Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za elektrotehniko*

MATEMATIKA 1

Založba FE

GREGOR DOLINAR

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

MATEMATIKA 1

Gregor Dolinar

Ljubljana, 2021

Katдинžni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in
univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID=48093443
ISBN 978-961-243-414-4 (pdf)

URL: https://efeplusmm.fe.uni-lj.si/asset/C9aNy64yHz2EnhtAR

Založnik: Založba FE, Ljubljana
Izdajatelj: Fakuleta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič
1. elektronska izdaja

Kazalo

Predgovor

Študenti pridejo na Fakulteto za elektrotehniko študirat elektrotehniko in ne matematike. Ker pa brez matematičnih orodij pri strokovnih predmetih ne gre, se morajo študenti seznaniti z nekaterimi osnovnimi matematičnimi objekti in njihovimi lastnostmi, ki naj bi jih potem znali pravilno uporabiti v stroki. Temu je prilagojen izbor in način podajanja snovi v pričujočem učbeniku. Prednost pred matematično natančnostjo in strogostjo ima razumevanje in jasnost in s tem povezano poenostavljanje. Kaj hitro se namreč lahko sporočilnost izgubi v podrobnostih. Tako marsikateri pojem v knjigi ni definiran v vsej splošnosti, prav tako nekateri zapisani izreki veljajo tudi pri milejših predpostavkah. Nekatere trditve niso dokazane, večkrat je namesto dokaza navedena samo glavna ideja dokaza. Na koncu je naštetih nekaj učbenikov, ki obravnavajo enake ali podobne vsebine. Primerni so kot dodatna literatura za morebitno podrobnejšo pojasnitev obravnavanih vsebin ali pa za bolj poglobljen študij za najradovednejše.

Gregor Dolinar

1. Številske množice

V prvem poglavju bomo opisali nekatere osnovne lastnosti naravnih števil, celih števil, racionalnih števil, realnih števil in kompleksnih števil. Pri tem se bomo osredotočili predvsem na razlike med posameznimi množicami.

1.1. Naravna števila

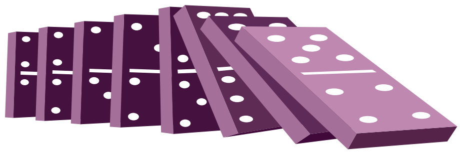
Množico *naravnih števil* označimo z

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Za poljubni dve naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ velja $a < b$ ali $b < a$. Pravimo, da je množica naravnih števil $\mathbb{N}$ *urejena*. Za naravna števila je značilno, da ima vsako naravno število svojega neposrednega naslednika in da ima vsako naravno število, razen 1, svojega neposrednega predhodnika. Zaradi te lastnosti pravimo, da je množica naravnih števil $\mathbb{N}$ *diskretna*. Množica naravnih števil je neskončna in je najmanjša možna neskončna množica. Pravimo, da je množica naravnih števil *števno neskončna*. V vsaki podmnožici naravnih števil tudi obstaja najmanjši element. Naštete lastnosti so osnova za metodo dokazovanja, ki jo imenujemo *matematična indukcija*.

Če hočemo dokazati, da neka lastnost velja za vsako naravno število, potem zadošča dokazati dve stvari. In sicer, bazo indukcije ter indukcijski korak. Dokazati bazo indukcije pomeni, da dokažemo, da lastnost velja za naravno število 1. Dokazati indukcijski korak pa pomeni, da pri predpostavki, da velja določena lastnost za neko naravno število n, nato s pomočjo te predpostavke dokažemo, da velja ta lastnost tudi za naravno število $n+1$. Če nam uspe dokazati bazo indukcije in indukcijski korak, potem po matematični indukciji sledi, da velja lastnost za vsako naravno število.

Dokazovanje s pomočjo matematične indukcije si lahko nazorna predstavljamo na naslednji način. Vsako naravno število si predstavljamo kot eno domino. Vse domine razporedimo v vrsto, tako da stojijo pokonci. Za naravno število neka lastnost velja, če se domina podre. Kdaj se bodo vse domine podrle? Lahko podremo vsako domino posebej, lahko pa podremo zgolj prvo domino in poskrbimo, da ostale domine stojijo dovolj skupaj, tako da vsaka domina podre naslednjo domino. To, da podremo prvo domino, je potem baza indukcije, to, da sta poljubni sosednji domini dovolj skupaj, torej, če se podre prva izmed njiju, se nato podre tudi naslednja, pa je indukcijski korak.



Oglejmo si uporabo matematične indukcije še na naslednjih dveh primerih.

Primer. Radi bi pokazali, da ima izraz

$$n^3 + 3n^2 - 4n + 12$$

lastnost, da je deljiv s 6 za vsako naravno število n. Dokažimo to s pomočjo matematične indukcije.

Baza indukcije je, da lastnost velja za $n = 1$, torej da 6 deli izraz $n^3 + 3n^2 - 4n + 12$ za $n = 1$. Ker je $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 = 12$ in 6 deli 12, smo pokazali bazo indukcije.

Dokažimo še indukcijski korak. Predpostavimo, da število 6 deli izraz $n^3 + 3n^2 - 4n + 12$ za neko naravno število n, in nato s pomočjo te predpostavke pokažimo, da 6 deli tak izraz tudi za naslednje naravno število $n + 1$, torej da 6 deli izraz $(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 - 4(n + 1) + 12$. Zapišimo

$$\begin{aligned}
&(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 - 4(n + 1) + 12 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 3 \cdot 2n + 3 \cdot 1 - 4n - 4 + 12 \\
&= n^3 + 3n^2 - 4n + 12 + 3n^2 + 9n.
\end{aligned}$$

Prvi del izraza $n^3 + 3n^2 - 4n + 12$ je po indukcijski predpostavki deljiv s 6. Če pokažemo, da je tudi drugi del izraza $3n^2 + 9n$ deljiv s 6, bo tudi vsota prvega in drugega dela deljiva s 6 in indukcijski korak bo dokazan. Dokažimo torej, da 6 deli $3n^2+9n = 3n(n+3)$. Ker se n in $n+3$ razlikujeta za 3, je eno izmed teh dveh števil liho, drugo pa sodo. Zmnožek $n(n + 3)$ je torej deljiv z 2, izraz $3n(n + 3)$ pa s 6.

Uspeli smo dokazati bazo indukcije in indukcijski korak, zato po matematični indukciji sledi, da 6 deli $n^3+3n^2-4n+12$ za vsako naravno število n.

Primer. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja naslednja enakost

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}. \tag{1}$$

Baza indukcije je, da enakost velja za $n = 1$. Leva stran je za $n = 1$ enaka $1 \cdot 2 = 2$, desna stran pa prav tako $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$.

Pri indukcijskem koraku predpostavimo, da enakost velja za neko naravno število n, s pomočjo te predpostavke pa nato pokažimo, da velja enakost tudi za naslednje naravno število $n+1$. Leva stran enačbe je za $n+1$ enaka

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+1+1). \tag{2}$$

Sedaj upoštevamo indukcijsko predpostavko, da velja enakost za naravno število n, torej $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, in izraz (2) poenostavimo

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+1+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Pokazali smo, da velja enakost tudi za naravno število $n+1$, pri čemer smo pri izpeljavi upoštevali predpostavko, da enakost velja za naravno število n. Torej je dokazan tudi indukcijski korak.

Po matematični indukciji sledi, da velja enakost (1) za vsako naravno število n.

Na množici naravnih števil sta definirani operaciji seštevanja in množenja. Za ti dve operaciji veljajo naslednja pravila:

- $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, komutativnost,
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, asociativnost,
- $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, distributivnost.

Množica naravnih števil je *zaprta za seštevanje in množenje*, kar pomeni, da je vsota poljubnih dveh naravnih števil zopet naravno število. Enako velja tudi za zmnožek dveh naravnih števil. Ne obstaja pa vedno v množici naravnih števil za dani naravni števili n in m rešitev enačbe

$$n + x = m.$$

Če je $m > n$, potem obstaja natanko en $x \in \mathbb{N}$, ki je rešitev enačbe, če pa je $m \leq n$, rešitev v okviru naravnih števil ne obstaja. To je eden izmed razlogov, da množico naravnih števil razširimo do množice celih števil.

1.2. Cela števila

Množico *celih števil* označimo z

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Prav tako kot množica naravnih števil je tudi množica celih števil urejena. Vsako celo število ima neposrednega naslednika, za razliko od naravnih števil, pa ima vsako celo število tudi svojega neposrednega predhodnika. Vsaka podmnožica celih števil tudi ne vsebuje nujno najmanjšega elementa. Omenimo še, da je tudi množica celih števil števno neskončna.

Množica celih števil je zaprta za seštevanje in množenje. Za obe operaciji veljajo tudi v množici celih števil enaka pravila in sicer komutativnost, asociativnost in distributivnost. Za operacijo seštevanja je število 0 *nevtralni element*, kar pomeni, da je

$$a + 0 = a \quad \text{za vsak} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Vsak element $a \in \mathbb{Z}$ ima tudi *nasprotni* ali *inverzni element* $-a$ za seštevanje. To pomeni, da za vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ obstaja tako celo število $-a \in \mathbb{Z}$, da je njuna vsota enaka nevtralnemu elementu za seštevanje, torej

$$a + (-a) = 0 \quad \text{za vsak} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Tudi za operacijo množenja obstaja nevtralni element ali *enota* in sicer število $1 \in \mathbb{Z}$. To pomeni, da je

$$a \cdot 1 = a \quad \text{za vsak} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Ne obstaja pa za vsako celo število a nasprotni element oziroma inverz za množenje, torej tako celo število $b \in \mathbb{Z}$, da bi bilo $a \cdot b = 1$. Pravzaprav ima enačba

$$a \cdot x = 1$$

v množici celih števil rešitev samo za a je 1 ali -1. Zato množico celih števil razširimo do množice racionalnih števil, v kateri ima vsako število, razen števila 0, inverzni element za množenje.

1.3. Racionalna števila

Ulomek je urejen par celih števil a in b, $b \neq 0$, ki ga običajno zapišemo v obliki $\frac{a}{b}$. Število a imenujemo števec, število b pa imenovalec ulomka $\frac{a}{b}$. Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto *racionalno število*, torej $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, če je $ad = bc$. Na primer, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, torej pojemo enako, če pojemo dva kosa torte, razrezane na četrtine, ali en kos torte, razrezane na polovico. Opazimo še, da lahko vsako racionalno število predstavimo z ulomkom, katerega imenovalec je naravno število, na primer, $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$. Množico racionalnih števil označimo s

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\},$$

pri čemer ulomke, ki predstavljajo isto racionalno število, identificiramo.

Vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ lahko predstavimo kot racionalno število $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, torej je množica celih števil podmnožica racionalnih števil,

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Oglejmo si sedaj različne relacije in operacije, ki jih definiramo na racionalnih številih, in hkrati pokažimo, da so razširitve relacij in operacij, definiranih na celih številih.

Na množici racionalnih števil je definirana urejenost z naslednjim predpisom. Za racionalni števili $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $b, d \in \mathbb{N}$, velja, da je

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{natanko tedaj, ko je } ad < bc.$$

Če sta $a, c \in \mathbb{Z}$ in je $a < c$, potem očitno velja, da je $a \cdot 1 < 1 \cdot c$, oziroma $\frac{a}{1} < \frac{c}{1}$, torej je urejenost na množici racionalnih števil razširitev urejenosti na množici celih števil. Nima pa racionalno število enolično določenega predhodnika ali naslednika. To pomeni, da za $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{N}$, ne obstaja racionalno število, ki bi bilo prvo večje od $\frac{a}{b}$. Na primer, če je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ za število $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $d \in \mathbb{N}$, potem vedno obstaja racionalno število, ki je večje od $\frac{a}{b}$ in manjše od $\frac{c}{d}$. Tako racionalno število je na primer $\frac{ad+bc}{2bd}$, torej

$$\frac{a}{b} < \frac{ad + bc}{2bd} < \frac{c}{d}.$$

Preverimo najprej, da velja leva neenakost, kar pomeni, da mora veljati

$$a \cdot 2bd < b(ad + bc).$$

Poenostavimo neenakost in dobimo, da mora veljati

$$ad < bc.$$

Ta neenakost pa velja, saj je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Podobno bi preverili, da velja tudi desna neenakost.

Na množici racionalnih števil definiramo operacijo seštevanja s predpisom

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

in operacijo množenja s predpisom

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni. Preverimo na primer asociativnost seštevanja:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{(ad+bc)f+bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf},$$

enako pa dobimo tudi, če izračunamo

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df}=\frac{adf+b(cf+de)}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

V množici racionalnih števil obstaja za vsako neničelno racionalno število $\frac{a}{b}$ njegov *inverz za množenje*, in sicer racionalno število $\frac{b}{a}$, kar zapišemo tudi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}.$$

Na množici racionalnih števil potem definiramo deljenje racionalnih števil $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ kot množenje števila $\frac{a}{b}$ z inverznim elementom števila $\frac{c}{d}$, torej

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

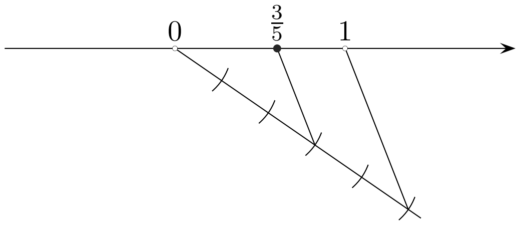
Operaciji seštevanja in množenja na celih številih in racionalnih številih se prav tako ujemata. Na primer, celi števili a in b predstavimo kot racionalni števili v obliki $\frac{a}{1}$ in $\frac{b}{1}$. Če seštejemo ti dve racionalni števili, dobimo

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a\cdot 1+1\cdot b}{1\cdot 1}=\frac{a+b}{1}.$$

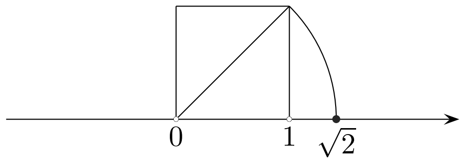
Izraz na levi predstavlja vsoto celih števil a in b, izraz na desni pa celo število $a+b$. Torej je seštevanje na množici racionalnih števil res razširitev seštevanja na množici celih števil. Enako velja za množenje.

Zaradi vseh naštetih lastnosti pravimo, da je množica racionalnih števil *razširitev* množice celih števil.

Vsako racionalno število lahko predstavimo s točko na številski premici. Na primer, želimo predstaviti število $\frac{3}{5}$. To storimo tako, da na poltraku označimo 5 točk, vsaki zaporedni točki sta na enaki razdalji. Nato narišemo dve vzporednici, upoštevamo lastnosti podobnih trikotnikov in dobimo točko, ki predstavlja $\frac{3}{5}$.



Vendar pa, kot pravi naslednji izrek, ne moremo vsake točke na številski premici predstaviti z racionalnim številom. Na primer, označimo z d dolžino diagonale enotskega kvadrata in za katero po Pitagorovem izreku velja $d^2 = 2$.



Videli bomo, da $d = \sqrt{2}$ ni racionalno število. Od tod tudi sledi, da v množici racionalnih števil ne obstaja rešitev enačbe

$$x^2 = 2.$$

Izrek. *Število $\sqrt{2}$ ni racionalno število.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z metodo *reductio ad absurdum*, to je z metodo *dokazovanja s protislovjem*. To pomeni, da na začetku privzamemo, da je $\sqrt{2}$ racionalno število, nato pa pri tej predpostavki s pravilnim sklepanjem pridemo do napačne trditve, pridemo do protislovja. Ker so vsi vmesni sklepi pravilni, na koncu pa pridemo do protislovja, pomeni, da je naša začetna predpostavka napačna.

Privzemimo torej, da je $\sqrt{2}$ racionalno število in ga lahko zato zapišemo v obliki ulomka $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ker je število $\sqrt{2}$ večje od nič, lahko izmed vseh ulomkov, ki predstavljajo število $\sqrt{2}$, izberemo tak ulomek, da sta $a, b \in \mathbb{N}$. Dodatno lahko tudi privzamemo, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan. Števili a in b sta potem tuji. Enakost $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ kvadriramo in dobimo

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

oziroma

$$2b^2 = a^2.$$

Naravno število a^2 je torej sodo, kar je mogoče le, če je a tudi sodo število. Sodo število pa lahko zapišemo v obliki $a = 2k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Sledi, da je $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ in zato $b^2 = 2k^2$. To pa pomeni, da je b^2 sodo število in zato mora biti tudi b sodo število. Sledi, da sta tako a kot tudi b sodi števili, kar pa je protislovje, saj smo privzeli, da sta a in b tuji števili. Torej je bila začetna predpostavka napačna in $\sqrt{2}$ ni racionalno število. $\square$

Ker vseh točk na številski premici ne moremo predstaviti z racionalnimi števili, pravimo, da množica racionalnih števil ni *polna*.

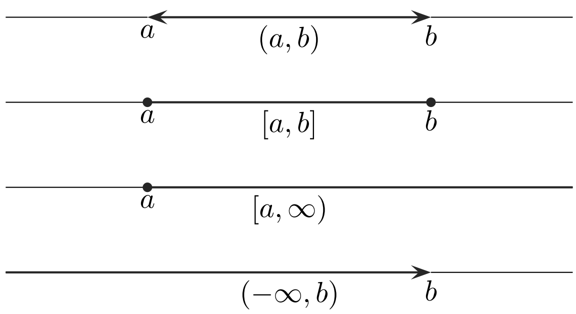
1.4. Realna števila

Videli smo, da množica racionalnih števil ni polna, torej vsaka točka na realni osi ne predstavlja racionalnega števila. Zato množico racionalnih števil dopolnimo do množice *realnih števil*, ki jo označimo z $\mathbb{R}$. Formalno to storimo z Dedekindovimi rezi, ker pa formalna razširitev ni preprosta, je na tem mestu ne bomo naredili. Navedimo samo izrek.

IZREK. *Vsako realno število je predstavljeno z natanko eno točko na številski premici in vsaka točka na številski premici predstavlja natanko eno realno število.*

Množica realnih števil $\mathbb{R}$ je urejena. Za realni števili a in b velja, da je $a < b$, če je število a na številski premici levo od števila b. Zapišimo nekatere podmnožice realnih števil, definirane s pomočjo urejenosti:

- $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, odprti interval,
- $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, zaprti interval,
- $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$, zaprti poltrak,
- $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$, odprti poltrak.

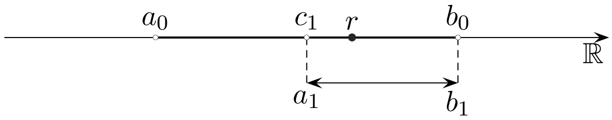


Če realno število r ni racionalno število, torej

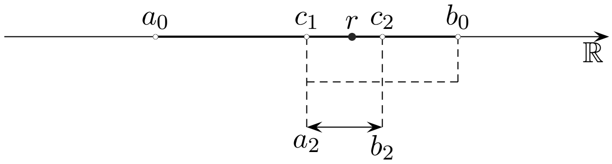
$$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

potem pravimo, da je r *iracionalno število.* Kljub temu, da vseh točk na številski premici ne moremo predstaviti z racionalnimi števili, lahko poljubno blizu katerekoli točke na številski premici najdemo točko, ki predstavlja racionalno število. To lahko storimo na primer z metodo bisekcije, ki jo na hitro opišimo. Označimo z r poljubno število, ki predstavlja točko na številski premici. Na začetku si izberemo racionalni števili a_0 in b_0, za kateri velja, da je $a_0 < r < b_0$. Število r je oddaljeno od enega izmed teh dveh racionalnih števil za največ $\frac{b_0 - a_0}{2}$. Definiramo $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Ker sta a_0

in b_0 racionalni števili, je racionalno število tudi c_1. Ločimo tri možnosti. Če je $r = c_1$, potem smo končali. Če je $r < c_1$, potem definiramo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_1$. Če pa je $r > c_1$, potem definiramo $a_1 = c_1$, $b_1 = b_0$. Število r je oddaljeno od enega izmed racionalnih števil a_1, b_1 za največ $\frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b_0-a_0}{4}$.



V drugem koraku na enak način nato definiramo $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ in v odvisnosti od tega, ali je $r > c_2$ ali $r < c_2$, nato še a_2 in b_2. Število r je od enega izmed racionalnih števil a_2, b_2 oddaljeno največ $\frac{b_0-a_0}{2^3}$.



Na n-tem koraku dobimo, da je število r oddaljeno od enega izmed racionalnih števil a_n, b_n za največ $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$. Ker je n lahko poljubno velik in zato število $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$ poljubno majhno, res lahko poljubno blizu katerekoli točke na številski premici najdemo točko, ki predstavlja racionalno število. Pravimo, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ *gosta* v množici realnih števil $\mathbb{R}$.

Realna števila običajno zapišemo v decimalni obliki, baza decimalnega sistema je število 10. To pomeni, da število $r \in \mathbb{R}$ zapišemo v obliki

$$r = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \ldots,$$

pri čemer so $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots$ števke v decimalnem zapisu števila r, torej elementi množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Opomnimo, da ima vsako racionalno število končen ali periodično neskončen decimalni zapis, vsako iracionalno število pa neperiodično neskončen decimalni zapis.

PRIMER. Navedimo realna števila s končnim, periodično neskončnim in neperiodično neskončnim decimalnim zapisom:

$$\frac{217}{80} = 2.7125,$$
$$\frac{5}{26} = 0.1923076923076\ldots,$$
$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

Realno število lahko zapišemo tudi v kakšni drugi bazi, največkrat se poleg števila 10 za bazo uporablja še število 2, redkeje tudi 16.

Primer. Zapišimo realno število $r = 21.6875$ v binomskem zapisu. Baza je v tem primeru število 2, realno število pa zapišemo v obliki

$$r = a_n \cdot 2^n + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0 + b_1 \cdot 2^{-1} + b_2 \cdot 2^{-2} + \ldots,$$

pri čemer so $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots$ števke v binomskem zapisu števila r, torej elementi množice $\{0, 1\}$. Najprej pretvorimo celi del števila. Največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 21, je $2^4 = 16$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 5$. Podobno določimo še ostale števke in dobimo $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Izračunali smo, da je

$$21_{(10)} = 10101_{(2)}.$$

Pretvorimo še neceli del števila. Največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.6875, je $2^{-1} = 0.5$, torej $0.6875 = 1 \cdot 2^{-1} + 0.1875$. Največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.1875, je $2^{-3} = 0.125$, torej $0.6875 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0.0625$. Največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.0625, je $2^{-4} = 0.0625$, torej $0.6875 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$. Torej je binarni zapis števila 21.6875 enak

$$21.6875_{(10)} = 10101.1011_{(2)}.$$

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo absolutno vrednost realnega števila $r \in \mathbb{R}$ s predpisom:

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{če je} \quad r \geq 0, \\ -r, & \text{če je} \quad r \leq 0. \end{cases}$$

Naštejmo nekaj lastnosti, ki veljajo za absolutno vrednost.

Trditev. *Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}$ in naj bo $c \geq 0$. Potem je:*

- $|a| \leq c$ *natanko tedaj, ko je* $-c \leq a \leq c$,
- $|-a| = |a|$,
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$, *trikotniška neenakost,*
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

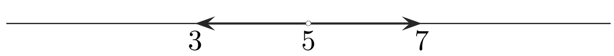
Dokaz. Dokažimo samo prvo in zadnjo neenakost, ostale pokažemo na podoben način.

- Če je $a \geq 0$, je $a = |a| \leq c$ natanko tedaj, ko je $-c \leq 0 \leq a \leq c$. Če pa je $a \leq 0$, je $-a = |a| \leq c$ natanko tedaj, ko je $-c \leq a \leq 0 \leq c$.

- Neenakost
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$
bomo pokazali s pomočjo prve točke. Preverili bomo, da je
$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$
Po trikotniški neenakosti velja
$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$
torej je
$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$
Podobno zapišemo
$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|,$$
torej je
$$-|b - a| = -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

□

Primer. Določimo vsa realna števila x, za katera velja
$$|x - 5| < 2.$$
Ker velja $|x - 5| < 2$ natanko tedaj, ko je
$$-2 < x - 5 < 2,$$
zadoščajo prvotni neenakosti vsa realna števila, za katera velja
$$3 < x < 7.$$



1.5. Kompleksna števila

Poskusimo rešiti enačbo
$$x^2 = -1.$$
Očitno $x = 0$ ni rešitev enačbe. Če je x pozitivno realno število, potem je x^2 prav tako pozitivno realno število. Tudi če je x negativno realno število, je x^2 pozitivno realno število. Torej nobeno realno število ni rešitev enačbe $x^2 = -1$. To je eden izmed razlogov, da razširimo množico realnih števil do množice kompleksnih števil.

Spomnimo se, da smo množico celih števil razširili do množice racionalnih števil tako, da smo racionalno število s pomočjo ulomka definirali kot urejen par celih števil $\frac{a}{b}$, prvo celo število a je števec, drugo neničelno celo število b pa imenovalec ulomka. Nato smo še povedali, da ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število natanko tedaj, ko je $ad = bc$, in da je celo število $a \in \mathbb{Z}$ predstavljeno z ulomkom $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$. Podobno razširimo množico realnih števil do množice kompleksnih števil.

Kompleksno število je par realnih števil (a, b), prvo realno število a imenujemo *realni del*, drugo realno število b pa *imaginarni del* kompleksnega števila. Kompleksni števili (a, b) in (c, d) sta enaki natanko tedaj, ko imata enaka realna dela in enaka imaginarna dela, torej $a = c$ in $b = d$. Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$, torej
$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Vsako realno število $a \in \mathbb{R}$ predstavimo kot kompleksno število $(a, 0) \in \mathbb{C}$, torej je množica realnih števil podmnožica kompleksnih števil $\mathbb{C}$,
$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$
Na množici kompleksnih števil definiramo:

- operacijo seštevanja s predpisom
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
- operacijo množenja s predpisom
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ni težko preveriti, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni. Preverimo na primer asociativnost množenja. Zmnožka
$$\begin{aligned}((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f)\\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)\\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) &= (a,b)\cdot(ce-df,cf+de)\\ &= (a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))\\ &= (ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

sta enaka, torej je množenje asociativno.

Preverimo še, da se operaciji seštevanja in množenja na realnih in kompleksnih številih ujemata. Naj bosta $a,b\in\mathbb{R}$, njuna vsota je $a+b$ in zmnožek ab. Kot kompleksni števili predstavimo a in b v obliki $(a,0)$ in $(b,0)$, število $a+b$ kot $(a+b,0)$ in število ab kot $(ab,0)$. Ker je

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

in

$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(ab,0),$$

se operaciji seštevanja in množenja na realnih in kompleksnih številih res ujemata, torej je množica $\mathbb{C}$ razširitev množice $\mathbb{R}$.

Rešimo sedaj enačbo $x^2=-1$ v okviru množice kompleksnih števil. Naj bo $x\in\mathbb{C}$, torej $x=(a,b)$ za $a,b\in\mathbb{R}$. Potem je

$$(a,b)\cdot(a,b)=(-1,0),$$

oziroma

$$(a^2-b^2,ab+ba)=(-1,0).$$

Iz enakosti imaginarnih delov sledi $2ab=0$, torej je $a=0$ ali $b=0$. Če je $b=0$, potem iz enakosti realnih delov sledi $a^2=-1$, kar pa ni mogoče, saj je a realno število. Če pa je $a=0$, dobimo $b^2=1$, torej je $b=1$ ali $b=-1$. Enačba $x^2=-1$ ima torej v okviru kompleksnih števil dve rešitvi, $x_1=(0,1)$ in $x_2=(0,-1)$.

Kompleksno število $(0,1)$ označimo z i in ga imenujemo *imaginarna enota*. Ker je

$$(0,1)\cdot(b,0)=(0\cdot b-1\cdot 0,b)=(0,b),$$

je

$$(a,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0),$$

torej lahko vsako kompleksno število (a,b) predstavimo v obliki

$$(a,b)=a+\mathrm{i}\cdot b.$$

Če kompleksna števila zapišemo s pomočjo imaginarne enote, $(0,1)=\mathrm{i}$, $(a,b)=a+\mathrm{i}b$, $(c,d)=c+\mathrm{i}d$, potem velja:

- $\mathrm{i}^2=-1$,

- $a + \mathrm{i}b + c + \mathrm{i}d = a + c + \mathrm{i}(b + d)$,
- $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc)$,
- realni del kompleksnega števila $a + ib$ je a, kar na kratko zapišemo $\mathrm{Re}(a + \mathrm{i}b) = a$,
- imaginarni del kompleksnega števila $a + ib$ je b, kar na kratko zapišemo $\mathrm{Im}(a + \mathrm{i}b) = b$.

  Še enkrat velja poudariti, da je imaginarni del kompleksnega števila realno število.

Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ definiramo konjugiranje. Naj bo $a + ib$ kompleksno število. Potem je njegova konjugirana vrednost

$$\overline{a + \mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b.$$

Naštejmo nekaj lastnosti konjugiranja. Naj bo $z = a + ib \in \mathbb{C}$ in $w = c + \mathrm{i}d \in \mathbb{C}$. Potem velja:

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $z + \overline{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$, torej je
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2},$$
- $z - \overline{z} = a + \mathrm{i}b - (a - \mathrm{i}b) = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$, torej je
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}},$$
- $z \cdot \overline{z} = (a + \mathrm{i}b) \cdot (a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$,
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Izmed vseh naštetih lastnosti se prepričajmo zgolj, da velja zadnja lastnost $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$:

$$\begin{aligned}\overline{(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d)} = \overline{ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc)} &= ac - bd - \mathrm{i}(ad + bc)\\ &= (a - \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d) = \overline{(a + \mathrm{i}b)} \cdot \overline{(c + \mathrm{i}d)}.\end{aligned}$$

Oglejmo si sedaj podrobneje enakost $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. Če delimo obe strani enakosti z realnim številom $a^2 + b^2$, dobimo

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1,$$

torej je inverz za množenje kompleksnega števila z enak

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}.$$

Kompleksno število $w = c + \mathrm{i}d$ delimo s kompleksnim številom $z = a + \mathrm{i}b$ tako, da w pomnožimo z $\frac{1}{z}$, torej

$$w : z = w \cdot \frac{1}{z} = (c + \mathrm{i}d) \cdot \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}.$$

Definirajmo še absolutno vrednost kompleksnega števila $z = a + \mathrm{i}b$. Absolutna vrednost je definirana z enakostjo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

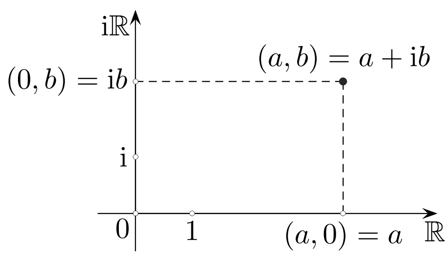
Vemo, da je $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, torej je

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za absolutno vrednost veljajo naslednje lastnosti:

- $|\overline{z}| = |z|$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$, trikotniška neenakost.

Kompleksna števila lahko predstavimo kot točke v ravnini. Na abscisno os nanašamo realni del kompleksnega števila, na ordinatno os pa imaginarni del kompleksnega števila. Abscisno os imenujemo *realna os*, ordinatno os imenujemo *imaginarna os*, ravnino pa *kompleksna ravnina*. Kompleksno število $a+\mathrm{i}b$ predstavimo v kompleksni ravnini s kartezičnima koordinatama (a, b).



Lahko pa kompleksno število predstavimo tudi s polarnima koordinatama r in ϕ:

- polarna koordinata r je dolžina krajevnega vektorja do točke (a, b), torej oddaljenost točke (a, b) od koordinatnega izhodišča,

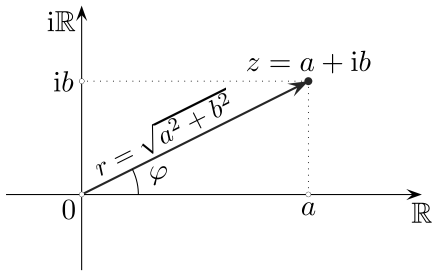
$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

- polarni kot φ je kot med abscisno osjo in krajevnim vektorjem do točke (a, b), merjen v pozitivni smeri, torej je

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{3}$$

Torej je polarni zapis kompleksnega števila

$$a + \mathrm{i}b = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

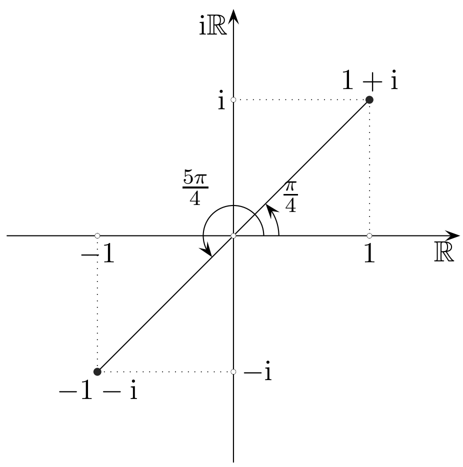


Iz enakosti (3) sledi, da je

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

Pri računanju polarnega kota s pomočjo enačbe (4) moramo biti previdni, saj z enakostjo $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ polarni kot ni enolično določen. Za kompleksni števili $a + \mathrm{i}b$ in $-a - \mathrm{i}b$ je tangens polarnega kota enak.

Primer. Za $z = 1 + \mathrm{i}$ je polarni kot $\varphi = \frac{\pi}{4}$, za $w = -1 - \mathrm{i}$ je polarni kot $\psi = \frac{5\pi}{4}$, v obeh primerih pa je $\tan\varphi = \tan\psi = 1$.



Opomnimo še, da pri polarnem zapisu kompleksnega števila $z = a + \mathrm{i}b$ velja $|z| = r$.

Dve kompleksni števili $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ in $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ sta enaki, če je $r = \rho$ in če je $\phi = \psi + 2k\pi$, saj za kosinus in sinus velja, da je $\cos\psi = \cos(\psi + 2k\pi)$ in $\sin\psi = \sin(\psi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Primer. Zapišimo v polarni obliki kompleksno število $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Najprej izračunamo absolutno vrednost kompleksnega števila,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

nato pa še polarni kot,

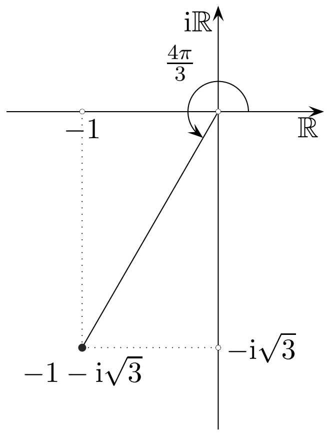
$$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3},$$

torej je

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Polarni zapis je

$$-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$



Oglejmo si, kako množimo dve kompleksni števili, dani v polarni obliki. Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Z upoštevanjem adicijskih izrekov dobimo

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Torej kompleksni števili, zapisani v polarni obliki, zmnožimo tako, da zmnožimo njuni absolutni vrednosti, polarna kota pa seštejemo.

Podobno z uporabo adicijskih izrekov pokažemo, da je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

V posebnem primeru, ko množimo kompleksno število samo s sabo, ko je torej $z_1 = z_2 = z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dobimo

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)).$$

Oziroma splošneje, če računamo n-to potenco kompleksnega števila, dobimo

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)), \tag{5}$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Formulo (5) imenujemo *Moivrova formula*.

PRIMER. Naj bo $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$. Izračunajmo z^8.

Kompleksno število z najprej zapišemo v polarni obliki. V ta namen izračunamo

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

in

$$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

torej je

$$\varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Dobili smo, da je

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

in zato je

$$\begin{aligned} z^8 &= 2^8\left(\cos\left(8 \cdot \left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(8 \cdot \left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= 256(\cos(14\pi) + \mathrm{i}\sin(14\pi)) = 256. \end{aligned}$$

S pomočjo Moivrove formule zelo preprosto izračunamo potence kompleksnega števila. Oglejmo si sedaj, kako za dano kompleksno število z poiščemo vse rešitve w enačbe

$$w^n = z.$$

OPOMBA. Videli bomo, da ima ta enačba n rešitev, zato se bomo izrazu, da je w n-ti koren števila z, izogibali.

