3560 *m* lange und 6 *m* breite Straße soll mit Kies 1·2 *dm* hoch beschüttet werden; wie viel m^3 Kies braucht man dazu und wie viel Fuhren sind nöthig, wenn der Wagenkasten 1·6 *m* lang, 7 *dm* breit und 5 *dm* tief ist?
15. Aus 29 m^3 gebranntem Kalk erhält man 100 m^3 gelöschten Kalk; wie viel m^3 gebrannten Kalk braucht man, um eine Grube von 3·2 *m* Länge, 2·2 *m* Breite und 1·5 *m* Tiefe mit gelöschtem Kalk zu füllen?
16. Um einen Keller anzubringen, muss die Erde in einer Länge von 9 *m* 4 *dm* durchaus 7 *m* 4 *dm* breit und 2 *m* 8 *dm* tief ausgegraben werden; wie viel Wagen Erde gibt dieses, wenn die Wagentruhe 1 *m* 8 *dm* lang, 1 *m* breit und 0·3 *m* tief ist, und wenn 10 m^3 feste Erdmasse beim Ausgraben 18 m^3 lockeres Erdreich geben?

c) Das Prisma.

1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prismas, dessen Grundfläche 5 dm^2 46 cm^2 und dessen Höhe 2 *dm* 9 *cm* ist?
2. Die Grundflächen eines 2·4 *dm* hohen geraden Prismas sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 0·5 *dm* und 1·2 *dm*; berechne *a)* die Oberfläche, *b)* den Cubikinhalt.
3. Der Inhalt eines Prismas ist 5·85 m^3, die Höhe 1·3 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
4. Die Höhe eines geraden Prismas ist *h*, die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge *a*; man berechne die Oberfläche *o* und den Cubikinhalt *v*.

Der Umfang der Grundfläche des dreiseitigen Prismas ist $3a$, der Flächeninhalt $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; daher ist

$$o = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = a\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h\right\}.$$

Für den Cubikinhalt hat man $v = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{4}$.

5. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt eines geraden dreiseitigen Prismas, dessen jede Kante 3 *dm* beträgt?
6. Die Höhe eines geraden Prismas ist h, die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a; man bestimme die Oberfläche o und den Cubikinhalt v.
7. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe gleich 1 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Seitenoberfläche, wenn eine Seite der Grundfläche 1 *m* 1 *dm* ist?
8. Ein Würfel ist inhaltsgleich einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 5 *cm* ist; wie groß ist die Kante des Würfels, wenn die Seitenkante des Prismas 8 *cm* beträgt?
9. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche 5·6 *m* zur Grundlinie, 5 *m* zur Höhe hat, und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 *m* beträgt; wie viel *kg* Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 m^3 Heu 114 *kg* wiegt?
10. Ein Balken ist 5 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 40 *cm* und 30 *cm* sind, und die Höhe 15 *cm* beträgt; wie groß ist der Inhalt?
11. Die Seitenoberfläche einer 4·2 *m* hohen senkrechten Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 0·4 *m* ist, soll einen Ölanstrich erhalten; wie viel kostet derselbe, wenn für das m^2 $1\frac{1}{2}$ K gezahlt werden?

2. Die Pyramide.

§. 267. Oberfläche einer Pyramide. Die Oberfläche O einer Pyramide besteht aus der Grundfläche G und der Summe aller Seitenflächen, dem Mantel, M. Es ist:

$$O = G + M.$$

Da der Mantel einer regelmäßigen Pyramide aus congruenten Dreiecken besteht, so ist für eine solche Pyramide:

$$M = \frac{u}{2}h',$$

wenn u den Umfang der Grundfläche, h' die Seitenhöhe bezeichnet.

§. 268. Oberfläche eines Pyramidenstumpfes. Sind G und g die beiden Grundflächen, M der Mantel des Stumpfes, so ist

$$O = G + g + M.$$

Bei einem regelmäßigen Pyramidenstumpf sind die Trapeze des Mantels congruent; sind a und b die Parallelseiten, h' die Seitenhöhe, n die Anzahl der Grundkanten, so ist

$$\mathrm{M} = \frac{a+b}{2}.h'\,n = \frac{h'}{2}(an+bn) = \frac{h'}{2}(U+u),$$

wenn U und u die Umfänge der beiden Grundflächen bezeichnen.

Der Mantel eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes ist also gleich der Maßzahl der halben Seitenhöhe multipliciert mit der Summe der Maßzahlen der Umfänge der beiden Grundflächen.

Volumen der Pyramide.

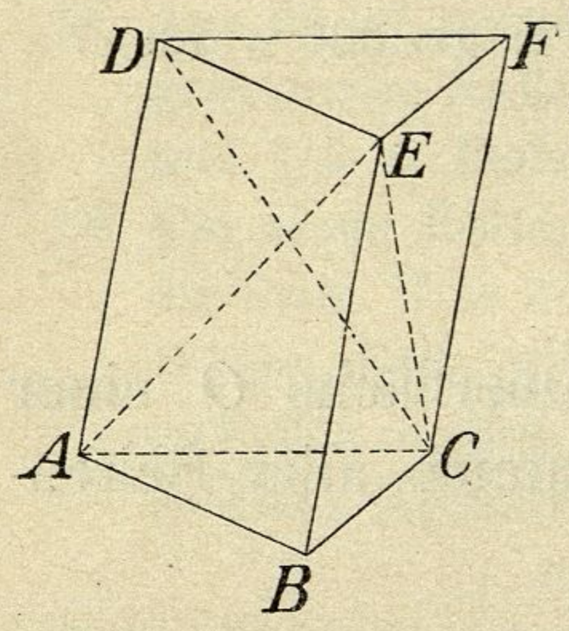
§. 269. Haben zwei Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen und liegen sie mit den Grundflächen auf derselben Ebene, so geben sie mit jeder zu den Grundflächen parallelen Ebene gleiche Schnittflächen. Denn ist G ihre Grundfläche, h ihre Höhe, d der Abstand der Schnittebene vom Scheitel, sind ferner F und F' die Schnittflächen, so ist $G : F = h^2 : d^2$ und $G : F' = h^2 : d^2$, daher auch $G : F = G : F'$; daher $F = F'$.

