Univerza v Ljubljani

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO

VTO Matematika in mehanika

Edvard Kramar

LOKALNO KONVEKSNI TOPOLOŠKI VEKTORSKI PROSTORI S HILBERTSKIMI POLNORMAMI

doktorska disertacija

Ljubljana 1977

K A Z A L O

Iskreno se zahvaljujem mentorju
prof. dr. Ivanu Vidavu, ki mi je
predlagal temo, mi ob izdelavi
vseskozi pomagal in me sproti opo-
zarjal na pomanjkljivosti.

AMS Subject Class.(MOS)(1970): 46 A 05, 46 L 99 , 46 A 12 , 47 B 37

Povzetek

V delu obravnavamo lokalno konveksne topološke vektorske prostore, katerih topologija se da definirati z neko družino polnorm, ki imajo še lastnost, da jih lahko izrazimo s polskalarnimi produkti.

V takih prostorih, ki jih bomo na kratko imenovali H-lokalno konveksni prostori, vpeljemo pojem ortogonalnosti vektorjev, izražanje linearnih zveznih funkcionalov, definiramo pojem adjungiranega operatorja in proučimo nekatere njegove lastnosti. V naslednjih poglavjih študiramo strukturo algeber operatorjev, ki delujejo v takem prostoru. Med temi algebrami najdemo operatorsko algebro, ki je primer tako imenovane LMC*-algebre in je posplošitev C*-algebre.

V zadnjem poglavju dokažemo za poljuben sebiadjungiran operator v H-lokalno konveksnem prostoru njegovo spektralno razčlenitev.

U V O D

H-lokalno konveksni topološki vektorski prostori so poseben razred lokalno konveksnih prostorov in so posplošitev Hilbertovih prostorov, podobno kot so sami lokalno konveksni topološki vektorski prostori posplošitev normiranih prostorov.

Primeri H-lokalno konveksnih prostorov so zelo pogosti, saj so na primer vsi nuklearni lokalno konveksni prostori tudi take vrste. Ker je razred nuklearnih lokalno konveksnih prostorov zelo bogat, saj vanje spadajo skoraj vsi lokalno konveksni prostori, ki niso normirani (gl. [21]), vidimo, da je njihov pomen velik. Kot najpogostejši zgled bomo vzeli prostor funkcij, ki so s kvadratom lokalno integrabilne na $\mathbb{R}$ ($L_2^{loc}(\mathbb{R})$), v katerega vpeljemo topologijo z družino polnorm $p_n(f) = (\int_{-n}^{n}|f(t)|^2dt)^{1/2}$.

H-lokalno konveksne prostore je zaenkrat obravnaval le T.Precupanu v člankih [13], [14], [15] in [22], vendar je proučeval le strukturo takega prostora samega ter linearne funkcionale v njem. Izkazalo se je tudi, da se da takšne prostore deloma tudi povezati s tako imenovanimi topološkimi polobsegi, delo M. Ja. Antonovskega in njegovih sodelovcev ([2], [3], [4]), vendar se zaradi težko dostopne literature nismo spuščali v to teorijo.

Študij strukture H-lokalno konveksnega prostora samega in linearnih funkcionalov v njem, ki ga obravnavajo 1., 2., 3. in 7. poglavje, smo v glavnem povzeli po literaturi. Pri tem smo precizirali pojem H-konveksne množice, preko katere lahko uvedemo H-lokalno konveksno topologijo in dokazali nekaj novih izrekov.

Več smo se ukvarjali s proučevanjem operatorjev, ki delujejo v takem prostoru, ker to področje v literaturi še ni bilo obdelano. Tako v 4. in 5. poglavju raziskujemo zveznost linearnih operatorjev, uvajamo pojem adjungiranega operatorja in opozorimo na težave, ki nastanejo ob tem. Na žalost se izkaže, da se za vsak operator ne da definirati adjungiranega operatorja. V petem poglavju dokažemo nekaj izrekov v zvezi s spektrom operatorja.

V šestem poglavju obravnavamo strukturo nekaterih algeber operatorjev, v katere vpeljemo primerno topologijo. Ena najvažnejših je algebra $\mathcal{L}^*(X)$ vseh zveznih linearnih operatorjev, za katere obstaja adjungirani operator. Pokazali smo, da je ta algebra primer tako imenovane LMC*-algebre, ki jih je v splošnem obravnaval K. Schmüdgen v [18]. Posebna podalgebra te algebre je izomorfna neki von Neumannovi algebri.

Zadnje poglavje je posvečeno študiju projektorjev in spektralni razčlenitvi. Pri tem se nam je posrečilo dokazati spektralno razčlenitev za poljuben sebiadjungiran operator, ki deluje v H-lokalno konveksnem prostoru, katerega topologijo definira števen sistem polnorm.

1. OSNOVNE DEFINICIJE IN STRNITEV ZNANIH REZULTATOV

Naj bo X lokalno konveksen topološki vektorski prostor nad obsegom realnih ali kompleksnih števil, čigar topologijo določa sistem polnorm $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, kjer je Δ neka delno urejena množica indeksov. Vsaka od polnorm p_α naj ima še lastnost, da se da izraziti z nekim polskalarnim produktom

$$p_\alpha(x) = (x,x)_\alpha^{1/2} \quad ; \; x \in X, \; \alpha \in \Delta \tag{1.1}$$

Besedi "polskalarni produkt" bosta pomenili tako bilinearno formo (,) : $X \times X \mapsto C$, ki ima vse lastnosti skalarnega produkta, le iz pogoja $(x,x) = 0$ ne sledi $x = 0$. T. Precupanu [13] imenuje polnorme s tako lastnostjo <u>hilbertske polnorme</u>.

<u>1.1 DEFINICIJA</u> Linearni topološki vektorski prostor X imenujemo <u>pred-H-lokalno konveksen</u>, če njegovo topologijo lahko definiramo z neko družino hilbertskih polnorm.

Za indeksno množico Δ bomo še predpostavili, da je usmerjena, se pravi: za poljubna indeksa $\alpha, \beta \in \Delta$ obstaja skupni naslednik $\gamma \in \Delta$ z lastnostma

$$\alpha \leq \gamma \quad \text{in} \quad \beta \leq \gamma$$

Skupaj z množico Δ naj bo usmerjena in delno urejena tudi družina polnorm $\mathcal{P}$:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow p_\alpha(x) \leq p_\beta(x) \quad ; \; x \in X$$

Če družina polnorm $\{p_\alpha\}$ ni usmerjena, lahko preidemo na ekvivalentno družino $\{p'_\alpha\}$, ki ima to lastnost. Vzeti je treba le družino $\{ p'_B(x) = (\sum_{\alpha\in B} p_\alpha^2(x))^{1/2},\ B\in \mathcal{B}\}$, kjer je $\mathcal{B}$ družina končnih podmnožic iz Δ. Pri tem so tudi polnorme p'_B hilbertske (gl. [13]).

Da bo topologija na takem prostoru separirala točke, bomo še zahtevali, da bo družina polnorm $\mathcal{P}$ <u>zadostna</u>, se pravi: za vsak $x\in X$ obstaja vsaj en indeks $\alpha\in\Delta$ z lastnostjo

$$p_\alpha(x) \neq 0$$

Topologijo nam torej definira sistem polnorm $\mathcal{P}$, seveda pa imamo lahko še veliko polnorm, ki ne spadajo v to družino. Rekli bomo, da je poljubna polnorma p na pred-H-lokalno konveksnem prostoru X <u>zvezna</u> natanko tedaj, ko obstaja število $c>0$ in neka polnorma $p_\alpha\in\mathcal{P}$ z lastnostjo

$$p(x) \leqq c\, p_\alpha(x)$$

za vsak $x\in X$. Hitro se lahko prepričamo, da lahko topologijo našega pred-H-lokalno konveksnega prostora definiramo z njegovimi zveznimi polnormami.

Zahtevali bomo tudi, da so vse polnorme $p_\alpha\in\mathcal{P}$ netrivialne, kar pomeni: $p_\alpha \not\equiv 0$, za vsak $\alpha\in\Delta$.

Pojavi se vprašanje, kdaj je neka polnorma p hilbertska ?

<u>1.2 TRDITEV</u> Polnorma p je hilbertska natanko tedaj, ko za poljubna elementa $x,y\in X$ velja

$$p^2(x+y) + p^2(x-y) = 2(p^2(x) + p^2(y)) \tag{1.2}$$

Če je neka polnorma p hilbertska, je z relacijo

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[p^2(x+y)-p^2(x-y)+ip^2(x+iy)-ip^2(x-iy)\right] \tag{1.3}$$

natančno določen polskalarni produkt v prostoru X.

Dokaz. Če je p hilbertska polnorma, se da zapisati v obliki

$$p^2(x) = (x,x)$$

kjer je na desni neki polskalarni produkt in (1.2) sledi direktno. Če za neko polnormo p velja relacija (1.2), zanjo definiramo bilinearno formo (x,y) v obliki (1.3), ki za y=x dobi obliko

$$(x,x) = \frac{1}{4}\left[4p^2(x)+2ip^2(x)-2ip^2(x)\right] = p^2(x) \qquad (1.4)$$

od koder sledi najprej $(x,x) \geqq 0$. S krajšim računom se prepričamo, da velja tudi

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$$

in

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

To pomeni (,) je polskalarni produkt in zveza (1.4) nam pove, da se naša polnorma p izraža z njim, torej je res hilbertska. Iz zapisa (1.3) se neposredno vidi, da je za poljubna $x,y \in X$ s polnormo p enolično določena vrednost $(x,y) \in \mathbf{C}$.

1.3 KOROLAR Naj bo p hilbertska polnorma in $x,y \in X$ taka vektorja, da velja $p(x) = p(y) = 1$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja trditev

$$p((x-y)/2) > \varepsilon \Rightarrow p((x+y)/2) < 1 - \delta \qquad (1.5)$$

Dokaz. Upoštevajmo relacijo (1.2), ki ji lahko tudi rečemo paralelogramsko pravilo

$$p((x+y)/2)^2 + p((x-y)/2)^2 = 1$$

Od tod dobimo

$$p((x+y)/2)=\sqrt{1 - p((x-y)/2)^2} < \sqrt{1-\varepsilon^2} < 1 - \delta$$

Lahko tudi rečemo, da velja za hilbertske polnorme pogoj enakomerne konveksnosti.

Če vzamemo poljubno polnormo $p \in \mathcal{P}$ in poljuben $\varepsilon > 0$, je množica

$$U_\varepsilon^p = \{x \in X,\ p(x) < \varepsilon\}$$

konveksna ($x,y \in U_\varepsilon^p$, $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y \in U_\varepsilon^p$) in uravnovešena ($x \in U_\varepsilon^p$, $|\lambda| \leqq 1 \Rightarrow \lambda x \in U_\varepsilon^p$) okolica izhodišča. Velja tudi obratno, če imamo neko konveksno, uravnoveš eno in absorbirajočo (za vsak $x \in M$ obstaja število $\alpha > 0$, da je $\frac{1}{\alpha} x \in M$) množico $M \subset X$, potem z njo dobimo neko polnormo s pomočjo funkcionala Minkovskega

$$p(x) = \inf\{\lambda;\ \lambda > 0,\ \tfrac{1}{\lambda} x \in M\}$$

Iz [7] povzemimo

<u>1.4 IZREK</u> Linearni topološki vektorski prostor je natanko tedaj lokalno konveksen, ko v njem obstaja baza konveksnih in uravnovešenih okolic izhodišča.

Vprašajmo se, kakšna naj bo množica, da bo ustrezna polnorma, ki jo dobimo preko funkcionala Minkovskega, hilbertska. Vpeljimo najprej pojem H-gladke množice, ki ga je uvedel T. Precupanu v [14] in [22].

<u>1.5 DEFINICIJA</u> Množica M je v linearnem vektorskem prostoru X <u>H-gladka</u>, če za poljubni števili $\alpha, \beta \geq 0$ ter vektorja $x \in \alpha M$ in $y \in \beta M$ obstajata taki konstanti $s_0, t_0 \geqq 0$, da veljajo naslednji pogoji

$$1)\ s_o^2 + t_o^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$2)\ x + y \in s_o M$$

$$3)\ x - y \in t_o M$$

Hitro se lahko prepričamo, da je H-gladka množica simetrična in vsebuje izhodišče. Če hočemo, da ima njen funkcional Minkovskega vse lastnosti polnorme, moramo predpostaviti še, da je uravnovešena. Vpeljimo še eno vrsto množic, ki imajo tudi to lastnost.

1.6 DEFINICIJA Množica M je v linearnem vektorskem prostoru X H-konveksna, če za poljubni števili $\alpha, \beta \geq 0$ ter vektorja $x \in \alpha M$ in $y \in \beta M$ obstajata konstanti $s_o, t_o \geq 0$, da velja

$$1)\ s_o^2 + t_o^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$2)\ x + y \in sM \text{ za vsak } s \geq s_o$$

$$3)\ x - y \in tM \text{ za vsak } t \geq t_o$$

Očitno je H-konveksna množica tudi H-gladka množica. Oglejmo si še nekaj njenih lastnosti; pri tem bomo včasih ločevali primer realnega in primer kompleksnega vektorskega prostora.

1.7 TRDITEV Naj bo M H-konveksna množica v realnem linearnem vektorskem prostoru. Potem ima lastnosti

(1) $0 \in M$

(2) če je $x \in M$ in $-1 \leq \lambda \leq 1$, je $\lambda x \in M$

(3) če sta $x, y \in M$, je tudi $(x+y)/2 \in M$

Dokaz. Če v zadnji definiciji vzamemo $y=x$ in $\alpha=\beta=1$, dobimo $0 = x-x \in tM$ za vsak $t \geq t_o$, od koder že sledi prva lastnost.

Pri istih elementih dobimo tudi $x+x = 2x \in sM$ za vsak $s \geq s_o$.

Ker je $s_o \leqq 2$ zaradi pogoja $s_o^2 + t_o^2 \leqq 4$, je tudi $x+x = 2x \in sM$ za vsak $s \geqq 2$, kar ravno pomeni $\lambda x \in M$, pri čemer je $0 \leqq \lambda = 2/s \leqq \leqq 1$. Če vzamemo $\alpha=0$, $\beta=1$, $x=0 \in M$ ter poljuben $y \in M$, dobimo $0+y = = y \in sM$ in $0-y = -y \in tM$ za poljubni števili s in t, ki zadoščata pogojem $s \geqq s_o$, $t \geqq t_o$ in $s_o^2 + t_o^2 \leqq 2$. V posebnem je $y \in s_oM$ in $-y \in t_oM$. Uporabimo še enkrat lastnosti množice M in ugotovimo, da obstajata števili s_1 in t_1 z lastnostjo $s_1^2 + t_1^2 \leqq 2(s_o^2+t_o^2) \leqq \leqq 4$, da velja $(-y)-y = -2y \in tM$ za $t \geqq t_1$. Ker je $t_1 \leqq 2$, velja tudi $-2y \in tM$ za $t \geqq 2$, kar ravno pomeni $-\lambda y \in M$, če je le $\lambda = = 2/t \leqq 1$.

Dokažimo še zadnjo lastnost v zgornji trditvi. Vzemimo poljubna elementa $x,y \in M$, potem obstajata konstanti s_o in t_o, ki zadoščata pogoju $s_o^2 + t_o^2 \leqq 4$, da velja $x+y \in sM$ za vsak $s \geqq s_o$. Ker je $s_o \leqq 2$, lahko vzamemo $s = 2$ in dobimo $x+y \in 2M$, s čimer smo zgornjo trditev v celoti preverili.

Iz zadnje lastnosti zgornje trditve sledi, da H-konveksni množici M ne manjka dosti do konveksnosti, saj za $x,y \in M$ sledi tudi $tx + (1-t)y \in M$ za vsak parameter t oblike $t = k/2^n$, $k = = 0,1,\dots,2^n$; $n \in \mathbb{N}$. Da taka množica v splošnem ni konveksna, lahko preverimo na primeru $M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, |u| \leqq 1\} \setminus \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, |u| = 1, v \in \mathbb{Q}\}$.

<u>1.8 TRDITEV</u> Če je množica M H-konveksna, je taka tudi množica λM, kjer je λ poljubno realno število.