Zapišimo kompleksni števili w in z v polarni obliki

$$w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi), \quad z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Potem je po Moivrovi formuli

$$\rho^n(\cos(n\psi) + \mathrm{i}\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Sledi, da je $\rho^n = r$ in $n\psi = \varphi + 2k\pi$, torej

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Kljub temu, da je k lahko poljubno celo število, dobimo zaradi periodičnosti funkcij sinus in kosinus samo n različnih vrednosti izraza $\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}$. Sledi, da ima enačba $w^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ natanko n rešitev, in sicer

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Primer. Poiščimo vse rešitve enačbe $w^4 = -1 + \mathrm{i}$.

Kompleksno število $-1 + \mathrm{i}$ najprej zapišemo v polarni obliki. V ta namen izračunamo

$$|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

in

$$\tan\varphi = \frac{1}{-1} = -1,$$

torej je

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Sledi, da je

$$-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

in zato je

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, 2, 3$. Dobimo štiri rešitve:

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{16}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{16}\right).$$

2. Zaporedja

V tem poglavju bomo definirali zaporedja realnih števil in si ogledali, kdaj je dano zaporedje konvergentno. Ob koncu poglavja bomo s pomočjo zaporedij definirali še potence z iracionalnim eksponentom in konstanto e.

2.1. Definicija zaporedja

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi realno število.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Realno število a_n, ki ustreza naravnemu številu n, imenujemo n-ti člen zaporedja, število n pa indeks člena a_n. Členi zaporedja so torej urejeni in jih lahko zapišemo po vrsti

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ kratko zapišemo

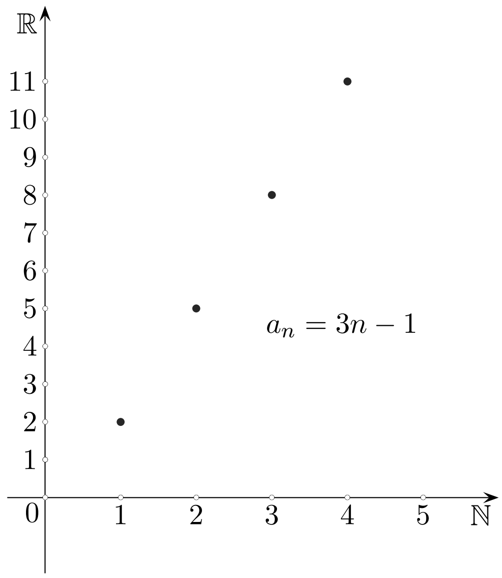
$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

a_n imenujemo splošni člen zaporedja. Zaporedje ponavadi še krajše zapišemo kot $\{a_n\}$, v nekateri literaturi pa je zaporedje zapisano tudi kot (a_n). Zaporedje lahko definiramo na več načinov:

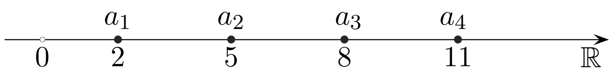
- eksplicitno, splošni člen a_n je podan s predpisom odvisnim od n,
- rekurzivno, naštejemo nekaj začetnih členov, člen a_{n+1} pa je podan s predpisom, odvisnim od prejšnjih členov a_n, a_{n-1}, $\dots, a_2, a_1$.

Člene zaporedja $\{a_n\}$ lahko zelo nazorno predstavimo tudi s točkami (n, a_n) v ravnini ali s točkami a_n na številski premici.

PRIMER. Zaporedje $2, 5, 8, 11, \dots$ je eksplicitno podano s predpisom $a_n = 3n - 1$, rekurzivno pa s predpisom $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Člene zaporedja predstavimo najprej kot točke v ravnini.



Člene zaporedja predstavimo še kot točke na številski premici.



V prejšnjem primeru sta se poljubna sosednja člena razlikovala za 3. Zaporedje, pri katerem se poljubna zaporedna člena razlikujeta za isto konstanto, torej

$$a_{n+1} - a_n = d,$$

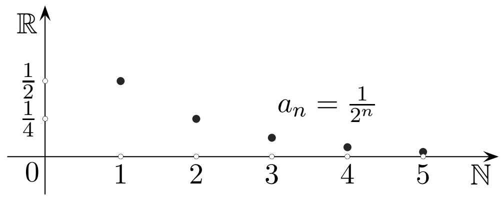
imenujemo *aritmetično zaporedje.* Razliko d poljubnih dveh zaporednih členov, ki je konstantna, imenujemo diferenca aritmetičnega zaporedja. Rekurzivni zapis aritmetičnega zaporedja je

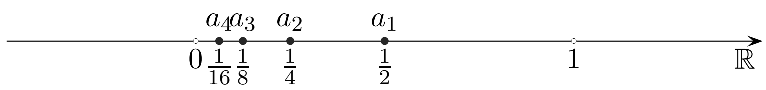
$$a_{n+1} = a_n + d,$$

eksplicitni zapis pa

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Primer. Zaporedje $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ je eksplicitno podano s predpisom $a_n = \frac{1}{2^n}$, rekurzivno pa s predpisom $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$.





V prejšnjem primeru sta se poljubna sosednja člena razlikovala za faktor $\frac{1}{2}$. Zaporedje, pri katerem je količnik poljubnih dveh zaporednih členov konstanten, torej

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

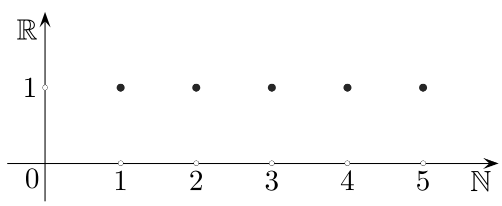
imenujemo *geometrijsko zaporedje*. Količnik q imenujemo tudi kvocient geometrijskega zaporedja. Rekurzivni zapis geometrijskega zaporedja je

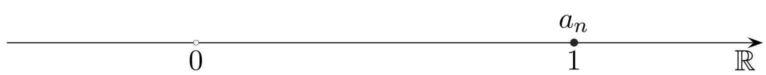
$$a_{n+1} = a_n q,$$

eksplicitni zapis pa

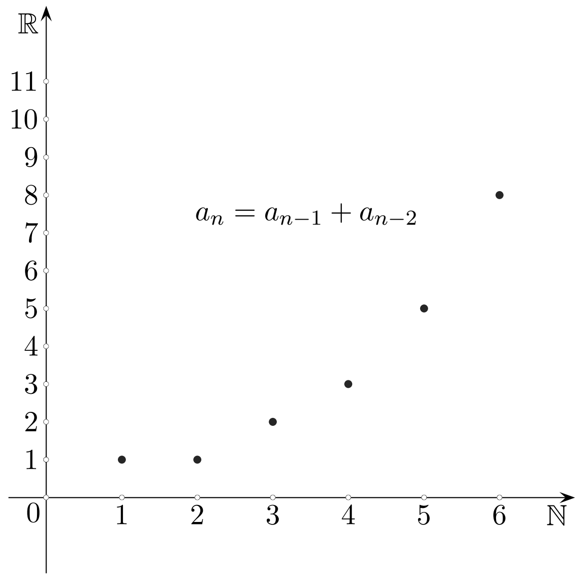
$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Primer. Zaporedje $1, 1, 1, 1, \ldots$ je eksplicitno podano s predpisom $a_n = 1$, rekurzivno pa s predpisom $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n$. Imenujemo ga konstantno zaporedje.





Primer. Fibonaccijevo zaporedje $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ je rekurzivno podano s predpisom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, eksplicitno pa s predpisom $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.



Opomba. Včasih, predvsem kadar se s tem poenostavi eksplicitni zapis zaporedja, členov zaporedja ne številčimo od 1 dalje, temveč od kakšnega drugega števila dalje. Na primer, oba predpisa $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, in $b_n = \frac{1}{3^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, določata isto zaporedje $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$

V nadaljevanju si oglejmo nekaj lastnosti zaporedij.

Definicija. Zaporedje $\{a_n\}$ je *naraščajoče*, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in *strogo naraščajoče*, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je *padajoče*, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in *strogo padajoče*, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Če želimo, na primer, preveriti, ali je zaporedje naraščajoče, izračunamo razliko $a_{n+1} - a_n$ in pokažemo, da je $a_{n+1} - a_n \geq 0$. V primeru, da so vsi členi zaporedja pozitivni, lahko izračunamo tudi količnik $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ in pokažemo, da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Definicija. Zaporedje $\{a_n\}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja tako realno število M, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število M imenujemo *zgornja meja* zaporedja $\{a_n\}$.

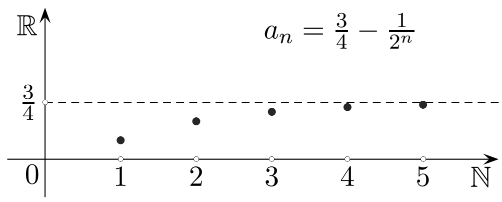
Zaporedje $\{a_n\}$ je *navzdol omejeno*, če obstaja tako realno število m, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število m imenujemo *spodnja meja* zaporedja $\{a_n\}$.

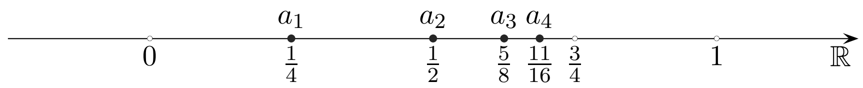
Zaporedje je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno.

Primer. Zaporedje $\{a_n\}$, dano s predpisom

$$a_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^n},$$

je strogo naraščajoče in navzgor omejeno s $\frac{3}{4}$.





Opomba. Če je M zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$, potem je vsako realno število $N > M$ tudi zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$.

Definicija. Najmanjšo izmed vseh zgornjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$M_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Največjo izmed vseh spodnjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo *natančna spodnja meja* ali *infimum* zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$m_0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Naj bo M_0 natančna zgornja meja. To pomeni, da je to najmanjša izmed vseh zgornjih mej. Če jo torej zmanjšamo za katerokoli, še tako majhno število $\varepsilon > 0$, potem $M_0 - \varepsilon$ ni več zgornja meja. To pa pomeni, da obstaja vsaj en tak člen a_{n_0} zaporedja $\{a_n\}$, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. Razmislili smo, da je M_0 supremum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je

$$a_{n_0} > M_0 - \varepsilon.$$

Podobno velja, da je m_0 infimum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Opomba. Natančno zgornja meja in natančna spodnja meja nista nujno člena zaporedja.

Primer. Natančna zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$, danega s predpisom

$$a_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^n},$$

je število $\dfrac{3}{4}$, ki ni člen zaporedja.

Opomba. Če je $\{a_n\}$ naraščajoče zaporedje, potem je navzdol omejeno z a_1. Torej je

$$a_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Podobno je padajoče zaporedje $\{a_n\}$ navzgor omejeno z a_1. Torej je

$$a_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Primer. Za zaporedje $\{a_n\}$, dano eksplicitno z enakostjo $a_n = \frac{n+1}{n}$, bomo najprej pokazali, da je padajoče. Torej je njegova natančna zgornja meja kar prvi člen. Nato bomo pokazali, da je omejeno navzdol, in določili še njegovo natančno spodnjo mejo.

Zapišimo najprej nekaj členov zaporedja $\{a_n\}$.

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$$

Vidimo, da je vsak naslednji člen manjši od predhodnega. Pokažimo, da velja to tudi v splošnem. Ker je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0,$$

je zaporedje res padajoče. Natančna zgornja meja zaporedja je torej njegov prvi člen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 2.$$

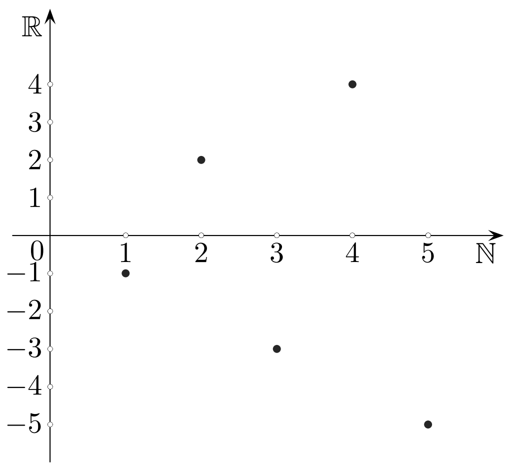
Ker je $n+1 > n$, torej $\frac{n+1}{n} > 1$, so vsi členi zaporedja strogo večji od 1 in zato je število 1 spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$. Pokažimo, da je število 1 največja od vseh spodnjih mej, da je torej število 1 natančna spodnja meja zaporedja. Pa denimo, da je natančna spodnja meja $m_0 > 1$, torej $m_0 = 1 + \delta$ za nek $\delta > 0$. Potem obstaja tako dovolj veliko naravno število n_0, da je $\frac{1}{n_0} < \delta$. Sledi, da je

$$a_{n_0} = \frac{n_0+1}{n_0} = 1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \delta = m_0,$$

torej m_0 ni spodnja meja, protislovje. Pokazali smo, da je

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1.$$

Primer. Zaporedje $a_n = n(-1)^n$ ni omejeno ne navzdol in ne navzgor.

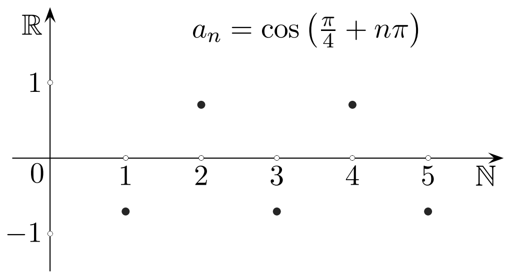


Definicija. Če se členom zaporedja izmenoma menja predznak, torej $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje *alternirajoče*.

Primer. Zaporedje $\{a_n\}$, dano eksplicitno s predpisom

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right),$$

je alternirajoče.

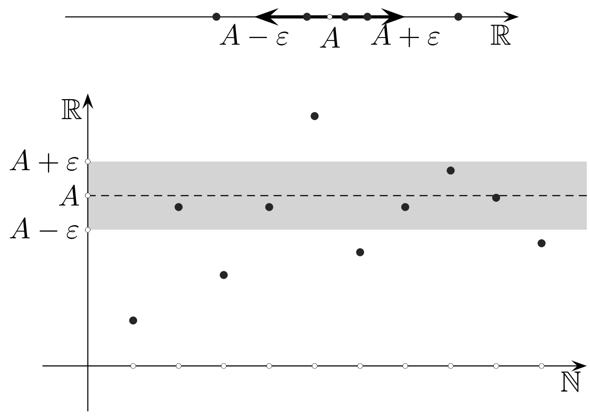


2.2. Konvergenca zaporedij

V nadaljevanju bomo definirali enega izmed osrednjih pojmov v zvezi z zaporedji, to je limito zaporedja. Pred tem pa definirajmo še limiti soroden pojem stekališča.

Definicija. Število A je *stekališče* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neskončno členov zaporedja, za katere velja $|A - a_n| < \varepsilon$. Torej je za vsak $\varepsilon > 0$ na intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ neskončno členov zaporedja $\{a_n\}$.

Če člene zaporedja nanašamo na številsko premico, potem je za vsak $\varepsilon > 0$ neskončno členov na intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, če pa člene zaporedja predstavimo v ravnini, potem je neskončno členov v pasu $\mathbb{R} \times (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.



Opomba. Naj bo $\varepsilon > 0$. Interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ imenujemo tudi ε-*okolica* števila A.

Definirajmo sedaj pojem limite.

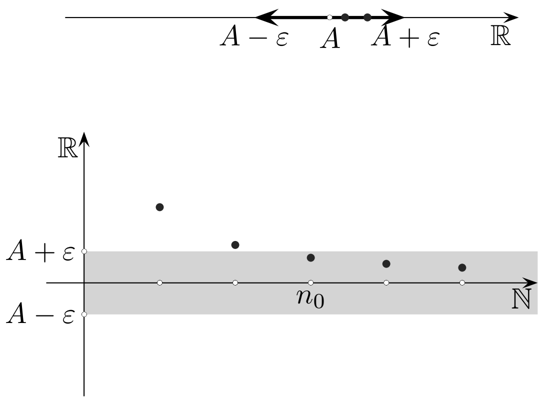
Definicija. Število $A \in \mathbb{R}$ je *limita* zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|A - a_n| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$. Torej so za poljuben $\varepsilon > 0$ na intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ vsi členi zaporedja od nekega člena zaporedja a_{n_0} dalje.

Če za neko zaporedje $\{a_n\}$ obstaja njegova limita A, potem pravimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ *konvergentno*, in pišemo

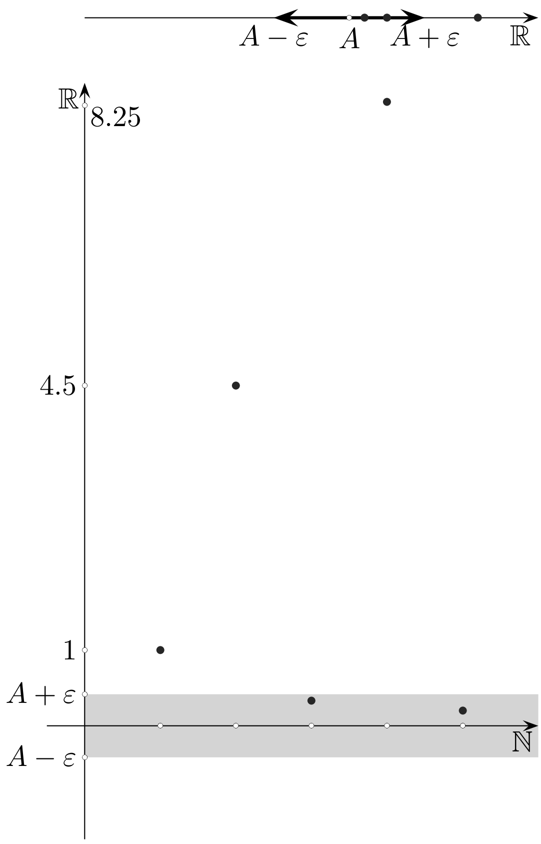
$$\lim_{n \to \infty} a_n = A$$

ali na kratko $a_n \to A$. Če za neko zaporedje $\{a_n\}$ limita ne obstaja, potem pravimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ *divergentno*.

Primer. Zaporedje, dano s predpisom $a_n = \frac{1}{n}$, ima limito $A = 0$. Za vsak $\varepsilon > 0$ so namreč od $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ znotraj ε-okolice števila 0 vsi členi a_n, $n \geq n_0$.



Primer. Zaporedje, dano s predpisom $a_n = n+(-1)^n n+\frac{1}{n}$, je divergentno. Število $A = 0$ je sicer stekališče zaporedja, vendar so vsi členi s sodimi indeksi daleč od števila $A = 0$.



Primer. Zaporedje $\{a_n\}$, dano s predpisom $a_n = n$, je divergentno.

Kljub temu, da je zaporedje $\{a_n\}$, $a_n = n$, divergentno, ima lepo lastnost, da gredo vrednosti njegovih členov z naraščajočim n čez vse meje. Zapišimo to natančneje.

Definicija. Naj bo $\{a_n\}$ tako neomejeno zaporedje, da za vsak $M > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_n > M$ za vsak $n > n_0$. V tem primeru pravimo, da a_n *konvergira proti neskončno*, oziroma da ima *limito v neskončnosti*, in pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Podobno, naj bo $\{b_n\}$ tako neomejeno zaporedje, da za vsak $M < 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $b_n < M$ za vsak $n > n_0$. Potem pišemo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Oglejmo si nekaj lastnosti stekališča in limite, pri čemer bomo pozorni, v čem se pojma stekališča in limite razlikujeta.

Izrek. *Naj bo A limita konvergentnega zaporedja $\{a_n\}$. Potem je A tudi stekališče zaporedja $\{a_n\}$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je A limita zaporedja $\{a_n\}$, obstaja tak indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ za vsak $n > n_0$. Takih n je neskončno, torej je v vsaki ε-okolici števila A neskončno členov zaporedja $\{a_n\}$ in A je zato stekališče zaporedja $\{a_n\}$. $\square$

Opomba. Stekališče ni nujno limita zaporedja. Na primer, zaporedje $\{a_n\}$, dano s predpisom $a_n = (-1)^n$, ima dve stekališči 1 in -1, vendar nobeno izmed teh dveh stekališč ni limita zaporedja $\{a_n\}$.

Izrek. *Naj bo A limita zaporedja $\{a_n\}$. Potem je za vsak $\varepsilon > 0$ zunaj intervala $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ največ končno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}$.*

Dokaz. Če je A limita zaporedja, potem so za vsak $\varepsilon > 0$ znotraj intervala $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ vsi členi od nekega indeksa n_0 dalje. Členov, ki imajo indeks manjši od n_0, je le končno mnogo, torej je členov, ki morda niso znotraj intervala $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, največ končno. $\square$

Opomba. Če je A stekališče zaporedja $\{a_n\}$, potem je za nek $\varepsilon > 0$ zunaj intervala $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ lahko tudi neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}$. Na primer, zaporedje $\{a_n\}$, definirano s predpisom $a_n = (-1)^n$, ima zunaj intervala $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ neskončno členov.

Če ima zaporedje več stekališč, potem nobeno izmed stekališč ni limita zaporedja. Zunaj dovolj majhne okolice prvega stekališča je namreč v okolici drugega stekališča neskončno členov zaporedja. Tudi če ima zaporedje eno samo stekališče, to ni nujno limita zaporedja. Na primer, zaporedje $\{a_n\}$, definirano s predpisom $a_n = n + (-1)^n n + \frac{1}{n}$, ima eno samo stekališče 0, vendar ni konvergentno.

V prejšnjem primeru zaporedje ni bilo omejeno. Če pa zaporedje je omejeno in ima eno samo stekališče, potem nam naslednji izrek pove, da je to stekališče hkrati tudi limita zaporedja.

Izrek. *Zaporedje $\{a_n\}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.*

Dokaz. Izreka ne bomo dokazali v celoti, temveč bomo dokazali implikacijo samo v eno smer. Privzemimo, da je $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje, $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, in pokažimo, da je potem omejeno in ima natanko eno stekališče.

Pokažimo najprej, da je zaporedje $\{a_n\}$ omejeno. Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bo n_0 tak indeks, da je $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ za vsak $n > n_0$. Torej je $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ za vsak $n > n_0$. Najmanjši in največji element množice s končno elementi vedno obstaja, torej lahko definiramo

$$m_0 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, A - \varepsilon\}$$

in

$$M_0 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, A + \varepsilon\}.$$

Potem je

$$m_0 \leq a_n \leq M_0$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej je zaporedje $\{a_n\}$ res omejeno.

Pokažimo še, da ima konvergentno zaporedje natanko eno stekališče. Vemo že, da je limita A tudi stekališče zaporedja. Denimo, da bi obstajalo še eno stekališče $B \neq A$ zaporedja $\{a_n\}$. Naj bo $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$. Ker je A limita zaporedja, obstaja tak indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ za vsak $n > n_0$. Torej je zunaj ε-okolice števila A največ končno členov zaporedja, to pomeni, da je v ε-okolici števila B največ končno členov zaporedja in B ni stekališče zaporedja $\{a_n\}$. Pokazali smo, da ima konvergentno zaporedje natanko eno stekališče. □

Za omejena monotona zaporedja velja naslednja lepa lastnost.

Izrek. *Če je naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ navzgor omejeno, potem je konvergentno in njegova limita je enaka natančni zgornji meji zaporedja, torej*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Če naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ ni omejeno, potem je divergentno, ima pa limito v neskončnosti, torej

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Podobno, če je padajoče zaporedje $\{b_n\}$ navzdol omejeno, potem je konvergentno in njegova limita je enaka natančni spodnji meji zaporedja, torej

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Če padajoče zaporedje $\{b_n\}$ ni omejeno, potem je divergentno, ima pa limito v minus neskončnosti, torej

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Dokaz. Naj bo naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ navzgor omejeno, naj bo $M_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je M_0 natančna zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$, število $M_0 - \varepsilon$ pa ni več zgornja meja zaporedja, obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$. Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče, torej je $a_n \geq a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$ za vsak $n > n_0$. Hkrati pa velja $a_n \leq M_0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je M_0 zgornja meja zaporedja. Torej so na intervalu $(M_0 - \varepsilon, M_0 + \varepsilon)$ vsi členi zaporedja $\{a_n\}$ za $n \geq n_0$ in zato je M_0 limita zaporedja $\{a_n\}$.

Če zaporedje $\{a_n\}$ ni omejeno, potem za vsak $M > 0$ obstaja nek člen zaporedja a_{n_0}, tako da je $a_{n_0} > M$. Ker pa je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče, je potem tudi $a_n > M$ za vsak $n > n_0$. Torej ima zaporedje $\{a_n\}$ limito v neskončnosti.

Na enak način pokažemo izrek tudi za padajoča zaporedja. □

Oglejmo si še, kaj je z limito zaporedja, ki je omejeno med dve konvergentni zaporedji.

Izrek. *Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{c_n\}$ konvergentni zaporedji z isto limito, torej $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$. Če za zaporedje $\{b_n\}$ velja, da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem je tudi zaporedje $\{b_n\}$ konvergentno in ima isto limito, torej*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je A limita obeh zaporedij $\{a_n\}$ in $\{c_n\}$, obstaja nek indeks n_0, tako da so za $n > n_0$ vsi členi a_n in vsi členi c_n elementi okolice $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Torej velja $A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in zato je A tudi limita zaporedja $\{b_n\}$. □

Povedali smo, da je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, če so od nekje naprej vsi členi blizu limite. Večkrat pa je dobro opisati konvergentno zaporedje samo s členi zaporedja ne da bi poznali vrednost limite. Naslednji izrek pove, da je zaporedje konvergentno natanko tedaj, kadar so od nekje naprej vsi členi zaporedja blizu en drugega.

Izrek. *(Cauchyjev pogoj za konvergenco zaporedja.) Zaporedje $\{a_n\}$ je konvergentno natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je*

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, in za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Tudi tega izreka ne bomo dokazali v celoti, temveč bomo dokazali implikacijo samo v eno smer. Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in naj bo $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja tak indeks n_0, da je

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za vsak} \quad n > n_0.$$

Če je $n > n_0$ in $k \in \mathbb{N}$ poljuben, potem je tudi $n + k > n_0$ in zato

$$|a_{n+k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za} \quad n > n_0 \quad \text{in} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sledi

$$|a_n - a_{n+k}| = |a_n - A + A - a_{n+k}| \leq |a_n - A| + |A - a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

torej členi konvergentnega zaporedja res zadoščajo Cauchyjevemu pogoju.

$\square$

Opomba. Ker je pri konvergenci zaporedja pomembno samo, kaj se dogaja s členi zaporedja od nekega indeksa dalje, na konvergenco zaporedja začetnih končno mnogo členov ne vpliva. Natančneje, naj bo zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in naj bo $\{b_n\}$ zaporedje, ki se od zaporedja $\{a_n\}$ razlikuje v končno mnogo členih. Potem je tudi zaporedje $\{b_n\}$ konvergentno in ima enako limito kot zaporedje $\{a_n\}$.

2.3. Računanje z zaporedji

Oglejmo si pravila, ki veljajo pri računanju limite konvergentnih zaporedij.

Izrek. *Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni zaporedji. Potem velja:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

Če dodatno velja še, da je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potem velja tudi

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$

Dokaz. Izmed navedenih enakosti dokažimo le, da lahko zamenjamo limito in seštevanje. Ostale enakosti pokažemo na podoben način. Označimo limito konvergentnega zaporedja $\{a_n\}$ z $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in limito konvergentnega zaporedja $\{b_n\}$ z $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja tak indeks $n_1 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vsak $n > n_1$, in tak indeks $n_2 \in \mathbb{N}$, da je $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vsak $n > n_2$. Naj bo $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Potem za vsak $n > n_3$ velja

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Torej za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_3 \in \mathbb{N}$, da je

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_3$. Zaporedje $a_n + b_n$ je zato konvergentno z limito $A + B$. $\square$

Opomba. Naj bo $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje. Konstantno zaporedje je vedno konvergentno, torej je po prejšnjem izreku za poljubno konstanto c konvergentno tudi zaporedje $\{ca_n\}$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Primer. Izračunajmo limito zaporedja, danega s predpisom

$$a_n = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)(n+1)}.$$

Upoštevamo lastnosti, naštete v predhodnem izreku, in dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 4n + 1 + 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} (4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})}{\lim_{n\to\infty} (2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Pri računanju z zaporedji moramo biti pozorni, da so vsa zaporedja, ki nastopajo pri računanju, konvergentna.

Primer. Naj bo $a_n = n$ in $b_n = \frac{1}{n}$. Potem je zaporedje $\{a_n\}$ neomejeno in zato ni konvergentno, zaporedje $\{b_n\}$ je konvergentno, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, zaporedje $c_n = a_n \cdot b_n = 1$ pa je konstantno zaporedje in zato je $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. Torej v tem primeru ne moremo zapisati

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Opomba. V prejšnjih primerih smo obravnavali limite eksplicitno podanih zaporedij. Če je zaporedje $\{a_n\}$ podano z rekurzivnim predpisom

$$a_n = f(a_{n-1}),$$

kjer je f funkcija z dovolj lepimi lastnostmi, potem lahko iščemo limito zaporedja tako, da najprej preverimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, in nato rešimo enačbo

$$x = f(x).$$

Primer. Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ podano rekurzivno s predpisom

$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad a_n = 1 - \frac{a_{n-1}}{2}.$$

Njegovo limito poiščemo tako, da rešimo enačbo

$$x = 1 - \frac{x}{2}$$

in dobimo $x = \frac{2}{3}$. Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

2.4. Potence z iracionalnimi eksponenti

V nadaljevanju si bomo ogledali dve zaporedji, definirani s potencami, na koncu pa bomo s pomočjo zaporedij definirali potenco realnega števila z iracionalnim eksponentom. Najprej pa zapišimo Bernoullijevo neenakost, ki jo bomo potrebovali pri dokazovanju.

Izrek. *(Bernoullijeva neenakost.) Za vsako pozitivno število x in vsako naravno število $n > 1$ velja neenakost*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Dokaz. Izrek dokažemo z matematično indukcijo. Naj bo $x > 0$ poljuben. Najprej pokažemo bazo indukcije. Za $n = 2$ je leva stran neenakosti enaka $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$, desna stran neenakosti pa $1 + 2x$. Ker je $x > 0$, je tudi $x^2 > 0$ in zato $(1 + x)^2 > 1 + 2x$.

Pokažimo še indukcijski korak. Denimo, da Bernoullijeva neenakost velja za nek n. Potem velja tudi

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 > 1+(n+1)x,$$

kjer smo pri prvi neenakosti upoštevali indukcijsko predpostavko, da je $(1+x)^n > 1+nx$, pri drugi neenakosti pa, da je $nx^2 > 0$. Torej velja tudi indukcijski korak in po matematični indukciji potem sledi, da velja Bernoullijeva neenakost za vsako naravno število $n > 1$. □

Izrek. *Naj bo c poljubno realno število. Definiramo zaporedje*

$$a_n = c^n.$$

Potem velja:

- *če je $c > 1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = \infty$,*
- *če je $c = 1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 1$,*
- *če je $-1 < c < 1$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$,*
- *če je $c \leq -1$, je zaporedje $\{a_n\} = \{c^n\}$ divergentno.*

Dokaz. Če je $c > 1$, potem pišemo $c = 1 + x$, kjer je $x > 0$. Potem je po Bernoullijevi neenakosti $c^n = (1+x)^n > 1+nx$, to pa je neomejeno zaporedje, saj gre za vsak pozitiven x z naraščajočim n število $1+nx$ čez vse meje. Torej je v tem primeru $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = \infty$.

Če je $c = 1$, je zaporedje $c^n = 1$ konstantno in zato konvergentno z limito 1.

Če je $-1 < c < 1$, potem definiramo $b = \left|\frac{1}{c}\right|$. Ker je $b > 1$, je zaporedje b^n po prejšnjem neomejeno. Sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$.

Za $c \leq -1$ je neskončno členov večjih ali enakih 1 in neskončno členov manjših ali enakih -1. Torej v tem primeru zaporedje ni konvergentno. □

Izrek. *Naj bo c poljubno pozitivno število. Definiramo zaporedje*

$$a_n = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

Dokaz. Naj bo $c > 1$. Potem pri izbranem $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, definiramo $x = \frac{c-1}{n} > 0$, torej $c = 1 + nx$. Po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1 + \frac{c-1}{n}\right)^n = (1+x)^n > 1 + nx = 1 + n \cdot \frac{c-1}{n} = c > 1,$$

torej je
$$1 + \frac{c-1}{n} > \sqrt[n]{c} > 1.$$
Ker je limita levega in desnega zaporedja v neenakosti enaka 1, je 1 tudi limita srednjega zaporedja.

Če je $c = 1$, izrek očitno velja.

Če pa je $0 < c < 1$, potem definiramo $b = \frac{1}{c} > 1$. Potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$ in zato
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$
□

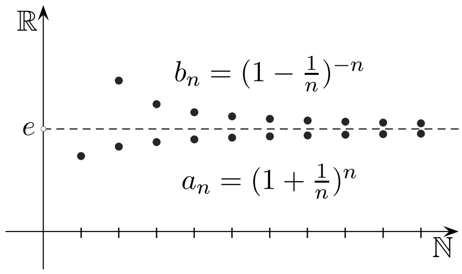
Opomba. Brez dokaza navedimo, da je tudi zaporedje $a_n = \sqrt[n]{n}$ konvergentno in ima limito enako
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Naj bo sedaj r poljubno realno število in c poljubno pozitivno realno število. Definirali bi radi število c^r. V ta namen si izberemo poljubno zaporedje racionalnih števil $\{q_n\}$, ki konvergira k številu r. Tako zaporedje obstaja, saj je množica racionalnih števil gosta v množici realnih števil in lahko, na primer, v vsaki $\frac{1}{n}$-okolici števila r najdemo neko racionalno število q_n, tako definirano zaporedje $\{q_n\}$ pa ima limito r. Ker je zaporedje $\{q_n\}$ Cauchyjevo, od tod hitro sledi, da je tudi zaporedje $\{c^{q_n}\}$ Cauchyjevo in zato konvergentno, njegovo limito označimo s c^r. Torej za poljubno realno število r in poljubno pozitivno realno število c obstaja
$$c^r = \lim_{n\to\infty} c^{q_n},$$
kjer so q_n poljubna racionalna števila, za katera velja $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$. Omeniti je potrebno še, da je limita neodvisna od izbire zaporedja $\{q_n\}$.

2.5. Število e

Število e je ena izmed najpomembnejših matematičnih konstant, s katero se neprestano srečujemo. Na primer, pri opisu praznjenja kondenzatorja ali dušenega nihanja, če naštejemo zgolj dva primera. Število e lahko definiramo na različne načine, v našem primeru ga bomo definirali s pomočjo dveh zaporedij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$, ki sta dani s predpisoma
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Pokazali bomo, da je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje $\{b_n\}$ pa padajoče in navzdol omejeno, torej sta obe zaporedji konvergentni. Pokazali bomo še, da imata isto limito, ki jo označimo z e.



Najprej uporabimo varianto Bernoullijeve neenakosti, ki je ni težko dokazati, in za vsako naravno število $n > 1$ ocenimo

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz na levi je razlika kvadratov na n-to potenco, torej je

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Delimo obe strani z $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ in dobimo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Izraz na levi je ravno n-ti člen, izraz na desni pa $(n-1)$-vi člen zaporedja $\{a_n\}$, torej je

$$a_n > a_{n-1}$$

in zato je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče.

Podobno, kot smo pokazali, da ocena $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ velja za vsako naravno število $n > 1$, pokažemo, da velja enaka ocena tudi za negativna cela števila. Torej

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, oziroma

$$b_n > b_{n+1}.$$

Dobili smo, da je zaporedje $\{b_n\}$ padajoče. Ker so vsi členi zaporedja $\{b_n\}$ pozitivni, je zaporedje navzdol omejeno in zato konvergentno. Velja

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

torej je

$$b_{n+1}=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Sledi, da je $b_2>b_{n+1}>a_n$, zato je zaporedje $\{a_n\}$ omejeno navzgor, torej je prav tako konvergentno. Ker je $b_{n+1}=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, imata konvergentni zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ isto limito. Limito označimo z e, torej

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\doteq 2.7182.$$

Število e je iracionalno.