Hieraus folgt dann nach dem Cavalieri'schen Satze:

Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind inhaltsgleich.

§. 270. Es sei $ABCDEF$ (Fig. 215) ein dreiseitiges Prisma. Schneidet man dasselbe durch die Ebene AEC, so zerfällt es in die dreiseitige Pyramide $EABC$ und in die vierseitige $EACFD$. Durch die Ebene CED wird die letztere wieder in zwei dreiseitige Pyramiden $EACD$ und $ECDF$ zerlegt, so dass das dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt erscheint. Es lässt sich nun zeigen, dass diese drei Pyramiden inhaltsgleich sind. Die Pyramiden $EACD$ und $ECDF$ haben nämlich gleiche Grundflächen ACD und CDF, welche in derselben Ebene liegen, und denselben Scheitel E, daher auch dieselbe Höhe; folglich sind sie gleich. In den Pyramiden $EACD$ und $EABC$ kann man den Scheitel in C annehmen; die Grundflächen EAB und EAD liegen in derselben Ebene und sind einander gleich; die beiden Pyramiden haben demnach auch gleiche Grundflächen und dieselbe Höhe, sind also inhaltsgleich. Es sind somit alle drei Pyramiden untereinander gleich.

Fig. 215.



Daraus folgt:

Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 271. Aus §§. 270 und 264 folgt:

Die Maßzahl für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Da auch jede mehrseitige Pyramide mit einer dreiseitigen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe inhaltsgleich ist, so gilt allgemein der Satz:

Die Maßzahl für das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Bedeutet g die Maßzahl des Flächeninhaltes der Grundfläche einer Pyramide, h der Höhe und v des Volumens, so ist

$$v = \frac{g\,h}{3},\quad g = \frac{3\,v}{h},\quad h = \frac{3\,v}{g}.$$

Für die Volumsverhältnisse der Pyramiden ergeben sich hieraus dieselben Beziehungen, wie in §. 264 für die Volumsverhältnisse der Prismen.

§. 272. Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe ist 12·37 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?
2. Berechne den Cubikinhalt folgender Pyramiden:
   a) Grundfläche 13 dm^2, Höhe 8 *dm*;
   b) „ 2·34 dm^2, „ 6·3 *dm*;
   c) „ 1 m^2 85 dm^2, „ 5 *dm* 6 *cm*.
3. Der Cubikinhalt einer Pyramide ist 0·6264 m^3, die Höhe 0·9 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
4. In einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 3 *dm* 4 *cm* Länge und 1 *dm* 9 *cm* Breite, und der Cubikinhalt 17 dm^3 955 cm^3; wie groß ist die Höhe?
5. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt jede Seite der Grundfläche 14 *dm* und jede Seitenkante 15 *dm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Cubikinhalt?
6. Aus der Kante a eines regelmäßigen Tetraeders die Oberfläche zu berechnen.
7. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen eines Octaeders, dessen Kante 14 *cm* beträgt?
8. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Tetraeder mit der Kante 1 *dm*; wie groß ist die Kante des Würfels?
9. In einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, sind die Grundkante a und die Seitenkante b gegeben; man bestimme die Höhe h der Pyramide, die Seitenhöhe h', die Seitenoberfläche m und den Cubikinhalt v.

   Da der Abstand des Mittelpunktes eines regelmäßigen Sechseckes von einem Eckpunkte gleich ist der Seite, so ist die Höhe h der Pyramide eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse b und dessen zweite

Kathete a ist, daher $h = \sqrt{b^2 - a^2}$. Die Seitenhöhe h' ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreieckes mit b als Hypotenuse und $\frac{a}{2}$ als zweiter Kathete; daher $h' = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Hiernach ergibt sich, da der Umfang der Grundfläche $6a$ und der Flächeninhalt derselben $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ ist:

$$m = 3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ und } v = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}.$$

10. In einer geraden sechsseitigen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche ist a eine Grundkante und h die Höhe; man berechne die Seitenhöhe h' die Seitenoberfläche m und den Cubikinhalt v.

Die Seitenhöhe ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten h und $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite a).

Daher ist

$$h' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}.$$

Ferner ist

$$m = 3a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} \text{ und } v = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{2}.$$

11. In einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist jede Seite der Grundfläche 14 *cm* und die Seitenhöhe 36 *cm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Cubikinhalt?

12. Die Grundfläche einer geraden 1·4 *m* hohen Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten 6 *dm* und 8 *dm*; man berechne die Seitenkante und die Oberfläche der Pyramide.

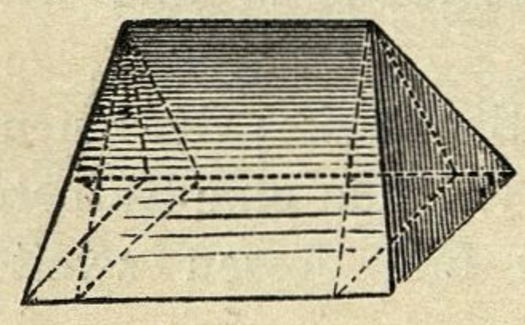
13. Ein Thurmdach hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 9·6 *m* Umfang der Grundfläche und 10·2 *m* Seitenhöhe; wie viel m^2 Blech sind zur Eindeckung erforderlich, wenn für Verschnitt und Falze 6 % hinzugerechnet werden?

14. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 m^2 15 dm^2, und deren Höhe 2 *m* beträgt, aus Eisen gegossen werden; wie viel wird sie wiegen, wenn 1 dm^3 Eisen 7·21 *kg* wiegt?

15. Wie groß ist das Gewicht einer geraden Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 *m* und eine Seite der quadratischen Grundfläche 5 *dm* beträgt und 1 dm^3 Marmor 2·72 *kg* wiegt?

16. Auf einer Landstraße ist jeder Schotterhaufen unten 2·2 *m*, oben 1·8 *m* lang, seine Breite beträgt 1 *m* und die Höhe 0·7 *m*; wie groß ist sein Cubikinhalt?

Fig. 216.



Um den Cubikinhalt eines solchen Körpers (Fig. 216) zu bestimmen, darf man nur von den oberen Eckpunkten zwei auf die oberste Kante senkrechte Schnitte führen; dann erscheint der Mitteltheil als ein dreiseitiges Prisma, und die beiden Seitentheile geben zusammen eine vierseitige Pyramide.

§. 273. Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes. Um den Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes zu finden, bestimme man die Cubikinhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidenstumpf ist, und subtrahiere den Inhalt der Ergänzungspyramide von dem Inhalte der ganzen Pyramide. Die Höhe des Stumpfes h ist meist gegeben, die der Ergänzungspyramide h' hingegen zu berechnen. Sind zwei homologe Seiten der Grundflächen S und s gegeben, so ist nach §. 238 $h' = \frac{s\,h}{S - s}$. Sind die Grundflächen bekannt, so ist

$$G : g = (h + h')^2 : h'^2$$
$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h + h') : h'$$
$$h' \sqrt{G} = h \sqrt{g} + h' \sqrt{g}$$
$$h' (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h \sqrt{g}$$

$$\text{und } h' = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Die Höhe eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen, deren Seiten 6 *cm* und 4 *cm* sind, ist 5 *cm*; wie groß ist sein Volumen?

Die Höhe der Ergänzungspyramide ist

$$h' = \frac{4.5}{6-4}\ cm = 10\ cm.$$

$$v = \frac{36.15}{3}\ cm^3 - \frac{16.10}{3}\ cm^3 = 126{\cdot}\dot{6}\ cm^3.$$

§. 274. Aufgaben.

1. Die Grundflächen eines geraden Pyramidenstumpfes sind gleichseitige Dreiecke mit den Umfängen 1·74 *m* und 1·11 *m*, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 0·84 *m*; wie groß ist die Oberfläche?
2. In einem Pyramidenstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der unteren Grundfläche 25 *cm*, eine Seite der oberen Grundfläche 19 *cm*, die Höhe 20 *cm*; berechne den Cubikinhalt des Stumpfes.
3. Ein vierkantig behauener Baumstamm von 5 *m* Länge ist an der einen Grundfläche 28 *cm* breit und 21 *cm* hoch, an der andern 24 *cm* breit und 18 *cm* hoch; wie viel m^3 Holz enthält er?
4. Ein Bauholz, das 4 *m* lang ist, hat zu Grundflächen zwei ungleiche Quadrate, deren Seiten 31 *cm* und 27 *cm* sind; wie viel ist es wert, wenn das m^3 mit 56 K bezahlt wird?
5. Wie viel Liter fasst ein 6·2 *dm* tiefes Gefäß von der Form einer abgekürzten Pyramide, deren Grundflächen Quadrate von 4·8 *dm* und 3·2 *dm* Seitenlänge sind?
6. Es sei ein regelmäßiger Pyramidenstumpf aus Eisen zu gießen; die Höhe soll 2·5 *m* betragen, die Grundflächen sollen gleichseitige Dreiecke von 0·4 *m* und 0·3 *m* Seitenlänge sein; wie viel *kg* Eisen wird man dazu brauchen? (1 dm^3 Eisen wiegt 7·21 *kg*.)
7. Die große Pyramide bei Ghizeh in Ägypten hat 149 *m* Höhe, ihre untere Grundfläche ist ein Quadrat, dessen Seite 233 *m* beträgt, die obere ist ein Quadrat von 4 *m* Seitenlänge; wie groß ist *a)* die Seitenoberfläche, *b)* der Cubikinhalt?

3. Der Cylinder.

§. 275. Oberfläche eines Cylinders. Aus der Darstellung des Netzes eines geraden Cylinders folgt:

Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist gleich einem Rechtecke, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

Um die ganze Oberfläche eines geraden Cylinders zu erhalten, addiert man zu der Mantelfläche den doppelten Flächeninhalt der Grundfläche.

Drückt man durch r, h, m und o bezüglich den Halbmesser der Grundfläche, die Höhe, die Mantelfläche und die Oberfläche eines geraden Cylinders aus, so ist

$$m = 2r\pi . h, \text{ und}$$
$$o = 2r^2\pi + 2rh\pi \text{ oder } o = 2r\pi\ (r + h).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $m = 4r^2\pi$ und $o = 6r^2\pi$. Ist R der Halbmesser der Grundfläche und O die Oberfläche eines zweiten gleichseitigen Cylinders, so hat man $O = 6R^2\pi$, daher $O : o = R^2 : r^2$.

Aus Fig. 201 ist zu erkennen, dass die obigen Formeln für die Berechnung des Mantels und der Oberfläche eines geraden Cylinders für einen schiefen nicht gelten.

