Od kladiva do kija

Tine Golež

Včasih nam manjka kakšno orodje. Če, denimo, nimamo kladiva, žebelj lahko dokaj uspešno zabijemo kar z nedrobljivim kamnom. A če nimamo niti kamna, imamo pa debelejši oglat drog, upanje ostaja. Toda, s katerim delom droga udarjati po žeblju, da roka ne bo občutila neprijetnega sunka v prečni smeri? Naj bo to ravno polovica, kjer je težišče droga?

Po drugi poti

Nalogo lahko zastavimo tudi drugače. Vprašamo se, kje moramo vodoravno udariti drog, ki stoji pokončno, da se bo krajišče droga, ki je na podlagi, začelo dvigovati navpično navzgor. Če ga bomo zadeli v težišču, bo ob sicer majhnem trenju prišlo do translacije. Če ga bomo zadeli tik pod vrhom, se bo spodnji del zasukal nazaj. Iskana točka bo torej nekje vmes; nekje na zgornji polovici droga. Trk mora biti tak, da bo začetna hitrost spodnjega dela palice obrnjena navpično navzgor.

Da translacija droga ne bo prava rešitev, smo že ugotovili. Zato bomo upoštevali tako izrek o gibalni količini kot tudi izrek o vrtilni količini. Privzamemo še, da je v igri kratkotrajna sila, ki je bistveno večja od sile teže. Drog bomo zadeli ali udarili za b nad težiščem (slika 1).

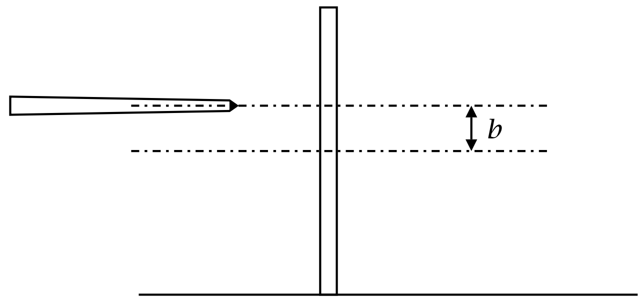
Zapišemo oba izreka:

$$F\Delta t = mv$$

in

$$bF\Delta t = J\omega.$$

In kakšna je zveza med v in ω? Pomislimo na kotaljenje koles. Nalepimo ali narišimo navpično črto (slika 2). Ko se kolo giblje, bo gibanje spodnjega krajišča črte, ki ustreza premeru oziroma našemu drogu, natančno tâko, kot želimo, da je gibanje droga. V začetnem trenutku se spodnje krajišče giblje navpično navzgor, seveda pa že po neskončno majhnem premiku spremeni smer potovanja in potuje po cikloidi. Gre za krivuljo, ki jo dobimo, ko sledimo točki na krožnici, ko se ta kotali po premici. Lepa animacija je na voljo na spletu [1].



SLIKA 1.
Drog, ki stoji na tleh, bomo sunili v vodoravni smeri.

Gre seveda za kotaljenje (brez spodrsavanja), za katerega velja zveza med hitrostjo gibanja težišča in kotno hitrostjo:

$$v = \omega r.$$

SLIKA 2.
Na gumo smo nalepili ozek pokončni pravokotnik (ki nas pravzaprav spominja na naš drog). Avtomobilček potisnemo naprej in naredimo več slik. Zaporedne slike kažejo, da se spodnji del »droga« giblje po cikloidi. Tako je izpolnjen pogoj, da je v začetnem trenutku smer hitrosti spodnjega krajišča obrnjena navpično navzgor.

Ker dolžina palice ustreza premeru, bo za naš primer veljala enačba

- $v = \omega \frac{l}{2}$,

pri tem je l dolžina droga. Vztrajnostni moment (tankega) droga okoli težišča je

- $J = \frac{1}{12} m l^2$.

Iz zapisanih enačb dobimo

- $b = \frac{1}{6} l$

in od tod

- $h = \frac{2}{3} l$.

To je hkrati tudi odgovor na zastavljeno vprašanje. Drog moramo torej udariti ali zadeti eno tretjino dolžine pod vrhom, pa bosta obe krajišči opisovali cikloido. Seveda bomo zapisano preverili s poskusom. Še prej pa nazaj k prvemu vprašanju.

Če bomo drog uporabili kot kladivo, je smiselno, da udarjamo po žeblju tako, da ga zadevamo s točko, ki je dve tretjini dolžine droga oddaljena od krajišča, kjer ga držimo. V tem primeru ne bomo občutili sunka na roko (kot ni imel udarjeni drog v začetnem trenutku vodoravne komponete hitrosti spodnjega krajišča). Hkrati pa to pomeni, da bo kar največji delež kinetične energije porabljen za delo, za zabijanje žeblja. Pri tem pa naj se dlan, ki drži in suka drog, giblje po cikloidi. Tako bomo preprečili, da bi nas neprijetno presenetila prečna sila, zaradi katere bi morda roka celo spustila drog.