Primer. Izračunajmo limito

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n(-\frac{3}{2})}\\&=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m(-\frac{3}{2})}=e^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

3. Številske vrste

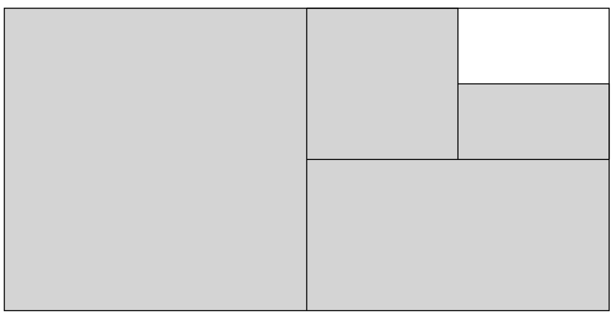
V tem poglavju si bomo ogledali, kaj si za dano zaporedje realnih števil lahko predstavljamo kot neskončno vsoto členov tega zaporedja.

3.1. Definicija številske vrste

Najprej si oglejmo primer.

Primer. Korak za korakom senčimo pravokotnik velikosti 2×1. V prvem koraku pravokotnik razpolovimo z navpično črto na dva kvadrata. Levi del osenčimo, njegova ploščina je $1 \cdot 1 = 1$. Nato desni neosenčeni del razpolovimo z vodoravno črto na dva enaka pravokotnika in spodnji pravokotnik osenčimo. Njegova ploščina je $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, ploščina celotnega osenčenega dela pa $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Zgornji neosenčeni del razpolovimo z navpično črto na dva kvadrata in levi kvadrat osenčimo. Njegova ploščina je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, ploščina celotnega osenčenega dela pa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Postopek nadaljujemo. Vidimo, da več korakov, kot naredimo, manjši postaja del prvotnega pravokotnika velikosti 2×1, ki je še neosenčen. Če bi torej postopek ponavljali v neskončnost, bi dobili, da je neskončna vsota števil $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ enaka 2, torej

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$



V prejšnjem primeru smo zelo nazorno videli, koliko je neskončna vsota $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ Koliko pa je, na primer, vsota $-1+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$?

Je enaka 0 ali -1 ali čemu tretjemu? Če hočemo v splošnem povedati, koliko je neskončna vsota števil, potrebujemo formalno definicijo.

Definicija. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

imenujemo *številska vrsta*, ali na kratko samo vrsta, število a_n pa imenujemo *splošni člen* številske vrste. S pomočjo členov zaporedja $\{a_n\}$ definiramo novo zaporedje $\{s_n\}$ s členi

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_2 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \\ &\ldots \end{aligned}$$

ki jih imenujemo delne vsote. Številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je *konvergentna*, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota številske vrste*. Če številska vrsta ni konvergentna, potem pravimo, da je *divergentna*.

Oglejmo si sedaj še enkrat vrsti, ki smo ju že omenili na začetku razdelka.

Primer. Za zaporedje $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$$

Delne vsote so enake, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, …, torej je $s_n = 0$ za sode n in $s_n = -1$ za lihe n. Zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ ima dve stekališči -1 in 0, torej ni konvergentno, kar pomeni, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$$

divergentna.

PRIMER. Za zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

s splošnim členom $\frac{1}{2^{n-1}}$. Delne vsote so enake $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \ldots, s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2,$$

torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

OPOMBA. Pri zapisu številskih vrst s pomočjo splošnega člena a_n in s sumacijskim znakom $\sum$ večkrat zaradi različnih razlogov začnemo seštevati člene zaporedja pri kakšnem drugem indeksu in ne pri 1, na primer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vrsta iz zadnjega primera je poseben primer geometrijske vrste.

DEFINICIJA. Naj bosta $a, q \in \mathbb{R}$. Vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

imenujemo *geometrijska vrsta*.

Oglejmo si, kaj lahko povemo o vsoti geometrijske vrste. Če je $a = 0$, potem je vsota geometrijske vrste enaka nič. Zato privzemimo, da je $a \neq 0$. Za $a \neq 0$ in $q = 1$ je geometrijska vrsta očitno divergentna. Za $a \neq 0$ in $q \neq 1$ pa dobimo, da je n-ta delna vsota geometrijske vrste

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a(1 + q + \ldots + q^n) = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Če je $|q| < 1$, je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a}{1 - q},$$

torej je v tem primeru

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{a}{1-q}.$$

Če pa je $|q| \geq 1$, je geometrijska vrsta divergentna, saj je zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ neomejeno.

Primer. Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}.$$

V tem primeru je $q = -\frac{1}{2}$, torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} = -\frac{1}{6}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{9}.$$

Številska vrsta je konvergentna, če je konvergentno zaporedje delnih vsot, konvergenco zaporedja pa smo preverjali s Cauchyjevim pogojem. Torej lahko s Cauchyjevim pogojem preverjamo tudi konvergenco vrste.

Izrek. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da je*

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$ *in vsak* $k \in \mathbb{N}$.

Od tod sledi, če vzamemo $k = 1$, da mora biti za vsak $\varepsilon > 0$ izraz $|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$ za vse n večje od nekega n_0 dalje. Torej gre splošni člen konvergentne vrste z naraščajočim n proti 0. Vendar pa, kot pravi naslednji izrek, to ni dovolj za konvergenco vrste.

Izrek. *Potreben pogoj za konvergenco vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

To pomeni, če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna, potem je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pogoj* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ni zadosten za konvergenco vrste.*

Poiščimo primer vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ki ni konvergentna, kljub temu pa velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definicija. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

se imenuje *harmonična vrsta*.

Izrek. *Harmonična vrsta je divergentna.*

Dokaz. Pogoj za konvergenco vrste je, da zadošča Cauchyjevemu pogoju, torej mora za vsak $\varepsilon > 0$ obstajati neko naravno število n_0, da je vsota poljubno mnogo zaporednih členov, katerih indeks je večji od n_0, manjša od ε. Pokažimo, da ta pogoj za harmonično vrsto ne velja. Naj bo $\varepsilon < \frac{1}{2}$ in n_0 poljubno naravno število. Ocenimo vsoto

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{2n_0}.$$

Ker je $\frac{1}{n} > \frac{1}{2n_0}$ za vsak $n < 2n_0$, je

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{2n_0} > \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} + \ldots + \frac{1}{2n_0} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Če torej začnemo pri nekem členu $\frac{1}{n_0+1}$ in seštejemo n_0 členov, je dobljena vsota večja od $\frac{1}{2}$. Vsota $2n_0$ členov od $\frac{1}{2n_0+1}$ do $\frac{1}{4n_0}$ je prav tako večja od $\frac{1}{2}$, vsota $4n_0$ členov od $\frac{1}{4n_0+1}$ do $\frac{1}{8n_0}$ je tudi večja od $\frac{1}{2}$ in tako dalje. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ne zadošča Cauchyjevemu pogoju in zato ni konvergentna. $\square$

Pokazali smo, da je harmonična vrsta divergentna, kljub temu, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Torej pogoj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ res ni zadosten pogoj za konvergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Opomba. S pomočjo Cauchjevega kriterija se hitro lahko prepričamo, da na konvergentnost vrste ne vpliva, če vrsti dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov.

3.2. Kriteriji za konvergenco vrste

Običajno je vsoto vrste težko izračunati. Velikokrat nam tudi ni potrebno poznati vsote vrste, temveč nam zadošča že podatek, ali je dana vrsta konvergentna ali ne. Zato si bomo v nadaljevanju ogledali nekaj kriterijev, ki nam povedo, ali je dana številska vrsta konvergentna ali ne. Najprej bomo obravnavali vrste s pozitivnimi členi, torej vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Izrek. *(Primerjalni kriterij.) Naj bosta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *taki vrsti, da velja*

$$0 < a_n \leq b_n \quad \textit{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

- *Če je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- *Če je vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentna, potem je divergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, zadošča Cauchyjevemu pogoju, torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_0$ in $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\varepsilon > b_n + \ldots + b_{n+k}.$$

Ker pa je

$$\varepsilon > b_n + \ldots + b_{n+k} \geq a_n + \ldots + a_{n+k},$$

tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentna.

Podobno, če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in nek $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\varepsilon < a_n + \ldots + a_{n+k} \leq b_n + \ldots + b_{n+k},$$

torej divergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

Primer. S primerjalnim kriterijem preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}. \tag{1}$$

Ker je

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} > \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}$$

in je harmonična vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentna, je po primerjalnem kriteriju divergentna tudi vrsta (1).

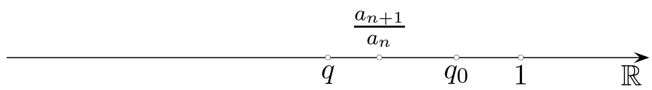
Izrek. *(Kvocientni kriterij.) Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ taka vrsta, da velja $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, in naj obstaja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

- *Če je $q < 1$, potem je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.*
- *Če je $q > 1$, potem je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna.*
- *Če je $q = 1$, potem je lahko vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna ali divergentna.*

Dokaz. Ločimo tri primere.

- Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Potem obstaja tako število q_0, da je $q < q_0 < 1$. Ker je q limita zaporedja $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$, nadalje obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0$ za vsak $n \geq n_0$.

  Sledi, da je $a_{n_0+1} < q_0 a_{n_0}$, da je $a_{n_0+2} < q_0 a_{n_0+1} < q_0^2 a_{n_0}$, $\ldots$, torej, da je
  $$a_{n_0+k} < q_0 a_{n_0+k-1} < q_0^2 a_{n_0+k-2} < \ldots < q_0^k a_{n_0}$$
  za vsak $k \in \mathbb{N}$. Geometrijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q_0^n$ je za $q_0 < 1$ konvergentna, zato je po primerjalnem kriteriju konvergetna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_0+n}$. Ker končno mnogo členov ne vpliva na konvergenco vrste, je potem konvergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Potem obstaja q_0, $1 < q_0 < q$, in nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q_0$ za vsak $n \geq n_0$. Na enak način kot prej ocenimo vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ z geometrijsko vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q_0^n$, ki je divergentna, saj je $q_0 > 1$. Po primerjalnem kriteriju je potem divergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Hitro lahko najdemo primere konvergentnih in primere divergentnih vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, za katere je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$. Na primer, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentna, v obeh primer pa velja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

$\square$

Primer. S kvocientnim kriterijem preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}. \tag{2}$$

Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Po kvocientnem kriteriju je vrsta (2) konvergentna.

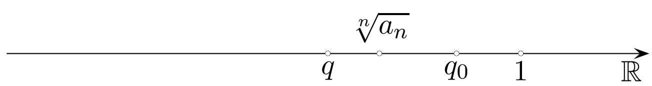
Izrek. *(Korenski kriterij.) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taka vrsta, da velja $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, in naj obstaja*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- *Če je $q < 1$, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.*
- *Če je $q > 1$, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna.*
- *Če je $q = 1$, potem je lahko vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna ali divergentna.*

Dokaz. Izrek dokažemo na podoben način, kot smo dokazali predhodni izrek (kvocientni kriterij). Ločimo tri primere.

- Naj bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Potem obstaja tako število q_0, da je $q < q_0 < 1$. Ker je q limita zaporedja $\{\sqrt[n]{a_n}\}$, nadalje obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\sqrt[n]{a_n} < q_0$ za vsak $n \geq n_0$.



Sledi, da je

$$a_n < q_0^n$$

za vsak $n \geq n_0$. Geometrijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_0^n$ je za $q_0 < 1$ konvergentna in ker končno mnogo členov ne vpliva na konvergenco vrste, je potem konvergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Potem obstaja q_0, $1 < q_0 < q$, in nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\sqrt[n]{a_n} > q_0$ za vsak $n \geq n_0$. Na enak način kot prej ocenimo vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ z geometrijsko vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_0^n$, ki je divergentna, saj je $q_0 > 1$. Po primerjalnem kriteriju je potem divergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Hitro lahko najdemo primere konvergentnih in primere divergentnih vrst $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, za katere je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q = 1$. Na primer, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentna, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentna, v obeh primer pa velja $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

□

Primer. S korenskim kriterijem preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}. \tag{3}$$

Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Po korenskem kriteriju je vrsta (3) konvergentna.

V predhodnih primerih smo se omejili na vrste s pozitivnimi členi. V nadaljevanju pa si oglejmo, kaj lahko povemo o konvergentnosti vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, katere členi so poljubna realna števila.

Definicija. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je *pogojno konvergentna*, če je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. To pomeni, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa divergentna.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je pogojna konvergenca šibkejša lastnost kot absolutna konvergenca.

IZREK. *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

DOKAZ. Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta. Pokažimo, da potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna, zadošča Cauchyjevemu pogoju, torej obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$, $k \in \mathbb{N}$. Ker pa je po trikotniški neenakosti

$$|a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$, $k \in \mathbb{N}$, velja Cauchyjev pogoj tudi za vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, torej je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. $\square$

Če nas torej zanima, ali je številska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, lahko najprej preverimo konvergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, na primer s kakšnim izmed kriterijev za konvergenco številskih vrst s pozitivnimi členi. Če je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Če pa vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ni konvergentna, o konvergenci vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ne vemo ničesar. V tem primeru potrebujemo kakšen drug kriterij. Pokažimo, da za vrste s členi, ki se jim zaporedoma menja predznak, obstaja zelo preprost kriterij za konvergenco vrste.

DEFINICIJA. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je *alternirajoča*, če je $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

IZREK.*(Leibnizev kriterij.) Če za alternirajočo vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ velja, da členi vrste po absolutni vrednosti padajo proti nič, torej $|a_n| \geq |a_{n+1}|$, $n \in \mathbb{N}$, in je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

potem je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna.*

Dokaz. Denimo, da je prvi člen vrste pozitiven. Definirajmo novo zaporedje s predpisom $b_n = (-1)^{n+1}a_n$. Potem je $b_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ Oglejmo si zaporedje delnih vsot vrste samo za sode $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Ker je $b_{2k+1} \geq b_{2k+2}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, je

$$\begin{aligned} s_{2k+2} &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + b_{2k-1} - b_{2k} + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) \\ &= s_{2k} + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) \geq s_{2k}, \end{aligned}$$

torej je zaporedje sodih delnih vsot $\{s_{2k}\}$ naraščajoče. Ker pa je $b_{2i} \geq b_{2i+1}$ za vsak $i \in \mathbb{N}$ in je $b_{2k} \geq 0$, je

$$s_{2k} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) + \ldots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - b_{2k} \leq b_1$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$, torej je zaporedje sodih delnih vsot $\{s_{2k}\}$ navzgor omejeno. Sledi, da je zaporedje sodih delnih vsot konvergentno. Nadalje, ker je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, je tudi zaporedje lihih delnih vsot konvergentno z isto limito, torej je zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ konvergentno, kar pomeni, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Denimo, da je prvi člen vrste negativen. Potem smo pravkar dokazali, da je vrsta $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem pa je konvergentna tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Opomba. Povedali smo že, da je pogoj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ potreben pogoj za konvergenco vrste. Zadnji izrek pa pravi, da je za alternirajočo vrsto, katere členi po absolutni vrednosti padajo proti nič, ta pogoj tudi zadosten za konvergenco vrste.

Primer. Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{4}$$

Ker je $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ in je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0,$$

je po Leibnizevem kriteriju vrsta (4) konvergentna. Vrsta (4) pa ni absolutno konvergentna, saj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

harmonična vrsta, za katero smo pokazali, da je divergentna.

Opomba. Naj vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zadošča Leibnizevemu kriteriju. Če seštejemo prvih n_0 členov te vrste, potem se vsota teh n_0 členov od vsote vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ razlikuje za manj kot $|a_{n_0+1}|$.

Primer. Ocenimo vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Če vzamemo samo prvi člen vrste $\sum\limits_{n=1}^{1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1$, potem se vsota vrste od 1 razlikuje za manj kot je absolutna vrednost drugega člena, ki je $\frac{1}{2}$. Torej je $\frac{1}{2} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \frac{3}{2}$.

Na koncu razdelka navedimo še, kaj se zgodi, če preuredimo vrstni red členov vrste.

Opomba. Če je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, potem lahko poljubno preuredimo vrstni red njenih členov, pa bo nova vrsta še vedno absolutno konvergentna, vsota prvotne vrste in vrste s preurejenim vrstnim redom njenih členov pa sta enaki.

Če je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna, potem lahko s preureditvijo vrstnega reda njenih členov dosežemo, da je vsota nove vrste enaka poljubnemu vnaprej izbranemu številu. Še več, s preureditvijo lahko dosežemo, da nova vrsta ni konvergentna.

Primer. Preuredimo člene vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tako, da bo vsota nove vrste enaka 0. Najprej zapišemo prvi člen $\frac{1}{1} = 1$. Nato po vrsti izberemo dovolj negativnih členov, da je vsota negativna, torej $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} < 0$. Nato zopet izberemo dovolj pozitivnih členov, da je nova vsota pozitivina, torej $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} > 0$. Postopek nadaljujemo in ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, je vsota nove vrste res enaka nič.

4. Funkcije

V tem poglavju bomo najprej povedali, kaj je to preslikava, nato pa se bomo posvetili posebni vrsti preslikav, ki slikajo iz realnih števil v realna števila. Take preslikave imenujemo realne funkcije.

4.1. Preslikave

Najprej definirajmo, kaj je to preslikava, nato pa bomo opisali še nekaj osnovnih pojmov povezanih s preslikavami.

DEFINICIJA. Naj bosta A in B neprazni množici. *Preslikava*

$$f\colon A \to B$$

je predpis, ki vsakemu elementu a iz množice A priredi natanko določen element $f(a)$ iz množice B. Pravimo, da je $f(a)$ *slika* elementa a Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena* preslikave f, množico

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

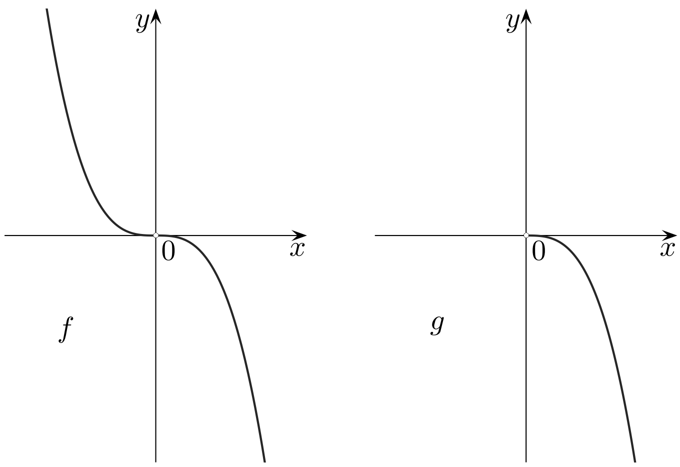
pa *zaloga vrednosti* preslikave f. Graf preslikave f je množica

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B.$$

PRIMER. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^3$ območje v prostoru in $B = \mathbb{R}$. Preslikava f naj bo predpis, ki v danem trenutku vsaki točki iz območja A priredi temperaturo te točke.

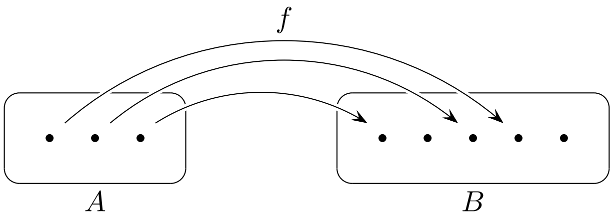
OPOMBA. Preslikava $f\colon A \to B$ je določena s predpisom in množicama A in B. Tako imata lahko dve preslikavi enak predpis, a sta definirani na različnih množicah in sta zato različni.

PRIMER. Preslikavi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$, in $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^3$, imata enak predpis, a sta različni. Definicijsko območje prve preslikave je $\mathbb{R}$, prav tako zaloga vrednosti, definicijsko območje druge preslikave pa je $[0, \infty)$ in zaloga vrednosti $(-\infty, 0]$.

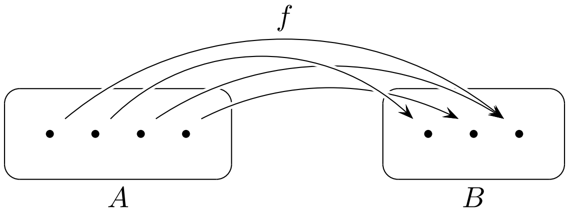


Pogosto bomo za dano preslikavo hoteli vedeti, ali ima katero izmed naslednjih lastnosti.

Preslikava $f\colon A \to B$ je *injektivna*, če poljubna različna elementa $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, preslika v različna elementa množice B, torej $f(a_1) \neq f(a_2)$.



Preslikava $f\colon A \to B$ je *surjektivna*, če za vsak element $b \in B$ obstaja tak element $a \in A$, da je b slika elementa a, torej $f(a) = b$.



V splošnem pravimo, da preslikava $f\colon A \to B$ slika iz množice A *v* množico B. Če pa je preslikava $f\colon A \to B$ surjektivna, potem pravimo, da slika iz množice A *na* množico B.

Naj bo $f\colon A \to B$ poljubna preslikava, ne nujno surjektivna. Potem lahko vedno definiramo preslikavo f_1, ki ima enak predpis kot f, vendar slika iz A na $f(A)$. Preslikava f_1, ki jo običajno označimo kar z f, je potem surjektivna. Torej vedno lahko pišemo $f\colon A \to f(A)$ in f je v tem primeru surjektivna preslikava.

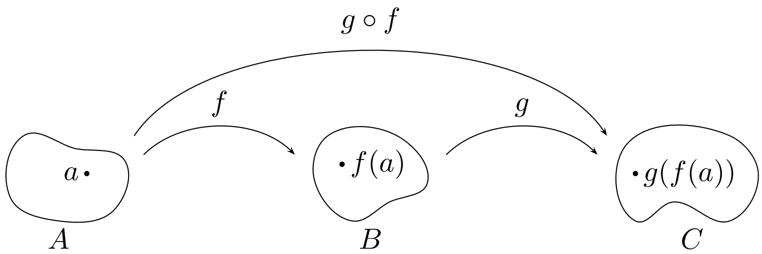
Preslikava f je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Denimo sedaj, da najprej neka preslikava f predpiše elementu a iz množice A element b iz množice B, neka druga preslikava g pa predpiše temu elementu b iz množice B nek element c iz množice C. Potem lahko definiramo novo preslikavo, ki slika iz A v C in ki elementu a priredi element c.

Definicija. Naj bodo A, B in C neprazne množice in naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ preslikavi. Preslikavo $g \circ f\colon A \to C$, definirano s predpisom

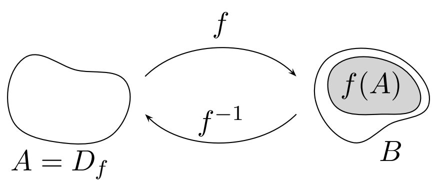
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

imenujemo *kompozitum* preslikav g in f.



Oglejmo si še poseben primer kompozituma dveh preslikav. Naj bo preslikava $f\colon A \to B$ injektivna in naj bo b poljuben element iz zaloge vrednosti preslikave f, torej $b \in f(A)$. Potem obstaja vsaj en $a \in A$, za katerega velja, da je $f(a) = b$. Ker pa je preslikava injektivna, je tak element a, da je $f(a) = b$, natanko en. Torej lahko definiramo na zalogi vrednosti $f(A)$ preslikavo, ki vsakemu elementu $b = f(a)$ iz $f(A)$ priredi natanko določen element a iz A. To preslikavo označimo z $f^{-1}\colon f(A) \to A$ in jo imenujemo *inverzna* preslikava preslikave f. Velja

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a.$$



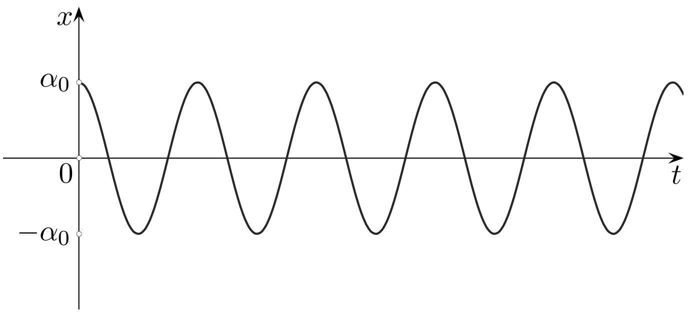
4.2. Realne funkcije ene spremenljivke

Odslej se bomo posvetili preslikavam, ki slikajo iz neke podmnožice realnih števil v realna števila.

Definicija. Preslikavo $f\colon D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, imenujemo *realna funkcija ene spremenljivke.*

Realna funkcija je torej predpis, ki priredi vsakemu realnemu številu iz neke podmnožice realnih števil natanko določeno realno število. Predpis lahko podamo na več načinov: opisno z besedilom, grafično, analitično.

Primer. Opazujemo nedušeno nihanje matematičnega nihala. Pojav lahko opišemo kot nihanje nihala dolžine l, ki je bilo na začetku za α_0 odmaknjeno iz ravnovesne lege. Odklon iz ravnovesne lege v odvisnosti od časa lahko grafično predstavimo v koordinatnem sistemu.



Lahko pa zapišemo funkcijski predpis, na primer $f(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$, pri čemer je g težni pospešek.

Funkcijski predpis večkrat zapišemo tudi v obliki

$$y = f(x),$$

pri čemer x imenujemo *neodvisna spremenljivka*, y pa *odvisna spremenljivka.* Omeniti velja še, da funkcijo označimo s simbolom f, s simbolom $f(x)$ pa vrednost funkcije f v točki x. Velikokrat pa je v literaturi funkcija označena kar s simbolom $f(x)$, saj s tem zapisom povemo tudi, od katere neodvisne spremenljivke je funkcija f odvisna.

Kot smo že povedali, je vsaka preslikava določena s predpisom ter dvema množicama, to sta definicijsko območje in množica, v katero slika preslikava. Torej bi morali poleg funkcijskega predpisa vedno našteti še ti dve množici. Vendar pa pri realnih funkcijah, ki slikajo iz definicijskega območja v realna števila, velja naslednji dogovor. Če definicijsko območje funkcije f ni posebej omenjeno, potem je njeno definicijsko območje množica vseh tistih realnih števil, za katere je $f(x)$ realno število. Drugače povedano, definicijsko območje je največja podmnožica realnih števil, za katere lahko izračunamo vrednost funkcije f.

Primer. Funkcija f je dana s predpisom

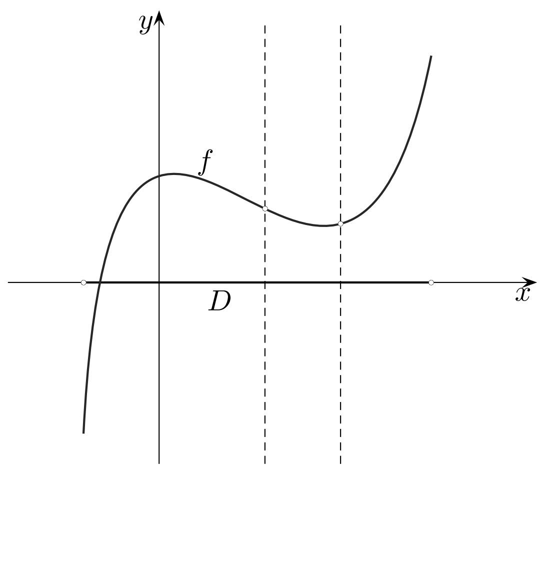
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Kvadratni koren je definiran samo za nenegativna realna števila, zato mora biti $1 - x^2 \geq 0$, oziroma $-1 \leq x \leq 1$. Definicijsko območje D funkcije f je torej po dogovoru $D = [-1, 1]$. To pomeni, $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ in $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

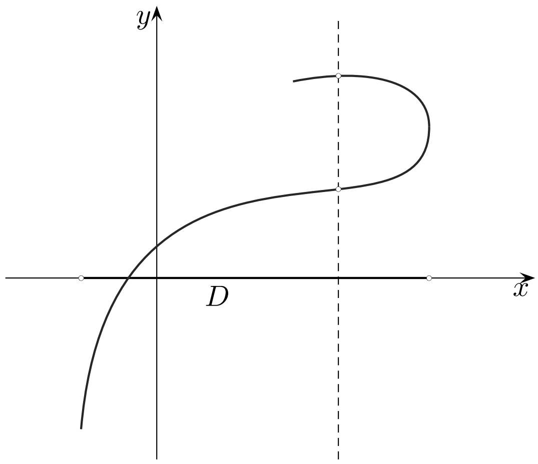
Kljub temu, da je funkcija s svojim predpisom in definicijskim območjem natančno določena, velikokrat veliko lažje predstavimo nekatere njene lastnosti s pomočjo njenega grafa. Graf realne funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

torej neka krivulja v ravnini. Ker funkcija vsakemu številu iz definicijskega območja priredi natanko eno vrednost, je krivulja v ravnini lahko graf neke funkcije, če vsaka premica, vzporedna z ordinatno osjo, seka to krivuljo v največ eni točki.

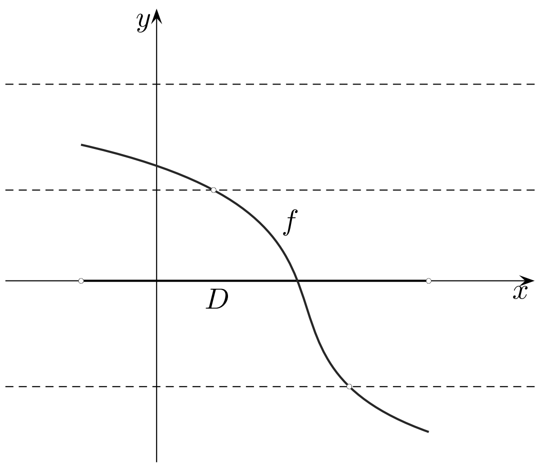


Če premica, vzporedna z ordinatno osjo, seka krivuljo v dveh različnih točkah (x, y_1) in (x, y_2), torej $y_1 \neq y_2$, in bi bila ta krivulja graf neke funkcije, potem bi bilo $f(x) = y_1$ in hkrati $f(x) = y_2$, kar pa ni mogoče, saj je $f(x)$ natančno določeno realno število.

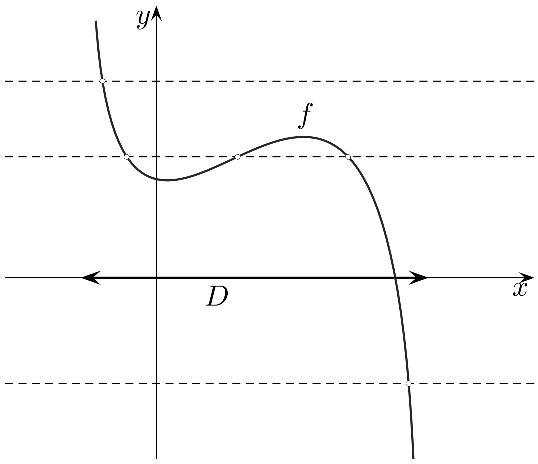


S pomočjo grafa funkcije lahko tudi ugotovimo, kdaj je funkcija injektivna in kdaj surjektivna. Prav tako tudi, kdaj je funkcija liha in kdaj soda.

TRDITEV. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je injektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije f največ enkrat.*



TRDITEV. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je surjektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije f vsaj enkrat.*



Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je *soda*, če je

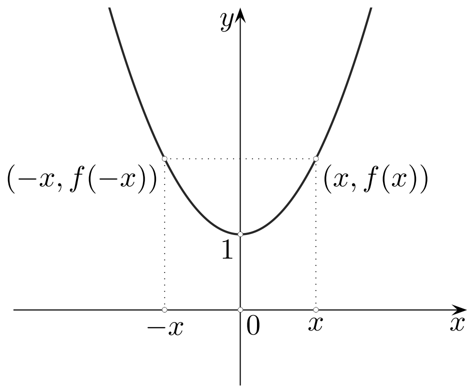
$$f(-x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$. Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

Primer. Pokažimo, da je funkcija $f(x) = x^2 + 1$ soda in narišimo njen graf. Ker je

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x),$$

je funkcija f res soda. Točke na njenem grafu so simetrične glede na ordinatno os.

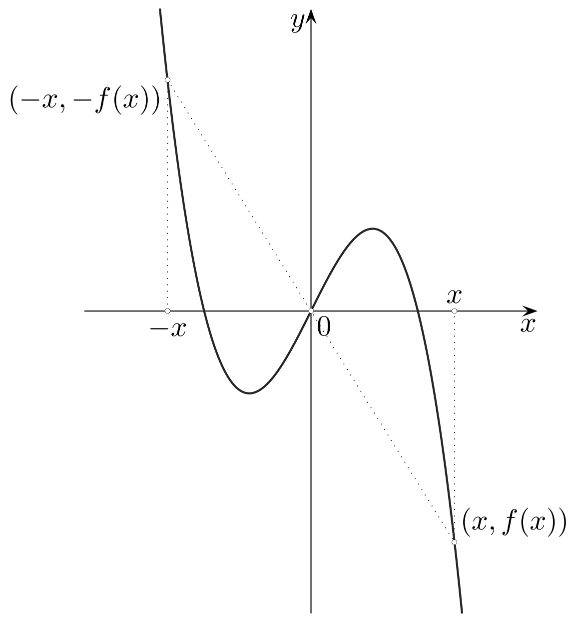


Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je *liha*, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$. Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer. Pokažimo, da je funkcija $f(x) = -x^3 + 2x$ liha in narišimo njen graf. Ker je

$$f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = -(-x^3) - 2x = -(-x^3 + 2x) = -f(x),$$

je funkcija f res liha. Točke na njenem grafu so simetrične glede na koordinatno izhodišče.



Opomba. Večina funkcij ni ne lihih in ne sodih.

Podobno kot pri zaporedjih tudi za funkcije zapišimo, kdaj je funkcija omejena in kdaj monotona. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Funkcija f je *navzgor omejena*, če obstaja taka konstanta $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je *navzdol omejena*, če obstaja taka konstanta $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je *omejena*, če obstaja taka konstanta $M \in \mathbb{R}$, da je $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je *naraščajoča*, če je $f(x) \leq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) < f(y)$, je f *strogo naraščajoča*.
- Funkcija f je *padajoča*, če je $f(x) \geq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) > f(y)$, je f *strogo padajoča*.
- Funkcija f je *monotona*, če je bodisi naraščajoča bodisi padajoča. Funkcija f je *strogo monotona*, če je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča.

Strogo monotone funkcije so injektivne, zato lahko definiramo njihov inverz. Napišimo, kaj je inverzna preslikava v primeru realnih funkcij.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna funkcija. Potem funkcijo f^{-1}, ki slika iz množice $f(D)$ v množico D, in za katero velja $f^{-1}(f(x)) = x$ za vsak $x \in D$, imenujemo inverzna funkcija funkcije f.

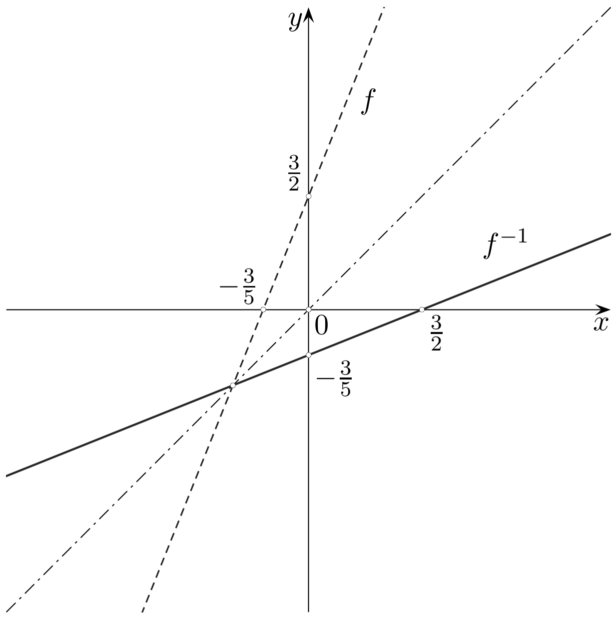
Inverzno funkcijo f^{-1} funkcije f, podane s predpisom $y = f(x)$, določimo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk x in y, torej zapišemo $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x. Sledi, da je graf inverzne funkcije f^{-1} enak grafu funkcije f, ki smo ga prezrcalili prek simetrale lihih kvadrantov (prek premice $y = x$).