§. 276. Volumen eines Cylinders. Da jeder Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl für das Volumen eines Cylinders ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe und v das Volumen eines Cylinders, so ist

$$v = r^2\pi . h.$$

Ähnlich wie §. 264 erhält man für zwei Cylinder

$$v : v' = r^2 : r'^2, \text{ für } h = h', \text{ und}$$
$$v : v' = h : h', \text{ für } r = r'. \quad \text{(In Worten?)}$$

Für den gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $v = 2r^3\pi$.

Ist R der Halbmesser der Grundfläche und V der Inhalt eines zweiten gleichseitigen Cylinders, so hat man auch $V = 2R^3\pi$, daher

$$V : v = R^3 : r^3.$$

§. 277. Unter einer cylindrischen Röhre versteht man einen Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Cylinder liegt, die

eine gemeinschaftliche Achse haben. Um das Volumen einer cylindrischen Röhre zu finden, braucht man nur das Volumen der beiden Cylinder, von welchen der kleinere dem größeren ausgeschnitten ist, zu berechnen, und den Inhalt des kleineren Cylinders von jenem des größeren zu subtrahieren. Sind also R und r die Halbmesser der beiden Cylinder und h die Höhe der cylindrischen Röhre, so ist ihr Volumen

$$v = R^2 \pi h - r^2 \pi h = (R^2 - r^2) \pi h.$$

§. 278. Aufgaben.

1. Berechne 1) die Oberfläche, 2) den Cubikinhalt folgender gerader Cylinder:
   a) Durchmesser der Grundfläche 23 *dm*, Höhe 14 *dm*;
   b) Halbmesser „ „ 8·25 *dm*, „ 5·24 *dm*.
2. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Cylinders, in welchem die Seite 3 *dm* 4 *cm* und der Umfang der Grundfläche 7 *dm* 8 *cm* beträgt?
3. Der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders ist 2·4 *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt?
4. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders beträgt 7 m^2 4 dm^2, der Umfang der Grundfläche 1·76 *m*; wie groß ist der Cubikinhalt des Cylinders?
5. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist 62·8 dm^2, der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*; wie groß ist die Höhe?
6. Bestimme den Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe 4 *dm* und dessen Inhalt 9 dm^3 496 cm^3 beträgt.
7. Wie groß ist der Halbmesser eines gleichseitigen Cylinders, wenn *a)* dessen Mantelfläche 10 dm^2, *b)* dessen Inhalt 10 cm^3 beträgt?
8. Aus der Mantelfläche m und dem Cubikinhalt v eines geraden Cylinders den Halbmesser r der Grundfläche zu berechnen.

$$\text{Es ist } \frac{v}{m} = \frac{r^2 \pi \,.\, h}{2 r \pi \,.\, h} = \frac{r}{2}; \text{ daher } r = \frac{2v}{m}.$$

9. Ein Würfel ist inhaltsgleich mit einem geraden Cylinder, dessen Höhe 2·4 *dm* und dessen Mantelfläche 7·54 dm^2 beträgt; wie groß ist die Oberfläche des Würfels?
10. Einem geraden 2 *dm* hohen Cylinder vom Halbmesser 0·8 *dm* ist ein Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche umgeschrieben; wie groß ist die Differenz *a)* der Oberflächen, *b)* der Inhalte der beiden Körper?
11. Ein Brunnen hat eine cylindrische Form mit 14 *dm* im Durchmesser; wenn nun das Wasser 3 *m* hoch steht, wie viel *hl* sind es?
12. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 20 *a* ganz überwalzt werden soll, und die Walze 1·6 *m* lang ist und 0·3 *m* im Durchmesser hat?
13. Ein cylindrisches Gefäß soll 1 *l* halten; wie hoch muss es sein, wenn der innere Durchmesser 108 *mm* beträgt?
14. Wie groß ist der Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes, das 5·031 *dm* hoch ist und einen *hl* hält?
15. Eine Feuerspritze hat 2 Cylinder (Stiefel), deren innerer Durchmesser 1·8 *dm* beträgt; die Hubhöhe des Kolbens ist in jedem 2·3 *dm* und jeder Kolben steigt während einer Minute 25mal auf und ab; wie viel *hl* Wasser wird diese Feuerspritze während einer Stunde unausgesetzter Wirksamkeit verspritzen?

16. Der innere Durchmesser eines runden Thurmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick; wie viel Cubikmeter enthält die Mauer, wenn die Höhe des Thurmes 14·5 *m* beträgt?
17. Eine gusseiserne Walze von 1·2 *m* Länge und 11 *cm* Durchmesser wird so weit abgedreht, dass der Durchmesser nur 9·5 *cm* beträgt; um wie viel ist die abgedrehte Walze kleiner als die frühere?
18. Zu einer Wasserleitung braucht man in einer Länge von 840 *m* Röhren von Blei, welche 14 *cm* dick sind, und deren Weite im lichten 8 *cm* beträgt; wie viel kostet das Blei, wenn 1 dm^3 desselben 11·35 *kg* wiegt und das *kg* Blei mit 80 h bezahlt wird?
19. Wie schwer ist ein gleichseitiger Cylinder, dessen Radius 7 *cm* 8 *mm* misst, wenn 1 dm^3 des Materiales 8·4 *kg* wiegt?

4. Der Kegel.

§. 279. Oberfläche eines Kegels. Die Oberfläche eines Kegels findet man, indem man die Summe aus der Grundfläche und dem Mantel bildet.

Da der Mantel eines geraden Kegels abgewickelt einen Kreisausschnitt gibt, dessen Bogen und Radius beziehungsweise dem Umfang der Grundfläche und der Seite des Kegels gleich sind, so ist $M = 2r\pi$. $\frac{s}{2} = r\pi s$, wenn M, r und s die Maßzahlen des Mantels, des Halbmessers der Grundfläche und der Seite des Kegels sind.