<u>Dokaz</u>. Naj bo najprej $\lambda > 0$. Vzemimo $\alpha,\beta \geqq 0$, $x \in \alpha(\lambda M) = (\alpha\lambda)M$ ter $y \in \beta(\lambda M) = (\beta\lambda)M$. Ker je množica M H-konveksna, obstajata konstanti $s_o, t_o \geqq 0$ z lastnostmi: 1) $s_o^2+t_o^2 \leqq 2(\alpha^2\lambda^2+\beta^2\lambda^2)$, 2) $x+y \in sM$ za $s \geqq s_o$ in 3) $x-y \in tM$ za $t \geqq t_o$. Če zgoraj povsod pišemo $s_o' = s_o/\lambda$, $t_o' = t_o/\lambda$, $s' = s/\lambda$ in $t' = t/\lambda$, veljajo enaki

pogoji za konstante s_o', t_o', s'in t', kar pomeni, da je tudi množica λM H-konveksna.

Če je $\lambda < 0$, lahko pišemo $\lambda M = (-\lambda)(-M)$, kjer je $-\lambda > 0$ in ker je tudi množica $(-M)$ po trditvi 1.7 H-konveksna, preidemo na prejšnji primer. Še preprostejši je dokaz zgornje trditve, če je $\lambda = 0$.

<u>1.9 LEMA</u> Če je M H-konveksna in absorbirajoča množica v realnem linearnem vektorskem prostoru, je njen funkcional Minkovskega p_M hilbertska polnorma.

<u>Dokaz</u>. Ker je množica M H-konveksna, je tudi H-gladka in po trditvi 1.7 tudi uravnovešena. V [14] je pokazano, da je njen funkcional Minkovskega p_M tedaj polnorma. Preverimo še, da je hilbertska. V ta namen vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in pišimo $\alpha = p_M(x) + \varepsilon$ ter $\beta = p_M(y) + \varepsilon$, se pravi $x \in \alpha M$, $y \in \beta M$. Ker je tedaj $x+y \in s_o M$, $x-y \in t_o M$, je $p_M(x+y) \leqq s_o$ ter $p_M(x-y) \leqq t_o$. Od tod dobimo

$$p_M^2(x+y)+p_M^2(x-y) \leqq s_o^2+t_o^2 \leqq 2(\alpha^2+\beta^2) = 2(p_M^2(x)+p_M^2(y) + \\ + 2\varepsilon p_M(x)+2\varepsilon p_M(y)+2\varepsilon^2)$$

od tod sledi

$$p_M^2(x+y) + p_M^2(x-y) \leqq 2(p_M^2(x) + p_M^2(y)).$$

Če v tej neenačbi zamenjamo x z x+y in y z x-y, dobimo še obratno neenakost, kar pomeni, da je p_M res hilbertska polnorma.

<u>1.10 IZREK</u> Naj bo M H-konveksna in absorbirajoča množica v kompleksnem linearnem vektorskem prostoru X, ki ima še lastnost

$$\omega M = M \tag{1.6}$$

za vsak $\omega \in C$, za katerega velja $|\omega| = 1$. Potem je funkcional

Minkovskega p_M hilbertska polnorma.

Dokaz. Iz trditve 1.7 in predpostavke (1.6) sledi, da je množica M tudi v kompleksnem prostoru uravnovešena. Ker je tudi absorbirajoča, je p_M polnorma, ki je po prejšnjem izreku tudi hilbertska.

Imejmo sedaj neko hilbertsko polnormo p in si oglejmo, kakšne lastnosti ima množica $M = \{x, p(x) \leq 1\}$.

1.11 IZREK Naj bo p hilbertska polnorma v realnem ali kompleksnem linearnem vektorskem prostoru. Potem je množica $M = \{x, p(x) \leq 1\}$ H-konveksna, uravnovešena in absorbirajoča.

Dokaz. Ker je p polnorma, je množica M uravnovešena in absorbirajoča [20]. Dokažimo, da je tudi H-konveksna. Naj bo $x \in \alpha M$, $y \in \beta M$ in $\alpha, \beta \geq 0$, potem je $p(x) \leq \alpha$, $p(y) \leq \beta$ in $p(x+y) \leq \alpha+\beta$ ter $p(x-y) \leq \alpha+\beta$. Pišimo $s_o = p(x+y)$ in $t_o = p(x-y)$. Če je $s \geq s_o$ in $t \geq t_o$, je očitno $x+y \in sM$ in $x-y \in tM$. Ker je p hilbertska polnorma, dobimo še oceno

$$t_o^2+s_o^2 = p^2(x+y)+p^2(x-y) = 2(p^2(x)+p^2(y)) \leq 2(\alpha^2+\beta^2)$$

kar pomeni, da je M H-konveksna množica.

Združimo dobljene ugotovitve v izrek, ki je analogen izreku 1.4.

1.12 IZREK Linearen topološki vektorski prostor je H-lokalno konveksen natanko takrat, ko obstaja v njem baza okolic izhodišča iz H-konveksnih množic. V primeru kompleksnega prostora morajo okolice zadoščati še pogoju (1.6).

Običajno bomo imeli več kot števno naših polnorm $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, če jih je le števno, lahko namesto njih uvedemo ekvivalentno družino $\{p_i'\}_{i\in N}$, za katero velja

$$p_1'(x) \leqq p_2'(x) \leqq p_3'(x) \leqq \ldots\ldots \quad ; \ x \in X$$

Lokalno konveksen prostor s števno polnormami je pred-Fréchetov, saj lahko definiramo v njem metriko

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

Oglejmo si nekaj primerov pred-H-lokalno konveksnih prostorov.

1. Naj bo $X=L_2^{loc}(\mathbb{R})$ - prostor funkcij, ki so lokalno s kvadratom sumabilne. V tem prostoru imejmo družino polnorm $\mathcal{P} = \{p_n, \ n\in N\}$, kjer je

$$p_n(x) = \left(\int_{-n}^{n} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} \ ; \ x \in L_2^{loc}(\mathbb{R})$$

ki se izražajo z ustreznimi polskalarnimi produkti

$$(x,y)_n = \int_{-n}^{n} x(t)\bar{y}(t)\,dt$$

2. Naj bo $X = \prod_{i\in J} X_i$ - produkt predhilbertovih prostorov X_i, kjer je J neka indeksna množica. Za družino polnorm vzamemo $\mathcal{P} = \{p_i, \ i \in J\}$, kjer je

$$p_i(x) = \|x_i\|_i \ ; \ x \in (x_i)_{i\in J} \in X_i$$

3. Naj bosta X in Y poljubna lokalno konveksna prostora ter $B(\ ,\ ) : X \times Y \mapsto \mathbb{C}$ bilinearna forma. Če v prostor X vpeljemo šibko topologijo $\check{s}(X,Y)$, ki jo določa družina polnorm $\mathcal{P}=\{p_y\}_{y\in Y}$ oblike

$$p_y(x) = |B(x,y)|, \quad x \in X$$

je X pred-H-lokalno konveksen prostor. Poseben primer je, če vzamemo $Y = X'$ z naravno bilinearno formo $\langle x,x'\rangle = x'(x)$.

4. Nuklearni prostori, le-ti imajo topologijo definirano s polnormami, ki so določene preko funkcionala Minkovskega takih okolic izhodišča U, za katere obstaja okolica V in zaporedje linearnih zveznih funkcionalov $\{f_n\}$ z lastnostjo $\sum_{n=1}^{\infty} p_{V^o}(f_n) < \infty$, pri tem je V^o polara množice V. Te polnorme se izražajo s polskalarnimi produkti oblike

$$(x,y)_U = \mu(V^o)\int_{V^o}\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle d\mu$$

kjer je μ pozitivna Radonova mera (gl.[21]).

Kako iz nekega pred-H-lokalno konveksnega prostora zopet dobimo prostor takega tipa, nam bo povedal izrek, ki ga dobimo v [13].

<u>1.13 IZREK</u> 1. Vsak linearni podprostor pred-H-lokalno konveksnega prostora je zopet pred-H-lokalno konveksen.

2. Naj bo Y linearen podprostor pred-H-lokalno konveksnega prostora X, potem je kvocientni prostor X/Y zopet pred-H-lokalno konveksen .

3. Direkten produkt in direktna vsota pred-H-lokalno konveksnih prostorov je pred-H-lokalno konveksen prostor.

4. Induktivna in projektivna limita pred-H-lokalno konveksnih prostorov je pred-H-lokalno konveksen prostor.

Oglejmo si sedaj še nekaj pojmov, ki jih bomo kasneje rabili. Naj bo Γ neka delno urejena in usmerjena množica. Množico $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ imenujemo <u>posplošeno zaporedje</u>. Definicijo konvergence takega zaporedja vzemimo iz splošnega lokalno konveksnega prostora.

1.14 DEFINICIJA Posplošeno zaporedje $\{x_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ konvergira v lokalno konveksnem prostoru X k elementu $x\in X$, če za vsak $\varepsilon>0$ in poljubno polnormo $p_\alpha\in\mathcal{P}$ obstaja tak indeks $\delta_0\in\Gamma$, da velja

$$p_\alpha(x_\delta - x) < \varepsilon$$

za vsak indeks $\delta\geqq\delta_0$. Podobno rečemo, da je posplošeno zaporedje $\{x_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ Cauchyjevo, če za poljuben $\varepsilon>0$ in poljubno polnormo $p_\alpha\in\mathcal{P}$ obstaja tak indeks $\delta_0\in\Gamma$, da velja

$$p_\alpha(x_{\delta_1} - x_{\delta_2}) < \varepsilon$$

za poljubna indeksa $\delta_1,\delta_2\geqq\delta_0$.

Vsako konvergentno zaporedje je očitno Cauchyjevo. Lokalno konveksen prostor imenujemo poln, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v njem konvergentno.

1.15 DEFINICIJA Poln pred-H-lokalno konveksen prostor imenujemo H-lokalno konveksen prostor.

Ker v splošnem za neko polnormo $p_\alpha\in\mathcal{P}$ velja $p_\alpha(x)=0$ tudi za nekatere neničelne elemente $x\in X$, definirajmo množico

$$J_\alpha = \{x\in X,\ p_\alpha(x) = 0\}$$

Imenujmo jo množica izotropnih elementov polnorme $p_\alpha\in\mathcal{P}$. Dokažimo nekaj lastnosti teh množic.

1.16 TRDITEV Če je družina polnorm $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ zadostna, velja

$$\bigcap_{\alpha\in\Delta} J_\alpha = \{0\}$$

Dokaz je trivialen.

<u>1.17 LEMA</u> Za poljubna elementa $x \in X$ in $y \in J_\alpha$ velja

$$p_\alpha(x) = p_\alpha(x - y)$$

<u>Dokaz</u>. Če je $x \in X$ in $y \in J_\alpha$, je $p_\alpha(x-y) \leqq p_\alpha(x)+p_\alpha(y) = p_\alpha(x)$ in še obratno $p_\alpha(x-y) \geqq |p_\alpha(x)-p_\alpha(y)| = |p_\alpha(x)| = p_\alpha(x)$.

<u>1.18 TRDITEV</u> Izotropne množice J_α so zaprti podprostori v X.

<u>Dokaz</u>. Če je $x,y \in J_\alpha$ in $\lambda,\mu \in R$, je $p_\alpha(\lambda x+\mu y) \leqq |\lambda| p_\alpha(x)+ |\mu| p_\alpha(y) = 0$, torej $\lambda x+\mu y \in J_\alpha$. Naj bo $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ posplošeno zaporedje iz J_α, ki konvergira proti nekemu elementu $x \in X$. To pomeni: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $\gamma_0 \in \Gamma$, da velja $p_\alpha(x_\gamma-x) < \varepsilon$ za vsak $\gamma \geqq \gamma_0$. Upoštevajmo še prejšnjo lemo in dobimo

$$p_\alpha(x) = p_\alpha(x_\gamma-x) < \varepsilon$$

za vsak $\gamma \geqq \gamma_0$. Ker lahko izberemo ε poljubno majhen, dobimo $p_\alpha(x) = 0$ ali $x \in J_\alpha$.

<u>1.19 LEMA</u> Če za indeksa $\alpha,\beta \in \Delta$ velja $\alpha \leqq \beta$, potem za ustrezni izotropni množici velja $J_\beta \subset J_\alpha$.

<u>Dokaz</u>. Če je $x \in J_\beta$, je $p_\beta(x) = 0$, ker pa je $p_\alpha(x) \leqq p_\beta(x)$, je tudi $p_\alpha(x) = 0$ ali $x \in J_\alpha$.

Imejmo torej zadosten, delno urejen in usmerjen sistem hilbertskih polnorm $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, ki določa topologijo H-lokalno konveksnega prostora X. Za vsak $\alpha \in \Delta$ je kvocientni prostor $X_\alpha = X/J_\alpha$ predhilbertov, saj imamo v njem pravi skalarni produkt

$$\langle \xi_\alpha, \eta_\alpha \rangle = (x,y)_\alpha$$

za $\xi_\alpha = (x+J_\alpha) \in X_\alpha$ in $\eta_\alpha = (y+J_\alpha) \in X_\alpha$. Popolnitev prostora X_α

naj bo Y_α, ki je potem Hilbertov prostor. Če naredimo iz prostorov Y_α projektivno limito in direkten produkt, lahko dokažemo zanju naslednji izrek (gl.[13]).

<u>1.20 IZREK</u> 1. Pred-H-lokalno konveksen prostor X je izomorfen nekemu podprostoru direktnega produkta Hilbertovih prostorov

$$X \approx \hat{Y} \subset \prod_{\alpha \in \Delta} Y_\alpha$$

Prostor X je poln natanko tedaj, ko je $\hat{Y}$ zaprt.

2. Pred-H-lokalno konveksen prostor X je izomorfen nekemu gostemu linearnemu podprostoru projektivne limite Hilbertovih prostorov

$$X \approx \hat{Z} \subset \lim_{\alpha \in \Delta} \operatorname{proj} Y_\alpha$$

H-lokalno konveksen prostor je izomorfen projektivni limiti Hilbertovih prostorov.

Lokalno konveksne prostore in v posebnem tudi H-lokalno konveksne prostore lahko obravnavamo še na en način in sicer, da jih smatramo kot topološke vektorske prostore normirane nad nekim topološkim polobsegom. Oglejmo si le osnovne ideje v tej smeri. Zapišimo najprej definicijo topološkega polobsega, ki so ga uvedli M.J. Antonovski, V.G. Boltjanski in T.A. Sarimsakov v [2].

<u>1.21 DEFINICIJA</u> Množica G je topološki polobseg, če zanjo velja

I. G je topološki kolobar

II. v njem je definirana množica K z lastnostmi

1) $K + \bar{K} \subset K, \quad K.K \subset K$

2) $K - \bar{K} = G$

3) če je $M \subset \bar{K}$ taka množica, da velja $\bigcap_{x \in M} (\bar{K}+x) \neq \emptyset$, potem obstaja element $\bar{y} \in \bar{K}$ z lastnostjo $\bigcap_{x \in M}(\bar{K}+x) = \bar{K}+\bar{y}$

4) če je $\alpha, \beta \in K$, ima enačba $\alpha x = \beta$ vsaj eno rešitev v $\bar{K}$.

5) $\bar{K} \cap (-\bar{K}) = \{0\}$

6) če je $F_\alpha = \{x \in G, \alpha x \in \bar{K}\}$, potem družina $\{\beta + F_\alpha\}_{\alpha, \beta \in G}$ tvori bazni sistem zaprtih množic topologije v G.

Zgoraj smo s $\bar{K}$ označili zaprtje množice K.

Če je $y-x \in K$, pišemo $x < y$ in $x \leq y$, če je $y-x \in \bar{K}$. Eden osnovnih primerov topološkega polobsega je naslednji: naj bo Δ poljubna množica in R_Δ množica realnih funkcij na Δ. V R_Δ vpeljimo običajni operaciji množenja s skalarjem in seštevanje. Označimo s K_Δ množico pozitivnih funkcij v R_Δ. Če vpeljemo še šibko topologijo, je R_Δ topološki polobseg, ki ga imenujejo tudi Tihonov polobseg. Da se dokazati izrek, da je poljuben topološki polobseg povsod gosta podmnožica nekega Tihonovega polobsega ([1]).