Primer. Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Določimo inverzno funkcijo f^{-1} in narišimo njen graf. V enakosti $y = \frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$ najprej zamenjamo vlogo spremenljivk, torej $x = \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}$. Nato izrazimo y kot funkcijo spremenljivke x in dobimo $y = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Sledi, da je

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right).$$



Naj bosta funkciji f in g definirani na istem definicijskem območju D, torej $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $g\colon D \to \mathbb{R}$. Potem lahko na definicijskem območju D definiramo tudi naslednje funkcije:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pri čemer je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$.

Nove funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ in $\frac{f}{g}$ so definirane po točkah. To pomeni, da je, na primer, vrednost nove funkcije $f+g$ v točki x definirana kot vsota funkcijskih vrednosti funkcij f in g v točki x. Podobno je vrednost funkcije $\frac{f}{g}$ v točki x enaka kvocientu funkcijskih vrednosti funkcij f in g v točki x, razen za ničle funkcije g. Ničla funkcije g je vsako tako realno število $x_0 \in D$, za katero velja, da je $g(x_0) = 0$.

Definirali smo že, kaj je kompozitum dveh preslikav. Za funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lahko izračunamo tako kompozitum $f \circ g$ kot tudi kompozitum $g \circ f$. Izkaže se, da kompozitum funkcij ni komutativna relacija, kar pomeni, da v splošnem ta dva kompozituma nista enaka, to je

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Primer. Naj bo $f(x) = x^2 - 2x$ in $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Izračunajmo $f \circ g$ in $g \circ f$, torej

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - 2\right) = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 - x + 4 = \frac{x^2}{4} - 3x + 8, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 - 2x) = \frac{x^2 - 2x}{2} - 2 = \frac{x^2}{2} - x - 2.\end{aligned}$$

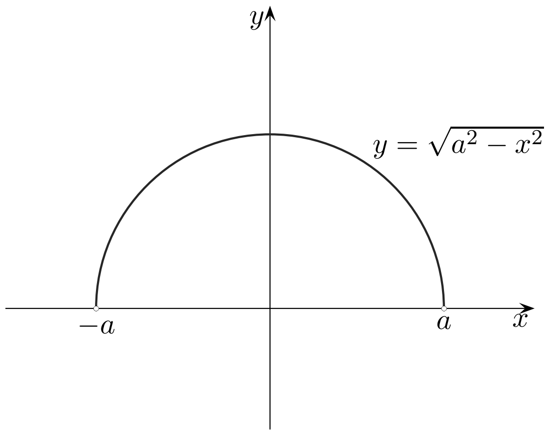
V tem primeru je $f \circ g \neq g \circ f$.

Ob koncu razdelka si oglejmo še, kako lahko na različne načine podamo funkcijski predpis. Odvisnost med odvisno spremenljivko y in neodvisno spremenljivko x lahko podamo:

- eksplicitno, to pomeni $y = f(x)$,
- implicitno, to pomeni, da je pri neki vrednosti spremenljivke x vrednost spremenljivke y določena z enačbo $F(x, y) = 0$,
- parametrično, to pomeni, da sta spremenljivki x in y odvisni od parametra t, to je $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Primer. Zapišimo funkcijo, katere graf je zgornja polovica krožnice s polmerom a, na vse tri načine:

- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, eksplicitno,
- $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $y \geq 0$, implicitno,
- $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, \pi]$, parametrično.



4.3. Pregled elementarnih funkcij

V tem razdelku si bomo ogledali nekatere elementarne funkcije, s katerimi se najpogosteje srečamo.

Polinom. Funkcijo oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, imenujemo *polinom.* Polinom je definiran za vsako realno število, torej je njegovo definicijsko območje množica $\mathbb{R}$. Polinome ponavadi označimo s črko p, torej $f = p$. Število n imenujemo *stopnja* polinoma p.

Izrek.*(Osnovni izrek algebre.) Polinom p stopnje n ima največ n realnih ničel, torej $p(x) = 0$ za največ n različnih realnih vrednosti spremenljivke x. Natančneje, polinom p stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel. Nekatere ničle so lahko tudi večkratne.*

Če ima polinom p natanko n realnih ničel $x_1, \ldots, x_n$, pri čemer so lahko nekatere ničle večkratne, potem ga lahko zapišemo v obliki

$$p(x) = a_n(x - x_n)\ldots(x - x_1).$$

Primer. Narisati želimo graf polinoma

$$p(x) = -x^3 + 3x + 2.$$

Najprej poiščemo ničle polinoma. Možne celoštevilske ničle so -2, -1, 1 in 2. Ker je $p(-2) = -(-2)^3 + 3(-2) + 2 = 4$, vrednost -2 ni ničla polinoma. Je pa $p(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) + 2 = 0$, torej je -1 ničla polinoma p.

S pomočjo Hornerjevega algoritma izračunamo koeficiente polinoma, ki ga dobimo, če delimo $p(x)$ z $(x - (-1))$.

	-1	0	3	2
-1		1	-1	-2
	-1	1	2	0

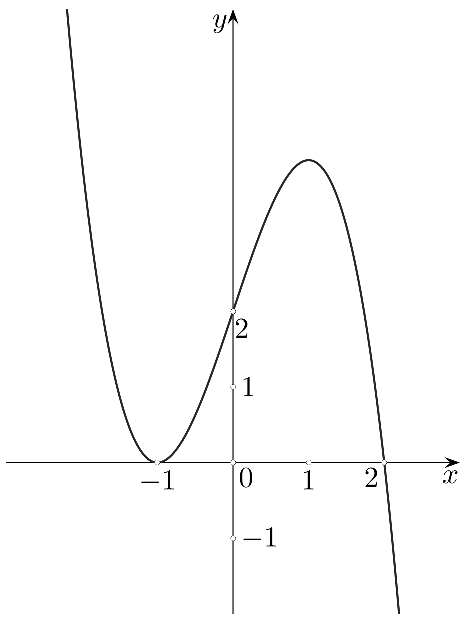
Torej je

$$-x^3 + 3x + 2 = (-x^2 + x + 2)(x + 1).$$

Preostali dve ničli določimo tako, da razstavimo še polinom $-x^2 + x + 2$ ali da rešimo kvadratno enačbo $-x^2 + x + 2 = 0$. Dobimo, da sta preostali ničli -1 in 2, torej je

$$p(x) = -(x + 1)^2(x - 2).$$

Polinom p se dotika abscisne osi v točki $(-1, 0)$, seka jo v točki $(2, 0)$, ordinatno os pa seka v točki $(0, 2)$, saj je $p(0) = 2$.



Racionalna funkcija. Funkcijo oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma, imenujemo *racionalna funkcija.* Racionalna funkcija je definirana za vsako realno število, razen za tista realna števila, ki so ničle polinoma q, torej je definicijsko območje racionalne funkcije množica

$\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$. Po osnovnem izreku algebre je števil, kjer racionalna funkcija ni definirna, največ toliko, kot je stopnja polinoma q. Če polinom q nima realnih ničel (na primer, $q(x) = x^2 + 1$), potem je racionalna funkcija definirana za vsako realno število.

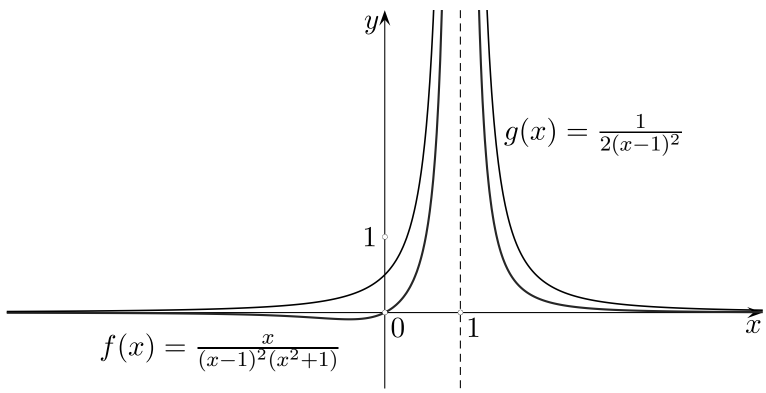
Če za racionalno funkcijo $f = \frac{p}{q}$ polinoma p in q nimata skupnih ničel, potem velja:

- ničle polinoma p so tudi ničle racionalne funkcije f,
- ničle polinoma q so poli racionalne funkcije f, torej je f v okolici ničel polinoma q neomejena.

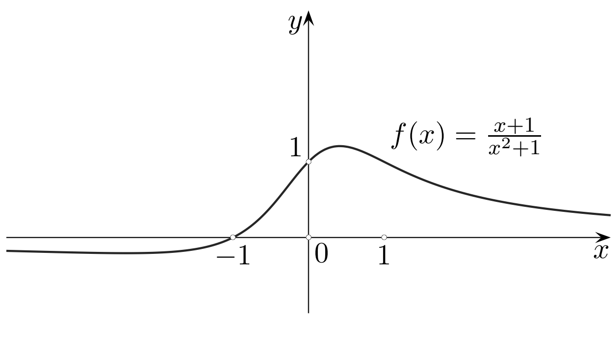
Povejmo še, kaj se dogaja blizu polov racionalne funkcije in kaj se dogaja za velike vrednosti neodvisne spremenljivke.

Denimo, da polinoma p in q nimata skupnih ničel in da ima polinom q ničlo x_0 reda k, torej $q(x) = (x - x_0)^k r(x)$, kjer je $r(x_0) \neq 0$. Potem ima graf racionalne funkcije $f = \frac{p}{q}$ v okolici ničle x_0 polinoma q podobno obliko kot graf funkcije

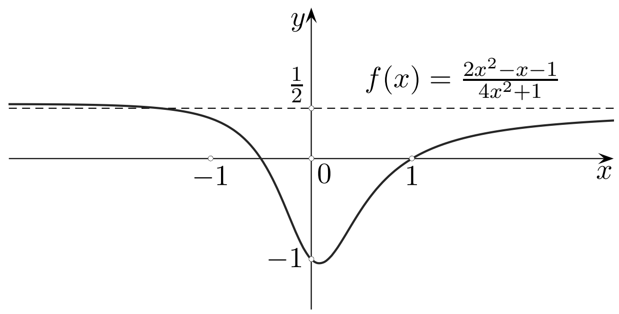
$$g(x) = \frac{c}{(x - x_0)^k}, \quad \text{pri čemer je konstanta } c = \frac{p(x_0)}{r(x_0)}.$$



Če je stopnja polinoma p manjša od stopnje polinoma q, potem se vrednosti racionalne funkcije $f = \frac{p}{q}$ bližajo 0, ko gre x proti $\pm\infty$. Racionalna funkcija ima vodoravno asimptoto $y = 0$.



Če sta stopnji polinoma p in q enaki, potem ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto.



Če je stopnja polinoma p za ena večja od stopnje polinoma q, potem ima racionalna funkcija za asimptoto premico. V splošnem, če je stopnja polinoma p večja od stopnje polinoma q, potem delimo polinom p s polinomom q in dobimo

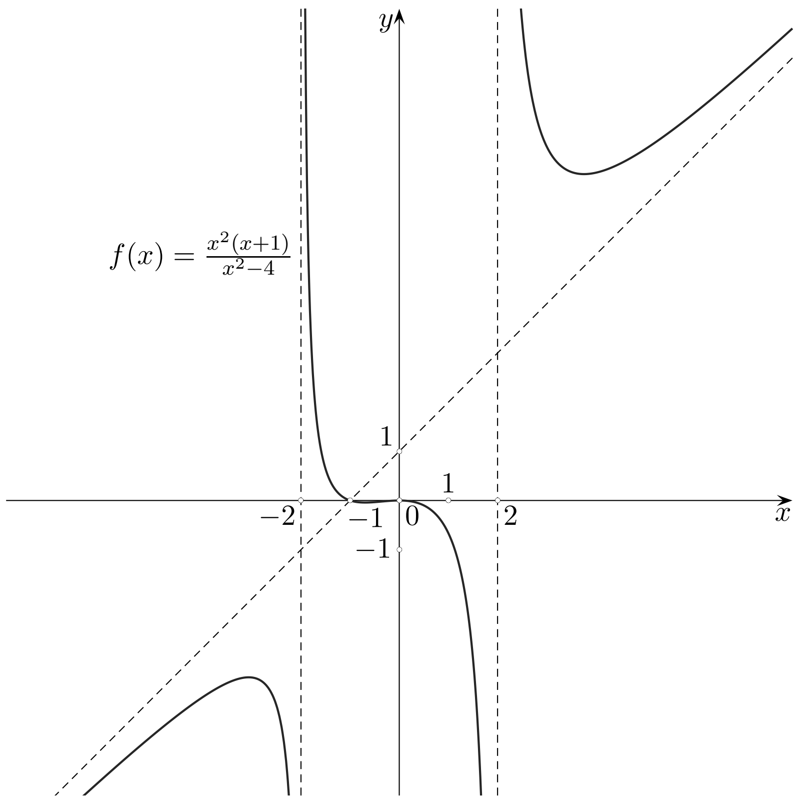
$$p(x) = k(x)q(x) + r(x),$$

kjer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q. Racionalna funkcija $f = \frac{p}{q} = k + \frac{r}{q}$ ima potem za asimptoto polinom k.

Primer. Narisati želimo graf racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}.$$

Najprej določimo ničle obeh polinomov. Ničli polinoma $x^2(x+1)$ sta 0 in -1, hkrati sta to tudi ničli racionalne funkcije. Ničli polinoma $x^2-4 = (x+2)(x-2)$ pa sta -2 in 2, hkrati sta to tudi pola racionalne funkcije. Stopnja polinoma v števcu je za ena večja od stopnje polinoma v imenovalcu, torej je asimptota racionalne funkcije premica. Premico določimo tako, da delimo polinom $x^2(x+1) = x^3 + x^2$ s polinomom $x^2 - 4$. Dobimo $x^3 + x^2 = (x+1)(x^2-4) + 4(x+1)$, torej je asimptota premica $x + 1$.



Kvadratni koren polinoma. Funkcijo oblike

$$f(x) = \sqrt{p(x)},$$

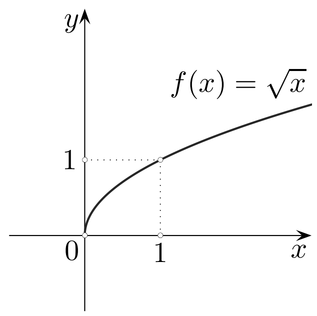
kjer je p polinom, imenujemo *kvadratni koren* polinoma p. Kvadratni koren polinoma je definiran za vsako realno število, za katero je vrednost polinoma nenegativna, torej je definicijsko območje kvadratnega korena polinoma množica $\{x : p(x) \geq 0\}$.

Sem sodijo, poleg drugih, tudi vse funkcije, katerih grafi sestavljajo krivulje drugega reda, to so elipsa ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), hiperbola ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) in parabola ($y^2 = 2px$).

PRIMER. Narisati želimo graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Ker mora biti izraz pod korenom nenegativen, je definicijsko območje funkcije množica $\{x : x \geq 0\}$.



Eksponentna funkcija. Naj bo $a > 0$ in $a \neq 1$. Potem je

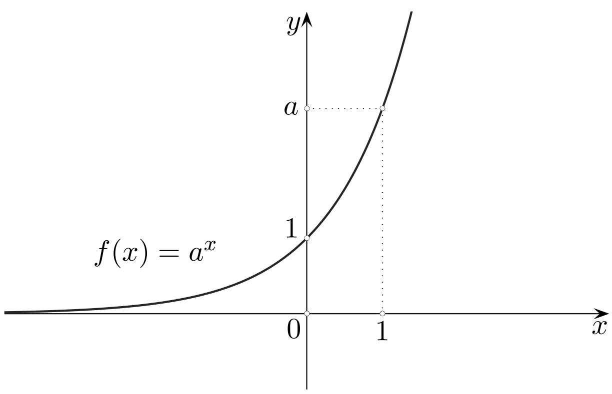
$$f(x) = a^x$$

eksponentna funkcija. Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$, torej

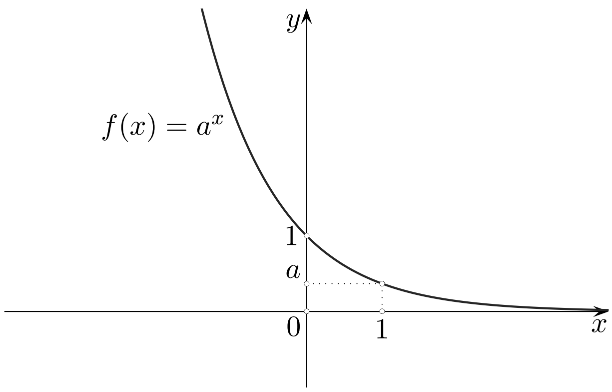
$$f(x) = e^x.$$

Eksponentna funkcija je definirana za vsako realno število, torej je njeno definicijsko območje množica $\mathbb{R}$.

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča pozitivna in neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Za $0 < a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo padajoča pozitivna in neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Za eksponentno funkcijo je karakteristična naslednja lastnost

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

torej

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

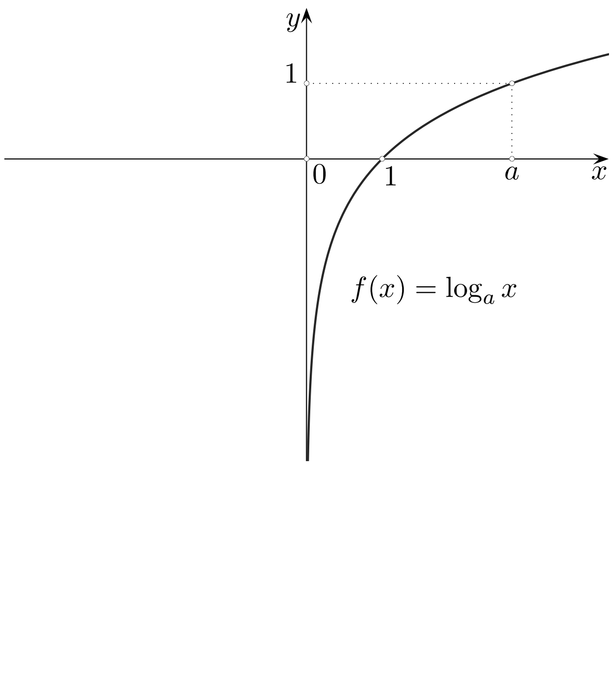
Eksponentna funkcija je strogo monotona, torej obstaja njena inverzna funkcija.

Logaritemska funkcija. Naj bo $a > 0$ in $a \neq 1$. Inverzno funkcijo eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$ imenujemo *logaritemska funkcija* in pišemo

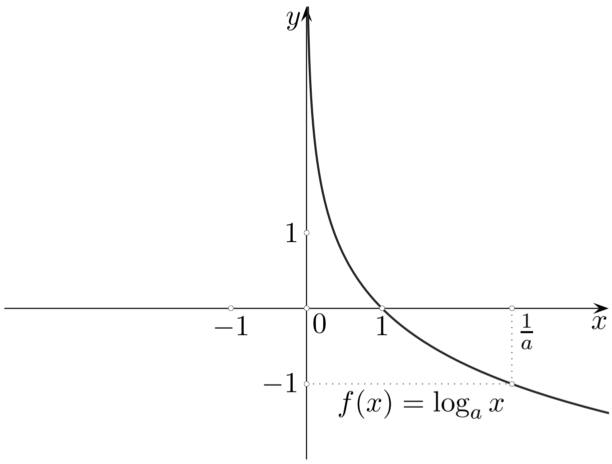
$$f(x) = \log_a(x).$$

Definicijsko območje logaritemske funkcije je enako zalogi vrednosti eksponentne funkcije, torej je enako množici $(0, \infty)$.

Če je $1 < a$, je $f(x) = \log_a x$ strogo naraščajoča neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Če je $0 < a < 1$, je $f(x) = \log_a x$ strogo padajoča funkcija, zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Povzemimo nekaj lastnosti logaritemske funkcije:

- logaritemska funkcija je definirana samo za pozitivna realna števila, je strogo monotona in neomejena,
- pol logaritemske funkcije je premica $x = 0$, ničla logaritemske funkcije je $x_0 = 1$, torej $\log_a(1) = 0$,
- če je $y = a^x$, potem je $x = \log_a y$,
- velja $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Največkrat obravnavamo logaritemsko funkcijo z osnovo $a = e$. V tem primeru logaritemsko funkcijo imenujemo *naravni logaritem* in pišemo

$$f(x) = \log_e x = \log x.$$

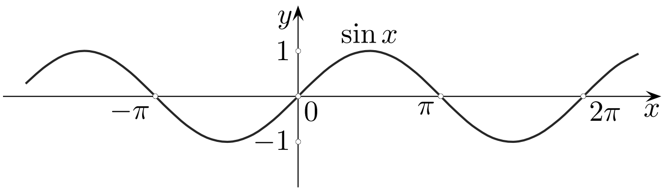
Opomba. Oznake za naravni logaritem niso povsem enotne. V nekateri literaturi je naravni logaritem zapisan z oznako $\ln x$, medtem ko je z $\log x$ označen desetiški logaritem.

Kotne (trigonometrične) funkcije sinus, kosinus in tangens. Za kote, manjše od $\pi/2$, so kotne funkcije *sinus*, *kosinus* in *tangens* definirane s pomočjo razmerij med stranicami v pravokotnem trikotniku. Definicijsko območje kotnih funkcij sinus in kosinus razširimo na množico vseh realnih števil, definicijsko območje funkcije tangens, ki je definirana kot $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pa je potem množica $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

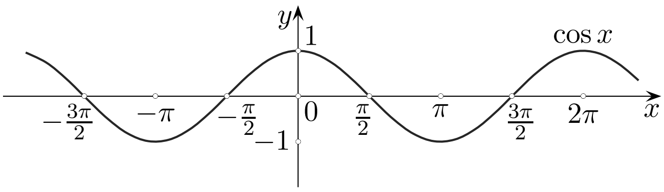
Funkciji sinus in kosinus sta periodični funkciji s periodo 2π, torej je

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{in} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi) \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zaloga vrednosti funkcije sinus je interval $[-1, 1]$, ničle funkcije sinus pa so realna števila oblike $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



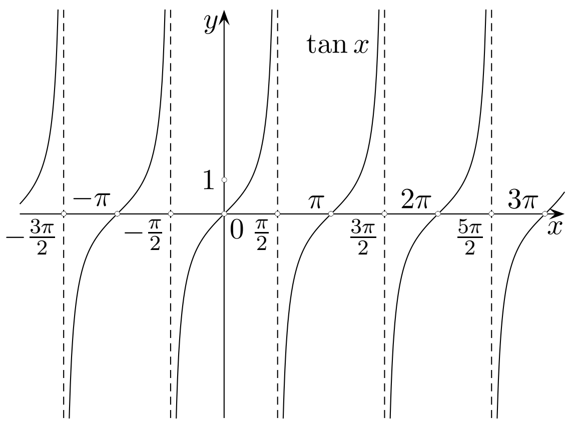
Zaloga vrednosti funkcije kosinus je prav tako interval $[-1, 1]$, ničle funkcije kosinus pa so realna števila oblike $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcija tangens je periodična funkcija s periodo π, torej je

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zaloga vrednosti funkcije tangens je množica vseh realnih števil, ničle funkcije tangens pa so realna števila oblike $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



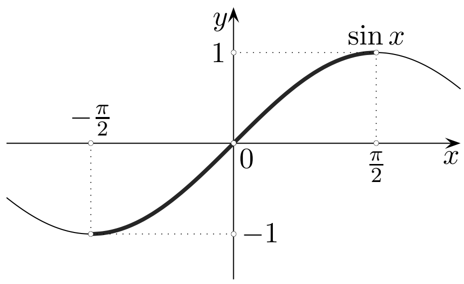
Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, na primer:

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,
- $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ciklometrične funkcije arkus sinus, arkus kosinus in arkus tangens. Kotne funkcije so periodične, torej niso injektivne in zato ne obstajajo njihovi inverzi. Če pa omejimo definicijsko območje posamezne kotne funkcije na množico, na kateri je ta funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.

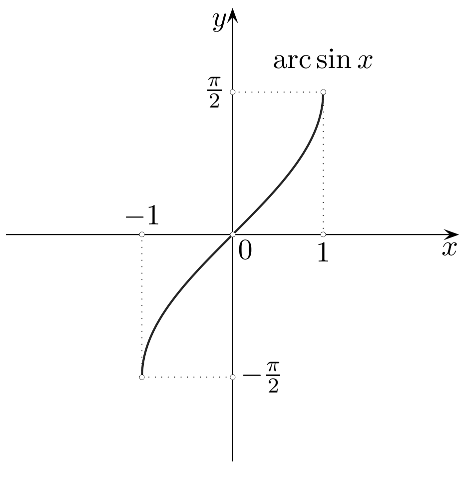
Pri sinusni funkciji se omejimo na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, na katerem je sinus strogo naraščajoča in zato injektivna funkcija, ki zavzame vse vrednosti z intervala $[-1, 1]$.



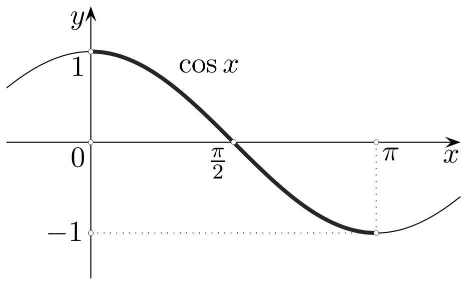
Potem lahko na definicijskem območju $[-1, 1]$ definiramo inverzno funkcijo funkcije sinus, ki jo imenujemo *arkus sinus* in pišemo

$$f(x) = \arcsin x.$$

Torej je $y = \arcsin x$ natanko tedaj, ko je $\sin y = x$. Ker je zaloga vrednosti funkcije sinus na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ enaka intervalu $[-1, 1]$, je zaloga vrednosti funkcije arkus sinus na intervalu $[-1, 1]$ enaka intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



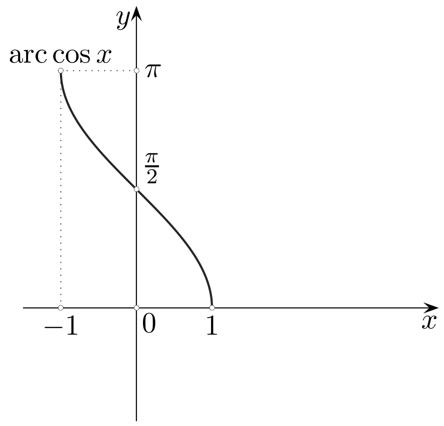
Podobno ravnamo pri funkciji kosinus. Omejimo se na interval $[0, \pi]$, na katerem je kosinus strogo padajoča in zato injektivna funkcija, ki zavzame vse vrednosti z intervala $[-1, 1]$.



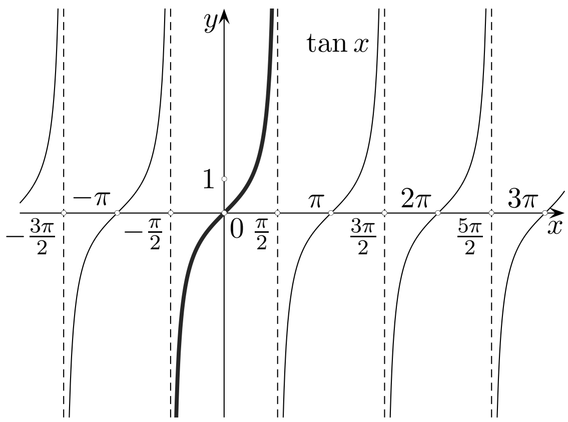
Potem lahko na definicijskem območju $[-1, 1]$ definiramo inverzno funkcijo funkcije kosinus, ki jo imenujemo *arkus kosinus* ter pišemo

$$f(x) = \arccos x.$$

Torej je $y = \arccos x$ natanko tedaj, ko je $\cos y = x$. Ker je zaloga vrednosti funkcije kosinus na intervalu $[0, \pi]$ enaka intervalu $[-1, 1]$, je zaloga vrednosti funkcije arkus kosinus na intervalu $[-1, 1]$ enaka intervalu $[0, \pi]$.



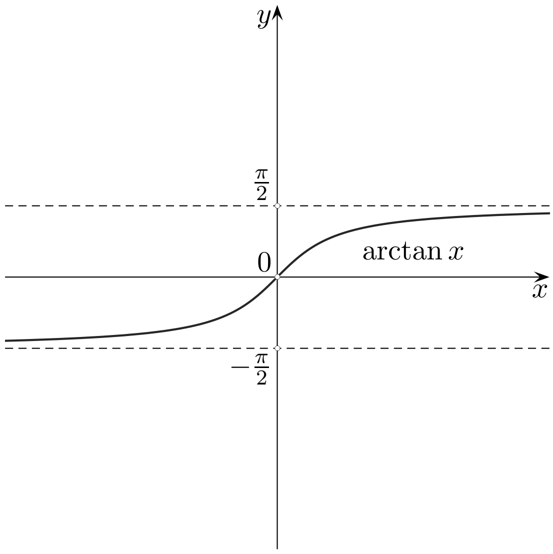
Pri funkciji tangens se omejimo na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, na katerem je tangens strogo naraščajoča in zato injektivna funkcija, ki je hkrati tudi surjektivna in zato zavzame vse vrednosti iz množice $\mathbb{R}$.



Potem lahko na definicijskem območju $\mathbb{R}$ definiramo inverzno funkcijo funkcije tangens, ki jo imenujemo *arkus tangens* in pišemo

$$f(x) = \arctan x.$$

Torej je $y = \arctan x$ natanko tedaj, ko je $\tan y = x$. Ker je funkcija tangens na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ surjektivna, je zaloga vrednosti funkcije arkus tangens, ki je definirana za vsako realno število, enaka intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Izpeljimo še zvezo med ciklometričnima funkcijama arkus sinus in arkus kosinus. Ker je

$$\sin(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x,$$

je $y = \arcsin x$ in $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$ za vsak $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1, 1]$. Seštejemo obe enačbi in dobimo, da za vsak $x \in [-1, 1]$ velja

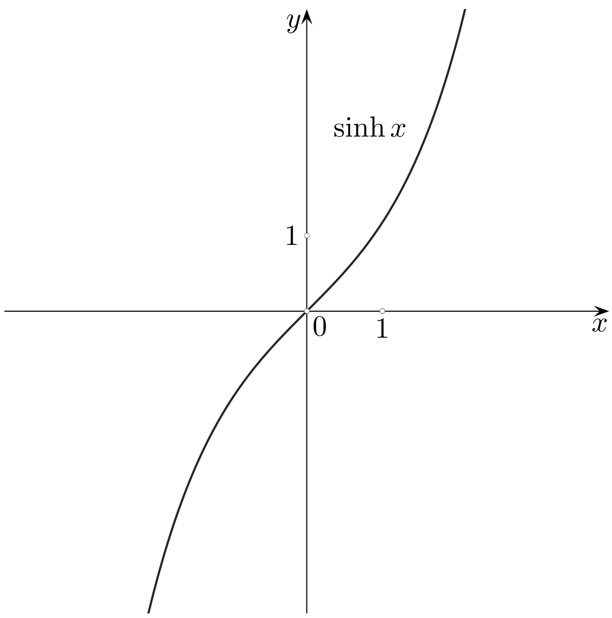
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Hiperbolične funkcije hiperbolični sinus, hiperbolični kosinus in hiperbolični tangens. Hiperbolične funkcije so definirane s pomočjo eksponentne funkcije.

Funkcija *hiperbolični sinus*,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

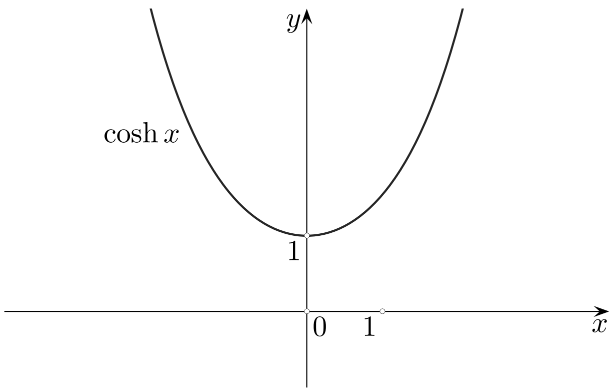
je definirana za vsako realno število, torej je njeno definicijsko območje enako $\mathbb{R}$. Tudi zaloga vrednosti hiperboličnega sinusa je enaka $\mathbb{R}$, torej je hiperbolični sinus surjektivna funkcija. Hitro se lahko prepričamo, da je hiperbolični sinus strogo naraščajoča, zato injektivna funkcija, in da je tudi liha funkcija.



Funkcija *hiperbolični kosinus*,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

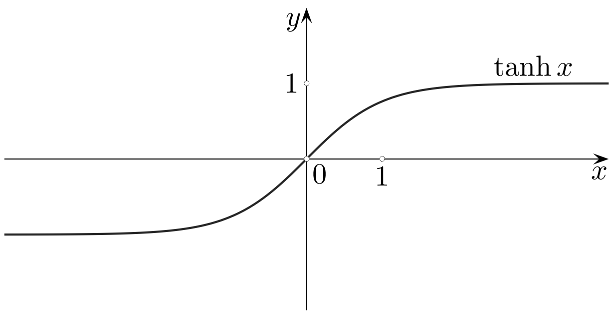
je prav tako definirana za vsako realno število, torej je njeno definicijsko območje enako $\mathbb{R}$. Zaloga vrednosti hiperboličnega kosinusa je enaka $[1, \infty)$. Hiperbolični kosinus je soda funkcija, na intervalu $(-\infty, 0]$ je strogo padajoča, na intervalu $[0, \infty)$ pa strogo naraščajoča.



Tudi funkcija *hiperbolični tangens*,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

je definirana za vsako realno število, njena zaloga vrednosti je interval $[-1, 1]$. Je strogo naraščajoča liha funkcija z dvema vodoravnima asimptotama $y = -1$ in $y = 1$.



Za hiperbolične funkcije veljajo podobne zveze, kot za kotne funkcije, na primer

- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$,
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$,
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Opomba. Parametrično podana krivulja $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ je v implicitni obliki podana z enačbo $x^2 - y^2 = 1$, kar je enačba hiperbole, po kateri so hiperbolične funkcije dobile ime.

Area funkcije area hiperbolični sinus, area hiperbolični kosinus in area hiperbolični tangens. Tudi za hiperbolične funkcije bi radi poznali njihove inverze. Hiperbolični sinus in hiperbolični tangens sta strogo naraščajoči funkciji, torej tudi injektivni funkciji, zato njuna inverza obstajata za vsako realno število iz njunih zalog vrednosti, pri hiperboličnem sinusu so to vsa realna števila, pri hiperboličnem tangensu pa vsa realna števila z intervala $(-1,1)$. Pri hiperboličnem kosinusu, ki ni ne injektivna in ne surjektivna funkcija, pa ravnamo podobno kot pri ciklometričnih funkcijah. Definicijsko območje hiperboličnega kosinusa omejimo na interval $[0,\infty)$, kjer je hiperbolični kosinus strogo naraščajoča in zato injektivna funkcija, inverzno funkcijo pa definiramo na zalogi vrednosti hiperboličnega kosinusa, ki je interval $[1,\infty)$.