Ist der Kegel ein gleichseitiger, so ist $s = 2r$ und

$$M = r\pi . 2r = 2r^2\pi.$$

Die ganze Oberfläche O eines geraden Kegels ist

$$O = r\pi s + r^2\pi = r\pi\ (r + s).$$

Ist der Kegel gleichseitig, so ist $O = 3r^2\pi$.

Wie verhält sich in einem gleichseitigen Kegel die Mantelfläche zur ganzen Oberfläche?

Wie verhalten sich die Oberflächen zweier gleichseitiger Kegel mit den Radien R und r?

Da der Mantel eines schiefen Kegels kein Kreisausschnitt ist (§. 251), so gelten die obigen Formeln für den Mantel und die Oberfläche eines geraden Kegels nicht für den schiefen.

§. 280. Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes. Sind G und g die beiden Grundflächen und M der Mantel des Stumpfes, so ist $O = G + g + M$.

Ein gerader Kegelstumpf kann als regelmäßiger Pyramidenstumpf angesehen werden, dessen Grundflächen unendlich viele Seiten haben, d. h. Kreise sind, und dessen Seitenhöhe der Seite des geraden Kegelstumpfes gleich ist. In der Formel

$M = \frac{h'}{2}(U + u)$ (§. 268) sind h', U und u zu ersetzen durch s, $2\,R\,\pi$ und $2\,r\,\pi$; daher ist für einen geraden Kegelstumpf

$$M = \frac{s}{2}(2\,R\,\pi + 2\,r\,\pi) = \pi\,s\,(R + r).$$

Demnach wird

$$O = R^2\,\pi + r^2\,\pi + \pi\,s\,(R + r) = \pi\,[R^2 + r^2 + s\,(R + r)].$$

§. 281. Volumen eines Kegels. Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl für das Volumen eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, so ist das Volumen

$$v = \frac{r^2\,\pi\,.\,h}{3}.$$

Ist von einem geraden Kegel statt der Höhe h die Seite s gegeben, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher

$$v = \frac{r^2\,\pi\sqrt{s^2 - r^2}}{3}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $h = r\sqrt{3}$, und

$$v = \frac{r^3\,\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Heißt V das Volumen eines zweiten gleichseitigen Kegels, dessen Grundfläche R zum Halbmesser hat, so ist

$$V : v = \frac{R^3\,\pi\sqrt{3}}{3} : \frac{r^3\,\pi\sqrt{3}}{3} = R^3 : r^3.$$

§. 282. Volumen eines Kegelstumpfes. Das Volumen eines Kegelstumpfes kann auf dieselbe Weise berechnet werden, wie das eines Pyramidenstumpfes. Zumeist sind die Radien der Grundflächen und die Höhe des Stumpfes gegeben, die Höhe des Ergänzungskegels h' kann aus diesen Größen berechnet werden. (§. 250.)

§. 283 *a*). Aufgaben.

1. Suche die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche 11·8 *cm* zum Halbmesser hat, und dessen Seite 15·5 *cm* beträgt.
2. Berechne den Cubikinhalt folgender Kegel:
   a) Halbmesser der Grundfläche 6·2 *dm*, Höhe 7·5 *dm*;
   b) „ „ „ $14\frac{1}{2}$ *cm*, „ $23\frac{2}{5}$ *cm*;
   c) „ „ „ 1 *m* 1 *dm* 8 *cm*, „ 2 *m* 4 *dm* 6 *cm*.
3. Die Seite eines geraden Kegels ist 3·33 *dm*, die Mantelfläche 1759·296 cm^2; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche?
4. Der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels ist 12 *cm*, die Höhe 35 *cm*; wie groß ist die Oberfläche?

5. Ein Kegel und ein Cylinder haben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe; wie verhalten sich ihre Inhalte zueinander?
6. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·5 *dm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt?
7. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels ist 2530 cm^2; wie groß ist dessen Cubikinhalt?
8. Der Cubikinhalt eines gleichseitigen Kegels ist 0·16 m^3; berechne dessen Oberfläche.
9. Ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel haben gleiche Höhe; wie verhalten sich ihre Mantelflächen?
10. Ein gleichseitiger Kegel von 36 *cm* Höhe hat dieselbe Oberfläche wie ein gleichseitiger Cylinder; wie groß ist die Seite des Cylinders?
11. Die Oberfläche eines geraden Kegels beträgt 11·204 m^2, der Hälbmesser der Grundfläche ist 1·2 *m*; wie groß ist der Cubikinhalt des Kegels?
12. An einem geraden Kegel ist der Halbmesser der Grundfläche 1·5 *m*, die Seite 1·8 *m*; eine Pyramide hat mit dem Kegel denselben Scheitel, und zur Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels eingeschriebenes Quadrat; wie groß ist die Differenz der Cubikinhalte beider Körper?
13. An einem kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 2 *m* 5 *dm*, und die Höhe 1 *m*; wie viel *hl* Getreide enthält der Haufen?
14. Ein Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wie viel *kg* Heu enthält er, wenn das m^3 Heu 114 *kg* wiegt?
15. Ein messingener Kegel ist 21 *cm* hoch und hat eine Grundfläche von 10·5 *cm* Durchmesser; wie groß ist das Gewicht desselben, wenn 1 m^3 Messing $8\frac{2}{5}$ *kg* wiegt?
16. Welchen Wert hat ein unentwipfelter Tannenstamm, welcher 12·6 *m* hoch ist und unten 2·2 *m* im Umfange hat, wenn das m^3 Holz mit 8 K 80 h bezahlt wird?
17. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefülltem Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe wird das Wasser in ein cylindrisches Gefäß von 12 *cm* Durchmesser gegossen: wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

§. 283 *b)*.