Nadaljujmo še z nekaj definicijami. Množica X je <u>linearen vektorski prostor nad topološkim polobsegom G</u>, če je X topološki prostor, v katerem je definirana vsota elementov, glede na katero je X komutativna grupa, produkt elementov množice X s skalarji iz polobsega G z lastnostmi: $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$, $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, $1.x=x$, kjer je $x,y \in X$, $\lambda, \mu, 1 \in G$ in sta zgornji operaciji zvezni preslikavi. Množica X je <u>normiran vektorski prostor nad topološkim polobsegom G</u>, če je X linearen vektorski prostor nad nekim podpolobsegom $G' \subset G$ in , če za vsak $x \in X$ obstaja $\|x\| \in \bar{K} \subset G$ z lastnostmi: $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x=0$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pri čemer je $|\lambda| = (\lambda^+) + (\lambda^-)$ vsota pozitivnega in negativnega dela elementa $\lambda \in G$.

Z zgoraj vpeljanimi pojmi lahko sedaj formuliramo izrek ([2])

1.22 IZREK Realen Hausdorffov lokalno konveksen vektorski prostor lahko smatramo kot normiran vektorski prostor nad nekim Tihonovim polobsegom.

Podobno lahko definiramo predhilbertov prostor nad topološkim polobsegom, rekli mu bomo H^{Δ}- prostor. Skalarje vzamemo iz običajnega obsega realnih števil $\mathbb{R}$, vrednost skalarnega produkta pa naj bo iz Tihonovega polobsega R_{Δ}. Natančneje: linearni vektorski prostor nad realnimi števili je H^{Δ}-prostor, če vsakemu paru njegovih elementov x,y ustreza element $(x,y) \in R_{\Delta}$ z lastnostmi

1) $(x,x) \geqq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x=0$

2) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

3) $(x+z,y) = (x,y) + (z,y)$

V [7] je bil dokazan izrek, da je vsak lokalno konveksen prostor, ki je izomorfen projektivni limiti Hilbertovih prostorov, H^{Δ}-prostor. Ker vemo iz izreka 1.20, da je vsak H-lokalno konveksen prostor ravno izomorfen projektivni limiti Hilbertovih prostorov, lahko zapišemo naslednji izrek, ki je analogen zgornjemu

1.23 IZREK H-lokalno konveksen prostor je H^{Δ}-prostor nad nekim Tihonovim polobsegom R_{Δ}.

Povrnimo se k našemu H-lokalno konveksnemu prostoru X. Če vzamemo poljuben element $x \in X$, potem je za posamezno polnormo $p_{\alpha}(x) < \infty$, vendar se lahko zgodi, da množica $\{p_{\alpha}(x), \alpha \in \Delta\}$ ni omejena. Definirajmo množico

$$E = \{x \in X, \sup_{\alpha \in \Delta} p_\alpha(x) < \infty\} \tag{1.7}$$

1.24 TRDITEV Množica E je linearen podprostor v X.

Ta trditev sledi neposredno iz ocene

$$p_\alpha(\lambda x + \mu y) \leqq |\lambda|\, p_\alpha(x) + |\mu|\, p_\alpha(y)$$

Za vsak $x \in E$ lahko definiramo s predpisom

$$\|x\| = \sup_{\alpha \in \Delta} p_\alpha(x) = \lim_{\alpha \in \Delta} p_\alpha(x)$$

pravo normo na E. Očitno je namreč tudi $\|\cdot\|$ polnorma, poleg tega pa iz $0 = \|x\| = \sup_{\alpha \in \Delta} p_\alpha(x)$ sledi $p_\alpha(x) = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$, kar pomeni $x=0$. Ker velja pri izbranih $x,y \in E$ za vsako polnormo $p_\alpha \in \mathcal{P}$ paralelogramsko pravilo (1.2), velja tudi za normo taka enačba

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

To pomeni, da lahko definiramo na podprostoru E pravi skalarni produkt

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] \tag{1.8}$$

Torej lahko zapišemo

1.25 TRDITEV Množica E je s skalarnim produktom (1.8) predhilbertov prostor.

Vzemimo $x,y \in E$, potem imamo zanju definiran skalarni produkt $\langle x,y\rangle$ in polskalarne produkte $(x,y)_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Vprašajmo se, kakšna je zveza med njimi.

1.26 TRDITEV Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in $x,y \in E$, potem za vsak $\varepsilon > o$ obstaja tak indeks $\alpha_o \in \Delta$, da velja

$$|(x,y)_\alpha - \langle x,y\rangle| < \varepsilon$$

za vsak $\alpha \geqq \alpha_o$.

Dokaz. Ker je E podprostor, so vsi elementi $x+y$, $x-y$, $x+iy$ in $x-iy$ tudi iz E. Ker je $\|x+y\| = \sup_{\alpha \in \Delta} p_\alpha(x+y)$, za vsak $\varepsilon > o$ lahko dobimo tak indeks $\alpha_1 \in \Delta$, da bo

$$p^2_{\alpha_1}(x+y) \geqq \|x+y\|^2 - \varepsilon$$

Podobno dobimo tudi indekse α_2, α_3 in $\alpha_4 \in \Delta$, da bo

$$p^2_{\alpha_2}(x-y) \geqq \|x-y\|^2 - \varepsilon$$

$$p^2_{\alpha_3}(x+iy) \geqq \|x+iy\|^2 - \varepsilon$$

$$p^2_{\alpha_4}(x-iy) \geqq \|x-iy\|^2 - \varepsilon$$

Naj bo α_o skupni naslednik indeksom α_1, α_2, α_3 in α_4 (le-ta obstaja, ker je Δ usmerjena množica), potem dobimo

$$4|(x,y)_\alpha - \langle x,y\rangle| = \Big|\left[p^2_\alpha(x+y)-\|x+y\|^2\right] - \left[p^2_\alpha(x-y)-\|x-y\|^2\right] + $$
$$+ i\left[p^2_\alpha(x+iy)-\|x+iy\|^2\right] - i\left[p^2_\alpha(x-iy)-\|x-iy\|^2\right]\Big| \leqq 4\varepsilon^2$$

za vse $\alpha \geqq \alpha_o$, kajti velja

$$\|x+y\|^2-p^2_\alpha(x+y) \leqq \|x+y\|^2-p^2_{\alpha_o}(x+y) \leqq \|x+y\|^2-p^2_{\alpha_1}(x+y) \leqq \varepsilon$$

in podobno tudi pri ostalih razlikah.

Včasih bomo predpostavili, da je podprostor E gost v X, zato zapišimo definicijo, ki jo bomo kdaj pa kdaj rabili:

1.27 DEFINICIJA Podprostor Y je gost v H-lokalno konveksnem prostoru X, če pri izbranem elementu $x \in X$ za vsak $\varepsilon > o$ in za vsako končno množico indeksov $\Delta_F \subset \Delta$ obstaja element $x' \in Y$, da velja

$$p_\alpha(x-x') < \varepsilon$$

za vse $\alpha \in \Delta_F$.

V primeru $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$ je podprostor $E = L_2(\mathbb{R})$ gost podprostor, v kar se ni težko prepričati.

2. ORTOGONALNI ELEMENTI

Vprašajmo se, ali se da na smiselen način vpeljati v naš H-lokalno konveksen prostor pojem pravokotnosti.

Če je $(x,y)_\alpha = 0$ za neki $\alpha\in\Delta$, potem za ostale polskalarne produkte $(x,y)_\beta$, $\beta\neq\alpha$ to ni več nujno res. Za ilustracijo vzemimo primer $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$, $\Delta = N$ in elementa $x(t) = 1$, $y(t) = \cos\frac{\pi}{2}t$ Očitno je $x,y\in L_2^{loc}(\mathbb{R})$ in velja

$$(x,y)_n = \int_{-n}^{n} 1.\cos\tfrac{\pi}{2}t\, dt = \tfrac{4}{\pi}\sin\tfrac{\pi}{2}n = \begin{cases} 4/\pi & , n=1,5,\dots \\ 0 & , n=2,4,6,\dots \\ -4/\pi & , n=3,7,\dots. \end{cases}$$

Pojem ortogonalnosti bomo poskusili vpeljati na več načinov.

2.1 DEFINICIJA Elementa $x,y\in X$ sta

a) ortogonalna glede na neki polskalarni produkt $(\ ,\ )_\alpha$ natanko tedaj, ko velja

$$(x,y)_\alpha = 0 \tag{2.1}$$

kar označimo: $x \perp^\alpha y$,

b) ortogonalna glede na vse polskalarne produkte natanko tedaj, ko velja

$$(x,y)_\alpha = 0 \text{ , za vse } \alpha\in\Delta \tag{2.2}$$

kar zapišemo $x \perp\!\!\perp y$,

c) ortogonalna glede na dovolj pozne polskalarne produkte natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak $\alpha_0\in\Delta$, da velja

$$|(x,y)_\alpha| < \varepsilon \text{ , za vse } \alpha \geq \alpha_0 \tag{2.3}$$

in zapišemo: $x\perp y$.

Očitno so vse relacije $\perp^\alpha$, $\perp\!\!\perp$ in $\perp$ simetrične. Nekoliko več si bomo ogledali zadnji dve ortogonalnosti.

2.2 TRDITEV Za poljuben $x \in X$ velja: $x \perp\!\!\perp x$ kot tudi $x \perp x$ natanko tedaj, ko je $x = 0$.

Dokaz. Če je $x=0$, je očitno $x \perp\!\!\perp x$ in $x \perp x$. Naj bo narobe $x \perp\!\!\perp x$, potem je $(x,x)_\alpha = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$ in zaradi zadostnosti polnorm $\mathcal{P}$ je $x=0$. Vzemimo še primer, da je $x \perp x$, se pravi za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\alpha_0 \in \Delta$ z lastnostjo

$$(x,x)_\alpha = p_\alpha^2(x) < \varepsilon \quad , \text{ za } \alpha \geqq \alpha_0$$

Vzemimo še poljubno drugo polnormo p_β. Ker so polnorme $\mathcal{P}$ usmerjene, obstaja za p_{α_0} in p_β skupna naslednica p_{α_1} z lastnostjo

$$p_{\alpha_0}(x) \leqq p_{\alpha_1}(x) \quad , \quad p_\beta(x) \leqq p_{\alpha_1}(x)$$

Toda zaradi $\alpha_1 \geqq \alpha_0$, je $p_{\alpha_1}(x) < \varepsilon$ in dobimo, da je tudi $p_\beta(x) < \varepsilon$. Ker je bil $\beta \in \Delta$ poljuben, pomeni

$$p_\beta(x) < \varepsilon \quad , \text{ za vsak } \beta \in \Delta$$

in ker $\varepsilon > 0$ lahko izberemo poljubno majhen, dobimo $p_\beta(x) = 0$ za vsak $\beta \in \Delta$, kar pomeni $x=0$.

2.3 TRDITEV Vektor $x \in X$ je ortogonalen v smislu b) ali c) v definiciji 2.1 na vsak vektor prostora X natanko tedaj, ko je ničelni vektor.

Dokaz. Če je $x=0$, je očitno $0 \perp\!\!\perp y$ kot tudi $0 \perp y$ za vsak $y \in X$. Če je $x \perp\!\!\perp y$ ali $x \perp y$ za vsak $y \in X$, je v posebnem tudi $x \perp\!\!\perp x$ ali $x \perp x$, kar po prejšnji trditvi pomeni $x=0$.

Vzemimo poljubno množico $M \subset X$ in označimo množice

$$M_\alpha^\perp = \{ x \in X \; ; \; x \perp^\alpha y \; , \text{ za vsak } y \in M \}$$

$$M^{\perp\!\!\perp} = \{ x \in X \; ; \; x \perp\!\!\perp y \; , \text{ za vsak } y \in M \}$$

$$M^{\perp} = \{ x \in X \ ; \ x \perp y \ , \text{ za vsak } y \in M \}$$

Očitno velja med njimi naslednja zveza

$$\bigcap_{\alpha \in A} M_{\alpha}^{\perp} = M^{\perp\!\!\perp} \subset M^{\perp} \tag{2.4}$$

Oglejmo si nekaj lastnosti zgornjih množic, ki jim bomo tudi rekli ortogonalni komplementi množice M.

2.4 TRDITEV Naj bo X H-lokalno konveksen prostor, potem veljajo naslednje lastnosti:

1) če je $x \in X$ ortogonalen v smislu b) (v smisli c)) na elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$, potem je ortogonalen v ustreznem smislu tudi na vektor $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$,

2) če posplošeno zaporedje $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ konvergira k $x \in X$ in so vsi x_γ ortogonalni v smislu b) (v smislu c)) na neki element $y \in X$, potem je tudi limitni vektor x ortogonalen v ustreznem smislu na vektor $y \in X$,

3) če je M poljubna množica v X, potem sta $M^{\perp}$ in $M^{\perp\!\!\perp}$ zaprta linearna podprostora prostora X in velja

$$M^{\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} \ , \quad M^{\perp\!\!\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp\!\!\perp}$$

kjer je $\mathcal{L}(M)$ linearna ogrinjača množice M.

Dokaz. 1) Naj bo $x \perp y_1, y_2, \ldots , y_n$, potem za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tak skupni indeks α_0, da bo veljalo $|(x,y_i)_\alpha| < \varepsilon$, za vse $\alpha \geq \alpha_0$ in $i=1,2,\ldots,n$. Tedaj dobimo

$$|(x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i)_\alpha| = |\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i (x,y_i)_\alpha| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Prav podobno premislimo tudi za pravokotnost v smislu b).

2) Ker posplošeno zaporedje $\{x_\gamma\}$ konvergira k $x \in X$, obsta-

ja za vsak $\varepsilon > 0$ in $\alpha \in \Delta$ tak $\delta_0 \in \Gamma$, da velja: $p_\alpha(x_\delta - x) < \varepsilon$, za vse $\delta \geq \delta_0$. Za poljuben $\delta \geq \delta_0$ tedaj velja

$$|(x,y)_\alpha| \leq |(x-x_\delta, y)_\alpha| + |(x_\delta, y)_\alpha| \leq p_\alpha(y)\varepsilon + |(x_\delta, y)_\alpha|$$

Če je sedaj $x_\delta \perp\!\!\perp y$ za vsak $\delta \in \Gamma$, je zadnji člen enak nič in velja

$$|(x,y)_\alpha| \leq \varepsilon\, p_\alpha(y)$$

za vsak $\alpha \in \Delta$, ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je $(x,y)_\alpha = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$. Če pa je $x_\delta \perp y$ za vsak $\delta \in \Gamma$, lahko najdemo tak $\alpha_0 \in \Delta$, da bo tudi zadnji člen v zgornji oceni pod ε in imamo

$$|(x,y)_\alpha| \leq \varepsilon(p_\alpha(y) + 1)$$

za vsak $\alpha \geq \alpha_0$, kar pomeni ravno $x \perp y$.

3) Dokažimo zadnjo lastnost najprej za $M^\perp$. Naj bosta torej $x,y \in M^\perp$, to pomeni: za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata $\alpha_0 \in \Delta$ in $\alpha_1 \in \Delta$, da velja

$$|(x,z)_\alpha| < \varepsilon\,, \text{ za } \alpha \geq \alpha_0 \text{ in } |(y,z)_\alpha| < \varepsilon\,, \text{ za } \alpha \geq \alpha_1$$

za vsak $z \in M$. Naj bo α_2 skupni naslednik k α_0 in α_1, potem dobimo

$$|(\lambda x + \mu y, z)_\alpha| \leq |\lambda||(x,z)_\alpha| + |\mu||(y,z)_\alpha| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

za vsak $\alpha \geq \alpha_2$ in vsak $z \in M$. Torej je $\lambda x + \mu y \in M^\perp$. Če sta $x,y \in M^{\perp\!\!\perp}$, sta v zgornji oceni oba izraza na desni enaka nič za vsak $\alpha \in \Delta$, torej $\lambda x + \mu y \in M^{\perp\!\!\perp}$. Ker je $M \subset \overline{\mathcal{L}(M)}$, velja očitno $M^\perp \supset \overline{\mathcal{L}(M)}^\perp$ kot tudi $M^{\perp\!\!\perp} \supset \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp\!\!\perp}$. Naj bo $x \in M^\perp$ in $y \in M^{\perp\!\!\perp}$, potem je po lastnosti 1) $x \perp \mathcal{L}(M)$ in $y \perp\!\!\perp \mathcal{L}(M)$ ter po trditvi 2) tudi $x \perp \overline{\mathcal{L}(M)}$ in $y \perp\!\!\perp \overline{\mathcal{L}(M)}$, s čimer smo dokazali še obratni inkluziji.