Določimo najprej inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa, torej funkcije

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Najprej zamenjamo vlogi x in y, da dobimo enakost

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \tag{1}$$

in nato izrazimo y kot funkcijo spremenljivke x. To storimo tako, da pomnožimo enačbo (1) z $2e^y$ in preoblikujemo izraz v kvadratno enačbo za spremenljivko e^y, torej

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = e^y$ in zapišemo kvadratno enačbo

$$t^2 - 2xt - 1 = 0,$$

ki ima dve rešitvi

$$t_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{in} \quad t_2 = x - \sqrt{x^2+1}.$$

Ker je $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, je

$$t_1 = x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geq 0 \quad \text{in} \quad t_2 = x - \sqrt{x^2+1} < x - |x| \leq 0.$$

Funkcija e^y je pozitivna za vsak $y \in \mathbb{R}$, torej le ena izmed rešitev, to je t_1, izpolnjuje pogoj $t_1 = e^y > 0$, zato je

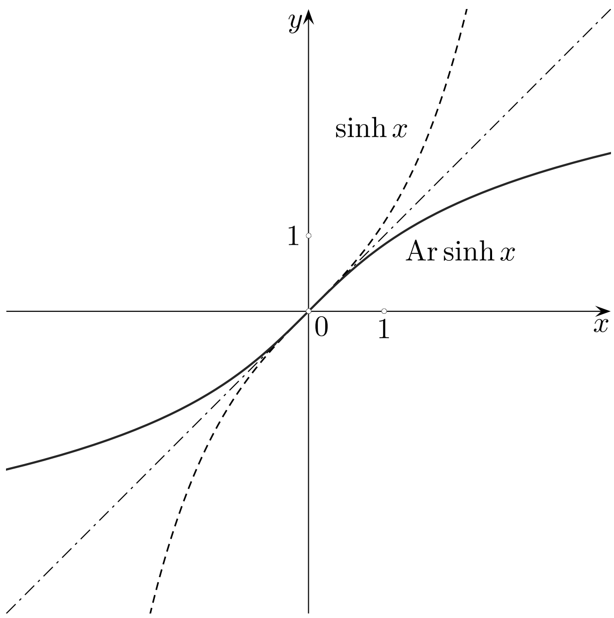
$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Enakost logaritmiramo in dobimo

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

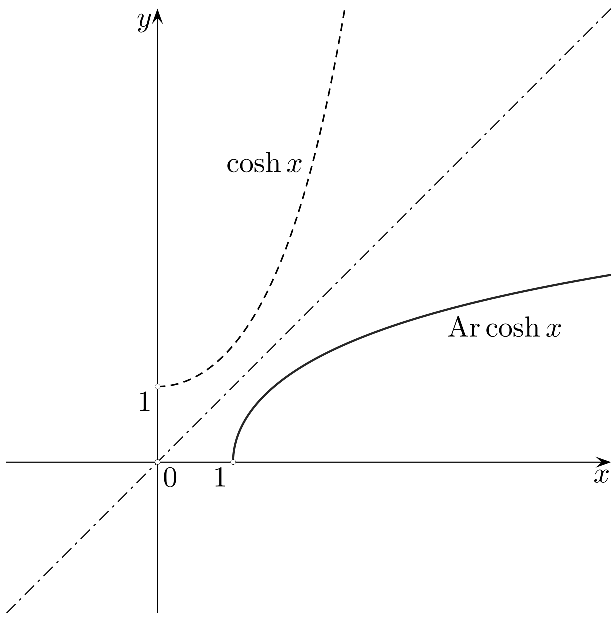
Inverzna funkcija hiperboličnega sinusa, ki jo imenujemo *area hiperbolični sinus*, je torej definirana s predpisom

$$\operatorname{Ar}\sinh x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$



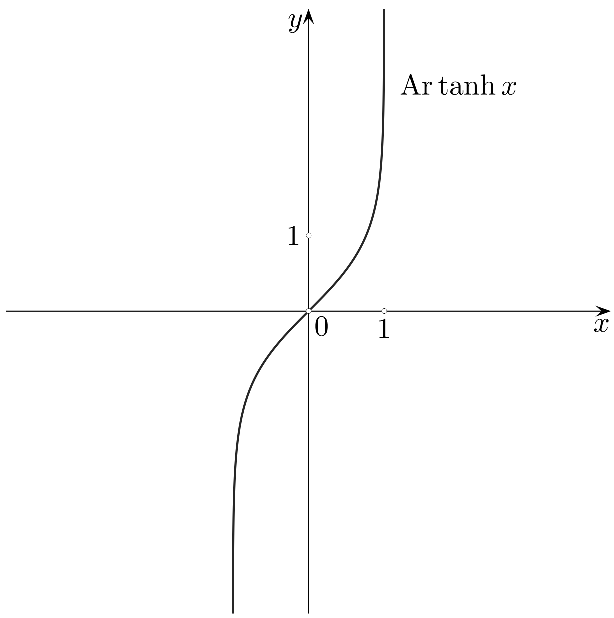
Podobno lahko izpeljemo funkcijska predpisa tudi za inverzni funkciji funkcij hiperbolični kosinus in hiperbolični tangens. Funkcija *area hiperbolični kosinus* je definirana s predpisom

$$\operatorname{Ar}\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{za vsak } x \geq 1.$$



Funkcija *area hiperbolični tangens* pa je definirana s predpisom

$$\operatorname{Ar}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{za vsak } x \in (-1,1).$$



Ob koncu pregleda nekaterih elementarnih funkcij povejmo še, da elementarne funkcije delimo na dve veliki skupini: na algebraične funkcije in na transcendentne funkcije.

Definicija. Funkcija $y = f(x)$ je *algebraična*, če so njene vrednosti rešitve enačbe

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_2(x)y^2 + A_1(x)y + A_0(x) = 0, \qquad (2)$$

kjer so A_i dani polinomi, torej $A_i(x) = a_{i,n}x^n + a_{i,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{i,1}x + a_{i,0}$. Če funkcija ni algebraična, potem pravimo, da je *transcendentna.*

Opomba. Algebraične funkcije so z enačbo (2) podane implicitno. V nekaterih primerih z enačbo (2) ni definirana nobena realna funkcija. Na primer, $y^2 + x^2 + 1 = 0$.

Primer. Oglejmo si nekaj primerov algebraičnih funkcij.

- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$ in $A_1(x) = -1$, potem je $f(x) = A_0(x)$ polinom.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$, potem je $f(x) = -\frac{A_0(x)}{A_1(x)}$ racionalna funkcija.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 2$, $A_2(x) = -1$ in $A_1(x) = 0$, potem je med rešitvami enačbe $-y^2 + A_0(x) = 0$ tudi kvadratni koren polinoma $f(x) = \sqrt{A_0(x)}$.

Torej so izmed elementarnih funkcij, ki smo jih našteli, algebraične funkcije polinomi, racionalne funkcije in kvadratni koreni, transcendentne funkcije pa so eksponentne, logaritemske, kotne, ciklometrične, hiperbolične in area funkcije.

4.4. Limita funkcij

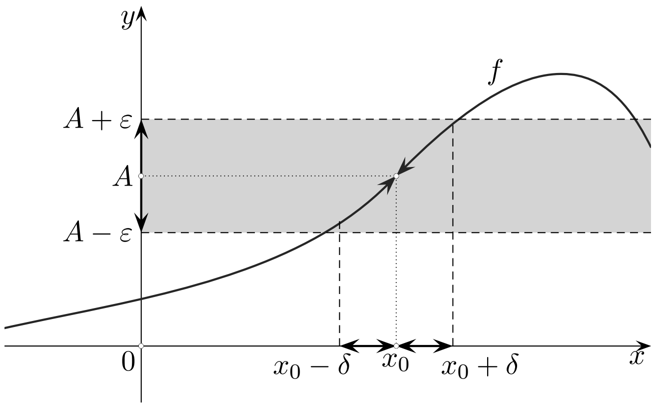
Pri limiti zaporedja morajo biti blizu limitne vrednosti vsi členi zaporedja od nekega člena dalje. Pri limiti funkcije pa morajo biti blizu limitne vrednosti tiste funkcijske vrednosti $f(x)$, za katere je vrednost spremenljivke x z nekega intervala. Zapišimo to natančneje.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je *limita* funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x \neq x_0$ iz definicijskega območja, za katerega je $|x - x_0| < \delta$. To zapišemo

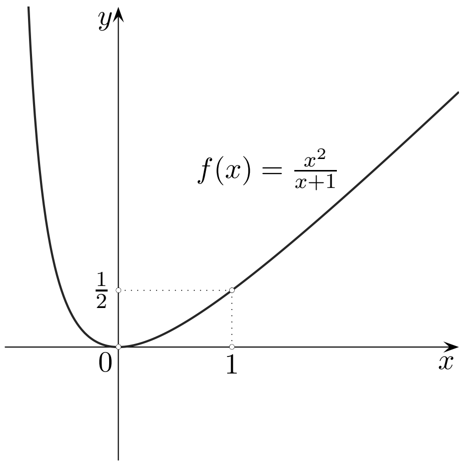
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$



Opomba. Limita funkcije f v točki x_0 ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki x_0. Velja lahko ena izmed naslednjih možnosti.

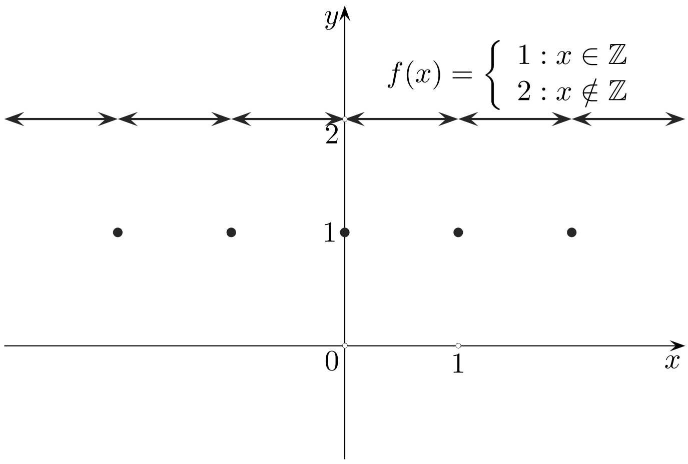
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

  Na primer, za funkcijo f, definirano s predpisom $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, obstaja $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$, kar je enako $f(1) = \frac{1}{2}$.



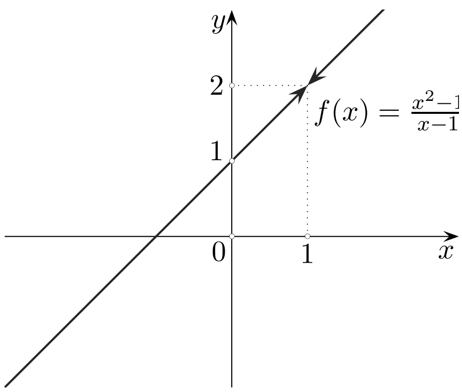
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

  Na primer, za funkcijo f, definirano s predpisom $f(x) = \begin{cases} 1 : x \in \mathbb{Z} \\ 2 : x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, obstaja $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, kar ni enako $f(1) = 1$.



- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ obstaja, funkcija f pa v točki x_0 ni definirana.

  Na primer, za funkcijo f, definirano s predpisom $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, obstaja $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$, funkcija f pa v točki 1 ni definirana.



Pri zaporedjih smo posebej obravnavali tista zaporedja, ki sicer niso bila konvergentna, so pa konvergirala proti neskončno. Podobno storimo tudi pri funkcijah.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Pravimo, da ima funkcija f, ko gre x proti x_0, *limito v neskončnosti*, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(x) > M$$

za vsak $x \neq x_0$, za katerega je $|x - x_0| < \delta$. To zapišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Podobno je

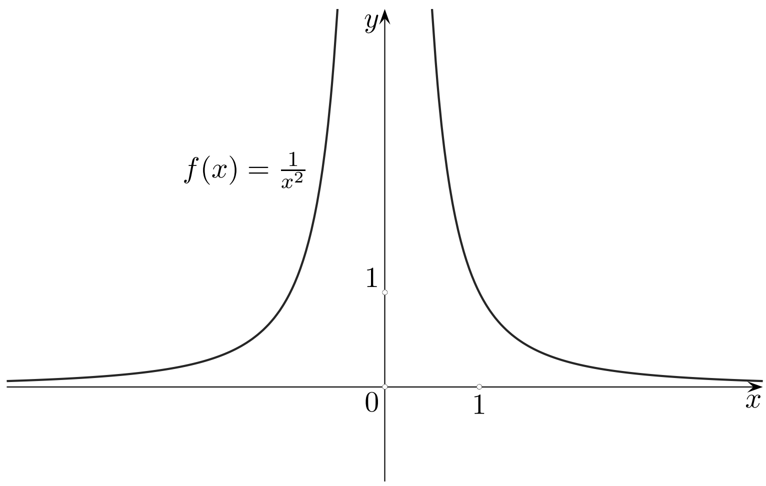
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

če za vsak $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(x) < m$$

za vsak $x \neq x_0$, za katerega je $|x - x_0| < \delta$.

Primer. Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ velja, da je $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.



Limita funkcije v neki točki $x_0 \in \mathbb{R}$ nam pove, kaj se dogaja s funkcijo v bližini te točke. Velikokrat pa nas zanima tudi, kaj se dogaja s funkcijo za velike vrednosti neodvisne spremenljivke x.

Definicija. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je limita funkcije f, ko gre x proti ∞, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako štèvil $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > M$. To zapišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Podobno je

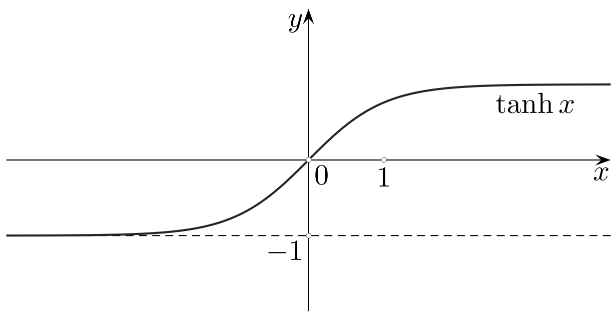
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x < m$.

Primer. Za funkcijo $f(x) = \tanh x$ velja $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.



Naj imata funkciji f in g limito v točki x_0. Potem, tako kot za limite zaporedij, tudi za limite funkcij veljajo naslednja pravila:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, kjer je $g(x) \neq 0$ za vsak x iz neke okolice x_0.

Pri določanju limite funkcij si večkrat pomagamo z naslednjim izrekom, ki je v nekateri literaturi poimenovan sendvič izrek.

Izrek. *Če za funkcije f, g in h velja, da je*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

za vsak $x \neq x_0$ iz neke okolice x_0 in je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A,$$

potem je

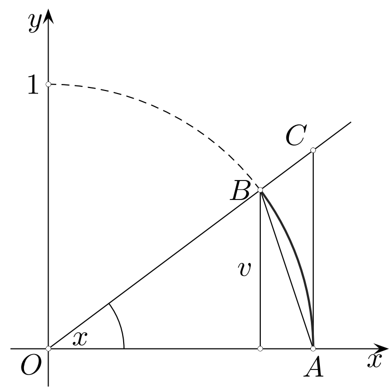
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

Izreka ne bomo dokazali, ga bomo pa uporabili pri določanju limite v naslednjem primeru.

Primer. Pokažimo, da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Limito bomo določili z uporabo geometrije. Naj bo dan krožni izsek enotskega kroga s središčnim kotom x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Narišemo še dva trikotnika, trikotnik OAB leži cel v krožnem izseku, pravokotni trikotnik OAC pa vsebuje celotni krožni izsek.



Ploščina p_1 trikotnika OAB je manjša od ploščine p_2 krožnega izseka, ta pa je manjša od ploščine p_3 trikotnika OAC. Določimo, koliko je vsaka izmed teh treh ploščin. Za višino v na stranico OA trikotnika OAB velja, da je $\frac{v}{|OB|} = \sin x$. Ker je v našem primeru krog enotski, je $|OB| = 1$ in zato je $v = \sin x$. Prav tako je tudi $|OA| = 1$, zato je ploščina trikotnika OAB enaka

$$p_1 = \frac{|OA| \cdot v}{2} = \frac{\sin x}{2}.$$

Ploščina krožnega izseka s središčnim kotom x, podanim v radianih, in polmerom $r = |OA| = 1$ je $\frac{x \cdot r^2}{2}$, torej v našem primeru

$$p_2 = \frac{x}{2}.$$

Ploščina pravokotnega trikotnik OAC je enaka polovici produkta katet $|OA|$ in $|AC|$. Ker je $\frac{|AC|}{|OA|} = \tan x$, torej $|AC| = \tan x$, je ploščina trikotnika OAC enaka

$$p_3 = \frac{|OA| \cdot |AC|}{2} = \frac{\tan x}{2}.$$

Upoštevamo, da je $p_1 < p_2 < p_3$, in dobimo

$$\sin x < x < \tan x. \tag{3}$$

Ker je $0 < x < \frac{\pi}{2}$, je $\sin x > 0$, zato lahko neenakost (3) delimo s funkcijo $\sin x$ in dobimo

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

pri čemer smo upoštevali še, da je $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Če imamo poljubni pozitivni števili a in b, za kateri velja $a < b$, potem lahko to neenakost pomnožimo z $\frac{1}{ab}$ in dobimo $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Torej velja

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{4}$$

za vsako realno število x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ker pa so funkcije $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $h(x) = 1$ sode, velja neenakost (4) tudi za vsako realno število x, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Torej je $f(x) < g(x) < h(x)$ za vsak $x \neq 0$ iz neke okolice števila 0 in

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1,$$

zato je po prejšnjem izreku tudi

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definirajmo sedaj še šibkejša pojma od limite, to sta leva in desna limita.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je *leva limita* funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x < x_0$, za katerega je $x_0 - x < \delta$. To pišemo

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

Število A je *desna limita* funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > x_0$, za katerega je $x - x_0 < \delta$. To pišemo

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

Primer. Izračunajmo

$$\lim_{x \nearrow \pi} \frac{x + \pi}{\arctan\left(\frac{1}{x-\pi}\right)}.$$

Ker računamo levo limito v točki π, nas zanima, kakšne vrednosti zavzame funkcija $f(x) = \frac{x+\pi}{\arctan\left(\frac{1}{x-\pi}\right)}$ za tiste vrednosti spremenljivke x, ki so malo manjše od π. Za takšne vrednosti spremenljivke x je $x - \pi < 0$, torej je $\frac{1}{x-\pi}$ negativno, a po absolutni vrednosti veliko število. Sledi, da je $\lim_{x \nearrow \pi} \arctan\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = -\frac{\pi}{2}$, torej je

$$\lim_{x \nearrow \pi} \frac{x + \pi}{\arctan\left(\frac{1}{x-\pi}\right)} = \frac{2\pi}{-\frac{\pi}{2}} = -4.$$

Neposredno iz definicij sledi naslednji izrek, ki povezuje limito z levo in desno limito.

IZREK. *Limita funkcije v točki x_0 obstaja natanko tedaj, ko v tej točki obstajata leva in desna limita in sta enaki.*

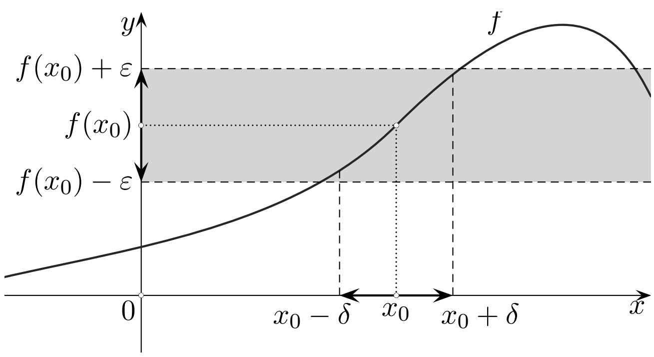
4.5. Zveznost funkcij

Denimo, da poznamo vrednost funkcije samo za končno vrednosti neodvisne spremenljivke. Pri določanju funkcijskih vrednosti tudi za preostale vrednosti neodvisne spremenljivke navadno predpostavimo, da je graf funkcije povezana, nepretrgana krivulja. Opišimo natančneje, kdaj ima funkcija to lastnost.

DEFINICIJA. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, D interval. Funkcija f je *zvezna v točki* $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

za vsak $x \in D$, za katerega velja $|x - x_0| < \delta$. Pravimo, da je funkcija f *zvezna* na D, če je zvezna v vsaki točki iz D.



Definicija zveznosti funkcije f v točki x_0, ki smo jo pravkar zapisali, je enaka definiciji limite funkcije f v točki x_0, če je ta limita enaka $f(x_0)$. Torej velja naslednji izrek.

IZREK. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, D interval, je zvezna v točki x_0 natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Da sta pojma zveznosti in limite tesno povezana, dokazuje tudi naslednji izrek.

Izrek. *Denimo, da obstaja* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *in naj bo* g *zvezna funkcija v točki* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. *Potem je*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$

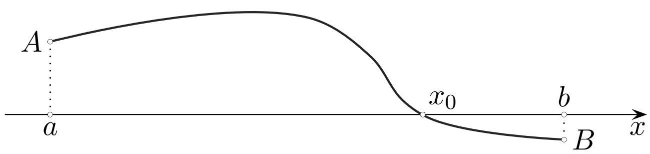
Torej lahko zamenjamo vrstni red računanja limite in računanja vrednosti zvezne funkcije.

Z upoštevanjem lastnosti za računanje limit in predhodnega izreka lahko hitro izpeljemo, da veljajo naslednje lastnosti:

- vsota zveznih funkcij je zvezna funkcija,
- produkt zveznih funkcij je zvezna funkcija,
- kvocient zveznih funkcij je zvezna funkcija,
- kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija,
- elementarne funkcije, ki smo jih obravnavali, so na svojem definicijskem območju zvezne.

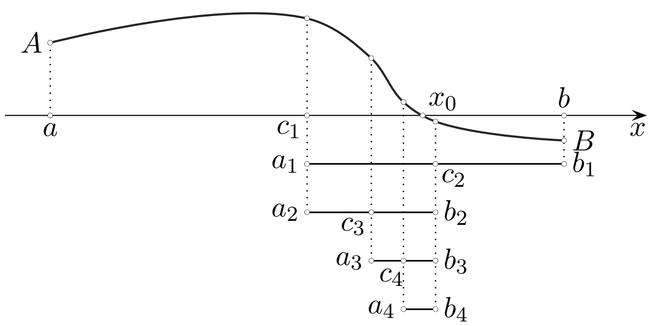
V nadaljevanju si oglejmo nekaj izrekov, ki opisujejo lastnosti zveznih funkcij, definiranih na zaprtem intervalu.

Izrek. *Naj bo* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj bo* $f(a)f(b) < 0$, *torej funkcija* f *v krajiščih intervala zavzame nasprotno predznačeni vrednosti. Potem obstaja vsaj ena točka* $x_0 \in (a,b)$, *tako da je* $f(x_0) = 0$.



Dokaz. Izrek dokažemo s pomočjo metode bisekcije. Interval $[a,b]$ razpolovimo, razpolovišče označimo s c_1. Če je $f(c_1) = 0$, potem določimo $x_0 = c_1$ in je $f(x_0) = 0$. Če pa je $f(c_1) \neq 0$, potem je bodisi $f(a)f(c_1) < 0$ bodisi $f(c_1)f(b) < 0$, saj sta vrednosti $f(a)$ in $f(b)$ različno predznačeni. V primeru, da je $f(a)f(c_1) < 0$, definiramo $a_1 = a$ in $b_1 = c_1$, v primeru, da je $f(c_1)f(b) < 0$, pa definiramo $a_1 = c_1$ in $b_1 = b$. V krajiščih intervala $[a_1,b_1]$ potem funkcija f zavzame različno predznačeni vrednosti in postopek lahko nadaljujemo na intervalu $[a_1,b_1]$, katerega dolžina je $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Definiramo $c_2 = \frac{b_1+a_1}{2}$ in zopet ločimo tri primere. Če je c_2 ničla funkcije f, končamo, drugače definiramo a_2 in b_2, tako da ima funkcija na $[a_2,b_2]$

različno predznačeni vrednosti, dolžina intervala pa je $\frac{b-a}{2^2}$. Postopek še naprej nadaljujemo in na tak način dobimo, da je $f(x_0) = 0$ za neko realno število x_0 z intervala $[a, b]$, ali pa dobimo zaporedje intervalov $[a_n, b_n]$, tako da je $f(a_n)f(b_n) < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pravzaprav ima $f(a_n)$ isti predznak za vsak $n \in \mathbb{N}$, enako ima tudi $f(b_n)$ isti predznak za vsak $n \in \mathbb{N}$. Velja še, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče in navzgor omejeno, na primer z b, zaporedje $\{b_n\}$ je padajoče in navzdol omejeno, na primer z a, zato sta obe zaporedji konvergentni. Ker je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, imata zaporedji isto limito, ki jo označimo z x_0, $a \leq x_0 \leq b$. Funkcija f je zvezna, zato je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ker je $f(a_n)f(b_n) < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je po eni strani $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$, po drugi strani pa je $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)f(b_n) = (f(x_0))^2$, torej $(f(x_0))^2 \leq 0$ in zato je $f(x_0) = 0$. $\square$

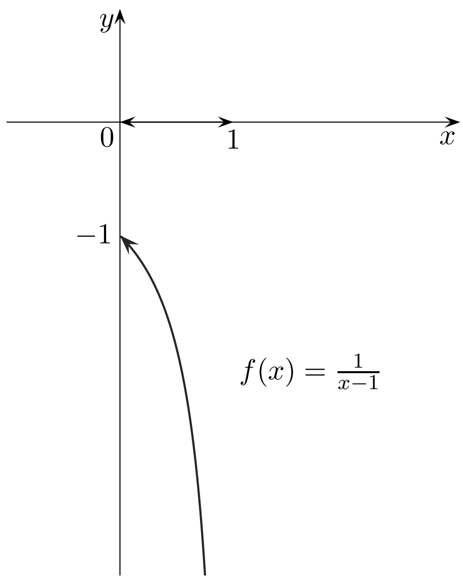


Izrek. *Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija f na intervalu $[a, b]$ omejena.*

Dokaz. Zapišimo samo skico dokaza. Recimo, da funkcija f na intervalu $[a, b]$ ni omejena. Potem za vsako naravno število n obstaja tako realno število $a_n \in [a, b]$, da je $f(a_n) > n$. Zaporedje $\{a_n\}$ ima na zaprtem intervalu $[a, b]$ vsaj eno stekališče, ki ga označimo z x_0. Ker je funkcija f zvezna, bi za vsak $\varepsilon > 0$ moralo veljati $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ za vse x blizu x_0, kar pa ni res za dovolj pozne člene zaporedja $\{a_n\}$, ki so blizu x_0 in za katere gredo vrednosti $f(a_n)$ čez vse meje. $\square$

Če interval ni zaprt, zapisana lastnost funkcije iz predhodnega izreka ne velja vedno.

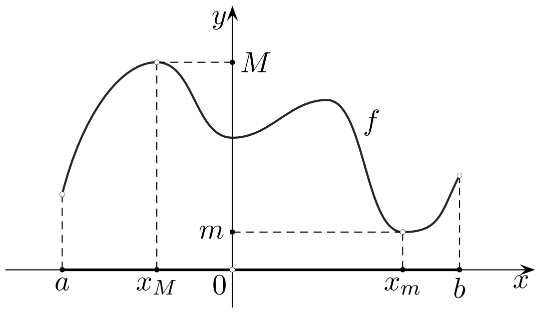
Primer. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1}$ je na intervalu $(0, 1)$ zvezna, vendar ni omejena.



Izrek. *Zvezna funkcija* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *doseže svojo natančno spodnjo mejo* m *in svojo natančno zgornjo mejo* M. *Torej obstajata taki števili* $x_m, x_M \in [a,b]$, *da je*

$$f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = m \quad \textit{in} \quad f(x_M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = M.$$

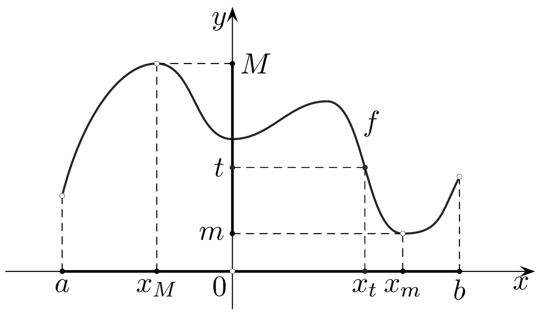
Dokaz. Po prejšnjem izreku je funkcija f na intervalu $[a,b]$ omejena, torej obstajata njena natančna spodnja meja m in njena natančna zgornja meja M. Privzemimo, da je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a,b]$. Potem je funkcija $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ definirana za vsak $x \in [a,b]$ in na tem intervalu tudi zvezna. Po prejšnjem izreku je g omejena funkcija, torej $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} < K$ za neko pozitivno konstanto $K \in \mathbb{R}$. Upoštevamo, da je $f(x) - m > 0$, in iz neenakosti $\frac{1}{f(x)-m} < K$ izrazimo $f(x)$. Dobimo, da je $m+\frac{1}{K} < f(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, kar je protislovje, saj je bilo število m natančna spodnja meja, torej največja izmed vseh spodnjih mej funkcije f. Sledi, da smo napačno privzeli, da je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a,b]$, torej obstaja nek $x_m \in [a,b]$, da je $f(x_m) = m$. Podobno dokažemo obstoj števila $x_M \in [a,b]$, za katerega je $f(x_M) = M$. □



Izrek. *Zvezna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in svojo natančno zgornjo mejo M. Torej za vsak $t \in [m,M]$ obstaja nek $x_t \in [a,b]$, tako da je*

$$f(x_t) = t.$$

Dokaz. Naj bo $t \in [m,M]$. Po prejšnjem izreku obstajata taki števili $x_m, x_M \in [a,b]$, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Definiramo novo funkcijo $g(x) = f(x) - t$. Ker je $m \leq t \leq M$, je $g(x_m) = f(x_m) - t = m - t \leq 0$ in $g(x_M) = f(x_M) - t = M - t \geq 0$. Če je $f(x_m) - t = 0$ ali $f(x_M) - t = 0$, potem je $x_t = x_m$ ali $x_t = x_M$. Če pa je $f(x_m) - t < 0$ in $f(x_M) - t > 0$, potem ima zvezna funkcija g v krajiščih x_m in x_M nasprotno predznačeni vrednosti, torej obstaja tak $x_t \in [a,b]$, da je $g(x_t) = 0$, torej $f(x_t) = t$. $\square$



Na koncu poglavja definirajmo še en pojem, povezan z zveznostjo, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, D interval. Funkcija f je *enakomerno zvezna* na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

za vsaki števili $x, y \in D$, za kateri velja $|x - y| < \delta$.

Razlika med zveznostjo in enakomerno zveznostjo funkcije je v tem, da pri zvezni funkciji pri danem $\varepsilon > 0$ za $x \in D$ obstaja ustrezen δ, ki je odvisen od vrednosti x, pri enakomerni zveznosti pa je pri danem $\varepsilon > 0$ za poljuben $x \in D$ dober isti δ. Da se pokazati, da se pojma zveznosti in enakomerne zveznosti na zaprtem intervalu ujemata, torej vsaka zvezna funkcija, definirana na zaprtem intervalu $[a, b]$, je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna.

5. Odvod

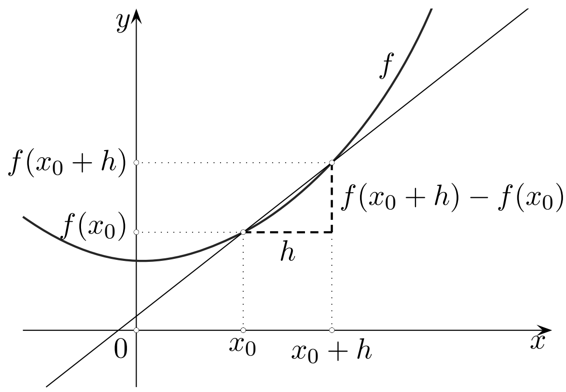
V tem poglavju bomo najprej definirali odvod funkcije in izračunali odvode nekaterih elementarnih funkcij, nato si bomo ogledali nekaj pomembnih lastnosti odvedljih funkcij in odvod uporabili pri računanju ekstremov in limit.

5.1. Definicija odvoda

Pri proučevanju funkcij nas običajno zanima, kako se vrednosti funkcije spreminjajo, ali naraščajo ali padajo, in kako hitre so te spremembe. Kako hitro se vrednosti funkcije $f(x)$ spreminjajo v odvisnosti od spremenljivke x, lahko preverimo s pomočjo odvoda. Naj bo funkcija f definirana na odprtem intervalu, torej $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, in naj bo $x_0 \in (a,b)$. Oglejmo si, kako se spreminja vrednost funkcije f v bližini točke x_0. Ko se vrednost neodvisne spremenljivke spremeni za h, torej z x_0 na $x_0 + h$, se vrednost funkcije spremeni z $f(x_0)$ na $f(x_0+h)$, torej za $f(x_0+h) - f(x_0)$. Hitrost spremembe je tem večja, čim večja je sprememba vrednosti funkcije pri čim manjši spremembi neodvisne spremenljivke, torej čim večja je sprememba $f(x_0+h)-f(x_0)$ pri čim manjši spremembi $(x_0+h)-x_0 = h$. Če narišemo graf funkcije f in premico, ki gre skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$, potem je hitrost spremembe tem večja, čim večji je naklon premice, naklon pa je odvisen od smernega koeficienta premice. Smerni koeficient premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ je enak kvocientu

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ki se imenuje *diferenčni kvocient* funkcije f v točki x_0.



Če manjšamo vrednost h, potem se premica skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$ vse bolj prilega krivulji, ki predstavlja graf funkcije f. V izraz za diferenčni kvocient seveda ne moremo vstaviti $h = 0$, lahko pa pogledamo, če morda obstaja limita diferenčnega kvocienta, ko gre h proti nič.

Definicija. Naj bo $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta funkcije f v točki $x_0 \in (a,b)$, ko gre h proti nič, potem pravimo, da je funkcija f *odvedljiva v točki* x_0. Vrednost te limite imenujemo *odvod* funkcije f v točki x_0 in jo označimo z $f'(x_0)$. Torej je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Če je f odvedljiva v vsaki točki območja D, potem pravimo, da je f *odvedljiva na območju* D.

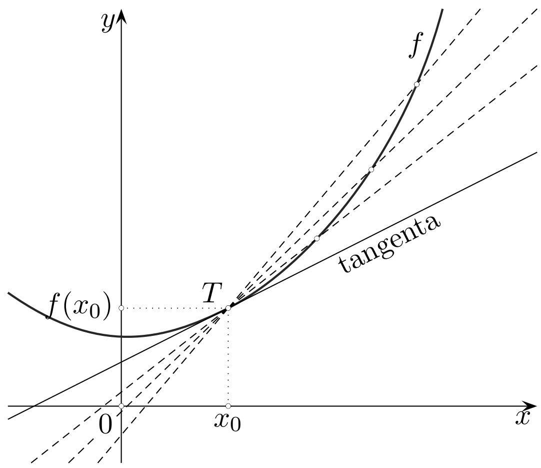
Opomba. Odvod funkcije smo definirali s pomočjo limite, limito pa smo definirali s pomočjo ε-okolic in δ-okolic. Torej lahko opišemo s pomočjo okolic tudi odvod funkcije. Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.

Če obstaja odvod funkcije f v točki x_0, potem je $f'(x_0)$ za majhne vrednosti h po velikosti zelo blizu smernemu koeficientu $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ premice skozi bližnji točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$ na grafu funkcije $y = f(x)$. Premica skozi točko $(x_0, f(x_0))$ s smernim koeficientom $f'(x_0)$ se potem v točki $(x_0, f(x_0))$ od vseh premic najbolje prilega grafu funkcije f. To premico posebej poimenujemo.

Definicija. Premico skozi točko $(x_0, f(x_0))$ s smernim koeficientom $f'(x_0)$ imenujemo *tangenta* na graf funkcije $y = f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0))$.



Opomba. Odvod funkcije f v točki x_0 nam torej pove, kako hitro se vrednost funkcije spreminja v točki x_0.

Naj bo funkcija f odvedljiva v vsaki točki območja $D \subseteq \mathbb{R}$. Torej za vsak $x \in D$ obstaja limita diferenčnega kvocienta funkcije f v točki x, to je odvod funkcije f v točki x. Predpis, ki vsaki točki $x \in D$ priredi odvod funkcije f v tej točki, torej $x \mapsto f'(x)$, potem določa neko novo funkcijo na območju D, ki jo imenujemo odvod funkcije f in označimo z f'.

Primer. Izračunajmo po definiciji odvod funkcije $f(x) = x^2 + x$. Velja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2+x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1. \end{aligned}$$

Seveda bi bilo zelo dolgotrajno, če bi vedno računali odvod funkcije po definiciji s pomočjo limite. V nadaljevanju si zato oglejmo, katera pravila veljajo za odvajanje funkcij.