1. Die Durchmesser der Grundflächen eines Kegelstumpfes sind 2·4 *dm* und 1·8 *dm*, die Höhe beträgt 3·02 *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt des Kegelstumpfes?
2. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 6 *dm*, die Durchmesser der Grundflächen betragen 9 *dm* und 7 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?
3. Wie groß ist *a)* die Mantelfläche, *b)* der Cubikinhalt eines geraden Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 3 *m* und 2 *m* zu Durchmessern haben und 1·2 *m* voneinander abstehen?
4. Berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt eines geraden Kegelstumpfes, dessen Seite 5 *dm* ist, und dessen Grundflächen 7 *dm* und 4 *dm* zu Halbmessern haben.

5. Ein 36 *cm* hoher Kegel, dessen Grundfläche 6 *cm* zum Halbmesser hat, wird in der Mitte der Höhe parallel mit der Grundfläche durchschnitten; wie groß ist der Cubikinhalt jedes der beiden Theile?
6. Ein in Form eines Kegelstumpfes anzufertigendes Gefäß soll unten 70 *cm* und oben 90 *cm* Umfang haben und 20 *cm* hoch sein; wie viel Liter fasst es?
7. Ein Bottich hat 1 *m* unteren und 1·4 *m* oberen Durchmesser und 1·2 *m* Tiefe; wie viel *hl* hält derselbe?
8. Ein Baumstamm hat an dem einen Ende 17 *dm*, an dem andern 13·6 *dm* Umfang, die Länge beträgt 7 *m*; wie groß ist *a)* sein Cubikinhalt, *b)* sein Gewicht, wenn ein dm^3 Holz 0·48 *kg* wiegt?
9. Wie viel m^3 Scheitholz gibt ein Baumstamm von 5 *m* Länge, der an dem einen Ende 7 *dm*, an dem andern 6 *dm* Durchmesser hat, wenn man annimmt, dass 1 m^3 Stammholz $1\frac{1}{2}$ m^3 Scheitholz gibt?

5. Die Kugel.

§. 284. Oberfläche und Volumen einer Kugel. Bezeichnen r, o, v den Radius, die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, so ist, wie hier nicht bewiesen werden soll, $o = 4r^2\pi$, $v = \frac{4r^3\pi}{3}$.

Da $v = \frac{4r^3\pi}{3} = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3}$, so ist $v = o \cdot \frac{r}{3}$.

Diese Gleichungen enthalten folgende Sätze:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalt eines Hauptkreises.

Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Producte aus der Maßzahl der Oberfläche und dem dritten Theile des Radius derselben.

Umgekehrt folgt $r^2 = \frac{o}{4\pi}$, daher $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$.

Heißt R der Halbmesser und O die Oberfläche einer zweiten Kugel, so ist auch $O = 4R^2\pi$, daher

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2;$$ d. h.

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser.

Für die Volumina zweier Kugeln mit den Radien R und r hat man:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3},\ v = \frac{4r^3\pi}{3},$$ mithin $V : v = R^3 : r^3$; d. h.

Die Volumina zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Eine Hohlkugel ist die Differenz der Volumina zweier Kugeln; sind die Radien derselben R und r, so ist $V = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$.

§. 285. Aufgaben.

1. Der Halbmesser einer Kugel ist

   a) 0·36 *m*, *b)* $48\frac{4}{5}$ *cm*, *c)* 1·32 *dm*;

   wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt der Kugel?
2. Der größte Kreis einer Kugel hat 4·8 *dm* im Umfange; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt der Kugel?
3. Die Oberfläche einer Kugel beträgt *a)* 0·15 m^2, *b)* 12·76 cm^2, *c)* 66 dm^2 3·96 cm^2; wie groß ist der Durchmesser?
4. Der Cubikinhalt einer Kugel ist *a)* 4 dm^3, *b)* 0·357 m^3, *c)* 4 dm^3 875 cm^3; wie groß ist die Oberfläche?
5. Ein Kugelkreis, welcher 9 *cm* vom Mittelpunkte der Kugel absteht, hat 454·74 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt dieser Kugel?
6. Wie verhalten sich *a)* die Oberflächen, *b)* die Cubikinhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser 0·36 *m* und 0·48 *m* sind?
7. Wie verhalten sich die Cubikinhalte zweier Kugeln, deren Oberflächen sich wie 16 : 25 verhalten?
8. Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Kugeln, deren Cubikinhalte sich wie 27 : 64 verhalten?
9. Von zwei Kugeln hat die erste 6 *dm*, die zweite 5 *dm* im Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Inhalt gleich ist dem Inhalte der beiden andern Kugeln zusammengenommen?
10. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche so groß ist als ein Würfel, dessen Seite 1·11 *m* beträgt?
11. Suche die Seite eines Würfels, der an Inhalt gleich ist einer Kugel von 1 *m* 2 *dm* Durchmesser.
12. Die Seite eines Würfels ist *s*, und eben so groß ist auch der Durchmesser einer Kugel; welches Verhältnis haben *a)* die Oberflächen, *b)* die Cubikinhalte beider Körper?
13. Eine Kugel hat mit einem geraden Cylinder gleichen Halbmesser und gleichen Cubikinhalt; wie groß ist die Mantelfläche des Cylinders, wenn die Oberfläche der Kugel 5·64 dm^2 beträgt?
14. Ein gerader Kegel hat 0·8 *m* Höhe und eine Grundfläche von 0·3 *m* Halbmesser; wie groß muss der Durchmesser einer Kugel sein, deren Oberfläche gleich ist der Mantelfläche jenes Kegels?
15. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Kegels, welcher mit einer Kugel vom Halbmesser 14 *cm* inhaltsgleich ist?
16. Eine Kugel, ein gleichseitiger Cylinder und ein Würfel haben gleiche Oberfläche, nämlich 10 dm^2; wie groß sind die Cubikinhalte dieser drei Körper?
17. Eine Kugel, ein gleichseitiger Cylinder und ein Würfel haben gleichen Cubikinhalt, nämlich 10 dm^3; wie groß sind die Oberflächen dieser drei Körper?
18. In einen gleichseitigen Cylinder mit dem Halbmesser *r* werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Cubikinhalte des Kegels, der Kugel und des Cylinders zueinander?
19. Um eine Kugel mit dem Halbmesser *r* wird ein gleichseitiger Cylinder beschrieben; wie verhalten sich *a)* die Oberflächen, *b)* die Cubikinhalte der beiden Körper?

20. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 6378 *km* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}141593\ldots$)
21. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4 *dm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde?
22. Wie groß müsste der Durchmesser eines Erdglobus angenommen werden, auf welchem 1 μm^2 als 1 mm^2 erscheinen soll?
23. Wie groß ist der Durchmesser einer Kanonenkugel von 15 *kg* Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7·2 *kg* wiegt?
24. Eine Kugel von 2·8 *dm* Halbmesser wiegt 4·5 *kg*; wie viel wiegt eine andere Kugel aus demselben Stoffe, deren Halbmesser 3·2 *dm* ist?
25. Ein cylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 1 *m* weit und 4 *m* lang, so dass die Länge des Cylinders 3 *m* beträgt; wie groß ist *a)* die Oberfiäche, *b)* der Inhalt des Kessels, *c)* das Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7·8 *kg* wiegt?
26. Der Umfang des äußeren größten Kreises einer Hohlkugel ist 1·2 *m*, die Wandstärke 2 *cm*; wie groß ist der Inhalt der Kugelschale?
27. Wenn man den Durchmesser der Erde = 12756 *km* und die Höhe ihrer Luftschichte = 84 *km* setzt, wie groß ist der Inhalt der Luftschichte?

6. Volumen und Gewicht der Körper.

§. 286. Auf eine ganz einfache Weise wird das Volumen eines beliebigen Körpers mit Hilfe eines prismatischen oder cylindrischen Gefäßes bestimmt, dessen Grundfläche bekannt und an dessen Seitenwand die innere Höhe in Decimeter, Centimeter und Millimeter eingetheilt ist. Man legt den zu messenden Körper in ein solches Gefäß, füllt dieses mit Wasser so hoch, dass der Körper ganz von Wasser bedeckt ist, und merkt sich die Höhe des Wasserstandes; hierauf wird der Körper herausgenommen und die Höhe des nun niedrigeren Wasserstandes abgelesen. Der Inhalt des zu bestimmenden Körpers ist nun gleich dem Inhalte eines prismatischen oder cylindrischen Körpers, welcher mit dem Gefäße gleiche Grundfläche hat, und dessen Höhe der Differenz der beiden Wasserstände gleich ist. Wenn der zu messende Körper das Wasser einsaugt, so verwendet man feinen Sand zum Füllen des Gefäßes.

Mittelst eines solchen Gefäßes kann man auch den Inhalt irgend eines anderen unregelmäßigen hohlen Gefäßes finden. Man füllt dieses mit Wasser, schüttet dasselbe dann in das mit der Scala versehene Gefäß, und berechnet nach diesem aus der Grundfläche und der Höhe des Wassers den gesuchten Inhalt.

Die Scala eines solchen Gefäßes kann unmittelbar auch das Volumen desselben bis zu bestimmten Querschnitten angeben.

§. 287. Das Volumen eines Körpers kann auch mittelst des Gewichtes desselben bestimmt werden.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Cubikeinheit, z. B. ein Cubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen specifisches Gewicht. Z. B. 1 dm^3 Silber wiegt 10·51 kg; dies ist das specifische Gewicht des Silbers für 1 dm^3 als Cubikeinheit.

Bei den Angaben über das specifische Gewicht nehmen wir durchgängig 1 dm^3 als Cubikeinheit und 1 kg als Gewichtseinheit an.

Nachstehend folgen die specifischen Gewichte einiger Körper:

1 Cubikdecimeter							
Bernstein	wiegt	1·08	kg	Kupfer, gehämmert	wiegt	8·88	kg
Blei.....	„	11·35	„	„ gegossen .	„	8·79	„
Buchenholz	„	0·74	„	Marmor	„	2·72	„
Eichenholz	„	0·86	„	Messing (im Mittel)	„	8·40	„
Eisen, geschmiedet	„	7·79	„	Platin.....	„	21·45	„
„ gegossen ..	„	7·21	„	Quecksilber.....	„	13·60	„
Elfenbein	„	1·83	„	Silber.....	„	10·51	„
Gold	„	19·36	„	Steinkohle (im			
Granit (im Mittel).	„	2·70	„	Mittel)	„	1·30	„
Korkholz	„	0·24	„	Zink.....	„	7·19	„

Es sei z. B. der Cubikinhalt eines Silberbarrens, der 32 kg wiegt, zu bestimmen.

Da 1 dm^3 Silber 10·51 kg wiegt, so nehmen 32 kg Silber so viel dm^3 Raum ein, wie oft 10·51 kg in 32 kg enthalten sind; man hat daher 32 : 10·51 .. = 3·045 .. Das Volumen ist also 3·045 .. dm^3.

Das Volumen eines Körpers in Cubikdecimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das specifische Gewicht für 1 dm^3 dividiert.

Umgekehrt findet man aus dem Volumen eines Körpers das absolute Gewicht desselben, wenn man dessen specifisches Gewicht mit der Maßzahl des in dm^3 ausgedrückten Volums multipliciert. Ist z. B. das absolute Gewicht von 225 dm^3 Messing zu bestimmen, so hat man

1 dm^3 Messing wiegt 8·40... kg
225 „ „ wiegen 8·40... $kg \times 225 = 1890$ kg.