2.5 TRDITEV Naj bo M poljubna množica v X, ki vsebuje vektor $x=0$. Potem za ustrezni ortogonalno komplementarni množici $M^{\perp\perp}$ in $M^{\perp}$ velja

$$M \cap M^{\perp} = M \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$$

Dokaz. Naj bo $x \in M \cap M^{\perp}$, ker je $x \in M^{\perp}$ je $x \perp y$ za vsak $y \in M$. Posebej za $y=x$ dobimo $x \perp x$ in po trditvi 2.2 dobimo $x=0$. Na prav enak način dokažemo trditev tudi za množico $M \cap M^{\perp\perp}$.

2.6 TRDITEV Naj bo M poljubna množica in $M_\alpha^{\perp}$ njen ortogonalni komplement glede na indeks $\alpha \in \Delta$. Potem veljata inkluziji

$$M \cap M_\alpha^{\perp} \subset J_\alpha \ ; \quad J_\alpha \subset M_\alpha^{\perp}$$

Dokaz. Če je $x \in M \cap M_\alpha^{\perp}$, je $(x,y)_\alpha = 0$ za vsak $y \in M$. Posebej za $y=x$ dobimo $(x,x)_\alpha = 0$ ali $x \in J_\alpha$. Druga inkluzija je še očitnejša.

Preden se bomo lotili vprašanja o možnosti razcepa poljubnega elementa na del, ki pripada nekemu podprostoru X_1 in na del, ki pripada njegovemu ortogonalnemu komplementu, dokažimo še naslednji pomožni izrek:

2.7 LEMA Naj bo X H-lokalno konveksen prostor, katerega topologijo določa števen sistem polnorm $\{p_\alpha\}$, M konveksna množica in $\alpha \in \Delta$ tak indeks, da je M v faktorskem prostoru $X_\alpha = X/J_\alpha$ zaprta in velja $M \cap J_\alpha = \emptyset$. Če definiramo razdaljo od izhodišča do množice M s predpisom

$$d = \inf_{x \in M} p_\alpha(x)$$

obstaja v množici M element x_0, na katerem je ta razdalja dosežena.

Dokaz. Naj bo J_α izotropna množica polnorme p_α. Potem imamo v faktorskem prostoru $X_\alpha = X/J_\alpha$ pravo normo $\|\xi\|_\alpha = p_\alpha(x)$ za $\xi = (x+J_\alpha)$ iz X_α. Ker je po predpostavki polnorm $\{p_\alpha\}$ števno, je X Fréchetov prostor in iz [8] povzamemo, da je tedaj X_α poln. Označimo s K_α naravno preslikavo $X \mapsto X_\alpha$, potem je množica $N = K_\alpha(M)$ tudi konveksna, $O_\alpha = J_\alpha \notin N$ in v X_α zaprta. Ker je prostor X_α Banachov, katerega norma zadošča paralelogramski enačbi, obstaja v množici N element ξ_0 z lastnostjo: $\|\xi_0\|_\alpha = \inf_{\xi \in N} \|\xi\|_\alpha$. Pri tem je $\xi_0 = x_0 + J_\alpha$ in $\xi = x + J_\alpha$, kjer sta x_0 in x iz množice M. Če še upoštevamo definicijo norme $\| \ \|_\alpha$, dobimo

$$p_\alpha(x_0) = \inf_{x \in M} p_\alpha(x) = d$$

kar smo želeli dokazati.

Naj opomnimo, da v primeru, ko je množica M zaprta glede na topologijo, ki jo porode polnorme $\{p_\alpha\}$ in velja $0 \notin M$, obstaja indeks $\beta \in \Delta$ z lastnostjo $M \cap J_\beta = \emptyset$. V tem primeru namreč obstaja okolica $U_\varepsilon^\beta = \{x, p_\beta(x) < \varepsilon\}$ z lastnostjo $M \cap U_\varepsilon^\beta = \emptyset$, od koder zaradi $J_\beta \subset U_\varepsilon^\beta$ že sledi naša opomba (tudi za vsak indeks $\alpha \geq \beta$).

2.8 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor s števno polnormami in M njegov linearen podprostor. Potem se element $x \in X$ da razcepiti v obliki

$$x = u + v \ ; \quad u \in M, \ v \in M_\alpha^\perp \tag{2.6}$$

glede na tak indeks $\alpha \in \Delta$, za katerega je M v faktorskem prostoru X_α zaprt podprostor in velja

$$(x \dot{+} M) \cap J_\alpha = \emptyset \tag{2.7}$$

Pri tem je razcepitev enolična do množice J_α.

Dokaz. Očitno lahko vzamemo $M \neq X$ in $x \notin M$. Množica $x + M = \{x + y,\ y \in M\}$ je tudi konveksna. Naj bo indeks $\alpha \in \Delta$ tak, da je M v faktorskem prostoru X_α zaprta množica in velja pogoj (2.7). Po prejšnji lemi obstaja tak element $v \in x+M$, na katerem je najkrajša razdalja $d = \inf_{y \in x+M} p_\alpha(y)$ dosežena

$$d = p_\alpha(v)$$

Ker je $v \in x+M$, ga lahko zapišemo v obliki $v = x + u'$, kjer je $u' \in M$. Če vzamemo $u = -u'$, velja

$$x = u + v\ ;\ u \in M,\ v \in x+M$$

Dokažimo, da je $v \in M_\alpha^\perp$. Velja: $p_\alpha(v) \leqq p_\alpha(x+w)$ za vsak $w \in M$. Ta pogoj lahko zamenjamo z ekvivalentnim

$$p_\alpha(v) \leqq p_\alpha(v+y)$$

kjer je $y \in M$, kajti lahko pišemo $x+w = v+u+w = v+y$, pri čemer je $y = u+w \in M$. Če je $y \in M$, je tudi $\lambda y \in M$ za vsako realno število λ. Torej velja neenačba

$$p_\alpha^2(v) \leqq p_\alpha^2(v+\lambda y)$$

za vsak $y \in M$, od koder po kratkem računu dobimo

$$0 \leqq 2\lambda \operatorname{Re}(v,y)_\alpha + \lambda^2 p_\alpha^2(y)$$

za vsak $\lambda \in R$. Ta neenačba je za vsak realen λ izpolnjena le v primeru

$$\operatorname{Re}\ (v,y)_\alpha = 0$$

Z zamenjavo elementa y z iy dobimo na prav tak način tudi: $\operatorname{Im}\ (v,y)_\alpha = 0$, kar pomeni:

$$(v,y)_\alpha = 0 \tag{2.8}$$

za vsak $y \in M$. Torej je res $v \in M_\alpha^\perp$.

Oglejmo si še kako je z enoličnostjo zgornjega razcepa. Vzemimo, da imamo še razcep

$$x = u' + v' \quad ; \; u' \in M, \; v' \in M_\alpha^\perp$$

potem skupaj z (2.6) dobimo

$$0 = u - u' + v - v'$$

od koder sledi

$$0 = p_\alpha^2(u-u') + p_\alpha^2(v-v') \qquad (2.9)$$

oziroma $p_\alpha(u-u') = 0$ in $p_\alpha(v-v') = 0$, kar pomeni $u-u' \in J_\alpha$, $v-v' \in J_\alpha$.

Zgornji izrek velja za posamezni element $x \in X$ in podprostor M. Če vzamemo drug element $y \in X$, dobimo v splošnem drug indeks $\beta \in \Delta$. V posebnih primerih pa vseeno dobimo lahko za vse elemente prostora X isti indeks $\alpha \in \Delta$, za katerega velja razcep (2.6).

<u>2.9 IZREK</u> Naj bo M linearen podprostor v H-lokalno konveksnem prostoru X s števno polnormami in $\alpha \in \Delta$ tak indeks, da je M v faktorskem prostoru X_α zaprt in velja

$$J_\alpha \subset M$$

Potem velja za vsak $x \in X$ razcep

$$x = u + v \; ; \; u \in M, \; v \in M_\alpha^\perp$$

enolično do množice J_α.

<u>Dokaz</u>. Vzemimo najprej $x \in M^c$, potem velja za zgornji indeks

$$(x + M) \cap J_\alpha = \emptyset$$

Najti, če bi bil $z = x + y$, $y \in M$ in $z \in J_\alpha \subset M$, bi to pomenilo $x = z - y \in M$. Po prejšnjem izreku lahko zapišemo do množice J_α enoličen razcep

$$x = u + v \quad ; u \in M, \ v \in M_\alpha^\perp$$

Če je $x \in M$, ga lahko zapišemo

$$x = x + 0 \quad ; x \in M, \ 0 \in M_\alpha^\perp$$

Tudi v tem primeru velja enoličnost do množice J_α. Če bi namreč imeli še en zapis $x = y + v$; $x,y \in M$, $v \in M_\alpha^\perp$, bi to pomenilo: $(x,v)_\alpha = (y,v)_\alpha + (v,v)_\alpha = p_\alpha^2(v)$, torej $v \in J_\alpha$ in $y-x \in J_\alpha$.

2.10 DISKUSIJA Če velja za neki $x \in X$ in podprostor M pogoj (2.7) pri nekem indeksu $\alpha \in \Delta$, velja tak pogoj tudi za vsak $\beta \geqq \alpha$, kar sledi iz inkluzije $J_\beta \subset J_\alpha$. Dobimo torej razcep oblike (2.6) tudi za vsak indeks $\beta \geqq \alpha$, vendar dobimo v splošnem drugi minimizirajoči element $v_\beta \in M_\beta^\perp$ in s tem tudi $u_\beta \in M$.

Vzemimo primer $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$, $x(t) = t^2$ in $M = \{f \in X, \ f(t)=a+bt, \ a,b \in \mathbb{R}\}$. Očitno je za vsak indeks $\alpha = n \in \mathbb{N}: (x + M) \cap J_\alpha = \emptyset$ in kaj hitro se lahko prepričamo, da je minimizirajoči element

$$v_n(t) = -n^2/3 + t^2$$

Torej imamo razcep

$$t^2 = n^2/3 + (-n^2/3 + t^2)$$

kjer je $n^2/3 \in M$ in $(-n^2/3 + t^2) \in M_n^\perp$. Če vzamemo še indeks $\beta = m > n$, dobimo

$$t^2 = m^2/3 + (-m^2/3 + t^2)$$

kar je povsem drug razcep.

V splošnem se torej ne da dobiti razcepa $x = u + v$, kjer bi bil $u \in M$ in $v \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} M_\alpha^\perp = M^{\perp\perp}$. Če hočemo dobiti tak razcep, moramo od podprostora M zahtevati še eno lastnost, ki jo je uvedel tudi T. Precupanu v [13].

2.11 DEFINICIJA Množica M iz H-lokalno konveksnega prostora X ima lastnost H glede na družino hilbertskih polnorm $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, če obstaja posplošeno zaporedje $\{y_\delta\}_{\delta \in \Gamma} \subset M$ z lastnostjo

$$\lim_{\delta \in \Gamma} p_\alpha(y_\delta) = \inf_{y \in M} p_\alpha(y), \text{ za vsak } \alpha \in \Delta$$

Če ima množica $x + M$ lastnost H, potem imamo eno samo zaporedje $\{y_\delta\}_{\delta \in \Gamma}$, ki v vseh polnormah p_α konvergira proti elementu $v \in x + M$. Minimizirajoči element, ki nastopa v lemi 2.7, je tedaj isti za vse $\alpha \in \Delta$. Torej lahko zapišemo izrek

2.12 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in M zaprt podprostor v njem. Če ima za dani element $x \in X$ množica $x + M$ lastnost H, obstaja enolična razcepitev

$$x = u + v \; ; \; u \in M, \quad v \in M^{\perp\perp}$$

Dokaz. Lastnost množice $x + M$ nam zagotavlja minimizirajoči element $v \in x + M$, ki je isti za vse indekse $\alpha \in \Delta$. Sedaj na isti način kot v dokazu izreka 2.8 ugotovimo $v \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} M_\alpha^\perp = M^{\perp\perp}$ in imamo

$$x = u + v \; ; \; u \in M, \quad v \in M^{\perp\perp}$$

Dokazati moramo le še enoličnost razcepa. Če bi imeli še eno razcepitev $x = u' + v'$, $v' \in M^{\perp\perp}$, bi iz relacije (2.9) dobili $p_\alpha(u-u') = 0 = p_\alpha(v-v')$ za vsak $\alpha \in \Delta$, kar pomeni $u=u'$ in $v=v'$.

2.13 KOROLAR Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in M njegov zaprt podprostor. Potem velja

$$X = M \oplus M^{\perp}$$

natanko tedaj, ko ima množica $x + M$ za vsak $x \in X$ lastnost H.

Če vzamemo tak zaprt podprostor M, da ima množica $x + M$ za za vsak vektor $x \in X$ lastnost H, imamo enolično razcepitev $x = u + v$; $u \in M$, $v \in M^{\perp}$ in lahko definiramo operatorja

$$P_M : X \mapsto M, \quad P_{M^{\perp}} : X \mapsto M^{\perp}$$

s predpisom $P_M x = u$, $P_{M^{\perp}} x = v$. Očitno je $P_M x = x$ za vsak $x \in M$.

<u>2.14 TRDITEV</u> Operator $P = P_M$ (kot tudi $P = P_{M^{\perp}}$) ima lastnosti:

1) $P^2 = P$

2) $(Px,y)_{\alpha} = (x,Py)_{\alpha}$

za vsak $\alpha \in \Delta$ in poljubna elementa $x,y \in X$.

<u>Dokaz</u>. Naj bo $P = P_M$ in x poljuben element iz X. Potem je $Px \in M$ in velja $P^2x = P(Px) = x$. Za poljubna elementa $x,y \in X$ imamo razcepa

$$x = P_M x + P_{M^{\perp}} x \quad , \quad y = P_M y + P_{M^{\perp}} y$$

in pri poljubnem indeksu $\alpha \in \Delta$ lahko zapišemo

$$(P_M x,y)_{\alpha} = (P_M x,P_M y + P_{M^{\perp}} y)_{\alpha} = (P_M x,P_M y)_{\alpha} =$$
$$= (P_M x + P_{M^{\perp}} x,P_M y)_{\alpha} = (x,P_M y)_{\alpha}$$

Prav podobno dokažemo izrek tudi za operator $P = P_{M^{\perp}}$. Operator, ki ima zgornji dve lastnosti, bomo imenovali <u>projektor</u>.

3. LINEARNI FUNKCIONALI

Linearen funkcional, ki deluje na našem H-lokalno konveksnem prostoru X, je linearna preslikava $f : X \mapsto \mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$). Za zveznost takega funkcionala vzemimo definicijo iz splošnih lokalno konveksnih prostorov.

3.1 DEFINICIJA Linearen funkcional f, ki deluje na H-lokalno konveksnem prostoru X, je zvezen, če obstaja tak indeks $\gamma \in \Delta$ in število $c > 0$, da velja ocena

$$|f(x)| \leqq c\, p_{\gamma}(x) \qquad (3.1)$$

za vsak $x \in X$, kjer je polnorma p_{γ} iz družine $\mathcal{G}$.

Množico zveznih funkcionalov na prostoru X bomo označevali kot običajno z X'.

Za zvezen linearen funkcional v H-lokalno konveksnem prostoru bomo dokazali naslednjo posplošitev znanega Rieszovega izreka:

3.2 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor s števno polnormami in f zvezen linearen funkcional v njem. Potem za vsak indeks $\alpha \geqq \gamma$ obstaja tak vektor $y_{\alpha} \in X$, da velja zapis

$$f(x) = (x, y_{\alpha})_{\alpha}$$

kjer je $\gamma \in \Delta$ indeks iz pogoja zveznosti funkcionala f v (3.1). Element y_{α} je enolično določen do množice J_{α}.

Velja tudi obratno: linearen funkcional oblike $g(x) = (x, y)_{\alpha}$ je pri izbranem $\alpha \in \Delta$ in $y \in X$ zvezen.

Dokaz. Naj bo $N = \{x \in X,\ f(x) = 0\}$; to je linearen podprostor, ki je zaprt v faktorskem prostoru X_γ, kjer je γ indeks iz (3.1). Res, naj bo $N_\gamma = N/J_\gamma$ in $\{\xi_\delta\}_{\delta\in\Gamma} \subset N_\gamma$ posplošeno zaporedje, ki glede na normo $\| \ \|_\gamma$ konvergira k elementu $\xi \in X_\gamma$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta_0 \in \Gamma$ z lastnostjo $\|\xi_\delta - \xi\|_\gamma < \varepsilon$ za $\delta \geqq \delta_0$. Če pišemo $\xi_\delta = x_\delta + J_\gamma$ in $\xi = x + J_\gamma$, je $x_\delta \in N$ za vsak $\delta \in \Gamma$. Za $\delta \geqq \delta_0$ velja: $p_\gamma(x_\delta - x) < \varepsilon$, od koder sledi

$$|f(x)| \leqq |f(x-x_{\delta_0})| + |f(x_{\delta_0})| \leqq c\, p_\gamma(x-x_{\delta_0}) < c.\,\varepsilon$$

kjer je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen in zato $f(x) = 0$. Torej je $x \in N$ in $\xi \in N_\gamma$. Očitno je N zaprta tudi v vsakem prostoru $X_\alpha = X/J_\alpha$ za $\alpha \geqq \gamma$.