Trditev. *Če je f konstantna funkcija, torej $f(x) = c$ za vsak x, potem je njen odvod enak nič, torej $f'(x) = c' = 0$.*

Dokaz. Velja

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

□

Trditev. *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f+g$ in velja*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Trditev. *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija fg in velja*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Trditev. *Če je funkcija f odvedljiva v točki x in je c konstanta, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija cf in velja*

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Dokaz. Z upoštevanjem pravila za odvod produkta in dejstva, da je odvod konstante enak nič, dobimo

$$(cf)'(x) = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x).$$

□

Trditev. *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x in je $g(x) \neq 0$, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija $\frac{f}{g}$ in velja*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

□

Trditev. *(Posredno odvajanje, verižno pravilo.) Če je funkcija g odvedljiva v točki $f(x)$ in je funkcija f odvedljiva v točki x, potem je funkcija $g \circ f$ odvedljiva v točki x in velja*

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Dokaz. Dokaz naredimo samo za poseben primer, ko je funkcija f injektivna v neki okolici x in je zato $\Delta f = f(x+h) - f(x) \neq 0$ za $h \neq 0$. Ker je funkcija f odvedljiva v točki x, gre Δf proti nič, ko gre h proti nič. Potem je

$$\begin{aligned}(g(f(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(f(x)+\Delta f)-g(f(x))}{\Delta f}\cdot\frac{\Delta f}{h}\right)\\ &= \lim_{\Delta f\to 0}\frac{g(f(x)+\Delta f)-g(f(x))}{\Delta f}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= g'(f(x))\cdot f'(x).\end{aligned}$$

V splošnem lahko verižno pravilo dokažemo, na primer, z diferenciali, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju. □

TRDITEV. *Če je f^{-1} inverzna funkcija odvedjive funkcije f in je $f'(x)\neq 0$, potem je funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $f(x)$ in velja*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

DOKAZ. Privzemimo, da je f^{-1} odvedljiva funkcija, in izpeljimo samo formulo za odvod inverzne funkcije. Ker je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f, velja $f^{-1}(f(x)) = x$ za vsak x. Obe strani enakosti odvajamo, pri čemer na levi strani uporabimo verižno pravilo, ter dobimo

$$(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1,$$

oziroma

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

5.2. Odvodi elementarnih funkcij

V nadaljevanju bomo izračunali odvode nekaterih elementarnih funkcij. Pri tem si bomo pomagali s pravkar izpeljanimi pravili za odvajanje funkcij, velikokrat bomo uporabili pravilo za odvod inverzne funkcije $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ v obliki $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$.

Odvod eksponentne funkcije. Oglejmo si najprej odvod eksponentne funkcije z osnovo e, torej $f(x) = e^x$. Konstanto e smo definirali s pomočjo limite zaporedja, lahko pa jo zapišemo tudi s pomočjo limite funkcije na naslednji način

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

Velja

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Pri računanju zadnje limite si pomagamo z vpeljavo nove spremenljivke $t = e^h - 1$. Potem je $h = \log(1+t)$ in ko gre h proti 0, gre tudi $t = e^h - 1$ proti 0. Torej je

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log(1+t)} = e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\log(1+t)} = e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\ &= e^x \frac{1}{\log\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)} = e^x \frac{1}{\log e} = e^x. \end{aligned}$$

Če je osnova eksponentne funkcije druga, torej $f(x) = a^x$, $a > 0$, potem zapišemo

$$f(x) = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

in po pravilu za posredno odvajanje dobimo

$$f'(x) = (e^{x\log a})' = e^{x\log a} \log a = a^x \log a.$$

Odvod logaritemske funkcije. Oglejmo si najprej odvod naravnega logaritma, torej $f(x) = \log x$. Inverzna funkcija logaritemske funkcije je eksponentna funkcija $f^{-1}(x) = e^x$, katere odvod je $(f^{-1})'(x) = e^x$, zato je

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Če je $f(x) = \log_a x$, potem je

$$f'(x) = (\log_a(x))' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}.$$

Opomba. Naj bo funkcija f definirana s predpisom $f(x) = \log(-x)$ za $x < 0$. Potem je tudi

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

torej je

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

za vsak $x \neq 0$.

Odvod potenčne funkcije. Naj bo r poljubno realno število in f potenčna funkcija z eksponentom r, torej $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$. Zapišemo

$$f(x) = x^r = e^{\log x^r} = e^{r \log x}$$

in odvajamo po pravilu za posredno odvajanje

$$f'(x) = (e^{r \log x})' = e^{r \log x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

Odvod kotnih funkcij. Izračunajmo najprej odvod funkcije $f(x) = \sin x$. Pri tem bomo uporabili enakost $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ in že izračunano limito, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Velja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(\frac{2x+h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

Izračunajmo še odvod kosinusne funkcije. Pri tem upoštevamo, da je $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ in $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Zapišemo

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

in odvajamo

$$f'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Pri računanju odvoda funkcije tangens upoštevamo pravilo za odvod kvocienta. Zapišemo

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

in odvajamo

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Odvod ciklometričnih funkcij. Ciklometrične funkcije so inverzne funkcije kotnih funkcij, zato bomo uporabili pravilo za odvod inverzne funkcije. Najprej izračunajmo odvod funkcije arkus sinus, torej $f(x) = \arcsin x$. Ker je $f^{-1}(x) = \sin x$ in

$$(f^{-1})'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

po pravilu za odvod inverzne funkcije dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(f(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arccos x$ izračunamo najhitreje, če na obeh straneh odvajamo enakost

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

in dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (\arccos x)' = 0.$$

Sledi

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arctan x$ prav tako izračunamo po pravilu za odvod inverzne funkcije. Inverzna funkcija funkcije arkus tangens je funkcija tangens, torej $f^{-1}(x) = \tan x$, njen odvod pa je

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

Torej je

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{1+(\tan(f(x)))^2} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odvod hiperboličnih funkcij. Odvode hiperboličnih funkcije izračunamo s pomočjo pravil za odvajanje vsote in kvocienta ter z uporabo enakosti $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Velja:

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\ (\cosh x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \\ (\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}. \end{aligned}$$

Preglednica odvodov nekaterih elementarnih funkcij.

- $c' = 0$
- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \log a$
- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
  $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Primer. Naj bo funkcija f dana s predpisom $f(x) = x^{\log x}$. Ker je spremenljivka x tako v osnovi kot tudi v eksponentu, lahko izračunamo odvod funkcije f na enega izmed naslednjih dveh načinov.

- Zapišemo

  $$f(x) = x^{\log x} = e^{\log\left(x^{\log x}\right)} = e^{\log x \cdot \log x} = e^{(\log x)^2}$$

  in odvajamo

  $$f'(x) = e^{(\log x)^2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = x^{\log x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2x^{\log(x)-1} \log x.$$

- Obe strani enakosti $f(x) = x^{\log x}$ logaritmiramo, torej

  $$\log(f(x)) = \log\left(x^{\log x}\right) = \log x \cdot \log x = (\log x)^2,$$

  nato pa to enakost odvajamo, torej

  $$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}.$$

  Sledi, da je

  $$f'(x) = f(x) \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = x^{\log x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2x^{\log(x)-1} \log x.$$

5.3. Višji odvodi

Če je funkcija f odvedljiva na nekem območju D, potem jo lahko odvajamo in dobimo novo funkcijo $g = f'$, ki je prav tako definirana na območju D. Če je tudi nova funkcija g odvedljiva na območju D, potem pravimo, da je f dvakrat odvedljiva funkcija na območju D, njen odvod pa zapišemo $g' = f''$. Funkcijo f'' imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Splošno, če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na območju D, potem pravimo, da je funkcija f *n-krat odvedljiva* na območju D, n-ti odvod funkcije f pa označimo z $f^{(n)}$. Dodatno pišemo še za $n = 0$, da je $f^{(0)} = f$. Za $n \geq 2$ pravimo n-tim odvodom tudi *višji odvodi.* Funkcije, ki jih lahko poljubnokrat odvajamo, imenujemo *neskončnokrat odvedljive* funkcije.

Primer. Oglejmo si višje odvode nekaterih elementarnih funkcij.

- Odvod eksponentne funkcije $f(x) = e^x$ je enak prvotni funkciji, torej $f'(x) = e^x$, zato je
$$f^{(n)}(x) = e^x, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

- Ko odvajamo potenčno funkcijo $f(x) = x^n$, se z vsakim odvajanjem potenca zmanjša za ena, tako da velja
$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}, \ \ k < n.$$
Če potenčno funkcijo n-krat odvajamo, dobimo konstantno funkcijo
$$f^{(n)}(x) = n!,$$
vsi nadaljnji odvodi pa so potem enaki nič, torej
$$f^{(m)}(x) = 0, \ \ m > n.$$

- Odvajajmo kotno funkcijo $f(x) = \sin x$. Velja
$$f'(x) = \cos x, \ \ f''(x) = -\sin x, \ \ f'''(x) = -\cos x \quad \text{in} \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$
Po štirih odvajanjih ponovno dobimo prvotno funkcijo sinus, tako da se višji odvodi ciklično ponavljajo. Torej, za $f(x) = \sin x$ velja
$$f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x).$$
Omenimo, da enako velja tudi za funkcijo kosinus.

5.4. Diferencial funkcije

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x. Pokažimo, da tangenta na graf funkcije f v točki $(x, f(x))$ dobro aproksimira graf funkcije v bližini točke $(x, f(x))$. Ker je f odvedljiva funkcija v točki x, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$. Označimo

$$\eta(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \tag{1}$$

in pomnožimo obe strani enakosti (1) s h. Dobimo, da je

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta(h)h.$$

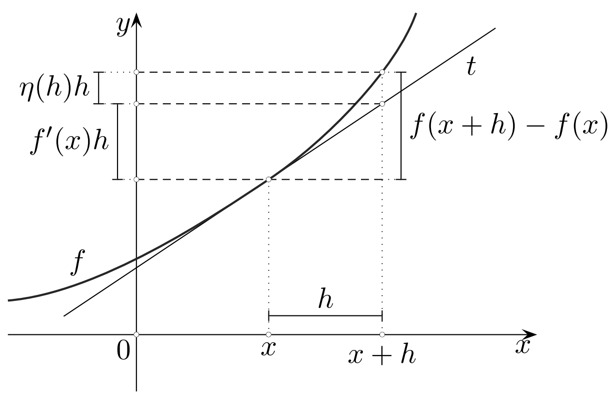
Ker je f odvedljiva funkcija v točki x, iz (1) sledi, da je $\lim\limits_{h\to 0} \eta(h) = 0$. Potem pa je izraz $\eta(h)h$, ko gre $h \to 0$, produkt dveh količin, ki gresta proti nič, zato je produkt $\eta(h)h$ za majhne h veliko manjši od produkta $f'(x)h$, kjer se $f'(x)$ ne spreminja v odvisnosti od h. Zato za majhne vrednosti h velja

$$f(x+h) - f(x) \doteq f'(x)h,$$

oziroma

$$f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h.$$

Vrednost $f(x) + f'(x)h$ je vrednost funkcije, odvisne od spremenljivke h, katere graf je tangenta t na graf funkcije f. Tangenta t za majhne h dobro aproksimira graf funkcije f.



Označimo spremembo neodvisne spremenljivke x z dx, torej $dx = h$. Potem izraz $f'(x)dx$ imenujemo *diferencial* funkcije f in ga označimo z

$$df = f'(x)dx.$$

Opomnimo, da je diferencial df odvisen tako od x kot tudi od dx.

Primer. Oglejmo si, kako natančen približek dobimo s pomočjo formule $f(x+h) \doteq f(x)+f'(x)h$ za vrednost $\arcsin(0.49)$. Določimo $x=0.5$, torej je $h=-0.01$. Ker je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, je

$$\begin{aligned}\arcsin(0.49) &\doteq \arcsin(0.5) + \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot (-0.01)\\ &\doteq \frac{\pi}{6} + 1.15470 \cdot (-0.01) \doteq 0.51205.\end{aligned}$$

Prava vrednost $\arcsin(0.49)$, zaokrožena na 5 decimalk, pa je 0.51209. Vrednosti izrazov se razlikujeta na peti decimalki. Če za približek $\arcsin(0.49)$ vzamemo kar $\arcsin(0.5) = 0.52360$, se vrednosti razlikujeta že na drugi decimalki.

Opomba. Iz zapisa za diferencial je izpeljan tudi zapis odvoda funkcije f po spremenljivki x v obliki

$$f' = \frac{df}{dx} \quad \text{in} \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{(dx)^n}.$$

5.5. Lastnosti odvedljivih funkcij

Najprej pokažimo, da je vsaka odvedljiva funkcija zvezna, in nato, da ni vsaka zvezna funkcija odvedljiva. Torej je zveznih funkcij več kot odvedljivih.

Izrek. *Če je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $x_0 \in (a,b)$, potem je v točki x_0 tudi zvezna.*

Dokaz. Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$. Pomnožimo obe strani neenakosti s $|h|$ in dobimo

$$|f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)| < \varepsilon |h|,$$

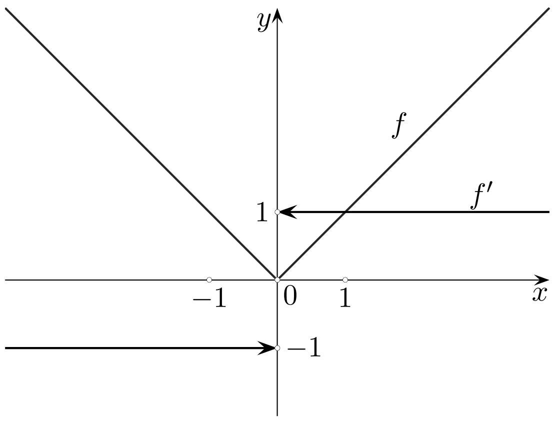
oziroma

$$hf'(x_0) - \varepsilon|h| < f(x_0+h) - f(x_0) < hf'(x_0) + \varepsilon|h|.$$

Ko gre $h \to 0$, gresta leva in desna stran neenakosti proti nič, torej gre po sendvič izreku proti nič tudi $f(x_0 + h) - f(x_0)$. To pomeni, da je $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, torej je f zvezna v točki x_0. □

Opomba. Ni vsaka zvezna funkcija tudi odvedljiva, torej obstajajo zvezne funkcije, ki niso odvedljive.

Primer. Funkcija $f(x) = |x|$ je v točki $x_0 = 0$ zvezna, ni pa v tej točki odvedljiva, saj je leva limita diferenčnega kvocienta enaka -1, desna limita pa je enaka 1, torej sta leva in desna limita različni in zato limita diferenčnega kvocienta ne obstaja.



V nadaljevanju si oglejmo, kaj vrednost $f'(x_0)$ pove o obnašanju funkcije f v točki x_0.

Izrek. *Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $x_0 \in (a, b)$. Če je $f'(x_0) > 0$, potem je funkcija f v točki x_0 naraščajoča, če pa je $f'(x_0) < 0$, potem je funkcija f v točki x_0 padajoča.*

Dokaz. Naj bo $f'(x_0) > 0$. Potem je smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ pozitiven, torej tangenta, ki najbolje aproksimira graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$, narašča, zato v točki x_0 narašča tudi funkcija f. Natančneje, označimo

$$\eta(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Ker je f odvedljiva v točki x_0, velja, da gre $\eta(h) \to 0$, ko gre $h \to 0$. Pomnožimo obe strani enakosti s h in dobimo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \eta(h)).$$

Vrednost $f'(x_0)$ je pozitivna in neodvisna od h, vrednost $\eta(h)$ pa gre proti 0, ko gre $h \to 0$, torej za vse dovolj majhne vrednosti $|h|$ velja $|\eta(h)| < f'(x_0)$.

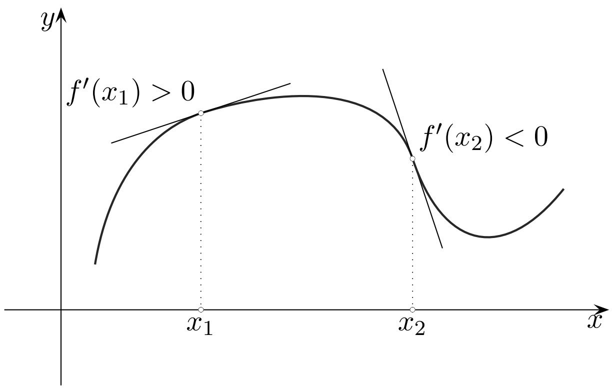
Sledi, da za vse dovolj majhne vrednosti $|h|$ velja $f'(x_0) + \eta(h) > 0$ in zato je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \quad \text{za } h > 0$$

in

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 \quad \text{za } h < 0.$$

Dokazali smo, da je v primeru, ko je $f'(x_0) > 0$, funkcija f v točki x_0 naraščajoča. Podobno pokažemo, da je v primeru, ko je $f'(x_0) < 0$, funkcija f v točki x_0 padajoča. □



V prejšnjem izreku smo obravnavali primer, ko je $f'(x_0) > 0$ ali $f'(x_0) < 0$. Če je $f'(x_0) = 0$, potem je tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ vzporedna abscisni osi. Oglejmo si, kaj lahko še povemo o odvedljivi funkciji, če je $f'(x_0) = 0$.

Definicija. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $x_0 \in (a,b)$. Če je $f'(x_0) = 0$, potem pravimo, da je x_0 *stacionarna točka* funkcije f.

Definicija. Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ za vsak $|h| < \delta$. Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ za vsak $|h| < \delta$.

Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum ali lokalni maksimum, potem pravimo, da ima v točki x_0 *lokalni ekstrem*.

Izrek. *(Fermatov izrek.) Če ima odvedljiva funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni ekstrem, potem je $f'(x_0) = 0$, torej je v točki x_0 stacionarna točka.*

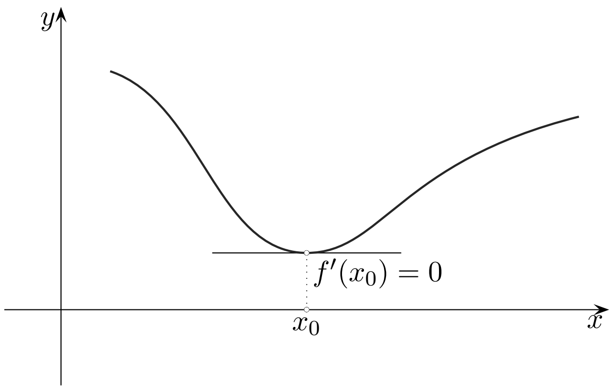
Dokaz. Denimo, da ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum. To pomeni, da za vse dovolj majhne vrednosti h velja $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$. Funkcija f je odvedljiva, zato obstaja v točki x_0 limita diferenčnega kvocienta, to je $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, torej obstajata v točki x_0 tudi leva in desna limita, ki morata biti enaki. Ker je $f(x_0+h)-f(x_0) \geq 0$, za $h<0$ velja $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, za $h>0$ pa $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. Torej je

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

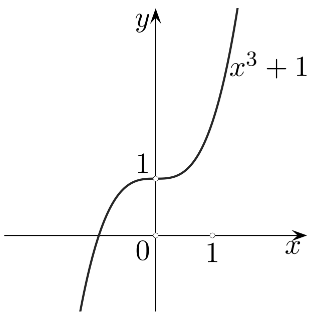
in

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Leva in desna limita morata biti enaki, kar je mogoče samo, če sta obe enaki 0. Potem pa je tudi limita diferenčnega kvocienta enaka 0, kar pomeni, da je $f'(x_0)=0$. Na enak način dokažemo izrek, če je v točki x_0 lokalni maksimum. $\square$



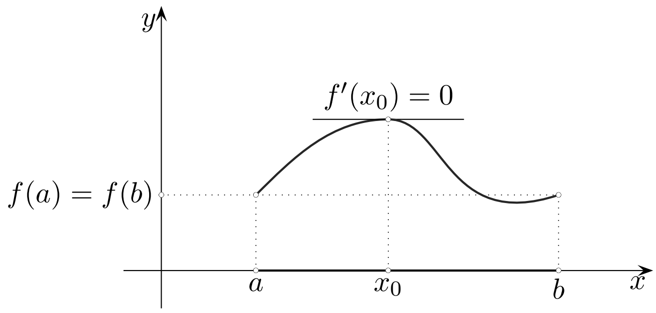
Opomba. Obratno ni nujno res. Na primer, funkcija f, dana s predpisom $f(x)=x^3+1$, ima v točki $x_0=0$ stacionarno točko, vendar funkcija v tej točki nima lokalnega ekstrema.



Izrek. *(Rolleov izrek.) Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $f(a)=f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a,b)$, tako da je $f'(x_0)=0$.*

Dokaz. Funkcija f je odvedljiva, zato je tudi zvezna, zvezna funkcija pa na zaprtem intervalu zavzame svoj minimum $f(x_m) = m$ in svoj maksimum $f(x_M) = M$. Če je minimum funkcije enak maksimumu funkcije, torej $m = M$, je funkcija f konstantna in zato $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Če pa je minimum funkcije manjši od maksimuma funkcije, torej $m < M$, potem je $x_m \neq x_M$ in zato vsaj eno izmed števil x_m, x_M leži na intervalu (a, b), saj je $f(a) = f(b)$. Označimo to število z $x_0 \in (a, b)$. Odvedljiva funkcija f ima potem v točki x_0 lokalni ekstrem in zato je po Fermatovem izreku $f'(x_0) = 0$. □

Rolleov izrek pove, da za odvedljivo funkcijo, ki zavzame v krajščih intervala enaki vrednosti, obstaja vsaj ena točka iz notranjosti intervala, v kateri je tangenta vzporedna z abscisno osjo.



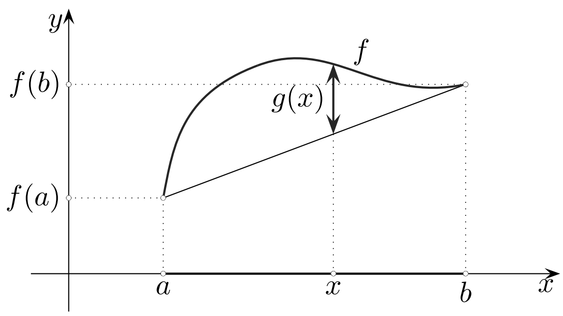
Lagrangeov izrek, ki sledi, je posplošitev pravkar dokazanega Rolleovega izreka.

Izrek.*(Lagrangeov izrek.) Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a, b)$, tako da je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokaz. Lagarangeov izrek bomo dokazali s pomočjo Rolleovega izreka. Definiramo funkcijo g, ki v vsaki točki $x \in [a, b]$ meri navpično razdaljo med grafom funkcije f in premico skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$, torej je funkcija g dana s predpisom

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right).$$



Ker je f odvedljiva funkcija, je tudi g odvedljiva funkcija. Izračunamo

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0,$$
$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0.$$

Torej ima funkcija g v krajiščih intervala $[a,b]$ enaki vrednosti in zato po Rolleovem izreku obstaja $x_0 \in (a,b)$, tako da je $g'(x_0) = 0$. Ker je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

in

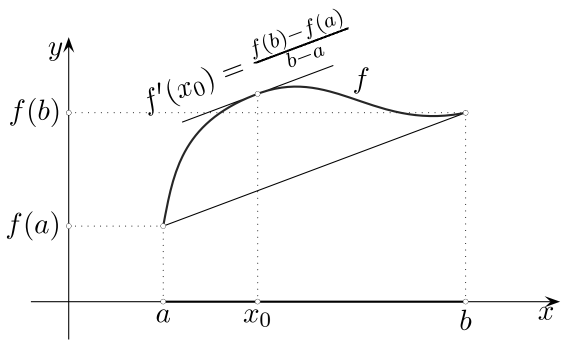
$$g'(x_0) = 0,$$

je

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Lagrangeov izrek pove, da za odvedljivo funkcijo, definirano na zaprtem intervalu, velja, da obstaja znotraj intervala vsaj ena točka, v kateri je tangenta vzporedna sekanti skozi krajišči intervala.



Lagrangeev izrek bomo še velikokrat uporabili pri dokazovanju drugih izrekov. Že takoj pri naslednjem izreku.

Izrek. *Naj bo* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in naj bo* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in (a,b)$. *Potem je* f *konstantna funkcija.*

Dokaz. Naj bo $x \in (a,b)$ poljuben. Funkcija f je na intervalu $[x,b]$ odvedljiva, zato lahko za funkcijo $f\colon [x,b] \to \mathbb{R}$ uporabimo Lagrangeev izrek, torej obstaja tak $x_0 \in (x,b)$, da je

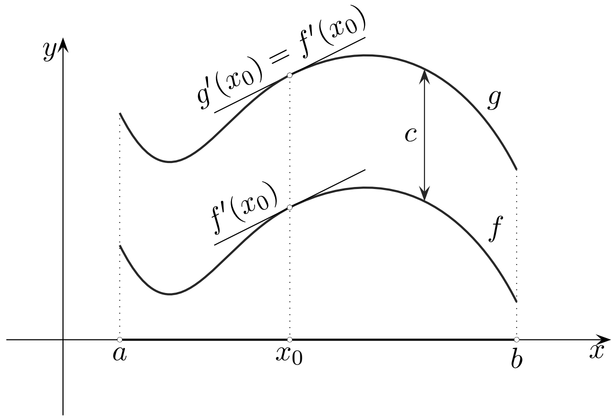
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Ker je odvod funkcije f na intervalu (a,b) povsod enak nič, je $f'(x_0) = 0$ in zato je $f(x) = f(b)$. Izbrani $x \in (a,b)$ je bil poljuben, torej je $f(x) = f(b)$ za vsak $x \in (a,b)$. Enako je $f(x) = f(a)$ za vsak $x \in (a,b)$ in zato je f konstantna funkcija. □

Pravkar dokazani izrek in naslednji izrek bomo potrebovali pri določanju lastnosti integralov.

Izrek. *Naj bosta funkciji* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *in* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *odvedljivi in naj bo* $f'(x) = g'(x)$ *za vsak* $x \in (a,b)$. *Potem obstaja konstanta* $c \in \mathbb{R}$, *tako da je* $f(x) = g(x) + c$ *za vsak* $x \in [a,b]$.

Dokaz. Definiramo funkcijo $h(x) = f(x) - g(x)$. Potem je $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Po prejšnjem izreku je h konstantna funkcija, torej je $h(x) = c$, oziroma $f(x) = g(x) + c$ za vsak $x \in [a,b]$. □



5.6. Uporaba odvoda za določanje ekstremov in limit

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj uporab odvoda.

Ekstrem funkcije. Vemo, da za odvedljivo funkcijo f, ki ima v točki x_0 ekstrem, velja, da je x_0 njena stacionarna točka, da je torej $f'(x_0) = 0$. Pokazali smo tudi, da to ni zadosten pogoj za nastop ekstrema. To pomeni, če je $f'(x_0) = 0$, to še ne pomeni, da je v točki x_0 ekstrem. V nadaljevanju bomo zapisali izreka, ki nam povesta, kdaj ima odvedljiva funkcija v stacionarni točki ekstrem.

Izrek. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $x_0 \in (a,b)$ stacionarna točka funkcije f.*
Če prvi odvod funkcije f v stacionarni točki x_0 spremeni predznak z negativnega na pozitivnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum, če ga spremeni s pozitivnega na negativnega, ima v x_0 lokalni maksimum.
Če ima prvi odvod funkcije f povsod v okolici stacionarne točke x_0, razen v x_0, isti predznak, potem funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. Naj bo x_0 stacionarna točka in naj obstaja tak $\delta > 0$, da je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in da je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Potem je funkcija f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ padajoča in na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ naraščajoča. Torej je v točki x_0 lokalni minimum. Podobno razmislimo za lokalni maksimum.

Če pa obstaja tak $\delta > 0$, da je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, potem je funkcija f levo in desno od stacionarne točke padajoča. Podobno, če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, potem je funkcija f levo in desno od stacionarne točke naraščajoča. Torej v tem primeru funkcija f v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema. □

Primer. Določimo ekstreme funkcije

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2.$$

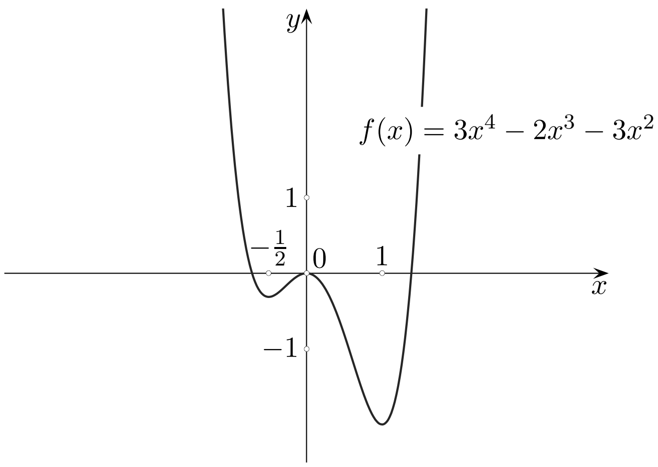
Najprej poiščemo stacionarne točke. V ta namen izračunamo odvod funkcije

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 6x = 6x(2x + 1)(x - 1)$$

in rešimo enačbo

$$6x(2x + 1)(x - 1) = 0.$$

Stacionarne točke funkcije f so $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 1$. Vse ničle funkcije f' so enojne, zato je za $x < -\frac{1}{2}$ vrednost $f'(x) < 0$, za $-\frac{1}{2} < x < 0$ je vrednost $f'(x) > 0$, za $0 < x < 1$ je vrednost $f'(x) < 0$ in za $1 < x$ je vrednost $f'(x) > 0$. Torej ima po prejšnjem izreku funkcija f v točki $x_1 = -\frac{1}{2}$ lokalni minimum, v točki $x_2 = 0$ lokalni maksimum in v točki $x_3 = 1$ lokalni minimum.



Kot smo pokazali, si lahko pri določanju ekstrema funkcije pomagamo z njenim prvim odvodom. Pri tem moramo za določitev ekstrema poznati vrednost prvega odvoda funkcije v neki okolici stacionarne točke. Če pa si pomagamo z drugim odvodom funkcije, za določanje ekstrema zadošča poznati vrednost drugega odvoda zgolj v stacionarni točki.

IZREK. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija in naj bo $x_0 \in (a,b)$ stacionarna točka funkcije f.*
Če je $f''(x_0) > 0$, potem je v stacionarni točki x_0 lokalni minimum.
Če je $f''(x_0) < 0$, potem je v stacionarni točki x_0 lokalni maksimum.

DOKAZ. Denimo, da je $f''(x_0) > 0$. Potem je f' v točki x_0 naraščajoča funkcija in ker je $f'(x_0) = 0$, levo od x_0 velja $f'(x) < 0$, desno od x_0 pa velja $f'(x_0) > 0$. Torej prvi odvod v stacionarni točki spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega in po prejšnjem izreku je v točki x_0 lokalni minimum. Podobno, če je $f''(x_0) < 0$, je funkcija f' v točki x_0 padajoča, torej prvi odvod v stacionarni točki spremeni predznak iz pozitivnega v negativnega in po prejšnjem izreku je v točki x_0 lokalni maksimum. □

PRIMER. Določimo ekstreme funkcije

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

še s pomočjo drugega odvoda. Kot smo že izračunali, ima funkcija f stacionarne točke $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 1$, odvod funkcije f pa je $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 6x$. Izračunajmo sedaj drugi odvod funkcije f in vrednosti drugega odvoda v stacionarnih točkah. Dobimo

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 6$$

in

$$f''(-\frac{1}{2}) = 9 > 0, \quad f''(0) = -6 < 0, \quad f''(1) = 18 > 0.$$

Torej ima po prejšnjem izreku funkcija f v točki $x_1 = -\frac{1}{2}$ lokalni minimum, v točki $x_2 = 0$ lokalni maksimum in v točki $x_3 = 1$ lokalni minimum.

OPOMBA. Posebej pozorni moramo biti pri določanju ekstremov funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definirane na zaprtem intervalu $[a,b]$. Če je f zvezna funkcija, potem smo pokazali, da funkcija f na intervalu $[a,b]$ zavzame največjo in najmanjšo vrednost. Če je funkcija odvedljiva in je v neki točki na intervalu (a,b) ekstrem, potem je ta točka stacionarna točka. Ne smemo pa pozabiti, da je lahko ekstrem odvedljive funkcije tudi v krajiščih intervala, kjer odvod ni nujno enak nič. Torej sta kandidata za ekstrem odvedljive funkcije definirane na zaprtem intervalu, poleg vseh stacionarnih točk, tudi obe krajišči intervala. Pri zveznih funkcijah, odvedljivih povsod razen v končno mnogo točkah, pa so, poleg stacionarnih točk in krajišč intervala, kandidati za ekstrem tudi točke, kjer funkcija ni odvedljiva.

PRIMER. Določimo ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$$

na intervalu $[-3,0]$. Najprej poiščemo stacionarne točke. V ta namen izračunamo odvod funkcije

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 = 2(x+2)(x+1)$$

in rešimo enačbo

$$2(x+2)(x+1) = 0.$$

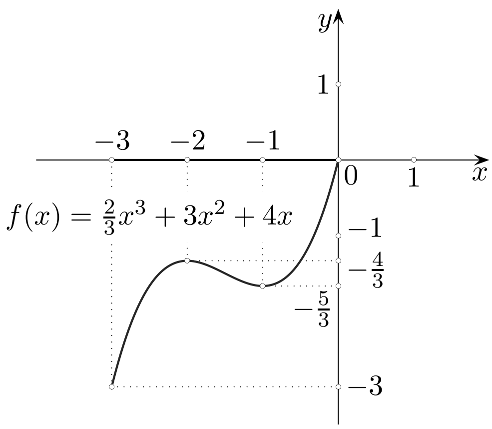
Stacionarni točki funkcije f sta $x_1 = -2$ in $x_2 = -1$. Ker je

$$f''(x) = 4x + 6$$

in

$$f''(-2) = -2 < 0, \quad f''(-1) = 2 > 0,$$

ima funkcija f v točki $x_1 = -2$ lokalni maksimum, $f(-2) = -\frac{4}{3}$, v točki $x_2 = -1$ pa lokalni minimum, $f(-1) = -\frac{5}{3}$. Izračunajmo še vrednosti funkcije v krajiščih intervala $[-3,0]$. Ker je $f(-3) = -3$ in $f(0) = 0$, je v točki -3 globalni minimum, v točki -2 lokalni maksimum, v točki -1 lokalni minimum in v točki 0 globalni maksimum.



Določanje konveksnosti, konkavnosti in prevoja funkcije. S pomočjo prvega odvoda funkcije znamo ugotoviti, kako se funkcija spreminja, s pomočjo drugega odvoda pa lahko povemo še nekaj več o obliki krivulje, ki predstavlja graf funkcije f. Definirajmo najprej, kdaj je funkcija konveksna, kdaj konkavna in kdaj ima v neki točki prevoj.

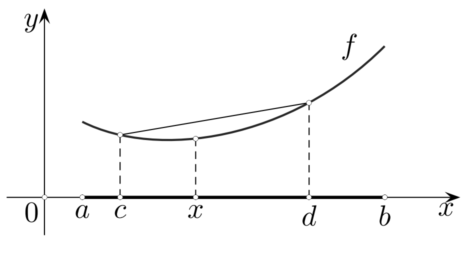
DEFINICIJA. Funkcija f je *konveksna* na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Enačba premice, ki gre skozi točki $(c, f(c))$ in $(d, f(d))$, je

$$y = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c),$$

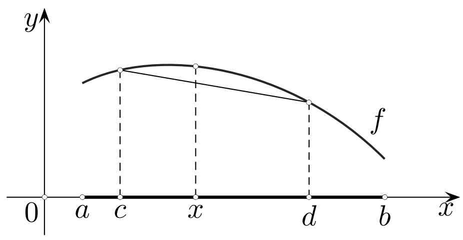
torej graf konveksne funkcije f na intervalu $[c, d]$ leži pod premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.



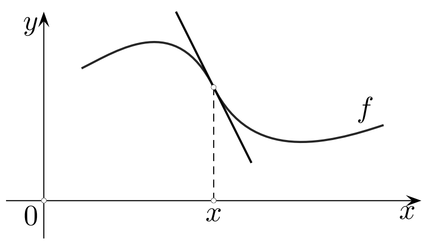
DEFINICIJA. Funkcija f je *konkavna* na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Torej graf funkcije f na intervalu $[c,d]$ leži nad premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.



Definicija. Točka x_0 je *prevoj* funkcije f, če se v točki x_0 funkcija f spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno.