Meritev

Najprej se lotimo udarca po drogu. Palica, s katero bomo udarili drog, bo drsela po vodoravni ustrezno visoki podlagi. Zelo uporabna je trdna železna ograja. Za kratek trk pa poskrbimo tako, da lahko palica deluje na drog le na kratki razdalji, saj jo kmalu zaustavi navpična – v našem primeru je to hkrati končna – prečka ograje (slika 3). Naš drog je kar votla železna cev.

Dogajanje posnamemo s hitroslikovno kamero, lahko tudi z navadno. Potem v programu LoggerPro odpremo posnetek in označujemo lego spodnjega dela droga. Po vsaki označitvi lege program sam zamenja sličico z naslednjo sličico. Seveda hkrati še zapiše koordinati točke, ki smo jo označili. Pri tej analizi je bilo v igri kar 96 slik.

Iz znane dolžine droga določimo pretvornik med koordinatami in dejansko lego spodnjega dela droga. Lahko tudi v samem programu določimo koordinatno izhodišče. Oboje (pretvornik in izhodišče) smo preračunali kar v Excelu. Prav tam smo tudi »popravili« koordinato y. V navpični smeri deluje namreč sila teže in zato smo vsako koordinato y povečali za $1/2gt^2$. Časovni interval je naraščal po korakih $\Delta t = 1/300$ s. Petdeseta pikica je imela tako npr. popravek $1/2 \cdot 9{,}81 \cdot (50 \cdot 1/300)^2$, kar je 0,136 oziroma 13,6 cm.

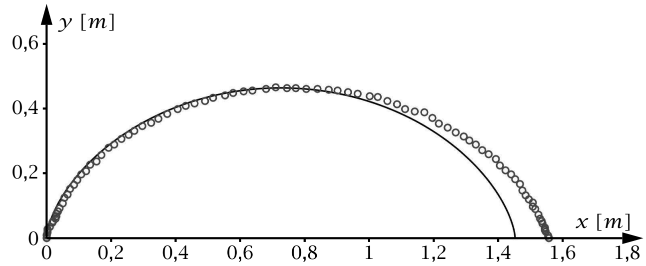
Popravljene koordinate smo vnesli v program GeoGebra. Poleg izmerkov smo dodali še teoretično

SLIKA 3.
Palica najprej drsi po vodoravni podlagi. To nam omogoča, da drog zadenemo precej točno na izbrani višini. Kratkotrajnost trka dosežemo tako, da se palica »zatakne« v zadnjo navpično prečko ograje. Tako skupaj z drogom lahko potuje le kak centimeter. Palico seveda držimo drugače, kot na tej fotografiji, in sicer z obema rokama, da je trk z drogom res silovit, kar kaže naslednja slika.

SLIKA 4.
Ker gledamo le zadnjo sličico, je drog en sam in bele barve. Potovanje spodnjega krajišča je označeno z modrimi krožci. Da bi si lažje predstavljali, kako je drog po udarcu odfrčal, smo ga na podlagi petih prejšnjih (ne zaporednih!) slik narisali z rdečo. Tako sedaj vidimo, kje je bil v začetnem trenutku in še v štirih vmesnih trenutkih. Palica, s katero smo ga udarili, se je do zadnje sličice že odbila malo nazaj, zato ni poleg rdečega droga. Ločljivost je sicer slaba (hitroslikovna kamera), a povsem zadošča za to meritev.

predvideno cikloido, ki bi jo moralo izrisati krajišče droga. Ker je dolžina droga 0,462 m, je parametrična oblika cikloide $x = (0{,}462/2) \cdot (t - \sin(t))$ in $y = (0{,}462/2) \cdot (1 - \cos(t))$. Pri tem gre parameter t od 0 do 2π. Izmerjena cikloida je dokaj blizu teoretični. Vsekakor poskus ni izveden v idealnih okoliščinah. Ko udarimo po drogu, bi morali hkrati odmakniti podlago, na kateri drog stoji, navzdol. Ob udarcu se namreč drog nekoliko nagne že tedaj, ko se dotika podlage. V tistih trenutkih drog deluje na podlago z večjo silo, kot je sila teže, hkrati pa tudi podlaga na drog (3. Newtonov zakon), tako da (žal) ni v igri le sila, s katero palica deluje na drog (in teža, katere vpliv poznamo in smo ga lahko računsko odpravili).