Vzemimo poljuben indeks $\alpha \geqq \gamma$, potem iz (3.1) dobimo: $|f(x)| \leqq c p_\gamma(x) \leqq c p_\alpha(x) = 0$, kar pomeni $x \in N$. Torej velja: $J_\alpha \subset N$ za vsak indeks $\alpha \geqq \gamma$. Po izreku 2.9 lahko tedaj vsak $x \in X$ razcepimo

$$x = u + v \ ; \quad u \in N, \ v \in N_\alpha^\perp$$

enolično do množice J_α. Če je $N = X$, je funkcional f trivialen in lahko vzamemo $y_\alpha = 0$. Naj bo torej $N \neq X$. Ker je $J_\alpha \subset N$, po trditvi 2.6 in izreku 2.9 lahko zapišemo

$$X = N + N_\alpha^\perp, \quad N \cap N_\alpha^\perp = J_\alpha$$

Če ne bi obstajal element $e \in N_\alpha^\perp \setminus J_\alpha$, bi bil vsak $x \in X$ oblike: $x = u + v$; $u \in N$, $v \in N_\alpha^\perp \setminus J_\alpha$, se pravi $x \in N$. Vzemimo torej element $e \in N_\alpha^\perp \setminus J_\alpha$ in poljuben $x \in X$. Če izberemo $\lambda = f(x)/f(e)$, je vektor $y = x - \lambda e \in N$. Torej velja za vektor x tudi razcep

$$x = y + \lambda e$$

kjer je $y \in N$, $e \in N_\alpha^\perp \setminus J_\alpha$ in $\lambda = f(x)/f(e)$. Pomnožimo to enačbo v skalarnem produktu $(\ , \ )_\alpha$ z vektorjem e in dobimo

$$(x,e)_\alpha = \lambda(e,e)_\alpha$$

Funkcional f ima torej obliko

$$f(x) = \lambda f(e) = (x,e)_\alpha f(e)/(e,e)_\alpha = (x,y_\alpha)_\alpha$$

kjer smo pisali $y_\alpha = e.\overline{f(e)}/(e,e)_\alpha$. Vzemimo, da imamo še zapis

$$f(x) = (x,v)_\alpha$$

potem je $(x,y_\alpha - v)_\alpha = 0$ za vsak $x \in X$, v posebnem za $x = y_\alpha - v$ dobimo: $v - y_\alpha \in J_\alpha$.

Da je funkcional $g(x) = (x,y)_\alpha$ pri izbranem $\alpha \in \Delta$ in $y \in X$ zvezen, sledi iz Cauchyjeve neenačbe

$$|g(x)| = |(x,y)_\alpha| \leqq p_\alpha(y)\, p_\alpha(x)$$

Za linearne zvezne funkcionale, ki delujejo v nekem lokalno konveksnem prostoru, velja znani Hahn-Banachov izrek, ki ga v geometrijski obliki včasih zapišemo takole ([19]):

<u>3.3 IZREK</u> Naj bo X lokalno konveksen prostor in M zaprta, konveksna in uravnovešena množica v njem. Potem obstaja za vsak element $x_0 \notin M$ linearen zvezen funkcional f z lastnostjo

$$f(x_0) > 1 \quad \text{in} \quad |f(x)| \leqq 1 \quad \text{za } x \in M$$

4. LINEARNI OPERATORJI

4.1. Zveznost operatorjev v H-lokalno konveksnih prostorih

Vzemimo naš H-lokalno konveksen prostor X in si oglejmo linearne operatorje, ki delujejo v njem. Kdaj je linearen operator $T : X \mapsto X$ v splošnem lokalno konveksnem prostoru zvezen, nam bo povedal izrek iz [20]:

4.1.1 IZREK Linearen operator $T : X \mapsto X$, kjer je X lokalno konveksen prostor, čigar topologijo definira družina polnorm $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, je zvezen natanko tedaj, ko za vsak $\alpha\in\Delta$ obstaja tak indeks $\beta\in\Delta$ in konstanta $C_\alpha > 0$, da velja

$$p_\alpha(Tx) \leq C_\alpha p_\beta(x) \tag{4.1.1}$$

za vsak $x\in X$.

Zaradi linearnosti je očitno, da je T zvezen v vsaki točki prostora X natanko tedaj, ko je zvezen v točki $x = 0$. Označimo z $\mathcal{L}(X)$ množico vseh linearnih zveznih operatorjev iz X v X, ki so definirani na vsem prostoru X. Včasih bo za operator T veljal malo ostrejši pogoj :

$$p_\alpha(Tx) \leq C_\alpha p_\alpha(x) \ , \ \alpha\in\Delta \tag{4.1.2}$$

za vsak $x\in X$. Tako bomo z $\mathcal{L}_0(X)$ označili množico operatorjev $T\in\mathcal{L}(X)$, za katere velja ocena (4.1.2). Imeli pa bomo tudi operatorje, za katere konstanta C_α ne bo odvisna od $\alpha\in\Delta$

$$p_\alpha(Tx) \leq C\ p_\alpha(x) \tag{4.1.3}$$

Množico takih operatorjev iz $\mathcal{L}(X)$ bomo označili z $\mathcal{L}_F(X)$.

Operatorjem iz $\mathcal{L}_F(X)$ bomo včasih tudi rekli Δ-končni operatorji. Kadar bomo govorili o zveznem operatorju, bomo imeli v mislih linearen operator, ki zadošča najbolj splošni zahtevi (4.1.1).

Definirajmo še zaprte operatorje in sicer analogno kot v normiranih prostorih.

4.1.2 DEFINICIJA Linearen operator $T : X \mapsto X$ je zaprt natanko tedaj, ko ima lastnost : čim imamo neko posplošeno zaporedje $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, ki konvergira k elementu $x \in X$ z lastnostjo, da tudi zaporedje $\{Tx_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ konvergira k nekemu elementu $y \in X$, potem velja

$$Tx = y$$

Naj opomnimo, da smo zgoraj zahtevali tudi konvergenco slik $\{Tx_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, ki ni treba, da v splošnem konvergira. Če je operator T zvezen, potem iz konvergence zaporedja $\{x_\gamma\}$ sledi tudi konvergenca zaporedja $\{Tx_\gamma\}$ in velja tudi zgornja zveza. Torej lahko zapišemo

4.1.3 TRDITEV Vsak zvezen operator, ki deluje V H-lokalno konveksnem prostoru, je zaprt.

Kadar imamo H-lokalno konveksen prostor s števno polnormami, torej Fréchetov prostor, v katerem so polnorme hilbertske, velja tudi obraten izrek ([19]), ki mu rečemo tudi izrek o zaprtem grafu.

4.1.4 TRDITEV Linearen operator T, ki deluje v H-lokalno konveksnem prostoru s števno polnormami, je zvezen natanko tedaj, ko je zaprt.

V lokalno konveksnem prostoru je neka množica M <u>omejene</u>, če za vsako polnormo $p_\alpha \in \mathcal{S}$ obstaja konstanta $D_\alpha \geq 0$, da velja

$$\sup_{x \in M} p_\alpha(x) \leq D_\alpha < \infty$$

Linearen operator T, ki deluje v nekem lokalno konveksnem prostoru, je <u>omejen</u>, če preslika omejene množice v omejene množice. V normiranih prostorih sta pojma zveznost operatorja in omejenost operatorja ekvivalentna. V lokalno konveksnih prostorih pa velja le, da je vsak zvezen operator tudi omejen, obratno pa ni nujno res. Tak sklep je dovoljen v tako imenovanih bornoloških prostorih (definirani so kot lokalno konveksni prostori, v katerih je vsaka konveksna in uravnovešena množica, ki ima lastnost, da absorbira poljubno omejeno množico, okolica izhodišča).

Kasneje bomo rabili kdaj pa kdaj tudi eksistenco ter zveznost inverznega operatorja, zato dokažimo naslednji pomožni izrek :

<u>4.1.5 LEMA</u> Naj bo T linearen operator z zalogo vrednosti $\mathcal{R}(T) = X$, potem je operator T^{-1} iz $\mathcal{L}(X)$ natanko tedaj, ko za vsak indeks $\alpha \in \Delta$ obstaja indeks $\beta \in \Delta$ ter konstanta $D_\alpha > 0$, da velja

$$D_\alpha p_\alpha(x) \leq p_\beta(Tx) \qquad (4.1.4)$$

za vsak element $x \in X$.

Dokaz. Naj bo operator $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, ker je $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$, za poljuben $y \in X$ obstaja element $x \in X$ z lastnostjo $Tx = y$. Ker je operator T^{-1} zvezen, velja

$$p_\alpha(T^{-1}y) \leqq C_\alpha p_\beta(y)$$

kar je ravno pogoj (4.1.4) za $D_\alpha = 1/C_\alpha$, če je le $C_\alpha > 0$. Če pa je $C_\alpha = 0$, je omenjeni pogoj izpolnjen za vsak $\beta \in \Delta$ in $D_\alpha > 0$.

Vzemimo še obratno, da velja pogoj (4.1.4) in naj bo $x \in X$ tak element, da je $Tx = 0$. Za poljuben indeks $\beta \in \Delta$ obstaja tak $\alpha \in \Delta$, da velja

$$D_\beta p_\beta(x) \leqq p_\alpha(Tx) = 0$$

Ker je $\beta \in \Delta$ poljuben in $D_\beta > 0$, je $p_\beta(x) = 0$ za vsak $\beta \in \Delta$, kar pomeni $x = 0$. Operator T^{-1} torej obstaja, je povsod definiran in ocena (4.1.4) ravno pomeni, da je tudi zvezen.

V prvem poglavju smo našli v našem H-lokalno konveksnem prostoru X predhilbertov prostor E. Čeprav predpostavimo, da je prostor X poln, še ni rečeno, da je tudi podprostor E poln v smislu metrike, ki jo inducira norma $\| \ \|$. Imamo lahko namreč zaporedje $\{x_\gamma\}$, ki je Cauchyjevo za normo $\| \ \|$ in potem tako tudi za vse polnorme p_α in tedaj konvergira glede na posamezne polnorme p_α, vendar ni rečeno, da konvergira tudi glede na normo $\| \ \|$. Zato bomo morali včasih še posebej predpostavljati tudi polnost podprostora E, ki bo tedaj Hilbertov prostor.

Vzemimo linearen zvezen operator T, ki naj ima lastnost, da podprostor E preslika nazaj v E. Množico takih operatorjev iz $\mathcal{L}(X)$ bomo označevali z $\mathcal{L}_E(X)$. Pojavi se naslednje vprašanje:

Če je linearen operator T, ki elemente iz E preslika nazaj v E, zvezen kot operator $T : X \mapsto X$ (v smislu polnorm p_α), ali je tedaj tudi zvezen kot operator iz E v E (glede na normo na E) in obratno. Delen odgovor je

4.1.6 TRDITEV Če je podprostor E poln potem je operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$ zvezen tudi v podprostoru E (glede na normo $\| \ \|$).

Dokaz. Ker je operator T zvezen, je tudi zaprt, se pravi, če imamo tako zaporedje $\{x_\delta\}$, da velja $x_\delta \to x$ in $Tx_\delta \to y$, sledi $Tx = y$. Vzemimo neko zaporedje $\{x_n\}$ iz E, za katerega velja $\|x_n - x\| \to 0$ in $\|Tx_n - y\| \to 0$. Od tod sledi konvergenca tudi v smislu polnorm p_α in ker je T zaprt v X, je $Tx = y$. Torej je operator T zaprt tudi v Hilbertovem prostoru E. Ker je $\mathcal{D}(T) = X \supset E$, je T zvezen na E.

4.2. Adjungirani operatorji

Vzemimo sedaj linearen operator $T : X \longmapsto X$ in se vprašajmo, ali se da vedno in na kakšen način zanj definirati adjungirani operator. Imamo nekako dve možnosti.

Za operator T, ki podprostor E preslika nazaj vase, lahko postavimo naslednjo definicijo :

4.2.1 DEFINICIJA Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in E Hilbertov podprostor v njem. Potem za zvezen linearen operator $T : X \longmapsto X$, ki vektorje iz E preslika nazaj v E, imenujemo a-adjungirani operator T^*, ki je definiran na podprostoru E in je v običajnem smislu adjungiran k operatorju $T|_E$ v Hilbertovem prostoru E

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad ; \ x, y \in E$$

Torej je operator T^* definiran le na podprostoru E, preslika elemente iz E nazaj v E in je tam zvezen. Nastane vprašanje, ali se ga da razširiti na ves prostor X ? Odgovor je v splošnem negativen, četudi predpostavimo, da je podprostor E gost v X, se pravi, da je T^* gosto definiran.

Vzemimo zopet primer $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$ in $E = L_2(\mathbb{R})$, ki je gost podprostor. Omejimo se na integralske operatorje v tem prostoru z nenegativnim jedrom $K(s,t) \geqq 0$. Najprej si oglejmo, kakšnim pogojem mora to jedro zadoščati, da je ustrezni operator v prostoru $L_2^{loc}(\mathbb{R})$ zvezen.

<u>4.2.2 TRDITEV</u> Integralski operator $(Tx)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)x(t)dt$ z nenegativnim jedrom $K(s,t)$, za katerega velja ocena $\int_{-n}^{n} ds \int_{-m}^{m} K(s,t)^2 dt < \infty$ za poljubna $n, m \in N = \Delta$, je zvezen natanko tedaj, ko obstaja dovolj veliko število $R > 0$ in dovolj majhno število $r > 0$, da velja

$$K(s,t) = 0 \quad \text{za } s,t \text{ z lastnostjo } |s| \leqq \frac{r}{R}|t| - r \tag{4.2.1}$$

<u>Dokaz</u>. Vzemimo $x \in L_2^{loc}(\mathbb{R})$ in izračunajmo

$$y(s) = (Tx)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)x(t)dt = \int_{-\frac{R}{r}(|s|+r)}^{\frac{R}{r}(|s|+r)} K(s,t)x(t)dt$$

Za poljuben $n \in N$ obstaja $m \in N$ z lastnostjo $\frac{R}{r}(|n|+r) \leqq m$ in imamo

$$p_n^2(Tx) \leqq \int_{-n}^{n} ds \int_{-\frac{R}{r}(|s|+r)}^{\frac{R}{r}(|s|+r)} K(s,t)^2 dt . \int_{-\frac{R}{r}(|s|+r)}^{\frac{R}{r}(|s|+r)} |x(t)|^2 dt \leqq \int_{-n}^{n} ds \int_{-m}^{m} K(s,t)^2 .$$
$$. \int_{-m}^{m} |x(t)|^2 dt = C_n p_m(x)^2$$

Torej, če velja pogoj (4.2.1), je T res zvezen. Dokažimo še obratno smer. Predpostavimo, da zgornji pogoj ni izpolnjen, se pravi za vsak še tako velik $|t|$ in še tako majhen $|s|$ obstaja realno število k in množica $M \subset \mathbb{R}_2$ z lastnostjo

$$K(s,t) \geq k > 0 \ ; \ (s,t) \in M$$

kjer je Lebesqova m_2-mera množice M pozitivna. Potem za vsak $n \in N$ in še tako velik $m \in N$ velja

$$\int_{-n}^{n} ds \int_{|t| \geq m} K(s,t)dt > 0$$

Če bi bil ustrezni operator T zvezen, bi tudi za tak indeks $n \in N$ obstajal indeks $m' \in N$ z lastnostjo

$$p_n(Tx) \leq C_n p_{m'}(x)$$

za vsak $x \in L_2^{loc}(R)$. Pri dobljenem številu $m' \in N$ si izberemo funkcijo

$$z(t) = \begin{cases} 0 & , \ |t| \leq m' \\ 1 & ; \ |t| > m' \end{cases}$$

Očitno je $z \in L_2^{loc}(R)$ in zanjo velja $p_{m'}(z) = 0$ ter po zgornji oceni tudi $p_n(Tz) = 0$. Če to vrednost izračunamo direktno, dobimo

$$p_n(Tz)^2 = \int_{-n}^{n} ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)z(t)dt \geq \int_{-h}^{n} ds \int_{|t| \geq m'} K(s,t)dt > 0$$

kot smo ugotovili zgoraj, čeprav je indeks m' še tako velik. Torej operator T ni zvezen.