Konveksnost oziroma konkavnost funkcije enostavno določimo s pomočjo drugega odvoda.

Izrek. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija.*
Če je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b)$, potem je f konveksna na intervalu $[a,b]$.
Če je $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b)$, potem je f konkavna na intervalu $[a,b]$.
Če je $f''(x_0) = 0$ in drugi odvod pri prehodu skozi točko x_0 spremeni predznak, je v točki x_0 prevoj funkcije f.

Primer. Za funkcijo

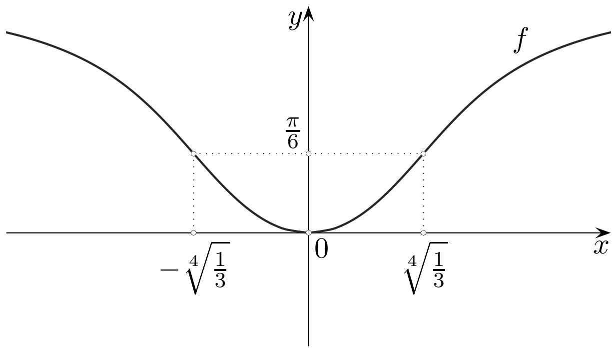
$$f(x) = \arctan(x^2)$$

določimo, kje je konveksna in kje konkavna. Izračunamo najprej prvi in nato še drugi odvod funkcije f. Dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^4}, \\ f''(x) &= 2 \cdot \frac{1+x^4 - x(4x^3)}{(1+x^4)^2} = 2 \cdot \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}. \end{aligned}$$

Ker je $f''(x) = 0$ natanko takrat, ko je $1 - 3x^4 = 0$, ima funkcija f prevoj v točki $x_1 = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ in v točki $x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Za $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}})$ je $f''(x) < 0$

in funkcija f je konkavna, za $x \in (-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}})$ je $f''(x) > 0$, funkcija f je konveksna, za $x \in (\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \infty)$ pa je $f''(x) < 0$ in funkcija f je ponovno konkavna.



L'Hospitalovo pravilo. Lahko se zgodi, da funkcija f v neki točki x_0 ni definirana, kljub temu pa obstaja limita funkcije f v točki x_0. Če definiramo vrednost funkcije f v točki x_0 s predpisom $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, potem pravimo, da smo odpravili nedoločenost funkcije f v točki x_0. Pri odpravljanju nedoločenosti v točki x_0 funkcije f, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

pri čemer je $u(x_0) = v(x_0) = 0$, si pomagamo z L'Hospitalovim pravilom.

Izrek. *(L'Hospitalovo pravilo.) Naj bosta funkciji u in v odvedljivi v okolici točke x_0 in naj bo $u(x_0) = v(x_0) = 0$. V tej okolici naj za $x \neq x_0$ velja $v(x) \neq 0$ in $v'(x) \neq 0$. Če obstaja $\lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, potem obstaja tudi $\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ in velja*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Dokaz. Naj bo $x > x_0$ element dovolj majhne okolice števila x_0. Označimo $k = \frac{u(x)}{v(x)}$. Na intervalu $[x_0, x]$ definiramo funkcijo

$$g(t) = u(t) - kv(t),$$

$t \in [x_0, x]$. Ker je $u(x_0) = 0$ in $v(x_0) = 0$, za funkcijo g velja

$$g(x_0) = u(x_0) - kv(x_0) = 0.$$

Upoštevamo še, kako je definirana konstanta k, in dobimo

$$g(x) = u(x) - kv(x) = u(x) - \frac{u(x)}{v(x)} \cdot v(x) = 0.$$

Torej funkcija g na intervalu $[x_0, x]$ zadošča pogojem Rolleovega izreka, zato obstaja taka točka $t_0 \in (x_0, x)$, da je $g'(t_0) = 0$. Ker je $g'(t) = u'(t) - kv'(t)$ in $g'(t_0) = 0$, sledi, da je $u'(t_0) - kv'(t_0) = 0$, in zato

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(t_0)}{v'(t_0)}$$

za $t_0 \in (x_0, x)$. Ko gre $x \to x_0$, gre tudi $t_0 \to x_0$ in v limiti dobimo enakost

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

□

Primer. Izračunajmo še enkrat, tokrat s pomočjo L'Hospitalovega pravila,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Velja

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Opomba. Da se pokazati, da velja L'Hospitalovo pravilo tudi za izraze oblike $\frac{\infty}{\infty}$, torej

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)},$$

pri čemer je $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \infty$ in obstaja limita na desni. Še več, enakost velja tudi, če namesto x_0 pišemo ∞. Omenimo še, da lahko s pomočjo L'Hospitalovega pravila odpravimo tudi nedoločenosti oblike $0 \cdot \infty$ ali $\infty - \infty$, in sicer tako, da izraz preoblikujemo v izraz oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$.

Primer. Izračunajmo limiti

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Velja

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

in

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log x}{\log(x)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\log x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)+x\log x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\log x + x\cdot\frac{1}{x}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6. Nedoločeni integral

V tem poglavju bomo pokazali nekatere osnovne lastnosti nedoločenega integrala in si ogledali nekaj postopkov, kako nedoločeni integral tudi izračunati.

6.1. Definicija nedoločenega integrala

Doslej smo za dano odvedljivo funkcijo znali poiskati njen odvod, na primer, če je dana funkcija $\sin x$, potem je njen odvod $(\sin x)' = \cos x$. Sedaj pa se za dano funkcijo f vprašamo, katero funkcijo moramo odvajati, da bi dobili f. Na primer, če je dana funkcija $\sin x$, potem je funkcija $-\cos x$ tista, za katero velja $(-\cos x)' = \sin x$. Zapišimo to sedaj natančneje.

Definicija. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprti interval in $f\colon D \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Funkcijo $F\colon D \to \mathbb{R}$, za katero velja, da je

$$F'(x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$, imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f in pišemo

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Pravimo, da smo funkcijo f, odvisno od spremenljivke x, integrirali po spremenljivki x.

Za dano odvedljivo funkcijo je njen odvod natančno določena funkcija. Pri nedoločenem integralu pa ni tako. Obstaja namreč več različnih funkcij, ki imajo vse isti odvod. Na primer, $(1 - \cos x)' = (-\cos x)' = \sin x$. To pomeni, da za dano funkcijo f z nedoločenim integralom F obstajajo tudi druge funkcije, ki so prav tako nedoločeni integral iste funkcije f. Vendar pa se, kot pravi naslednji izrek, vsi nedoločeni integrali iste funkcije med sabo lahko razlikujejo samo za konstanto.

Izrek. *Naj bo funkcija F nedoločeni integral funkcije f, torej*

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Potem je za poljubno konstanto C funkcija $F + C$ prav tako nedoločeni integral funkcije f, torej

$$F(x) + C = \int f(x)dx.$$

Še več, za vsak nedoločeni integral G funkcije f, torej $G(x) = \int f(x)dx$, velja

$$G(x) = F(x) + K$$

za neko konstanto K.

Dokaz. Ker je $F(x) = \int f(x)dx$, je $F'(x) = f(x)$. Za poljubno konstanto C je potem $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$, torej je tudi $F(x) + C = \int f(x)dx$.

Če je tudi funkcija G nedoločeni integral funkcije f, potem je $G'(x) = F'(x) = f(x)$. V prejšnjem poglavju smo pokazali, da se funkciji, ki imata isti odvod, razlikujeta za konstanto, torej je $G(x) = F(x) + K$ za neko konstanto K. □

Na nedoločeni integral lahko gledamo kot na obratno operacijo od odvajanja, zato večina lastnosti, ki jih bomo navedli v nadaljevanju, sledi neposredno iz lastnosti odvoda. Začnimo s preglednico integralov nekaterih elementarnih funkcij.

Preglednica integralov nekaterih elementarnih funkcij.

- $\displaystyle\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R},\ r \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C$
- $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

Posamezno enakost v preglednici dokažemo tako, da odvajamo desno stran in preverimo, če je enaka funkciji, ki jo integriramo na levi strani.

Vsota nedoločenih integralov in produkt s konstanto. Seštevanje nedoločenih integralov in množenje s konstanto je preprosto, saj velja naslednja trditev.

TRDITEV. *Za realni funkciji f in g ter za konstanto $\lambda \in \mathbb{R}$ veljata naslednji enakosti:*

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$

DOKAZ. Pokažimo najprej prvo enakost. V ta namen označimo $F(x) = \int f(x)dx$ in $G(x) = \int g(x)dx$. Odvajamo funkcijo $F + G$ in dobimo

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

torej je nedoločeni integral funkcije $f + g$ enak $F + G$ in zato

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Drugo enakost pokažemo na podoben način. Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta in f dana funkcija. Ponovno označimo $F(x) = \int f(x)dx$. Odvajamo funkcijo λF in dobimo

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x),$$

torej je nedoločeni integral funkcije λf enak funkciji λF in zato je

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) = \lambda \int f(x)dx.$$

□

PRIMER. Izračunajmo integral

$$\int (1 - \sqrt{x})^3 dx.$$

Najprej izračunamo tretjo potenco funkcije $1-\sqrt{x}$ in nato uporabimo pravkar dokazani pravili.

$$\begin{aligned}
\int (1 - \sqrt{x})^3 dx &= \int (1 - 3\sqrt{x} + 3(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})^3)dx \\
&= \int dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int xdx - \int x^{\frac{3}{2}}dx \\
&= x - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \\
&= x - 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.
\end{aligned}$$

Vpeljava nove spremenljivke. S pomočjo verižnega pravila za odvod kompozituma funkcij izpeljemo pravilo, kako uvesti v integral novo spremenljivko.

TRDITEV. *Naj bo f zvezna funkcija in naj bo u odvedljiva funkcija spremenljivke x, torej $u = u(x)$ in $du = u'(x)dx$. Potem velja*

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

DOKAZ. Označimo $F(u) = \int f(u)du$, torej je $\frac{dF}{du} = f(u)$, in naj bo spremenljivka u odvisna od spremenljivke x. Potem odvajamo funkcijo $F(u(x))$ po spremenljivki x s pomočjo verižnega pravila

$$\frac{dF(u(x))}{dx} = \frac{dF(u(x))}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Torej je nedoločeni integral funkcije $f(u(x)) \cdot u'(x)$ po spremenljivki x enak funkciji F in zato

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) = \int f(u)du.$$

□

Pri vpeljavi nove spremenljivke v nedoločeni integral poskušamo izbrati tako novo spremenljivko $u = u(x)$, da se izraz pod integralom poenostavi, hkrati pa je pod integralom tudi izraz $u'(x)dx$, ki je enak du.

PRIMER. Izračunajmo integral

$$\int \frac{\log\left(x^2\right) + 1}{x} dx.$$

Najprej upoštevamo, da je $\log\left(x^2\right) = 2\log x$, nato pa vpeljemo novo spremenljivko $u = \log x$. Torej je $du = \frac{1}{x}dx$ in velja

$$\begin{aligned}\int \frac{\log\left(x^2\right) + 1}{x} dx &= \int \frac{2\log(x) + 1}{x} dx \\ &= \int (2u + 1)du = 2 \cdot \frac{1}{2}u^2 + u + C \\ &= (\log x)^2 + \log(x) + C.\end{aligned}$$

Integracija po delih (per partes). S pomočjo pravila za odvod produkta dveh funkcij izpeljemo pravilo za integracijo po delih.

TRDITEV. *Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Če obstaja eden izmed integralov $\int f(x)g'(x)dx$ in $\int f'(x)g(x)dx$, potem obstaja tudi drugi in velja*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

DOKAZ. Označimo $H(x) = f(x)g(x)$. Potem je $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Torej je

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = H(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

in zato

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

$\square$

OPOMBA. Če zapišemo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, potem je $du = f'(x)dx$ in $dv = g'(x)dx$, torej lahko pravilo za integracijo po delih zapišemo tudi v obliki

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Pri uporabi pravila za integriranje po delih poskušamo funkcijo pod integralom zapisati kot produkt udv za taki funkciji u in v, za kateri znamo izračunati $\int dv$ in $\int vdu$.

PRIMER. Izračunajmo integral

$$\int (2x+1)e^{2x}dx.$$

Izberemo $u = 2x + 1$ in $dv = e^{2x}dx$. Potem je $du = 2dx$ in $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$. Ker pa se konstanta pojavi tudi pri $\int vdu$, v nadaljevanju pri funkciji v konstante ne bomo pisali. Torej je

$$\begin{aligned} \int (2x+1)e^{2x}dx &= (2x+1) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C = xe^{2x} + C. \end{aligned}$$

6.2. Nedoločeni integrali nekaterih elementarnih funkcij

Poiskati nedoločeni integral funkcije ni enostavna naloga, saj ne obstaja neka splošna metoda, ki bi pripeljala do rešitve. Kot bomo videli, v nekaterih primerih nedoločeni integral elementarne funkcije sploh ni elementarna funkcija. Obstaja pa kar nekaj postopkov, kako izračunati nedoločeni integral za določene vrste elementarnih funkcij. Navedimo le nekatere izmed njih.

Integral racionalne funkcije. Izračunati želimo integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

kjer sta p in q polinoma. To storimo v več korakih.

1. Če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q, potem polinom p delimo s polinomom q in dobimo $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, kjer sta k in r polinoma, stopnja polinoma r pa je manjša od stopnje polinoma q. Torej je

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx = \int k(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Integral polinoma $\int k(x)dx$ znamo izračunati, v integralu $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ pa je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu.

2. Za polinom q poiščemo vse njegove ničle in nato polinom razstavimo do oblike

$$q(x) = a(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} (x^2 + a_1 x + b_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + a_n x + b_n)^{\beta_n}.$$

Vsak izmed polinomov $x^2 + a_i x + b_i$ je v realnih številih nerazcepen, enak je produktu $(x - y_i)(x - \overline{y_i})$, kjer sta y_i in $\overline{y_i}$ konjugirani par njegovih kompleksnih ničel.

3. Kvocient $\frac{r(x)}{q(x)}$ se da razcepiti na vsoto ulomkov, ki jih imenujemo parcialni ulomki. Če ima imenovalec realno ničlo x_0 reda α, torej je v produktu člen $(x - x_0)^\alpha$, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo tudi ulomki, ki imajo v imenovalcu $(x - x_0)^\alpha$, v števcu pa polinom manjše stopnje od stopnje imenovalca, torej ulomki oblike

$$\frac{c_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \dots + c_1 x + c_0}{(x - x_0)^\alpha}. \tag{1}$$

Če ima imenovalec konjugirani par kompleksnih ničel y_0 in $\overline{y_0}$ reda β, torej je v produktu člen $(x^2 + ax + b)^\beta$, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo tudi ulomki, ki imajo v imenovalcu $(x^2 + ax + b)^\beta$, v števcu pa polinom manjše stopnje od stopnje imenovalca, torej ulomki oblike

$$\frac{d_{2\beta-1}x^{2\beta-1} + \cdots + d_1x + d_0}{(x^2 + ax + b)^\beta}. \tag{2}$$

Zapišemo torej enačbo, da je racionalna funkcija $\frac{r(x)}{q(x)}$ enaka vsoti ulomkov oblike (1) in (2) ter iz te enačbe izračunamo neznane koeficiente c_k in d_k.

4. Integral racionalne funkcije razpade na vsoto integralov, vsak od dobljenih integralov pa je ene izmed oblik

- $\displaystyle\int \frac{c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \cdots + c_1x + c_0}{(x - x_0)^\alpha}dx$
- $\displaystyle\int \frac{d_{2\beta-1}x^{2\beta-1} + \cdots + d_1x + d_0}{(x^2 + ax + b)^\beta}dx$

Prvi integral rešimo s pomočjo substitucije $u = x - x_0$, rezultat je vsota racionalne funkcije in logaritma, drugi integral pa rešimo z nastavkom, saj se da pokazati, da je rezultat vsota racionalne funkcije, arkus tangensa in logaritma.

Primer. Izračunajmo integral

$$\int \frac{x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 3}{x^4 + 3x^3 + 3x^2}dx.$$

1. Stopnja polinoma v števcu je enaka stopnji polinoma v imenovalcu, zato polinoma najprej delimo in dobimo, da je

$$(x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 3) : (x^4 + 3x^3 + 3x^2) = 1 + \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{x^4 + 3x^3 + 3x^2},$$

torej je

$$\int \frac{x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 3}{x^4 + 3x^3 + 3x^2}dx = \int 1dx + \int \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{x^4 + 3x^3 + 3x^2}dx.$$

Izračunamo

$$\int 1dx = x + C_1,$$

preostane nam izračunati še

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{x^4 + 3x^3 + 3x^2}dx.$$

2. Imenovalec racionalne funkcije razstavimo in dobimo

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 3x + 3).$$

Polinoma x^2+3x+3 ne moremo več razstaviti, saj je njegova diskriminanta enaka $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$.

3. Zapišimo enačbo za izračun koeficientov v števcih parcialnih ulomkov

$$\frac{2x^3+4x^2-3x-3}{x^2(x^2+3x+3)} = \frac{c_1x+c_0}{x^2} + \frac{d_1x+d_0}{x^2+3x+3}.$$

Desno stran enačbe damo na skupni imenovalec in dobimo

$$\frac{2x^3+4x^2-3x-3}{x^2(x^2+3x+3)} = \frac{(c_1+d_1)x^3+(c_0+3c_1+d_0)x^2+3(c_1+c_0)x+3c_0}{x^2(x^2+3x+3)}.$$

Leva stran bo enaka desni, če bodo koeficienti pri istih potencah polinomov v števcih enaki, torej moramo rešiti enačbe

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + d_1, \\ 4 &= c_0 + 3c_1 + d_0, \\ -3 &= 3(c_1 + c_0), \\ -3 &= 3c_0. \end{aligned}$$

Rešitve enačb so $c_1 = 0$, $c_0 = -1$, $d_1 = 2$ in $d_0 = 5$. Sledi, da je

$$\int \frac{2x^3+4x^2-3x-3}{x^2(x^2+3x+3)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{2x+5}{x^2+3x+3}dx.$$

Izračunamo

$$\int \frac{-1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C_2,$$

preostane nam izračunati še

$$\int \frac{2x+5}{x^2+3x+3}dx.$$

Zapišemo

$$\int \frac{2x+5}{x^2+3x+3}dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx + \int \frac{2}{x^2+3x+3}dx.$$

Potem je

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C_3 = \log(x^2+3x+3) + C_3$$

in

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2+3x+3}dx &= \int \frac{2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)^2+1}dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{v^2+1}dv = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right) + C_4. \end{aligned}$$

Izračunali smo, da je

$$\begin{aligned}\int & \frac{x^4+5x^3+7x^2-3x-3}{x^4+3x^3+3x^2}dx \\ &= x+\frac{1}{x}+\log(x^2+3x+3)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+C.\end{aligned}$$

Opomba. Še enkrat poudarimo, da je rezultat integriranja racionalne funkcije vsota polinoma, racionalne funkcije, logaritma in arkus tangensa, v nekaterih primerih kakšna od naštetih funkcij v vsoti lahko ne nastopa.

Integral racionalne funkcije trigonometričnih funkcij. Naj bo R racionalna funkcija sinusov in kosinusov, torej v števcu in imenovalcu nastopata polinoma sinusov in kosinusov (na primer $\frac{\sin^2 x\cos x-4\cos x}{3\cos^4 x-\sin x\cos x+1}$). Potem lahko integral

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

z univerzalno substitucijo pretvorimo v integral racionalne funkcije, ki se ga da vedno izračunati. Univerzalna substitucija je naslednja

$$u=\tan\frac{x}{2}.$$

V integralu $\int R(\sin x,\cos x)dx$ nastopata funkciji sinus in kosinus, ki ju moramo izraziti z novo spremenljivko $u=\tan\frac{x}{2}$. To storimo tako, da najprej upoštevamo enačbi za dvojne kote, torej $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ in $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, nato v imenovalcu uporabimo enakost $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$, na koncu števec in imenovalec delimo s $\cos^2\frac{x}{2}$. Dobimo

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}=\frac{2u}{u^2+1},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}=\frac{1-u^2}{u^2+1}.$$

Preostane še določiti zvezo med dx in du. Ker je $u=\tan\frac{x}{2}$ in zato

$$x=2\arctan u,$$

je

$$dx=2\cdot\frac{1}{1+u^2}du.$$

Dobimo

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2},$$

kar pa je integral racionalne funkcije spremenljivke u, ki se ga da izračunati.

Primer. S pomočjo univerzalne substitucije $u = \tan\frac{x}{2}$ izračunajmo integral

$$\int \frac{1}{\sin x}dx.$$

Ker je $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ in je $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, dobimo

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Opomba. Pri računanju integralov trigonometričnih funkcij lahko v nekaterih primerih pridemo do rešitve hitreje s kakšno drugo substitucijo, ki ni univerzalna.

Primer. Izračunajmo na dva načina integral

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Najprej uvedemo novo spremenljivko $u = \cos x$, torej je $du = -\sin x dx$, in dobimo

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C.$$

Uporabimo še univerzalno substitucijo $u = \tan\frac{x}{2}$. V tem primeru je

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x}dx &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{4u}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}du \\
&= \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{-1}{1+u} + \frac{2u}{1+u^2}\right)du \\
&= -\log|1-u| - \log|1+u| + \log(1+u^2) + C \\
&= \log\left|\frac{1+u^2}{(1-u)(1+u)}\right| + C = \log\left|\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right| + C \\
&= \log\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = -\log|\cos x| + C,
\end{aligned}$$

pri čemer smo morali na vmesnih korakih razcepiti ulomek $\frac{4u}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}$ na parcialne ulomke, uvesti novo spremenljivko $t = 1 + u^2$ in na koncu poenostaviti izraz $\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$.

Integral funkcije $\sin^m x \cos^n x$. Naj bosta m in n nenegativni celi števili. Radi bi izračunali integral oblike

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Ločimo več primerov.

Če je m liho število, torej $m = 2k + 1$, potem za novo spremenljivko izberemo $u = \cos x$. Potem je $du = -\sin x dx$, funkcijo sinus na potenco $2k$ pa izrazimo s pomočjo kosinusa, torej

$$\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k = (1 - u^2)^k.$$

Dobimo integral polinoma v spremenljivki u,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = \int (1 - u^2)^k u^n (-du),$$

ki ga znamo izračunati.

Primer. Izračunajmo integral

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Ker nastopa funkcija sinus na liho potenco, uvedemo novo spremenljivko $u = \cos x$. Torej je $du = -\sin x dx$ in $1 - u^2 = \sin^2 x$. Dobimo

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - u^2) u^2 (-du)\\ &= \int (u^4 - u^2) du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C\\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

Če je n liho število, torej $n = 2k + 1$, potem za novo spremenljivko izberemo $u = \sin x$. Potem je $du = \cos x dx$, funkcijo kosinus na potenco $2k$ pa izrazimo s pomočjo sinusa, torej

$$\cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k = (1 - \sin^2 x)^k = (1 - u^2)^k.$$

Dobimo integral polinoma v spremenljivki u,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^k du,$$

ki ga znamo izračunati.

Primer. Izračunajmo integral

$$\int \cos^3 x dx.$$

Funkcija kosinus pod integralom nastopa na liho potenco, zato izberemo novo spremenljivko $u = \sin x$, torej je $du = \cos x dx$ in $1 - u^2 = \cos^2 x$. Dobimo

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-u^2) du = -\frac{1}{3}u^3 + u + C\\ = -\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Če sta m in n sodi števili, potem izračunamo integral

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

tako, da ga preoblikujemo v integral sinusov in kosinusov dvojnih kotov s potencama $\frac{m}{2}$ in $\frac{n}{2}$. Pri tem upoštevamo zvezi

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{in} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Če je eno izmed števil $\frac{m}{2}$ in $\frac{n}{2}$ liho, potem znamo dobljeni integral izračunati, če pa sta obe potenci $\frac{m}{2}$ in $\frac{n}{2}$ še vedno sodi, potem ponovno upoštevamo zvezi za dvojne kote ter dobimo števili $\frac{m}{4}$ in $\frac{n}{4}$. Postopek nadaljujemo toliko časa, dokler ena izmed potenc ni liha.

Primer. Izračunajmo integral

$$\int \cos^4 x dx.$$

Funkcija kosinus nastopa na sodo potenco, zato zapišemo

$$\begin{aligned}\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\\ = \frac{1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}}{4} = \frac{3+4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}.\end{aligned}$$

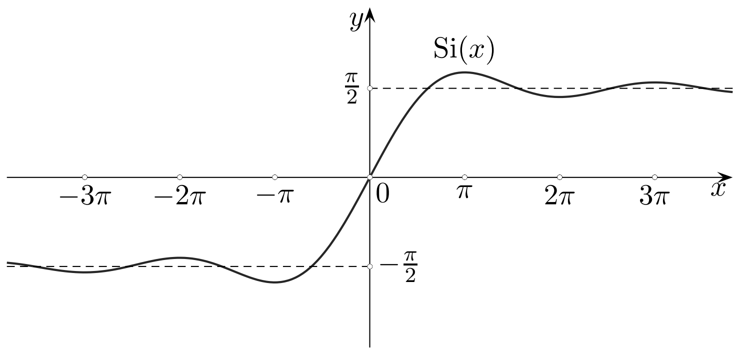
Dobimo

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \int \frac{3+4\cos(2x)+\cos(4x)}{8} dx\\ &= \frac{1}{8}\left(3x + 4\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C\\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C.\end{aligned}$$

Opomba. Na koncu poglavja o nedoločenem integralu omenimo še, da se veliko nedoločenih integralov elementarnih funkcij ne da zapisati s pomočjo katerihkoli elementarnih funkcij. Taki so, na primer, nedoločeni integrali

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \sqrt{1+x^4} dx.$$

Nedoločeni integral je določen samo do konstante natančno. Na primer, nedoločenih integralov $\int \frac{\sin x}{x} dx$ je neskončno, zato izmed vseh funkcij, katerih odvod je enak $\frac{\sin x}{x}$, izberemo tisto funkcijo, katere graf gre skozi koordinatno izhodišče, imenujemo jo *integralski sinus* in označimo s Si. Podobno imajo tudi nekatere druge neelementarne funkcije, ki so definirane s pomočjo nedoločenega integrala, svoje ime, na primer funkcija napake Erf, integralski kosinus Ci, integralska eksponentna funkcija Ei.



7. Določeni integral

V zadnjem poglavju bomo najprej definirali določeni integral in pokazali nekaj njegovih lastnosti, nato si bomo ogledali, kakšna zveza velja med določenim in nedoločenim integralom, na koncu bomo našteli še nekaj primerov uporabe določenega integrala.

7.1. Definicija določenega integrala

Če želimo, na primer, izračunati ploščino lika, ki ni povsem pravilnih oblik, dolžino poti, ki ni ravna, ali maso telesa, ki ni homogeno, si pomagamo z določenim integralom. Obstaja več različnih vrst določenih integralov, na primer, krivuljni integral prve in druge vrste ali ploskovni integral prve in druge vrste. Vse vrste določenih integralov pa so posplošitve določenega integrala realne funkcije ene spremenljivke, ki ga bomo definirali v nadaljevanju. Pri definiciji določenega integrala si bomo pomagali z ocenjevanjem ploščine območja med grafom pozitivne zvezne funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$.

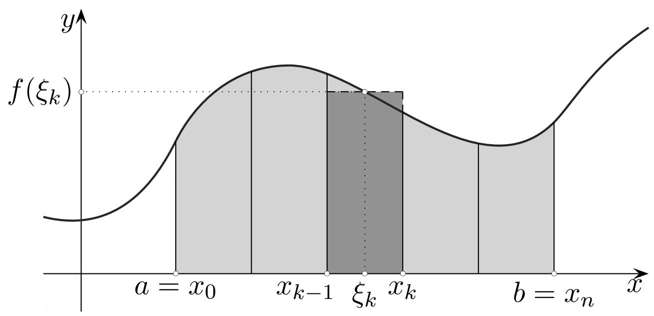
Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ pozitivna zvezna in zato omejena funkcija. Ploščino območja med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$ bomo izračunali tako, da jo bomo aproksimirali s ploščino pravokotnikov. To storimo na naslednji način. Interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$, pri čemer je

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Na vsakem podintervalu izberemo poljubno točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Zmnožek

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

je potem enak ploščini pravokotnika z osnovnico $[x_{k-1}, x_k]$ in višino $f(\xi_k)$.



Ploščine vseh pravokotnikov nad intervali $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, seštejemo in dobimo približek za ploščino območja med grafom funkcije f in abscisno osjo. Opazimo, da je vsota ploščin pravokotnikov tem boljši približek, čim krajši so intervali $[x_{k-1}, x_k]$, v limiti, ko gredo dolžine vseh intervalov $[x_{k-1}, x_k]$ proti nič, dobimo natančno ploščino območja med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$. Definirajmo sedaj določeni integral.

Definicija. Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ poljubna realna funkcija. Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ razdelitev intervala $[a, b]$ in naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Potem je *Riemannova* oziroma *integralska vsota* funkcije f za dano delitev intervala $[a, b]$ enaka

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Število I imenujemo *določeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| < \epsilon$$

za vsako razdelitev intervala $[a, b]$, za katero je $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \delta_k < \delta$, kjer smo označili $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, in za vsako izbiro $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Če tako število I obstaja, potem pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na intervalu $[a, b]$ in pišemo

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_k \to 0, n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Funkcija f je torej integrabilna, če obstaja limita integralskih vsot, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti nič. Pokažimo, da določeni integral funkcije, ki je zvezna na zaprtem intervalu, vedno obstaja.

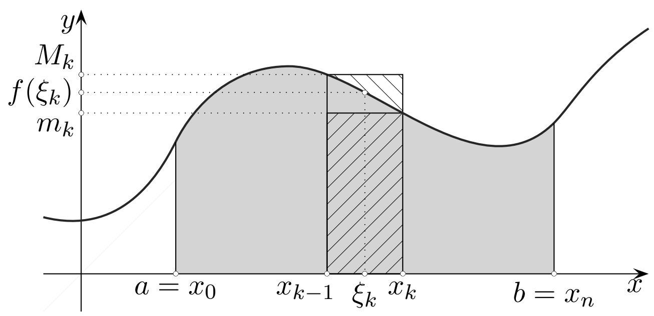
Izrek. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$. Potem je f na tem intervalu integrabilna.*

Dokaz. Oglejmo si skico dokaza v primeru, ko je f na intervalu $[a,b]$ nenegativna, torej $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$. Funkcija f je zvezna, zato na zaprtem intervalu doseže svoj minimum in svoj maksimum. Torej za vsak podinterval $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a,b]$ obstajata taki števili $x_{m_k}, x_{M_k} \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

$$m_k = f(x_{m_k}) \leq f(x) \leq f(x_{M_k}) = M_k$$

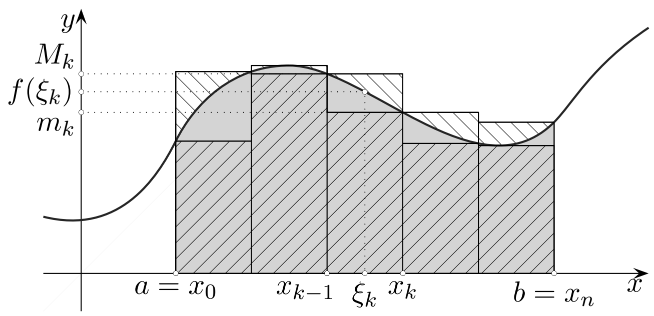
za vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Če si izberemo katerikoli $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, je potem

$$f(x_{m_k}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_{M_k}).$$

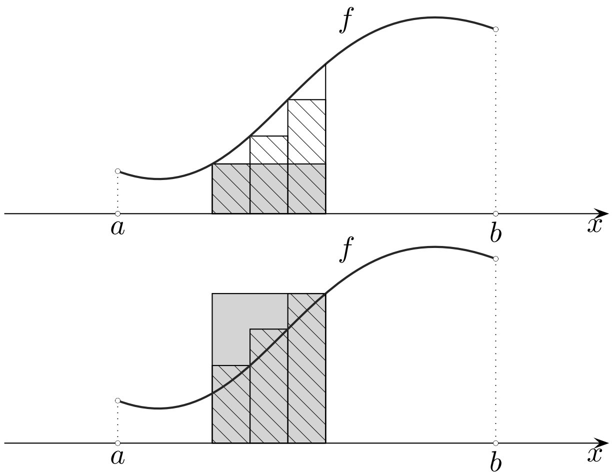


Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ poljubna razdelitev intervala $[a,b]$, naj bo $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ in naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Potem velja ocena

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k. \tag{1}$$



Vsoto na levi imenujemo spodnja integralska vsota, vsoto na desni pa zgornja integralska vsota. Vrednost spodnje vsote se pri delitvi na več intervalov poveča, vrednost zgornje vsote pa zmanjša.



Ko gre dolžina najdaljšega podintervala proti nič, spodnje vsote naraščajo in so hkrati navzgor omejene s katerokoli zgornjo vsoto, zgornje vsote pa padajo in so navzdol omejene s katerokoli spodnjo vsoto. Zgornje vsote se približujejo eni vrednosti, spodnje vsote prav tako. Pokažimo, da sta ti dve vrednosti enaki. Ker je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, torej tudi enakomerno zvezna, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, čim je $|x - y| < \delta$. Naj bo razdelitev intervala $[a, b]$ na podintervale taka, da je dolžina najdaljšega podintervala krajša od δ, torej $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \delta_k < \delta$. Potem je

$$f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}) < \epsilon$$

za vsak $k = 1, \ldots, n$. Sledi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k &= \sum_{k=1}^{n}(f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}))\delta_k \\ &< \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\delta_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

Torej se zgornja in spodnja integralska vsota pri delitvi intervala $[a, b]$ na dovolj majhne podintervale poljubno malo razlikujeta, zato se z manjšanjem podintervalov obe vsoti približujeta isti vrednosti. Zaradi neenakosti (1) potem obstaja limita integralske vsote $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k$, torej obstaja določeni integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

zvezne funkcije na zaprtem intervalu $[a, b]$. $\square$

Opomba. Povedali smo, da je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu integrabilna. Integrabilnih funkcij pa je še veliko več. Na primer, vsaka odsekoma zvezna funkcija, torej funkcija, ki ima največ končno ali števno neskončno točk nezveznosti, je prav tako integrabilna.

PRIMER. Izračunajmo po definiciji določeni integral

$$\int_1^2 (x+1)dx.$$

Naj bo $x_0 = 1 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ poljubna razdelitev intervala $[1, 2]$ in naj bo $\xi_k \in \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$, $k = 1, \ldots, n$. Potem je integralska vsota funkcije f, dane s predpisom $f(x) = x + 1$, enaka

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2} + 1 \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2} + x_k - x_{k-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n-1}^2 \right) \\
&\quad + x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_n - x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(-x_0^2 + x_n^2 \right) - x_0 + x_n \\
&= \frac{1}{2} \left(-1^2 + 2^2 \right) - 1 + 2 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Izračunana vrednost integralske vsote je neodvisna od dolžine največjega podintervala $[x_k, x_{k-1}]$, zato je tudi limita integralskih vsot enaka $\frac{5}{2}$, torej je

$$\int_1^2 (x+1)dx = \frac{5}{2}.$$

7.2. Lastnosti določenega integrala

Zapišimo nekaj lastnosti določenega integrala, ki sledijo neposredno iz definicije.

- Integracijsko spremenljivko lahko označimo s poljubno črko, na primer

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

- Če integralu zamenjamo meji, se integralu spremeni predznak,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- Integral z enakima mejama je enak nič,

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- Naj bo f integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$ in naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta. Potem je

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

- Naj bosta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a,b]$. Potem je

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Naj bo $a < c < b$. Funkcija f je na intervalu $[a,b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na vsakem izmed podintervalov $[a,c]$ in $[c,b]$. Velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Če sta f in g integrabilni funkciji in je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, potem je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Naslednji dve lastnosti določenega integrala zapišimo v obliki izreka.