Sedaj je čas, da zabijemo žebelj. Več posnetih poskusov kaže, da tudi tokrat (vsaj približno) krajišče, ki ga držimo, potuje po cikloidi. Seveda je drog, ki ga drži roka, nekaj drugega kot samostojen drog in zato ne bo v igri popolna cikloida. Nekaj podobnega sem pred več leti opazil tudi pri cepljenju drv s sekiro. Najmanj neprijetni udarci so bili tedaj, ko sem sekiro



SLIKA 5.
Krožci označujejo, kako se je gibalo (sprva) spodnje krajišče droga, tako da izhodišče sistema sovpada s točko, na kateri je pred udarcem stal drog. Koordinate so popravljene za izničenje vpliva gravitacije. Posamezna odstopanja nekaterih točk so napake, ki so nastale zaradi netočnega pritiskanja s kazalcem (miške) po posamezni sliki. S polno črto je narisana teoretično predvidena cikloida, ki jo dobimo, ko (idealni) drog enakih dimenzij (idealno) sunemo v vodoravni smeri na dveh tretjinah višine.

med letôm proti polenu povlekel še nekoliko proti sebi. Najbrž je tudi v tem primeru točka, kjer roka drži sekiro, približno potovala po cikloidi. Morda pa še kdo izmed bralcev preveri, kako je s tem.

SLIKA 6.
Zaporedne slike zabijanja žeblja z drogom kažejo, kako se giblje izbrana točka na drogu. Na tej sliki je označena z rumeno, na ostalih slikah je bila ta točka tam, kjer so rdeči krožci. Vsekakor prijemališče droga ni (le) osišče vrtenja, pač pa tudi potuje nekoliko nazaj, kar nakazuje cikloido. Ker je žebelj bolj slabo viden, nanj kaže rdeča puščica.

COM, COP in SZ

V tem podnaslovu zapisane kratice so okrajšave (v anglešini) za masno središče (COM – center of mass), točko udarca (COP – center of percussion) in mehko območje (SZ – sweet zone). Prvo dobro poznamo iz gimnazijske fizike, pri drugi pa gre točno za točko, s katero se ukvarjamo v tem članku. V praksi so se te točke zavedali že stoletja. Le pomislimo na vse vrste sabelj in mečev; tudi pri njihovi uporabi niso želeli ob udarcu občutiti prečne sile na roko, ki je zamahnila z orožjem. Tak prečni sunek je marsikoga razorožil, saj mu je tresljaj izbil orožje iz roke in prepuščen je bil na milost in nemilost tistemu, ki mu je meč uspelo obdržati v rokah. Zadetek z ustrezno točko pa je pomenil tudi največji učinek reza ob zadetku. Če me spomin ne vara, nekaj takega opazimo na ilustracijah boja Martina Krpana z Brdavsom. Na srečo cesarskega Dunaja in njemu podložnih dežel je kij navkljub COP udarcu, ki ga je zadal Brdavs, dobro opravil svojo nalogo. Očitno je Martin Turkovo orožje pričakal s COP blokado!

Toda kako ugotoviti, kje je COP pri malce manj preprostih telesih? Kje je COP pri bejzbolskem kiju? Tokrat do rezultata ne bomo prišli teoretično, pač pa z meritvijo.

A najprej se vprašajmo, katera meritev bi pri drogu izdala, kje se nahaja COP. Odgovor je preprost – to bo nihanje. Če drog obesimo na enem krajišču, bo nihal z nihajnim časom t_0. Točka COP je natančno toliko oddaljena od osišča, kot je dolžina nitnega nihala, ki bi imel enak nihajni čas t_0. Pri drogu bomo to trditev preverili z računom in poskusom, pri bolj zapleteneih telesih pa se do rezultata odpravimo le s poskusom.

Nihajni čas fizičnega nihala je

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr^*}},$$

kjer je r^* razdalja od osi do težišča, J pa vztrajnostni moment okoli osi nihanja. Pri drogu, ki je pritrjen v zgornjem krajišču, tako da lahko niha, je

$$r^* = 1/2l$$

in

$$J = 1/3ml^2.$$

Od tod dobimo, da je dolžina nitnega nihala, ki bi imel enak nihajni čas kot drog, enaka 2/3 dolžine droga:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{1}{2}l}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}}.$$

Izračunani COP se nahaja tam, kjer smo predvideli že s prejšnjim računom in potrdili s poskusom, z udarcem palice. Ker ima vsak bralec doma kak drog, lahko hitro to potrdi še s poskusom, saj je merjenje nihajnega časa droga res enostavno.