Vzemimo sedaj zvezen operator T, ki preslika prostor $L_2^{loc}(R)$ vase, vektorje iz podprostora $L_2(R)$ vrača nazaj v $L_2(R)$ ter naj ima nenegativno jedro $K(s,t)$. Potem po prejšnji trditvi to jedro zadošča pogoju (4.2.1). Njegov a-adjungirani operator T^* ima očitno za svoje jedro $K(t,s)$, ki je sicer tudi pozitivno, v splošnem pa ne zadošča več takemu pogoju. Operator T^* je torej lahko na podprostoru $E = L_2(R)$ zvezen, vendar ga ne moremo razširiti na ves prostor $X = L_2^{loc}(R)$ do zveznega operatorja.

Ker imamo za vektorje iz množice E definirane polskalarne produkte $(\, , \,)_\alpha$ in skalarni produkt $\langle \, , \rangle$, dobimo preko trditve 1.26 še eno ekvivalentno definicijo a-adjungiranega operatorja.

4.2.3 TRDITEV Naj bo operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$, kjer je E Hilbertov podprostor H-lokalno konveksnega prostora X, potem je T^* a-adjungiran operator k operatorju T natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\alpha_o \in \Delta$, da velja

$$|(Tx,y)_\alpha - (x,T^*y)_\alpha| < \varepsilon \qquad (4.2.2)$$

za vsak $\alpha \geq \alpha_o$, pri čemer sta $x,y \in E$.

Dokaz. Naj bo T^* a-adjungiran operator k operatorju T, se pravi velja : $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$ za poljubna $x,y \in E$. Izberimo si poljuben $\varepsilon > o$, potem po trditvi 1.26 obstajata taka indeksa α_1 in α_2 iz Δ, da velja

$$|(Tx,y)_\alpha - \langle Tx,y\rangle| < \varepsilon \ , \ \alpha \geqq \alpha_1 \qquad (4.2.3)$$

$$|(x,T^*y)_\alpha - \langle x,T^*y\rangle| < \varepsilon \ , \alpha \geqq \alpha_2 \qquad (4.2.4)$$

za poljubna $x,y \in E$. Naj bo $\alpha_o \in \Delta$ skupni naslednik indeksoma α_1 in α_2, potem velja

$$|(Tx,y)_\alpha - (x,T^*y)_\alpha| = |(Tx,y)_\alpha - \langle Tx,y\rangle + \langle x,T^*y\rangle - $$
$$- (x,T^*y)_\alpha| \leqq 2\varepsilon$$

če je le $\alpha \geqq \alpha_o$. Torej velja res pogoj (4.2.2). Vzemimo še obratno, da za operator T^* velja ta pogoj pri poljubnem $\varepsilon > 0$. Za izbrani $\varepsilon > 0$ zopet po trditvi 1.26 najdemo taka indeksa α_1 in α_2, da veljata oceni (4.2.3) in (4.2.4). Pri poljubnih $x,y \in E$

potem lahko zapišemo

$$|\langle Tx,y\rangle - \langle x,T^*y\rangle| = |\langle Tx,y\rangle-(Tx,y)_\alpha+(Tx,y)_\alpha-(x,T^*y)_\alpha +$$
$$+ (x,T^*y)_\alpha-\langle x,T^*y\rangle| \leqq 3\,\varepsilon$$

za vsak $\alpha \geqq \alpha_3$, kjer je α_3 zopet skupni naslednik indeksom α_0, α_1 in α_2. Ker je $\varepsilon > 0$ lahko poljubno majhen, velja

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$$

za vsaka $x,y \in E$ in je T^* res a-adjungiran operator k T.

S prvo definicijo adjungiranega operatorja nismo preveč zadovoljni. Najprej jo lahko uporabimo le za operatorje iz $\mathcal{L}_E(X)$, a-adjungirani operator T^* pa je definiran le na podprostoru E in se ga v splošnem ne da razširiti na ves prostor X. Zato bomo poskusili še na en način definirati adjungirani operator k operatorju $T \in \mathcal{L}(X)$. Naj bo torej $T \in \mathcal{L}(X)$ in vzemimo poljubne elemente $x,y \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Potem je za fiksen $y \in X$ funkcional $(Tx,y)_\alpha$ linearen in ker velja

$$|(Tx,y)_\alpha| \leqq p_\alpha(y)\; p_\alpha(Tx) \leqq p_\alpha(y)\; C_\alpha p_\beta(x)$$

tudi zvezen. Vprašajmo se, kdaj obstaja element $y_0 \in X$, da velja

$$(Tx,y)_\alpha = (x,y_0)_\alpha$$

za vsak $x \in X$ in vsak $\alpha \in \Delta$. Če H-lokalno konveksen prostor določa števen sistem polnorm, po izreku 3.2 dobimo za vsak $\alpha \in \Delta$ element $y_\alpha \in X$ z lastnostjo: $(Tx,y)_\alpha = (x,y_\alpha)_\alpha$. Lahko se zgodi, da je element y_α neodvisen od indeksa $\alpha \in \Delta$ in je enolično določen. Iz izrekov 2.12 in 3.2 sledi, da se to zagotovo zgodi v splošnem H-lokalno konveksnem prostoru, če ima za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$ množica $x + \{z \in X,\ (Tz,y)_\alpha = 0\}$ lastnost H.

Kadar je torej z nekim elementom $y \in X$ preko zgornje zveze določen natanko en element $y_0 \in X$, ga bomo smatrali za sliko elementa y z nekim operatorjem T^0. Postavimo definicijo:

4.2.4 DEFINICIJA Naj bo $T \in \mathcal{L}(X)$. Če obstaja tak operator T^0, da velja za vsak $\alpha \in \Delta$ in poljubna $x,y \in X$ zveza

$$(Tx,y)_\alpha = (x,T^0y)_\alpha \tag{4.2.5}$$

ga imenujemo b-adjungirani operator operatorja T.

Iz definicije je očitno, da je T^0 definiran na vsem X in je linearen operator. Težava je v tem, da za vsak operator ne obstaja nujno b-adjungirani operator, kot bomo videli pozneje.

Če vzamemo za X splošen H-lokalno konveksen prostor in operator T iz $\mathcal{L}(X)$, ne moremo niti dokazati zveznosti operatorja T^0. Dobimo le, da za vsak $\alpha \in \Delta$ obstaja indeks $\beta \in \Delta$, da velja

$$p_\alpha(T^0x)^2 \leqq C_\alpha p_\alpha(x)\ p_\beta(T^0x) \tag{4.2.6}$$

Zares, ker je T iz $\mathcal{L}(X)$, velja: $p_\alpha(Tx) \leqq C_\alpha p_\alpha(x)$ za vsak $x \in X$ in če v relaciji (4.2.5) postavimo $x = T^0y$, dobimo

$$p_\alpha^2(T^0y) = (TT^0y,y)_\alpha \leqq p_\alpha(TT^0y)p_\alpha(y) \leqq C_\alpha p_\beta(T^0y)p_\alpha(y)$$

Zveznost operatorja T^0 bomo lahko dokazali v dveh primerih. Prvi je, če je operator T iz $\mathcal{L}_0(X)$, se pravi velja

$$p_\alpha(Tx) \leqq C_\alpha p_\alpha(x)$$

za vsak $x \in X$. Tedaj zgornja ocena preide v

$$p_\alpha^2(T^0y) \leqq C_\alpha p_\alpha(y)p_\alpha(T^0y)$$

Če je $y \in X$ tak element, da je $p_\alpha(T^0y) > 0$, je očitno potem

$$p_\alpha(T^o y) \leq C_\alpha p_\alpha(y)$$

Če pa je element y tak, da je $p_\alpha(T^o y) = 0$, je ta ocena trivialno izpolnjena. Torej smo dokazali

<u>4.2.5 TRDITEV</u> Če je operator $T \in \mathcal{L}_o(X)$ in zanj obstaja b-adjungirani operator T^o, je tudi $T^o \in \mathcal{L}_o(X)$.

Zveznost operatorja T^o bomo lahko dokazali še v primeru, da topologijo našega H-lokalno konveksnega prostora definira le števen sistem polnorm. Ker je po predpostavki naš prostor poln, imamo v tem primeru Fréchetov prostor, v katerem so polnorme definirane preko polskalarnih produktov. Takemu prostoru bomo rekli tudi <u>H-Fréchetov prostor</u>. Dokažimo najprej naslednji pomožni izrek, ki je sicer znan za Hilbertove prostore.

<u>4.2.6 LEMA</u> Naj bo X H-Fréchetov prostor in A linearen in povsod definiran operator v njem. Naj obstaja še povsod definiran operator B z lastnostjo

$$(Ax,y)_\alpha = (x,By)_\alpha \tag{4.2.7}$$

za poljubne $x,y \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Potem je operator B zvezen v smislu

$$p_\alpha(Bx) \leq C_\alpha p_\alpha(x) \tag{4.2.8}$$

<u>Dokaz</u>. Vzemimo poljuben indeks $\alpha \in \Delta$. Kot vemo iz trditve 1.18, je izotropna množica J_α zaprt podprostor v X in ker je le-ta po predpostavki Fréchetov prostor, je tudi faktorski prostor $X_\alpha = X/J_\alpha$ Fréchetov prostor ([8]). Naj bo $x \in J_\alpha$ in $y = Ax$, potem iz zveze (4.2.7) dobimo

$$p_\alpha^2(Ax) = (x,BAx)_\alpha \leq p_\alpha(x)p_\alpha(BAx) = 0$$

torej je tudi $Ax \in J_\alpha$. Vzemimo še $y \in J_\alpha$ in $x = By$. Na analogen način dobimo tudi $By \in J_\alpha$. Tako lahko na faktorskem prostoru X_α definiramo operatorja A_α in $B_\alpha : X_\alpha \mapsto X_\alpha$, ki elementa $\xi = x + J_\alpha$ oziroma $\eta = y + J_\alpha$ preslika v elementa $A_\alpha \xi = Ax + J_\alpha$ in $B_\alpha \eta = Bx + J_\alpha$. Očitno sta operatorja A_α in B_α linearna in definirana na vsem X_α. V tem prostoru imamo tudi pravi skalarni produkt

$$\langle \xi, \eta \rangle_\alpha = (x,y)_\alpha$$

kajti iz $\langle \xi, \xi \rangle_\alpha = 0$ sledi $(x,x)_\alpha = 0$ ali $x \in J_\alpha$ oziroma $\xi = 0$. Relacijo (4.2.7) v prostoru X_α zapišemo v obliki

$$\langle A_\alpha \xi, \eta \rangle_\alpha = \langle \xi, B_\alpha \eta \rangle_\alpha$$

Ker je X_α Fréchetov, torej poln s skalarnim produktom $\langle\, ,\, \rangle_\alpha$, je Hilbertov prostor, v katerem pa tak izrek velja (gl.[1]). Operator B_α je potem omejen

$$\| B_\alpha \eta \|_\alpha \leqq C_\alpha \| \eta \|_\alpha$$

Če to oceno zapišemo v prvotnem prostoru, to pomeni

$$p_\alpha(By) \leqq C_\alpha p_\alpha(y)$$

kar smo želeli pokazati. Sedaj ne bo več težko dokazati zveznost operatorja T^0.

4.2.7 KOROLAR Če je X H-Fréchetov prostor in za operator $T \in \mathcal{L}(X)$ obstaja b-adjungirani operator T^0, potem je ta zvezen v smislu

$$p_\alpha(T^0 x) \leqq C_\alpha p_\alpha(x) \ , \ x \in X$$

Zares, ker je T^0 b-adjungiran operator k operatorju T, velja : $(Tx,y)_\alpha = (x,T^0 y)_\alpha$ in po zgornji lemi je operator T^0 res zvezen v smislu (4.2.8).

Naj pripomnimo, da v zadnjem primeru nismo zahtevali, da je že operator T zvezen v takem smislu. Toda hitro se lahko prepričamo, da je v resnici tudi T zvezen v smislu (4.2.8). V definiciji operatorja T^o vzemimo $y = Tx$ in dobimo

$$p_\alpha^2(Tx) = (x, T^o Tx)_\alpha \leqq p_\alpha(x) C_\alpha p_\alpha(Tx)$$

in zopet po enakem sklepu kot v dokazu trditve 4.2.5 dobimo

$$p_\alpha(Tx) \leqq C_\alpha p_\alpha(x)$$

Ugotovili smo torej

<u>4.2.8 KOROLAR</u> Če je X H-Fréchetov prostor, operator $T \in \mathcal{L}(X)$ in zanj obstaja b-adjungirani operator T^o, potem je tudi operator $T \in \mathcal{L}_o(X)$.

Da res za vsak operator $T \in \mathcal{L}(X)$ ne obstaja b-adjungirani operator, bomo videli na naslednjem primeru.

<u>4.2.9 PRIMER</u> Naj bo $X = L_2^{loc}(R)$ in T integralski operator oblike

$$(Tx)(s) = \begin{cases} e^{-s}\int_0^s e^{-t}x(t)dt & , s \geqq 0 \\ 0 & , s < 0 \end{cases}$$

potem je T zvezen, povsod definiran operator, za katerega b-adjungirani operator ne obstaja.

Naj bo $x(t) \in L_2^{loc}(R)$, potem je

$$p_\alpha^2(Tx) = \int_0^\alpha ds e^{-2s} \left|\int_0^s e^{-t}x(t)dt\right|^2 \leqq \int_0^\alpha e^{-2s}ds \int_0^\alpha e^{-2t}dt.$$
$$\cdot \int_0^\alpha |x(t)|^2 dt = C_\alpha p_\alpha(x)^2$$

Torej je operator T definiran na vsem prostoru in je zvezen celo v smislu (4.2.8). Vzemimo elementa $x,y \in L_2^{loc}(\mathbb{R})$ in izračunajmo

$$(Tx,y)_\alpha = \int_0^\alpha e^{-s}\overline{y}(s)ds \int_0^s e^{-t}x(t)dt = \int_0^\alpha e^{-t}x(t)dt \int_t^\alpha e^{-s}\overline{y}(s)ds =$$
$$= \int_0^\alpha e^{-s}x(s)ds \int_s^\alpha e^{-t}\overline{y}(t)dt = (x,y_\alpha^*)_\alpha$$

kjer je

$$y_\alpha^* = \begin{cases} e^{-s}\int_s^\alpha e^{-t}y(t)dt & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Če vzamemo drug indeks $\beta \in \Delta = \mathbb{N}$, dobimo ustrezni element y_β^*. Pri tem je vsak element y_γ^* določen le do množice J_γ za poljuben γ. Če bi obstajal b-adjungirani operator T^o, bi pri istem $y \in L_2^{loc}(\mathbb{R})$ morali dobiti en sam element y^* kot skupen presek vseh množic oblike $y_\gamma^* + J_\gamma$:

$$\{y^*\} = \bigcap_{\gamma\in\Delta}\{y_\gamma^* + J_\gamma\}$$

Toda za $\alpha < \beta$ imata taki dve množici v splošnem prazen presek. Vzemimo $y(t) = e^{2t} \in L_2^{loc}(\mathbb{R})$, potem je zgornji element

$$y_\gamma^* = \begin{cases} e^{-s}e^{\gamma}-1 & , \quad s \geq 0 \\ 0 & , \quad s < 0 \end{cases}$$

v kar se ni težko prepričati. Če bi množici $y_\alpha^* + J_\alpha$ in $y_\beta^* + J_\beta$ imeli neprazen presek, bi obstajala elementa $z_\alpha(s) \in J_\alpha$ in $z_\beta(s) \in J_\beta$ z lastnostjo

$$y_\alpha^* + z_\alpha = y_\beta^* + z_\beta$$

Pri tem je zaradi

$$p_\alpha(z_\beta - z_\alpha) \leq p_\alpha(z_\beta) + p_\alpha(z_\alpha) \leq p_\beta(z_\beta) = 0$$

Po drugi strani pa bi bilo

$$p_\alpha^2(z_\beta - z_\alpha) = p_\alpha^2(y_\beta^* - y_\alpha^*) = (e^\beta - e^\alpha)^2(1-e^{-2\alpha})/2 > 0$$

kar je v nasprotju z zgornjim.