Mittelst des Gewichtes kann auch der Inhalt eines wie immer geformten hohlen Gefäßes auf eine sehr einfache Art bestimmt werden. Man wägt zuerst das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, wägt sodann das volle Gefäß ab und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten. So viele Kilogramm diese Gewichtsdifferenz beträgt, ebensoviele Cubikdecimeter oder Liter hält das Gefäß.

§. 288. Aufgaben.

1. In ein prismatisches Gefäß von 47 *cm* Länge und 32 *cm* Breite, welches zum Theile mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so dass ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36 *cm* hoch. Nachdem man den Körper herausgenommen hatte, stand das Wasser noch 24 *cm* hoch; welches Volumen hat der Körper?
2. Ein cylindrisches Gefäß von 3 *dm* Durchmesser und 4 *dm* Höhe, worin sich 2·7 *dm* hoch Wasser befand, war, nachdem man einen unregelmäßigen Körper hineingelegt hatte, gerade gefüllt; wie groß ist das Volumen dieses Körpers?
3. Ein cylindrisches Glas, dessen innere Höhe 1 *dm* und dessen Durchmesser 1·5 *dm* beträgt, ist ganz mit Wasser gefüllt; wenn nun eine Kugel von 8 *cm* Durchmesser in das Glas gesenkt wird, so wird daraus ein Theil des Wassers ausfließen. Wie hoch wird das Wasser im Glase stehen, nachdem die Kugel wieder herausgenommen wurde?
4. Wie groß ist der Inhalt eines Gefäßes, das leer 1·5 *kg*, mit Wasser gefüllt 14·8 *kg* wiegt?
5. Wie viel *kg* wiegt das Wasser, das in einem Gefäße von 165 *cm* Länge, 85 *cm* Breite und 7 *dm* Tiefe enthalten ist?
6. Ein Stück Blei wiegt 24 *kg*; welches ist sein Volumen?
7. Wie viel m^3 enthält ein Balken *a)* Eichenholz, *b)* Buchenholz, der 135 *kg* wiegt?
8. Wie groß ist die Kante eines Marmorwürfels, der 184 *kg* wiegt?
9. Eine eiserne Walze von 2·5 *m* Länge wiegt 680 *kg*; wie groß ist ihr Durchmesser?
10. Eine Kugel aus Elfenbein wiegt 12·135 *dkg*; wie groß ist ihr Halbmesser?
11. Wie viel *kg* wiegt eine Platte von Gusseisen, welche 1·9 *m* lang, 0·2 *m* breit und 0·08 *m* dick ist?
12. Wie viel wiegt ein Cylinder von Eichenholz, wenn seine Länge 28 *dm* und sein Durchmesser 3·5 *dm* beträgt?
13. Auf den Ecksäulen eines Gartenthores liegen zwei kugelförmige Körper aus Granit; wie viel *kg* wiegen dieselben, wenn jeder 5·2 *dm* im Durchmesser hat?
14. Wie viel wiegt eine hohle Kugel aus Messing, bei welcher der innere Durchmesser 3 *dm* beträgt und das Messing 1 *cm* dick ist?
15. Ein Hektoliter Wein wiegt 100·8 *kg*; wie groß ist das specifische Gewicht dieses Weines?
16. Ein Fass von 0·6 m^3 Inhalt ist mit Öl gefüllt, das 520 *kg* wiegt; welches specifische Gewicht hat das Öl?
17. An einem Zuckerhut, der die Gestalt eines geraden Kegels hat, beträgt der Umfang der Grundfläche 7 *dm* und die Seite 5 *dm*; wie groß ist das specifische Gewicht des Zuckers, wenn der Zuckerhut 6·8 *kg* wiegt?
18. Eine messingene Walze soll 4 *kg* wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muss man der Walze geben?
19. Es soll ein Cylinder aus Gusseisen gegossen werden, der 1 *kg* wiegt und 4 *cm* im Durchmesser hat; wie groß wird die Höhe sein?
20. Es sollen cylinderförmige Gewichte von je 1 *kg* und zwar *a)* aus Blei, *b)* aus Messing, *c)* aus Gusseisen gegossen werden; wie viel *cm* muss der Durchmesser betragen, wenn er nur die Hälfte der Höhe des Cylinders sein soll?

21. Die Größe des Druckes einer Flüssigkeit auf den Boden eines Gefäßes ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Bodenfläche des Gefäßes und deren Höhe die Höhe des Flüssigkeitsstandes ist. Wie groß ist der Druck auf den Boden eines cylindrischen Gefäßes von 1·2 *dm* Durchmesser, das bis zu einer Höhe von 2 *dm* mit Regenwasser (specifisches Gewicht = 1·09) gefüllt ist?

22. Die Bodenfläche eines prismatischen Gefäßes von 1 *m* Länge und 5 *dm* Breite kann nur einen Druck von 170 *kg* aushalten; bis zu welcher Höhe darf dieses Gefäß mit Baumöl (specifisches Gewicht = 0·92 *kg*) gefüllt werden?

23. Die Größe des Luftdruckes auf eine Fläche ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche jene Fläche und deren Höhe der jeweilige Barometerstand ist. Wie groß ist der Luftdruck auf eine Fläche von 1 dm^2 bei einem Barometerstande von 742 *mm*?

24. Wie groß ist bei demselben Barometerstande der Luftdruck *a)* auf die Oberfläche eines Würfels von 1 *dm* Seitenlänge, *b)* auf die Oberfläche einer Halbkugel von 2 *dm* Durchmesser?

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIŽNICA LJUBLJANA

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIŽNICA

00000493120