Pravzaprav je premislek logičen. Za COM ali težišče telesa smo dejali, da je to točka, v kateri je navidez zbrana vsa masa telesa. (COM in težišče sovpadata, kadar se nahajamo v homogenem gravitacijskem polju. Če pa bi bil v glavni vlogi nekaj tisoč kilometrov dolg drog, ki bi bil v poševni ali navpični legi glede na površje Zemlje, pa COM in težišče ne bi sovpadala.) Težišče palice je točno na sredini, medtem ko je COP tam, kjer je »navidez zbrana vsa masa palice pri nihanju«, kot je vsa masa nitnega nihala v obešenem majhnem telesu, saj je masa vrvice zanemarljiva.

Pri zahtevnejšem telesu pa se lotimo le poskusa. Vzamemo torej poljubno fizično nihalo (teniški lopar, bejzbolski kij, badmintonski lopar) in z enakim poskusom – merjenjem nihajnega časa – ugotovimo, kje je COP. Izmerjeni nihajni čas namreč vstavimo v enačbo za nihajni čas nitnega nihala in izračunana dolžina je lega COP tega telesa (merjeno od osišča).

Ugotovili smo, da se po udarcu droga na dveh tretjinah višine krajišči droga gibljeta po cikloidah. Pri bejzbolu to poteka v obratni smeri: giblje se drog, ki zadene tudi gibajočo se žogico. Tudi tu se osišče sukanja kija stalno spreminja. Tik pred udarcem žogice je najbolj blizu sredine kija. Morda kdo izmed bralcev pozna koga, ki ta šport dobro obvlada. S pravilno postavitvijo kamere bi lahko pokazali, če se prijemališče droga giblje po cikloidi. A celotna zgodba je tu bolj zapletena, saj se vmeša še pojav, ki ga opiše oznaka SZ.

Gre za »mehko območje«, ki se nanaša na tisti del bejzbolskega kija, ki da najboljši odboj žogice. Ne smemo namreč pozabiti, da vsak udarec po kiju – torej tudi trk z žogico – povzroči lastna nihanja kija. Če nočemo, da bo krajišče, ki ga držimo, neprijetno zavibriralo, moramo žogico zadeti s tisto točko kija, kjer je vozel lastnega nihanja. Ena izmed meritev [2] je pokazala, da je prva lastna frekvenca kija 170 Hz. Vozel pri debelejšem krajišču droga je bil okoli 15 centimetrov od krajišča. Če torej zadenemo žogico s to točko kija, bo vibracij droga kar najmanj, to pa pomeni, da bomo dosegli dvoje. Znaten delež energije bo po odboju spet prevzela žogica, saj ne bomo »spravili kija v vzbujeno stanje«. Po drugi strani pa ne bo neprijetnega občutka pri držanju kija, saj ne bo nihanja krajišča, ki ga igralec drži.

Pri istem kiju so izmerili frekvenco drugega lastnega nihanja. Ta je bila okoli 600 Hz, medtem ko je bil vozel le kakšnih 7 cm od krajišča kija. »Mehko območje« je torej predel kija med tema dvema vozloma. Udarec žogice s tem območjem ne bo povzročil neprijetnega nihanja kija v rokah igralca.

Zaključek

Vsi, ki smo že držali v rokah teniški lopar, smo se gotovo srečali z naštetimi pojavi. Včasih nam je ne ravno posrečen odboj žogice močno zavibriral lopar, spet drugič smo občutili prečno silo. Seveda smo se učili s poskusi in napakami, da so postali naši odboji lažji in učinkoviti. Vsekakor pa so bile naše napake manj usodne od napak naših prednikov, ki so podobne pojave ustvarjali z mečevanjem.

Tudi na tem področju fizika ugotavlja in razlaga tisto, kar so ljudje sami spoznali že s prakso. Ko pa se je fizika poglobila v ta spoznanja, pa je lahko dala še dodatne namige, kako bi z različnimi razporeditvami mase pri orodjih za odbijanje (kij, lopar, palica za golf) dosegli boljši učinek. In prav zato imajo igralci golfa kar polno torbo različnih palic, saj so ene primerne za dolge odboje, druge za precizne, tretje za ...

Literatura

[1] http://sl.wikipedia.org/wiki/Cikloida, dostopano: 12. 9. 2014.

[2] http://www.kettering.edu/physics/drussell/bats-new/batvibes.html, dostopano: 12. 9. 2014.

www.presek.si

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

		3			1		7
6				4			
1			5			6	
						4	3
			7	3	8		
	5						
		7			4		
	6		8				

REŠITEV BARVNI SUDOKU

5	8	3	4	6	1	2	7
6	7	2	1	4	3	5	8
1	3	4	5	8	7	6	2
7	2	8	6	1	5	4	3
2	4	6	7	3	8	1	5
8	5	1	3	2	6	7	4
3	1	7	2	5	4	8	6
4	6	5	8	7	2	3	1