Videli smo : če je operator $T\in\mathcal{L}_0(X)$ in operator T^0 obstaja, je tudi $T^0\in\mathcal{L}_0(X)$, če pa je T splošneje zvezen - $T\in\mathcal{L}(X)$ in operator T^0 obstaja, lahko njegovo zveznost dokažemo le v primeru H-Fréchetovega prostora. Tedaj je T^0 kot tudi T iz $\mathcal{L}_0(X)$. Zato označimo z $\mathcal{L}^*(X)$ množico operatorjev iz $\mathcal{L}_0(X)$, za katere obstaja b-adjungirani operator. Naj še enkrat poudarimo, da lahko obstaja tudi za operator $T\in\mathcal{L}(X)\setminus\mathcal{L}_0(X)$ b-adjungirani operator T^0, vendar ni nujno zvezen.

Na oba načina kot smo uvedli adjungirani operator, lahko definiramo tudi sebiadjungirane operatorje.

<u>4.2.10 DEFINICIJA</u> Operator $A\in\mathcal{L}_E(X)$ je <u>a-sebiadjungiran</u>, če velja

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle$$

za poljubna $x,y\in E$.

Množico a-sebiadjungiranih operatorjev bomo označili s $\mathcal{H}_E(X)$.

<u>4.2.11 DEFINICIJA</u> Zvezen linearen operator A, ki deluje v H-lokalno konveksnem prostoru X, je <u>b-sebiadjungiran</u>, če velja

$$(Ax,y)_\alpha = (x,Ay)_\alpha$$

za vsak $\alpha\in\Delta$ in za poljubna $x,y\in X$.

V primeru, da je prostor X H-Fréchetov, je po izreku 4.2.6 vsak b-sebiadjungiran operator A iz množice $\mathcal{L}_0(X)$, v splošnem H-lokalnem prostoru pa to ni nujno res. Označimo s $\mathcal{H}(X)$ množico b-sebiadjungiranih operatorjev iz $\mathcal{L}_0(X)$. Tedaj velja inkluzija $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{L}^*(X)$.

Oglejmo si, v koliki meri sta si v zvezi a-sebiadjungirani in b-sebiadjungirani operator.

4.2.12 TRDITEV Naj bo X kompleksen H-lokalno konveksen prostor in E Hilbertov podprostor v njem. Če je operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$ b-sebiadjungiran, potem je tudi a-sebiadjungiran.

Dokaz. Naj bo torej $T \in \mathcal{L}_E(X)$ b-sebiadjungiran operator. Vzemimo poljuben $x \in E$ in upoštevajmo zvezo (1.8)

$$4\langle Tx,x\rangle - 4\langle x,Tx\rangle = 2i\|Tx+ix\|^2 - 2i\|Tx-ix\|^2 =$$
$$= 2i\sup_{\alpha\in\Delta}[(Tx,Tx)_\alpha - i(Tx,x)_\alpha + i(x,Tx)_\alpha + (x,x)_\alpha] -$$
$$- 2i\sup_{\alpha\in\Delta}[(Tx,Tx)_\alpha + i(Tx,x)_\alpha - i(x,Tx)_\alpha + (x,x)_\alpha] = 0$$

Torej je vrednost skalarnega produkta $\langle Tx,x\rangle$ za vsak $x \in E$ realna. Ker je E Hilbertov prostor, je $T|_E$ sebiadjungiran operator v njem, kar pomeni $T \in \mathcal{H}_E(X)$.

Oglejmo si nekaj primerov operatorjev v prostoru $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$.

4.2.13 PRIMER Naj bo T integralski operator v prostoru $X = L_2^{loc}(\mathbb{R})$ z jedrom

$$K(s,t) = \begin{cases} e^{-s}e^{-t} & , 0 \leq s/2 \leq t \leq 2s \\ 0 & , \text{drugod} \end{cases}$$

Tedaj je T zvezen, preslika vektorje iz $E = L_2(\mathbb{R})$ nazaj in je a-sebiadjungiran, ni pa b-sebiadjungiran operator.

Hitro se lahko prepričamo, da velja za poljuben $n \in \mathbb{N} = \Delta$

$$p_n^2(Tx) \leq \frac{1}{12}(1+e^{-6n}-2e^{-3n})p_{2n}^2(x) \leq \frac{1}{12}p_{2n}^2(x)$$

Torej je operator T res zvezen in iz zgornje ocene sledi, da preslika elemente iz $L_2(R)$ vase. Za poljubna $x,y \in L_2(R)$ velja

$$\langle Tx,y\rangle = \int_0^\infty \overline{y}(s)ds e^{-s}\int_{s/2}^{2s} e^{-t}x(t)dt = \int_0^\infty x(s)e^{-s}ds\int_{s/2}^{2s} e^{-t}\overline{y}(t)dt = \langle x,Ty\rangle$$

torej je operator T a-sebiadjungiran. Ta operator pa ni b-sebiadjungiran, kajti če vzamemo recimo elementa $x(t) = e^t$ in $y(t) = te^t$ iz $L_2^{loc}(R)$, imamo

$$(Tx,y)_n = \int_0^n se^s e^{-s}ds\int_{s/2}^{2s} e^{-t}e^t dt = n^3/2$$

medtem ko dobimo

$$(x,Ty)_n = \int_0^n e^s e^{-s}ds\int_{s/2}^{2s} e^{-t}te^t dt = 5n^3/8$$

<u>4.2.14 PRIMER</u> Naj bo T integralski operator v prostoru $X = L_2^{loc}(R)$ z jedrom

$$K(s,t) = \begin{cases} e^s e^t & ; (s,t)\in M = \bigcup_{i=0}^{\infty}([i,i+1]\times[i,i+1]) \\ 0 & ; \text{drugod} \end{cases}$$

Potem je operator T zvezen in b-sebiadjungiran.

Ker velja ocena

$$p_n^2(Tx) = \int_0^n e^{2s}ds\left|\int_{M\cap R_s} e^t x(t)dt\right|^2 \leq \int_0^n e^{2s}ds\int_0^n e^{2t}dt.\int_0^n |x(t)|^2 dt \leq C_n p_n^2(x)$$

kjer smo z R_s označili množico točk $\{(s,t),\ s=\text{konst.}\}$, je operator $T\in\mathcal{L}_0(X)$. Hitro se lahko prepričamo, da zanj velja

$$(Tx,y)_n = (x,Ty)_n$$

za vsako naravno število in je torej primer b-sebiadjungiranega operatorja. Če vzamemo $x(t) = e^{-t}\in L_2(R)$, je

$$(Tx)(s) = \begin{cases} e^s & , \ s \geq 0 \\ 0 & , \ s < 0 \end{cases}$$

ki pa očitno ni več iz podprostora $L_2(\mathbb{R})$. Zato tudi ne more biti a-sebiadjungiran operator.

4.3 Nekatere lastnosti adjungiranih operatorjev

Ogledali si bomo nekaj lastnosti adjungiranih operatorjev, pri tem bomo obravnavali kar vzporedno a-adjungirane operatorje, ki jih lahko definiramo za operatorje iz $\mathcal{L}_E(X)$ in b-adjungirane operatorje, ki obstajajo za operatorje iz $\mathcal{L}^*(X)$.

Dokažimo najprej tri pomožne izreke, ki jih bomo kasneje rabili.

4.3.1 LEMA Če za operator $T \in \mathcal{L}(X)$ velja

$$(Tx,x)_\alpha = 0$$

za vsak $x \in X$ in za vsak indeks $\alpha \in \Delta$, je $T = 0$.

Zares, ker je tudi $(T(x+y),x+y)_\alpha = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$, dobimo

$$(Tx,y)_\alpha + (Ty,x)_\alpha = 0$$

in če v tej relaciji element y zamenjamo z iy, dobimo še

$$-i(Tx,y)_\alpha + i(Ty,x)_\alpha = 0$$

kar nam oboje skupaj da : $2(Tx,y)_\alpha = 0$. Od tod pri $y = Tx$ dobimo

$$p_\alpha(Tx) = 0$$

za vsak $\alpha \in \Delta$ ali $Tx = 0$. Ker je bil element $x \in X$ poljuben, je T res ničelen operator.

4.3.2 KOROLAR Če sta operatorja $S,T \in \mathcal{L}(X)$ in velja

$$(Sx,x)_\alpha = (Tx,x)_\alpha$$

za vsak $x \in X$ in za poljuben indeks $\alpha \in \Delta$, je $S = T$.

Dokažimo še podoben izrek za operatorje iz $\mathcal{L}_E(X)$.

4.3.3 LEMA Če je podprostor E v H-lokalno konveksnem prostoru X gost in za operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$ velja

$$\langle Tx, x \rangle = 0$$

za vsak element $x \in E$, potem je $T = 0$.

Dokaz. Na prav enak način kot zgoraj dobimo $\|Tx\| = 0$ za poljuben vektor $x \in E$, kar pomeni $Tx = 0$ za vsak $x \in E$. Ker je E gost podprostor prostora X in operator T zvezen, je $T = 0$.

Dokažimo sedaj nekaj lastnosti adjungiranih operatorjev.

4.3.4 TRDITEV Naj bosta operatorja $S, T \in \mathcal{L}_E(X)$, potem je tudi $\lambda S + \mu T \in \mathcal{L}_E(X)$ za poljubna $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$) in velja

$$(\lambda S + \mu T)^* x = \bar{\lambda} S^* x + \bar{\mu} T^* x$$

za vsak $x \in E$.

Zares, ker sta operatorja S in T zvezna, velja pri poljubnih elementih $x, y \in X$

$$p_\alpha((\lambda S + \mu T)x) \leqq |\lambda| C_1 p_\beta(x) + |\mu| C_2 p_\gamma(x) \leqq (|\lambda| C_1 + |\mu| C_2) p_\delta(x)$$

kjer je $\delta \in \Delta$ skupni naslednik indeksoma β in γ. Iz te ocene sledi, da je tudi operator $\lambda S + \mu T$ zvezen. Če vzamemo vektor $x \in E$, je očitno tudi element $\lambda Sx + \mu Tx$ iz E. Izračunajmo še

$$\langle(\lambda S+\mu T)x,y\rangle = \langle x,\bar{\lambda}S^*y\rangle + \langle x,\bar{\mu}T^*y\rangle = \langle x,(\bar{\lambda}S^*+\bar{\mu}T^*)y\rangle$$

od koder uvidimo veljavnost zgornje trditve.

Podoben izrek dobimo tudi za b-adjungirane operatorje:

<u>4.3.5 TRDITEV</u> Naj bosta operatorja S in T iz $\mathcal{L}^*(X)$, potem je tudi operator $\lambda S + \mu T$ iz $\mathcal{L}^*(X)$ in velja

$$(\lambda S + \mu T)^o = \bar{\lambda}S^o + \bar{\mu}T^o$$

<u>Dokaz</u>. Ker sta S in T zvezna operatorja in iz množice $\mathcal{L}_o(X)$, imamo v zgornji oceni $\alpha=\beta=\gamma$:

$$p_\alpha((\lambda S+\mu T)x) \leq (|\lambda|\, C_1+|\mu|\, C_2)\; p_\alpha(x)$$

kar pomeni, da je tudi operator $\lambda S + \mu T$ iz $\mathcal{L}_o(X)$. Ker za poljuben indeks $\alpha\in\Delta$ velja

$$((\lambda S+\mu T)x,y)_\alpha = (x,\bar{\lambda}S^oy)_\alpha + (x,\bar{\mu}T^oy)_\alpha = (x,(\bar{\lambda}S^o+\bar{\mu}T^o)y)_\alpha$$

tudi za operator $\lambda S + \mu T$ obstaja b-adjungirani operator in je enak operatorju $\bar{\lambda}S^o + \bar{\mu}T^o$.

Videli smo, da za operator $T\in\mathcal{L}_E(X)$ ni več nujno, da je T^* definiran na vsem prostoru X. Očitno pa je, da elemente iz podprostora E preslika nazaj v E in da je tam zvezen celo po normi $\|\ \|$. To vidimo, če v definiciji a-adjungiranega operatorja

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$$

vzamemo $x=T^*y$ in ocenimo

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle \leqq \|TT^*y\|\cdot\|y\| \leqq \|T^*y\|\cdot C\|y\|$$

Za operator T^* lahko definiramo adjungirani operator na običajen način v Hilbertovem prostoru E. Nastane vprašanje, kakšna je zveza med operatorjem $T^{**} = (T^*)^*$ in prvotnim operatorjem T.

4.3.6 TRDITEV Naj bo operator T iz $\mathcal{L}_E(X)$, X H-lokalno konveksen prostor in podprostor E, ki smo ga definirali z (1.7), poln. Potem velja

$$T^{**}x = Tx$$

za vsak $x \in E$. Če je podprostor E tudi gost v X, je operator T edina zvezna razširitev operatorja T^{**} na ves prostor X.

Dokaz. Iz definicije operatorja T^{**} sledi

$$\langle T^{**}y, x\rangle = \langle y, T^*x\rangle = \langle Ty, x\rangle$$

kar pomeni, da je $\langle (T^{**}-T)y, x\rangle = 0$ za poljubna $x, y \in E$, torej je za vsak $x \in E$ $T^{**}x = Tx$. Če obstaja zvezna razširitev operatorja T^{**} na ves prostor X, se na podprostoru E ujema z operatorjem T, kar po lemi 4.3.3 pomeni, da se z njim ujema na vsem prostoru X.

4.3.7 TRDITEV Naj bo operator T iz $\mathcal{L}^*(X)$ in T^o njegov b-adjungirani operator. Potem velja

$$T^{oo} = T$$

Dokaz. Ker je operator T iz $\mathcal{L}^*(X)$, pomeni, da njegov b-adjungirani operator T^o obstaja. Za operator T^o očitno tudi obstaja b-adjungirani operator, kar sledi iz zapisa

$$(T^{o}x,y)_{\alpha} = (x,Ty)_{\alpha}$$

in je enak $(T^{o})^{o} = T$.

4.3.8 TRDITEV Če sta operatorja $S,T\in\mathcal{L}_{E}(X)$, potem je tudi $ST\in\mathcal{L}_{E}(X)$ in velja

$$(ST)^{*}x = T^{*}S^{*}x$$

za vsak $x\in E$.

Dokaz. Ker sta operatorja S in T zvezna, velja

$$p_{\alpha}(STx) \leq C_{\alpha}p_{\beta}(Tx) \leq C_{\alpha}C_{\beta}p_{\gamma}(x)$$

Torej je tudi operator ST zvezen in če vzamemo $x\in E$, je $Tx\in E$ in tedaj tudi $STx\in E$, torej je $ST\in\mathcal{L}_{E}(X)$. Vzemimo poljubna $x,y\in E$, potem je

$$\langle STx,y\rangle = \langle Tx,S^{*}y\rangle = \langle x,T^{*}S^{*}y\rangle$$

od koder sledi $(ST)^{*} = T^{*}S^{*}$. Podobno dobimo :

4.3.9 TRDITEV Če sta operatorja $S,T\in\mathcal{L}^{*}(X)$, potem je tudi operator $ST\in\mathcal{L}^{*}(X)$ in velja

$$(ST)^{o} = T^{o}S^{o}$$

Zares, iz relacije

$$(STx,y)_{\alpha} = (Tx,S^{o}y)_{\alpha} = (x,T^{o}S^{o}y)_{\alpha}$$

sledi trditev neposredno.

4.3.10 TRDITEV Identični operator I je iz množice $\mathcal{L}_{E}(X)$ kot tudi iz množice $\mathcal{L}^{*}(X)$ in je hkrati a-sebiadjungiran in b-sebiadjungiran operator.

Dokaz je trivialen in ga opustimo.

4.3.11 TRDITEV Naj bo podprostor E poln in naj bo operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$ tak, da obstaja njegov inverzni operator T^{-1} in je tudi $T^{-1} \in \mathcal{L}_E(X)$, potem velja

$$(T^{-1})^* x = (T^*)^{-1} x$$

za vsak $x \in E$.

Zares, ta trditev je prevedena na Hilbertov prostor E, za katerega velja tak izrek. Naj le še opomnimo, da iz pogoja, da operator T preslika elemente iz podprostora E nazaj v E, ne sledi taka lastnost tudi za operator T^{-1}.

4.3.12 TRDITEV Naj bo operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ obrnljiv in če je tudi $T^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$, velja

$$(T^o)^{-1} = (T^{-1})^o$$

Zares, če sta operatorja T in T^{-1} iz $\mathcal{L}^*(X)$, po trditvi 4.3.9 sledi

$$I = I^o = (TT^{-1})^o = (T^{-1})^o T^o$$

od koder sledi naša trditev.