IZREK.*(Izrek o povprečni vrednosti.) Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b]$. Potem obstaja tako število P, da je $m \leq P \leq M$ in*

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Če je funkcija f tudi zvezna na intervalu $[a,b]$, potem obstaja vsaj ena taka točka $\xi \in [a,b]$, da je

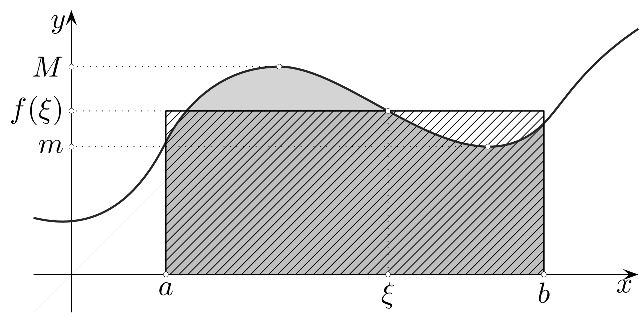
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

DOKAZ. Ker je $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$, velja

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx,$$

torej je
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$
Definiramo
$$P = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
in dobimo, da je $m \leq P \leq M$. Če je f zvezna, potem smo pokazali, da f zavzame vse vrednosti med m in M, torej obstaja taka točka $\xi \in [a,b]$, da je $f(\xi) = P$ in zato
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
□

Opomba. Naj bo f pozitivna funkcija. Potem si lahko izrek o povprečni vrednosti nazorno razložimo na naslednji način. Ploščina območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[a,b]$ je manjša od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a,b]$ in višino, ki je enaka maksimalni vrednosti funkcije f, in je večja od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a,b]$ in višino, ki je enaka minimalni vrednosti funkcije f. Torej je enaka ploščini pravokotnika z osnovnico $[a,b]$ in višino, ki je med minimalno in maksimalno vrednostjo funkcije f.



Izrek. *Naj bo f integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$. Potem je*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$
Torej je absolutna vrednost integrala manjša ali enaka integralu absolutne vrednosti.

Dokaz. Za vsako integralsko vsoto funkcije f po trikotniški neenakosti velja
$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,(x_k - x_{k-1}),$$

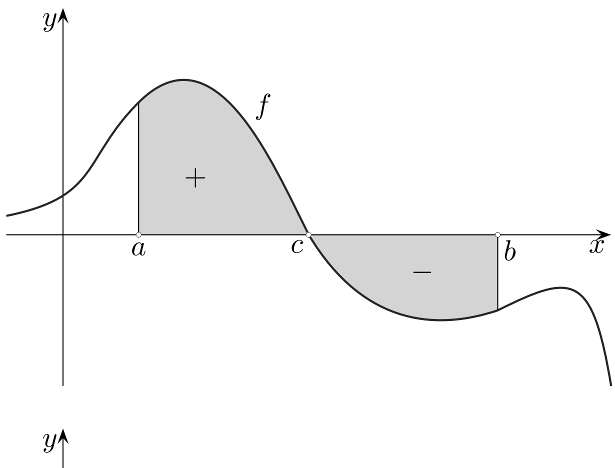
pri čemer smo upoštevali, da je $|x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1}$. Neenakost velja za vsako razdelitev intervala $[a, b]$, torej velja tudi za limito integralskih vsot, tako da dobimo

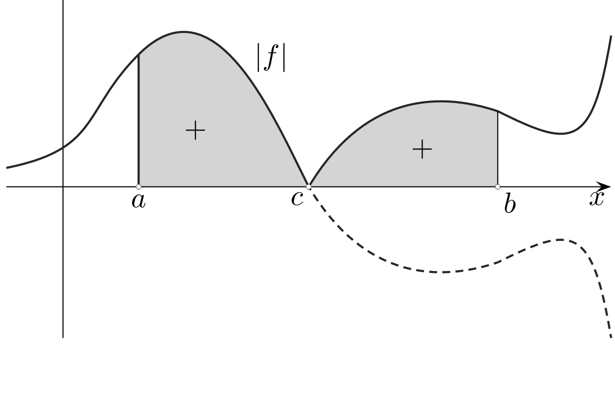
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

□

Primer. Naj bo $c \in (a, b)$ in naj za zvezno funkcijo f velja, da je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, c]$ in $f(x) \leq 0$ za vsak $x \in [c, b]$. Določeni integral $\int_a^c f(x)dx$ je enak ploščini med grafom funkcije f in intervalom $[a, c]$, določeni integral $\int_c^b f(x)dx$ pa je enak negativni ploščini med grafom funkcije f in intervalom $[c, b]$. Ti dve ploščini se med sabo odštejeta, pri integralu $\int_a^b |f(x)|dx$ pa se obe ploščini seštejeta. Vidimo, da velja

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^c |f(x)|\, dx - \int_c^b |f(x)|\, dx\right|$$
$$\leq \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$



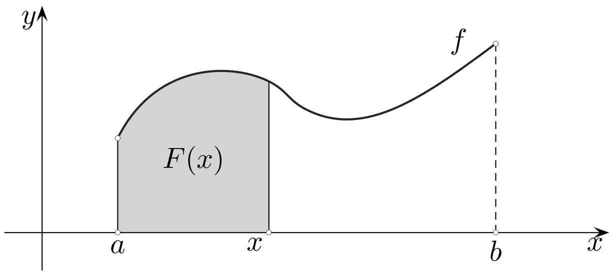


7.3. Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Kljub temu, da sta določeni in nedoločeni integral definirana na povsem različna načina, tako je določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$ število, nedoločeni integral funkcije f pa funkcija, bomo pokazali, da sta oba integrala tesno povezana. Definirajmo funkcijo, ki predstavlja vez med določenim in nedoločenim integralom.

Definicija. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in zato integrabilna funkcija. Potem za vsak $x \in [a,b]$ obstaja integral $\int_a^x f(t)dt$, zato lahko definiramo funkcijo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$



Če je funkcija f pozitivna, potem nam funkcija F meri ploščino območja med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a,x]$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je funkcija F odvedljiva. Odvod funkcije nam meri, kako hitro se funkcija spreminja. To pa je v primeru funkcije F odvisno od vrednosti funkcije f v točki x. Zapišimo to natančneje.

Izrek. *(Osnovni izrek analize.) Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

odvedljiva, zato tudi zvezna, in

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Dokaz. Pokazati moramo, da je limita diferenčnega kvocienta funkcije F enaka funkciji f, da je torej

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Izračunajmo najprej, koliko je razlika $F(x+h)-F(x)$. Velja

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstaja tak $\xi \in [x, x+h]$, da je

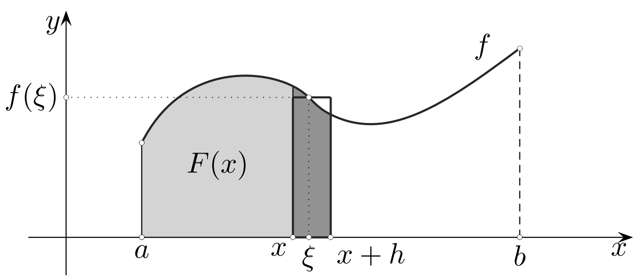
$$f(\xi) = \frac{1}{(x+h)-x} \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

torej je

$$f(\xi)h = \int_x^{x+h} f(t)dt = F(x+h) - F(x)$$

in zato je

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi).$$



Sledi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x),$$

saj je število $\xi \in [x, x+h]$ in gre zato proti x, ko gre h proti nič. □

Pokazali smo, da je odvod funkcije F enak funkciji f,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x),$$

torej je funkcija F nedoločeni integral funkcije f,

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt.$$

V nadaljevanju si oglejmo, kako lahko izračunamo določeni integral s pomočjo nedoločenega integrala.

Izrek. *(Newton-Leibnizova formula.) Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo G poljuben nedoločeni integral funkcije f, torej*

$$G(x) = \int f(x)dx.$$

Potem je

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dokaz. Naj bo G poljuben nedoločeni integral funkcije f, torej

$$G(x) = \int f(x)dx.$$

V prejšnjem izreku smo pokazali, da je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

vedno nedoločeni integral funkcije f, vsi nedoločeni integrali funkcije f pa se med sabo razlikujejo samo za konstanto, zato je

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Izračunajmo, koliko je $G(b) - G(a)$. Velja

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \int_a^b f(t)dt + C - \left(\int_a^a f(t)dt + C\right) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Opomba. Newton-Leibnizova formula pove, kako lahko izračunamo določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ funkcije f na intervalu $[a,b]$. Najprej poiščemo nedoločeni integral G funkcije f in nato izračunamo razliko funkcijskih vrednosti $G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$.

Primer. Še enkrat izračunajmo integral

$$\int_1^2 (x+1)dx.$$

Najprej izračunamo nedoločeni integral

$$G(x) = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

in nato razliko

$$G(2) - G(1) = \left(\frac{2^2}{2} + 2 + C\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 1 + C\right) = \frac{5}{2}.$$

Vrednost določenega integrala je torej

$$\int_1^2 (x+1)dx = \frac{5}{2}.$$

Kadar računamo določeni integral s pomočjo nedoločenega integrala, izračun običajno pišemo na naslednji način

$$\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}.$$

Pri računanju nedoločenih integralov smo si pomagali z vpeljavo nove spremenljivke. Brez dokaza zapišimo, kako lahko novo spremenljivko vpeljemo tudi v določeni integral.

Izrek. *Naj bo $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, torej u' zvezna funkcija, in naj bo f zvezna funkcija na zalogi vrednosti funkcije u. Potem je*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Primer. Izračunajmo določeni integral

$$\int_0^1 e^{x^2+1}xdx.$$

Za novo spremenljivko izberemo $u = x^2 + 1$, torej je $du = 2xdx$. Izračunati moramo še novi meji, torej $u(0) = 1$ in $u(1) = 2$. Velja

$$\int_0^1 e^{x^2+1}xdx = \int_1^2 e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^1\right) = \frac{e^2 - e}{2}.$$

Prav tako lahko pri računanju določenih integralov uporabimo metodo per partes.

Izrek. *Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a,b]$, potem velja*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Primer. Izračunajmo določeni integral

$$\int_0^\pi (x+1)\sin x dx.$$

Izberemo $u = f(x) = x+1$ in $dv = g'(x)dx = \sin x dx$. Potem je $du = f'(x)dx = 1 \cdot dx$ in $v = g(x) = \int \sin x dx = -\cos x$, torej je

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x+1)\sin x dx &= (x+1)(-\cos x)|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx \\ &= ((\pi+1)(-\cos\pi) - (0+1)(-\cos 0)) - (-\sin x)|_0^\pi \\ &= \pi + 1 + 1 - 0 = \pi + 2.\end{aligned}$$

7.4. Posplošeni integral

Oglejmo si, kako lahko posplošimo definicijo določenega integrala v primeru, ko je funkcija f neomejena, in v primeru, ko je interval, na katerem integriramo funkcijo f, neomejen.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana na intervalu $[a,b)$ in naj bo $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja določeni integral $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ in če obstaja tudi limita $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, potem pravimo, da obstaja *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$, in pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Na enak način definiramo posplošeni integral, če funkcija f ni omejena v krajišču a intervala $[a,b]$, torej

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Če funkcija f ni omejena v točki $c \in (a,b)$, potem posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja, če obstajata oba posplošena integrala $\int_a^c f(x)dx$ ter $\int_c^b f(x)dx$. V tem primeru pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Primer. Izračunajmo posplošeni integral

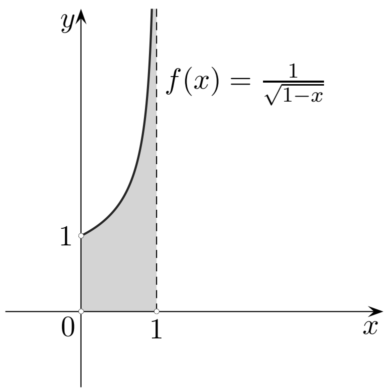
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx.$$

Funkcija $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ v desnem krajišču intervala $[0,1]$ ni omejena, zato bomo najprej za $\varepsilon > 0$ izračunali določeni integral

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

in nato njegovo limito, ko gre ε proti nič. Določeni integral bomo izračunali s pomočjo vpeljave nove spremenljivke $u = 1 - x$, torej je $du = -dx$. Izračunamo še novi meji $u(0) = 1$ in $u(1-\varepsilon) = \varepsilon$. Velja

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{u}}(-du)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\,(-2)\sqrt{u}\Big|_1^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2)(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{1}) = 2.\end{aligned}$$



Definicija. Naj bo funkcija f definirana na intervalu $[a,\infty)$. Če za vsak $M > a$ obstaja določeni integral $\int_a^M f(x)dx$ in če obstaja tudi limita $\lim\limits_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$, potem pravimo, da obstaja *posplošeni integral* funkcije f na intervalu $[a,\infty)$, in pišemo

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx.$$

Na enak način definiramo posplošeni integral $\int_{-\infty}^a f(x)dx$, če je funkcija f definirana na intervalu $(-\infty,a]$, torej

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx.$$

Če je funkcija definirana na celotni realni osi in za nek $a \in \mathbb{R}$ obstajata posplošena integrala $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ in $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, potem obstaja tudi posplošeni integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

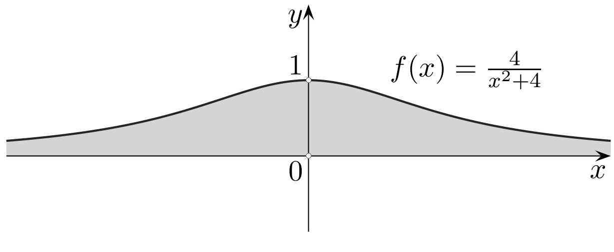
Opomba. Če posplošeni integral obstaja, potem pravimo tudi, da je posplošeni integral *konvergenten*, če ne obstaja, pa pravimo, da je *divergenten*.

Primer. Izračunajmo posplošeni integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{4}{x^2+4} dx.$$

Določeni integral bomo izračunali s pomočjo vpeljave nove spremenljivke $u = \frac{x}{2}$, torej je $du = \frac{1}{2}dx$. Izračunamo še novi meji $u(0) = 0$ in $u(M) = \frac{M}{2}$. Velja

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{4}{x^2+4} dx &= \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} \frac{4}{x^2+4} dx = \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} \frac{4}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)} dx \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{\frac{M}{2}} \frac{1}{u^2+1} \cdot 2du = \lim_{M\to\infty} 2\left(\arctan u\right)\Big|_{0}^{\frac{M}{2}} \\
&= \lim_{M\to\infty} 2\left(\arctan \frac{M}{2} - \arctan 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.
\end{aligned}$$



Opomba. Pri računanju posplošenih integralov običajno na vmesnih korakih ne pišemo limite, kot smo jo v obeh primerih, temveč šele na zadnjem koraku, ko vstavljamo meje v nedoločeni integral, upoštevamo, da je potrebno izračunati limito dobljene funkcije.

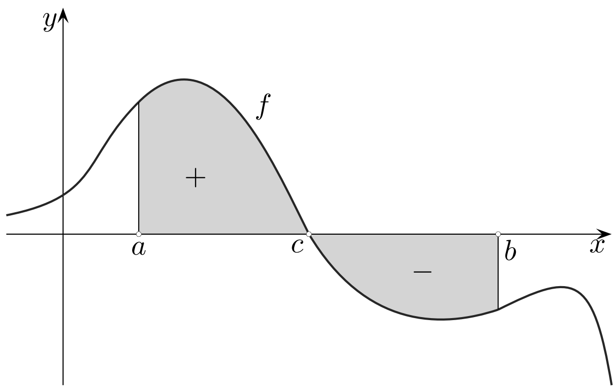
7.5. Uporaba določenega integrala

Izračun ploščine krivočrtnega lika. Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitivna integrabilna funkcija. Potem je po definiciji določenega integrala integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

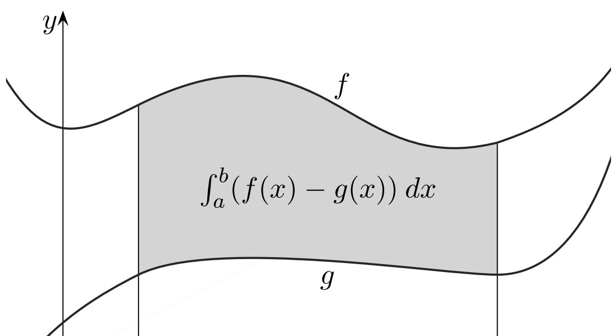
ravno ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f na intervalu $[a,b]$.

Če integrabilna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ ni povsod pozitivna, potem interval $[a,b]$ razdelimo na taki podmnožici, da je na eni podmnožici funkcija nenegativna in na drugi negativna. Ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f je potem vsota integrala funkcije f na prvi podmnožici in integrala funkcije f na drugi podmnožici pomnoženega z -1.

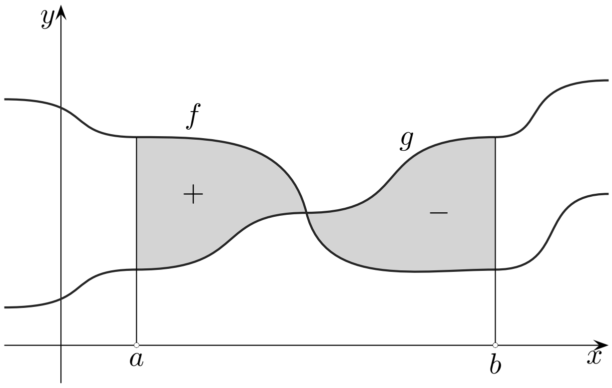


Naj bosta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a,b]$ in naj bo $f(x) \geq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Potem je ploščina območja med grafoma funkcij f in g na intervalu $[a,b]$ enaka

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Če za nekatere $x \in [a, b]$ velja $f(x) \geq g(x)$, za nekatere $x \in [a, b]$ pa $f(x) < g(x)$, potem, podobno kot prej, interval $[a, b]$ razdelimo na dve podmnožici in nato na podmnožici, kjer je $f(x) < g(x)$, integral pomnožimo z -1.



Primer. Izračunajmo ploščino območja med grafoma funkcij

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

na intervalu $[-1, 2]$. Najprej moramo poiskati vsa presečišča grafov funkcij f in g. Veljati mora $f(x) = g(x)$, torej

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Enačbo poenostavimo,

$$x(1 - x) = 0,$$

in dobimo, da sta rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Na intervalih $[-1, 0]$ in $[1, 2]$ je

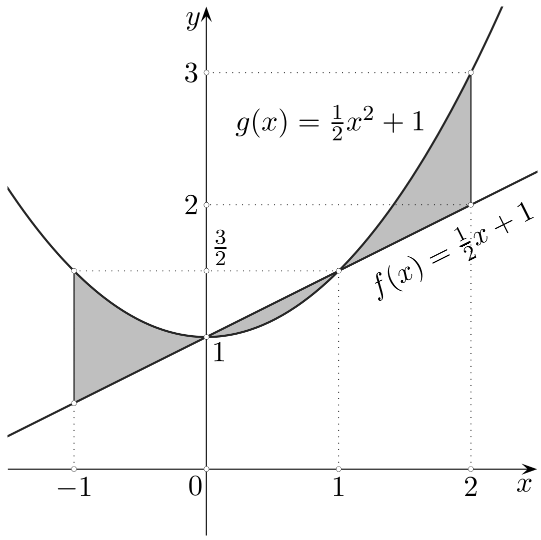
$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) = \frac{1}{2}(x - x^2) = \frac{1}{2}x(1 - x) \leq 0,$$

torej $f(x) \leq g(x)$, na intervalu $[0, 1]$ pa je

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x(1 - x) \geq 0,$$

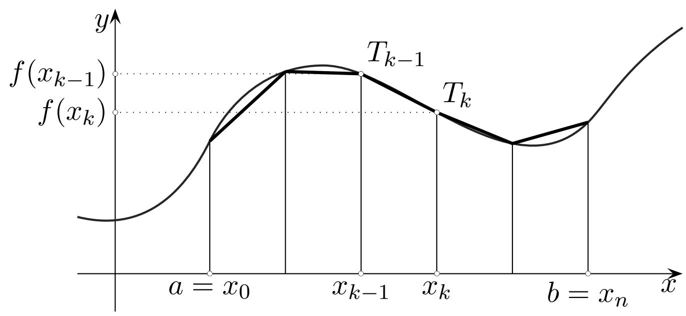
torej $f(x) \geq g(x)$. Sledi, da je ploščina območja med grafoma funkcij f in g enaka

$$\begin{aligned}
P &= -\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx + \int_{0}^{1}(f(x)-g(x))dx - \int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x-x^2)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x-x^2)dx - \frac{1}{2}\int_{1}^{2}(x-x^2)dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{11}{12}.
\end{aligned}$$



Ločna dolžina krivulje. Naj bo krivulja podana z zvezno odvedljivo realno funkcijo f. Zanima nas dolžina krivulje, ki predstavlja graf funkcije f, od točke $(a, f(a))$ do točke $(b, f(b))$. Na krivulji si izberemo točke $T_k(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$, pri čemer je $x_0 = a$ in $x_n = b$. Točke povežemo z daljicami in dobimo poligonsko črto, katere dolžina je po Pitagorovem izreku enaka

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



Ta dolžina je tem boljši približek dolžine krivulje, čim krajše so razdalje med točkami T_{k-1} in T_k. Razliko $f(x_k)-f(x_{k-1})$ s pomočjo Lagrangeovega izreka zapišemo na naslednji način

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Sledi, da je dolžina poligonske črte enaka

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $\delta_k \to 0$, pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ za vsak k. Če limita obstaja, potem je dolžina krivulje enaka

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Primer. Izračunajmo obseg zgornje polovice krožnice s polmerom a, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

od točke $-a$ do točke a. Najprej izračunamo

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Pri računanju bomo vpeljali novo spremenljivko $u = \frac{x}{a}$, torej $du = \frac{1}{a}dx$, novi meji bosta $u(-a) = -1$ in $u(a) = 1$. Velja

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}}dx = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{a}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{a}{\sqrt{1 - u^2}}du \\
&= a \arcsin u|_{-1}^{1} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi a.
\end{aligned}$$

V nadaljevanju izpeljimo, koliko je ločni diferencial. Dolžina krivulje, ki predstavlja graf funkcije f, od točke $(a, f(a))$ do točke $(x, f(x))$ je

$$s(x) = \int_{a}^{x} \sqrt{1 + (y'(t))^2}dt,$$

torej

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$ in dobimo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Oglejmo si še, kako izračunamo dolžino krivulje, podane v parametrični obliki, torej $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Odvod funkcije po spremenljivki t pogosto označimo s piko, torej $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ in $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$. Velja

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

oziroma

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Ker je

$$ds = \dot{s}dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt,$$

je dolžina parametrično podane krivulje enaka

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

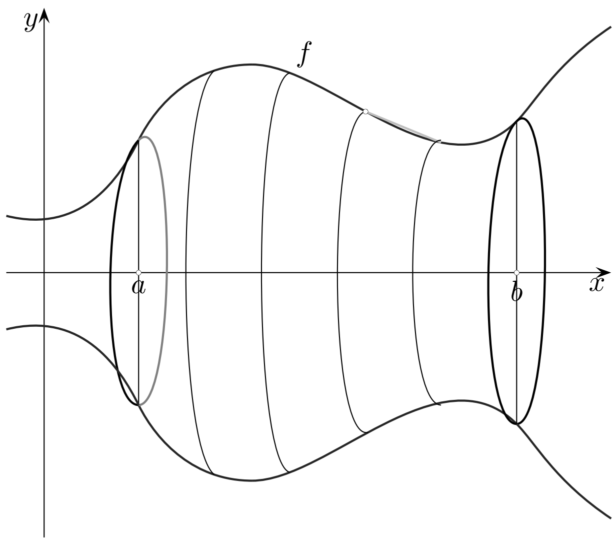
Primer. Izračunajmo obseg krožnice, ki je podana v parametrični obliki

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t,$$

vrednosti parametra t se spreminjajo od $\alpha = 0$ do $\beta = 2\pi$. Najprej izračunamo $\dot{x} = -a\sin t$ in $\dot{y} = a\cos t$. Velja

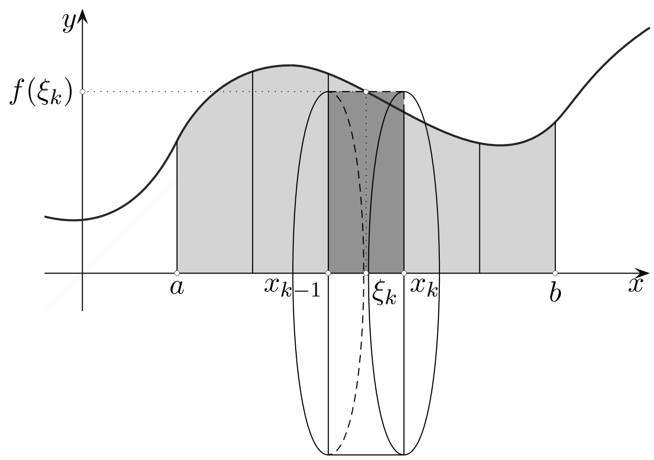
$$\begin{aligned} s &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} a dt = at|_0^{2\pi} = 2\pi a. \end{aligned}$$

Prostornina rotacijskega telesa. Naj bo f nenegativna zvezna funkcija. Zavrtimo graf te funkcije okrog abscisne osi in dobimo rotacijsko ploskev.



Zanima nas prostornina območja, ki je omejeno s to rotacijsko ploskvijo in ravninama $x = a$ in $x = b$. Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[x_{k-1}, x_k]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, in izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ za vsak $k = 1, \ldots, n$. Potem je prostornina rotacijskega telesa nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ približno enaka prostornini valja s polmerom $f(\xi_k)$ in višino $x_k - x_{k-1}$, torej

$$\pi \cdot (f(\xi_k))^2(x_k - x_{k-1}).$$



Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f(\xi_k))^2 (x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $\delta_k \to 0$, pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ za vsak k. Limita integralskih vsot je potem enaka prostornini rotacijskega telesa, torej

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

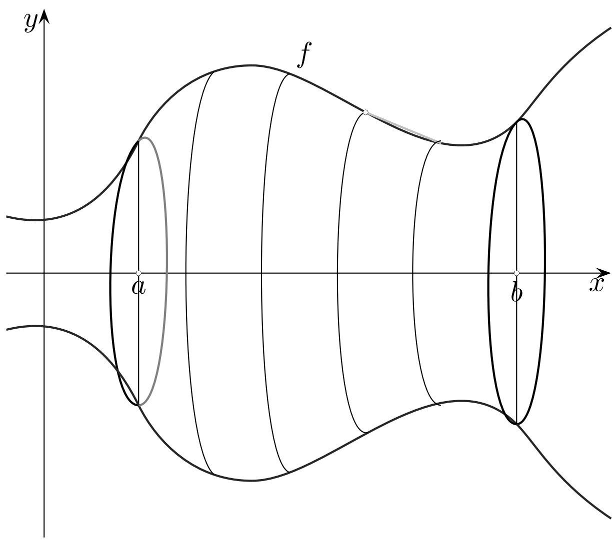
Primer. Izračunajmo prostornino krogle s polmerom a. Krogla je rotacijsko telo, določeno z grafom funkcije

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

od točke $-a$ do točke a. Prostornina krogle je potem

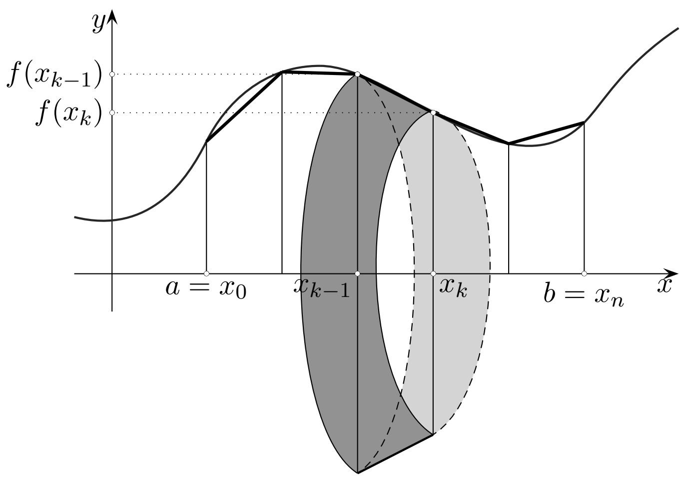
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^{a} \\ &= \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

Površina rotacijskega telesa. Naj bo f nenegativna zvezno odvedljiva funkcija. Zavrtimo graf te funkcije okrog abscisne osi in dobimo rotacijsko ploskev.



Zanima nas površina rotacijske ploskve nad intervalom $[a, b]$. Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[x_{k-1}, x_k]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, in izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ za vsak $k = 1, \ldots, n$. Potem je površina rotacijskega telesa nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ približno enaka površini plašča prisekanega stožca s polmeroma $f(x_{k-1})$ in $f(x_k)$ ter stranico s_k, torej

$$2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot s_k.$$



Pri računanju ločne dolžine smo pokazali, da je

$$s_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1})$$

za nek $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, torej je površina plašča prisekanega stožca nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ enaka

$$2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1}).$$

Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $\delta_k \to 0$, pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ za vsak k. Ker je funkcija f zvezna, je

$$\lim_{x_{k-1} \to x_k} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = f(x_k).$$

Limita integralskih vsot je potem enaka površini rotacijskega telesa, torej

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Primer. Izračunajmo površino krogle s polmerom a. Krogla je rotacijsko telo, določeno z grafom funkcije

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

od točke $-a$ do točke a. Najprej izračunamo

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Površina krogle je potem

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx \\ &= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}}dx = 2\pi \int_{-a}^{a} a dx \\ &= 2\pi a \, x\big|_{-a}^{a} = 2\pi a \, (a - (-a)) = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

Delo, ki ga opravi sila vzdolž premice. Delo, ki ga opravimo, če delujemo s konstantno silo F vzdolž premice od točke a do točke b na razdalji $s = b - a$, izračunamo po formuli

$$A = F \cdot s.$$

Če sila na celotni poti ni konstantna, torej je $F = F(x)$, potem izračunamo delo s pomočjo integrala

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Primer. Če želimo raztegniti na enem koncu pritrjeno vzmet od točke a do točke b, potem se po Hookovem zakonu sila povečuje po formuli $F(x) = kx$, k je konstanta odvisna od vzmeti. Delo, ki ga opravimo, je potem

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

Določanje konvergence številske vrste. Spoznali smo že več kriterijev za določanje konvergence številske vrste, na primer kvocientni in korenski kriterij. Vendar pa ni vsak kriterij dober za določanje konvergence katerekoli vrste. Tako, na primer, z nobenim izmed omenjenih dveh kriterijev ne moremo določiti konvergence harmonične vrste. Oglejmo si še en kriterij, s katerim preverjamo konvergenco vrste s pomočjo določenega integrala in s katerim bomo še enkrat pokazali, da harmonična vrsta divergira.

Izrek. *(Integralski kriterij.) Naj bo a naravno število in f nenegativna, zvezna in padajoča funkcija na intervalu $[a, \infty)$. Potem posplošeni integral*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

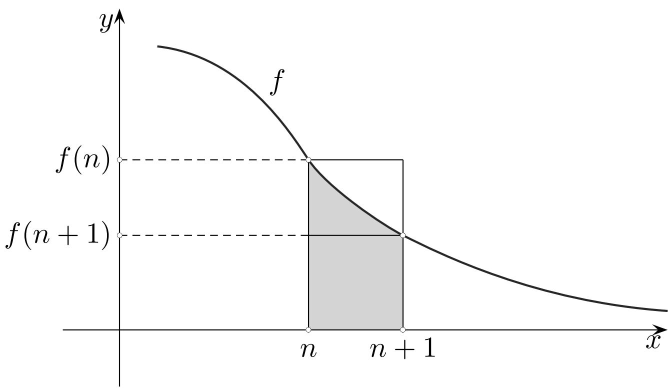
in številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

bodisi oba konvergirata bodisi oba divergirata.

Dokaz. Naj bo $n \geq a$. Ker je funkcija f padajoča, za vsak $x \in [n, n+1]$ velja $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$, zato je ploščina pravokotnika z višino $f(n)$ nad intervalom $[n, n+1]$ enaka ali večja od ploščine območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[n, n+1]$, ta ploščina pa je enaka ali večja od ploščine pravokotnika z višino $f(n+1)$ nad intervalom $[n, n+1]$. Torej je

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1). \tag{2}$$



Naj bo N poljubno naravno število večje od a. Neenakost (2) velja za vsak $n \geq a$, zato velja tudi, če seštejemo ustrezne člene, torej

$$\sum_{n=a}^{N} f(n) \geq \sum_{n=a}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{n=a}^{N} f(n+1) = \sum_{n=a+1}^{N+1} f(n).$$

Upoštevamo še lastnost določenega integrala, da je

$$\int_{a}^{k} f(x)dx + \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{a}^{k+1} f(x)dx,$$

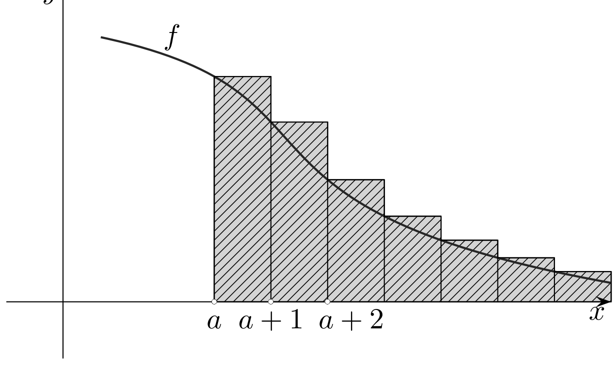
in dobimo

$$\sum_{n=a}^{N} f(n) \geq \int_{a}^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=a+1}^{N+1} f(n).$$

Če je številska vrsta konvergentna, torej končna, potem je

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=a}^{\infty} f(n),$$

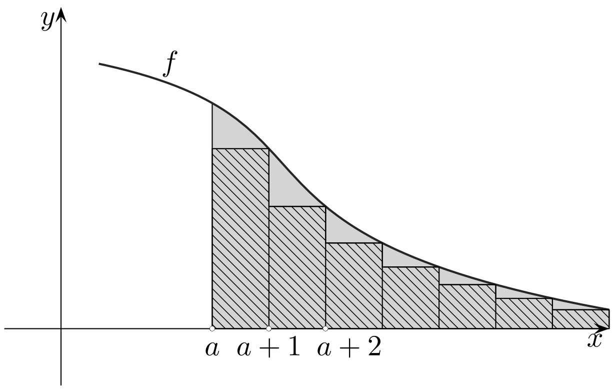
zato je v tem primeru konvergenten tudi posplošeni integral.



Če pa je konvergenten posplošeni integral, je

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) \leq \int_a^{\infty} f(x)dx,$$

torej je v tem primeru konvergentna tudi številska vrsta.



□

Opomba. Kljub temu, da posplošeni integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, to še ne pomeni, da sta posplošeni integral in številska vrsta enaka, kadar obstajata.

Primer. S pomočjo integralskega kriterija preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ker je posplošeni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty} \log N = \infty$$

divergenten, je divergentna tudi harmonična vrsta.

Opomba. Na enak način, kot v prejšnjem primeru, lahko pokažemo, da številska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

Literatura

- Meike Akveld, René Sperb, *Analysis I*, vdf Hochschulverlag AG, ETH Zürich, 2009.
- James Stewart, *Calculus, Early Transcendentals*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2008.
- Peter Šemrl, *Osnove višje matematike I*, DMFA - založništvo, 2009.
- George B. Thomas, jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, *Thomas' Calculus*, Pearson, Addison Wesley, 2005.
- Gabrijel Tomšič, Bojan Orel, Neža Mramor Kosta, *Matematika I*, Fakulteta za elektrotehniko: Fakulteta za računalništvo in informatiko, 2004.
- Ivan Vidav, *Višja matematika I*, DMFA - založništvo, 2008.

MATEMATIKA 1

V knjigi so zbrane tiste vsebine, ki jih obravnavamo v zimskem semestru prvega letnika študija na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani v okviru predmeta Matematika 1.

KLJUČNA GESLA

Številske množice, zaporedja, številske vrste, funkcije realne spremenljivke, odvod, integral.

G. DOLINAR

Gregor Dolinar predava matematične in statistične predmete na Fakulteti za elektrotehniko in na interdisciplinarnem študijskem programu Statistika Univerze v Ljubljani. Na raziskovalnem področju se ukvarja z linearno algebro, funkcionalno analizo in statistiko.

ISBN 978-961-243-414-4

ZALOŽBA FAKULTETE ZA ELEKTROTEHNIKO