4.3.13 KOROLAR Naj bo operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$, potem je $T^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$ natanko tedaj, ko je $(T^o)^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$.

Dokaz. Operator T je iz $\mathcal{L}^*(X)$ in če je $T^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$, je tudi $(T^{-1})^o \in$ $\in \mathcal{L}^*(X)$ in po prejšnji trditvi sledi

$$(T^o)^{-1} = (T^{-1})^o \in \mathcal{L}^*(X)$$

Če je $(T^o)^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$ in ker je očitno $T^o \in \mathcal{L}^*(X)$, po zgornji trditvi za operator T^o razberemo

$$T^{-1} = (T^{oo})^{-1} = ((T^o)^{-1})^o \in \mathcal{L}^*(X)$$

Za a-adjungirane operatorje dobimo :

<u>4.3.14 TRDITEV</u> Naj bo E poln podprostor v H-lokalno konveksnem prostoru X in operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$, potem velja

a) če je $T^{-1} \in \mathcal{L}_E(X)$, je $(T^*)^{-1}$ na E zvezen (glede na normo $\| \ \|$)

b) če je $(T^*)^{-1}$ na E zvezen, je tudi operator $(T|_E)^{-1}$ zvezen na E.

<u>Dokaz</u>. Če je $T^{-1} \in \mathcal{L}_E(X)$, je tudi $(T^{-1})^*$ zvezen na podprostoru E in po trditvi 4.3.11 je tudi operator $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ zvezen na E. Vzemimo še obratno, da je $(T^*)^{-1}$ zvezen na E, potem po isti trditvi za operator T^* dobimo: $T_1^{-1} = (T^{**})^{-1} = ((T^*)^{-1})^*$ in je potem tudi operator T_1^{-1} zvezen na podprostoru E. Pri tem smo pisali $T_1 = T|_E$ in upoštevali $T|_E = T^{**}$.

Oglejmo si sedaj še nekaj lastnosti a-sebiadjungiranih operatorjev, ki smo jih označili s $\mathcal{H}_E(X)$ in množico b-sebiadjungiranih operatorjev iz prostora $\mathcal{L}_o(X)$, ki smo jih označili z $\mathcal{H}(X)$.

<u>4.3.15 TRDITEV</u> Množici $\mathcal{H}_E(X)$ in $\mathcal{H}(X)$ sta realna vektorska prostora.

<u>Dokaz</u>. Vzemimo $A, B \in \mathcal{H}_E(X)$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Iz trditve 4.3.4 vemo, da je $\lambda A + \mu B \in \mathcal{L}_E(X)$ in za poljubna $x, y \in E$ lahko zapišemo

$$\langle (\lambda A + \mu B)x, y \rangle = \langle x, \lambda Ay \rangle + \langle x, \mu By \rangle = \langle x, (\lambda A + \mu B)y \rangle$$

kar pomeni $\lambda A + \mu B \in \mathcal{H}_E(X)$. Prav podobno se prepričamo tudi za množico $\mathcal{H}(X)$.

4.3.16 TRDITEV Če sta operatorja $A,B\in\mathcal{H}_E(X)$ (oziroma $A,B\in$ $\in\mathcal{H}(X)$) in komutirata med seboj, je tudi $AB\in\mathcal{H}_E(X)$ (oziroma $AB\in\mathcal{H}(X)$).

Ta lastnost sledi neposredno iz trditve 4.3.8.

4.3.17 KOROLAR Naj bo $P(\lambda)$ polinom z realnimi koeficienti, potem velja

a) če je $A\in\mathcal{H}_E(X)$, je tudi $P(A)\in\mathcal{H}_E(X)$

b) če je $A\in\mathcal{H}(X)$, je tudi $P(A)\in\mathcal{H}(X)$.

Ti trditvi sta neposredni posledici prejšnje trditve, saj so potence A^m ustrezno sebiadjungirani operatorji.

Dokažimo še pomožni izrek, ki govori, kdaj je neki operator A b-sebiadjungiran.

4.3.18 LEMA Naj bo X kompleksen H-lokalno konveksen prostor in operator $A\in\mathcal{L}(X)$. Potem je A b-sebiadjungiran operator natanko tedaj, ko je vrednost

$$(Ax,x)_\alpha$$

realna za poljuben $x\in X$ in $\alpha\in\Delta$.

Dokaz. Vzemimo poljuben $x\in X$ in $\alpha\in\Delta$ ter zapišimo identiteti

$$4(Ax,y)_\alpha = (Au,u)_\alpha-(Av,v)_\alpha+i(Aw,w)_\alpha-i(Az,z)_\alpha$$

$$4(x,Ay)_\alpha = (u,Au)_\alpha-(v,Av)_\alpha+i(w,Aw)_\alpha-i(z,Az)_\alpha$$

kjer smo zaradi krajšega zapisa pisali $u = x+y$, $v = x-y$, $w =$ $= x+iy$ in $z = x-iy$. Vsi oklepaji na desni strani so po predpostavki realni, zato na primer velja

$$(u,Au)_\alpha = \overline{(Au,u)}_\alpha = (Au,u)_\alpha$$

in tako tudi za ostale vrednosti. Torej sta tudi levi strani enaki

$$(Ax,y)_\alpha = (x,Ay)_\alpha$$

za vsak indeks $\alpha \in \Delta$, kar pomeni ravno, da je A b-sebiadjungiran operator. Obratna trditev je očitna.

Oglejmo si še nekaj posebnih operatorjev, ki delujejo v našem H-lokalno konveksnem prostoru X.

4.3.19 DEFINICIJA Operator T iz $\mathcal{L}_E(X)$ imenujemo a-izometrijo, če velja

$$\langle Tx,Ty\rangle = \langle x,y\rangle \tag{4.3.1}$$

za poljubna $x,y \in E$. a-izometrijo, katere zaloga vrednosti vsebuje množico E, imenujemo a-unitaren operator.

4.3.20 LEMA Za operator T iz $\mathcal{L}_E(X)$ je pogoj (4.3.1) ekvivalenten pogoju

$$\|Tx\| = \|x\| , \quad x \in E$$

Dokaz. Naj velja zadnja relacija, potem je

$$4\mathrm{Re}\langle Tx,Ty\rangle = \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

Če v tej relaciji zamenjamo y z iy, dobimo tako enakost tudi za imaginarni del. Obratna smer je očitna.

4.3.21 DEFINICIJA Operator T iz $\mathcal{L}(X)$ imenujemo b-izometrijo, če velja

$$(Tx,Ty)_\alpha = (x,y)_\alpha \;;\; x,y\in X,\ \alpha\in\Delta \tag{4.3.2}$$

Če je poleg tega še zaloga vrednosti operatorja T ves prostor X, imenujemo T <u>b-unitaren operator</u>.

Podobno kot zgoraj lahko zapišemo še ekvivalentno definicijo:

<u>4.3.22 LEMA</u> Za operator T iz $\mathcal{L}(X)$ je pogoj (4.3.2) ekvivalenten pogoju

$$p_\alpha(Tx) = p_\alpha(x) \;;\; x\in X,\ \alpha\in\Delta$$

Ekvivalentnost tega pogoja preverimo na enak način kot zgoraj.

Iz zadnje relacije sledi neposredno, da za b-izometrijo velja $T\in\mathcal{L}_0(X)\cap\mathcal{L}_F(X)\cap\mathcal{L}_E(X)$.

5. SPEKTER OPERATORJA

Spekter operatorja v H-lokalno konveksnem prostoru definiramo podobno kot v normiranih prostorih.

5.1 DEFINICIJA Število $\lambda\in\mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$) je iz resolventne množice operatorja T ($\lambda\in\rho(T)$) natanko tedaj, ko obstaja operator $(T-\lambda I)^{-1}$, ki je gosto definiran in zvezen. Spekter operatorja T je komplement resolventne množice ($\sigma(T)=\rho(T)^c$).

Dokažimo takoj naslednji pomožni izrek:

5.2 LEMA Če je operator T zaprt in število λ iz $\rho(T)$, je zaloga vrednosti operatorja $(T-\lambda I)$ ves prostor X.

Dokaz. Vzemimo $\lambda\in\rho(T)$ in pokažimo, da za vsak $y\in X$ obstaja element $x\in X$ z lastnostjo $(T-\lambda I)x=y$. Ker je $\lambda\in\rho(T)$, je po definiciji $\overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)} = X$, od koder sledi, da za dani element $y\in X$ obstaja posplošeno zaporedje $\{x_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$, za katerega konvergira zaporedje $\{Tx_\delta-\lambda x_\delta\}$ k elementu $y\in X$. Če označimo $y_\delta = Tx_\delta-\lambda x_\delta$ in upoštevamo, da je operator $(T-\lambda I)^{-1}$ zvezen, dobimo tudi konvergenco zaporedja $\{x_\delta\}$:

$$\lim_{\delta\in\Gamma} x_\delta = \lim_{\delta\in\Gamma} (T-\lambda I)^{-1}y_\delta = x$$

Ker je operator T zaprt, dobimo $(T-\lambda I)x=y$, kar smo želeli dokazati.

Sedaj lahko zapišemo:

5.3 LEMA Za operator T iz $\mathcal{L}(X)$ so naslednje tri trditve ekvivalentne

(a) $\lambda\in\rho(T)$

(b) $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja, $\overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)} = X$, $(T-\lambda I)^{-1}$ je zvezen

(c) $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Če je $\lambda \in \sigma(T)$, tedaj operator $(T-\lambda I)^{-1}$ ni iz $\mathcal{L}(X)$, kar pomeni, da operator $(T-\lambda I)^{-1}$ sploh ne obstaja, ni definiran na vsem X ali ni zvezen. Zato bomo ločili spekter na več podmnožic.

<u>5.4 DEFINICIJA</u> Množico točk $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere operator $(T-\lambda I)^{-1}$ ne obstaja, imenujemo <u>točkast spekter</u> in označimo s $\sigma_p(T)$. Množico točk $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere operator $(T-\lambda I)^{-1}$ sicer obstaja, je gosto definiran, ni pa zvezen, imenujemo <u>zvezen spekter</u> in označimo s $\sigma_c(T)$. Množico točk $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja, definiran pa je le na pravem podprostoru, kjer je sicer lahko zvezen, imenujemo <u>residualni spekter</u> in označimo s $\sigma_r(T)$.

Jasno je, da zaloga vrednosti operatorja $T-\lambda I$ ni nujno ves prostor X, čeprav vseskozi obravnavamo le operatorje, ki so povsod definirani.

<u>5.5 LEMA</u> Preslikava $T-\lambda I : X \mapsto \mathcal{R}(T-\lambda I) \subset X$ je natanko tedaj injektivna, ko λ ni lastna vrednost operatorja T $(\lambda \notin \sigma_p(T))$.

<u>Dokaz</u>. Če operator $T-\lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$ ni injektivna preslikava iz X v $\mathcal{R}(T-\lambda I)$, obstajata elementa $x_1 \neq x_2$ z lastnostjo

$$Tx_1-\lambda x_1 = Tx_2-\lambda x_2 = y$$

Od tod dobimo $Tx = \lambda x$, kjer je $x=x_1-x_2 \neq 0$, torej je λ lastna vrednost. Vzemimo še obratno, naj bo λ lastna vrednost operatorja T; se pravi obstaja $x \neq 0$, da velja $Tx = \lambda x$. Če bi $T-\lambda I$ bila injektivna preslikava, bi za x_1 in $x_2=x_1+x$ veljalo $z_1=Tx_1-\lambda x_1 \neq$

$\neq Tx_2-\lambda x_2 = z_2$. Toda razlika teh elementov je $z_1-z_2 = Tx-\lambda x = 0$, kar je protislovje.

Za sebiadjungirane operatorje bomo povedali kaj več o spektru. Pri tem nam bo v pomoč naslednji izrek.

5.6 IZREK Naj bo Y podprostor v H-Fréchetovem prostoru X. Potem je Y gost v X natanko tedaj, ko za vsak $\gamma\in\Delta$, vsak $x_\gamma\notin J_\gamma$ in vsak $y\in Y$ velja

$$(x_\gamma,y)_\gamma \neq 0$$

Dokaz. Dokažimo najprej zadostnost zgornjega pogoja. Naj Y ne bo gost v prostoru X, potem obstaja element $z\in X\setminus\overline{Y}$, različen od 0. Ker je $\overline{Y}$ zaprt podprostor, obstaja po izreku 3.3 netrivialen fukcional f z lastnostjo

$$f(y) = 0 \quad \text{za } y\in Y \quad \text{in} \quad f(z)>1$$

Ker je funkcional f zvezen, obstaja konstanta $C>0$ in indeks $\gamma_0\in\Delta$ z lastnostjo

$$|f(x)| \leqq C\, p_{\gamma_0}(x) \ , \quad x\in X$$

Po posplošenem Rieszovem izreku 3.2 se ta funkcional da zapisati v obliki: $f(x) = (x,x_\gamma)_\gamma$, $x\in X$. Pri tem je indeks $\gamma\geqq\gamma_0$ in $x_\gamma\notin J_\gamma$. Od tod dobimo

$$(y,x_\gamma)_\gamma = f(y) = 0$$

za vsak $y\in Y$, medtem ko je

$$(z,x_\gamma)_\gamma = f(z)>1$$

Našli smo torej element $x_\gamma\notin J_\gamma$, ki je pravokoten glede na indeks γ na ves podprostor Y. Naj še poudarimo, da indeks γ ni en sam, ampak to velja za vsak indeks $\gamma \geqq \gamma_0$. Dokažimo še potrebnost zgornjega pogoja. Privzemimo torej, da je $\overline{Y} = X$. Vzemimo, da obstaja tak indeks $\gamma \in \Delta$ in element $x_\gamma \notin J_\gamma$, da je $(x_\gamma, y)_\gamma = 0$ za vsak $y \in Y$. Če je $x_\gamma \in Y$, pri $y = x_\gamma$ dobimo $(x_\gamma, x_\gamma)_\gamma = 0$, kar pomeni $x_\gamma \in J_\gamma$. Torej more biti le $x_\gamma \notin Y$. Ker je Y gost v X, za poljuben $\varepsilon > 0$ in naš $\gamma \in \Delta$ obstaja element $x' \in Y$, da velja

$$p_\gamma(x_\gamma - x') < \varepsilon$$

Od tod dobimo

$$p_\gamma(x_\gamma)^2 = (x_\gamma, x_\gamma - x')_\gamma + (x_\gamma, x')_\gamma \leqq p_\gamma(x_\gamma) p_\gamma(x_\gamma - x')$$

Ker je $x_\gamma \notin J_\gamma$, sledi $p_\gamma(x_\gamma) < \varepsilon$. Pri tem lahko pri istem x_γ izberemo ε poljubno majhen, kar pomeni

$$p_\gamma(x_\gamma) = 0$$

ali $x_\gamma \in J_\gamma$, kar je v nasprotju s predpostavko.

Kot posledico tega izreka dobimo:

<u>5.7 KOROLAR</u> Če je Y gost podprostor v H-Fréchetovem prostoru X, potem je $Y^{\perp\!\!\perp} = \{0\}$.

<u>Dokaz</u>. Če bi obstajal element $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, za katerega bi veljalo

$$(x_0, y)_\alpha = 0$$

za vsak $y \in Y$ in vsak $\alpha \in \Delta$, bi zaradi pogoja $\bigcap_\alpha J_\alpha = \{0\}$ obstajal indeks γ, da bi bil $x_0 \notin J_\gamma$ in tudi zanj bi dobili

$$(x_0, y)_\gamma = 0$$

kar je v protislovju s trditvijo prejšnjega izreka.

Povezava med spektrom operatorja T in spektrom njegovega adjungiranega operatorja ni tako tesna kot na primer v Hilbertovem prostoru.

5.8 IZREK Naj bo X H-Fréchetov prostor in operator $T\in \mathcal{L}^*(X)$, potem veljata trditvi :

1) če je $\lambda\in\varrho(T)$ in je operator $(T-\lambda I)^{-1}\in \mathcal{L}_0(X)$, potem obstaja b-adjungirani operator $((T-\lambda I)^{-1})^0$ in je $\bar{\lambda}\in\varrho(T^0)$,

2) če je $\bar{\lambda}\in\varrho(T^0)$ in je operator $(T^0-\bar{\lambda}I)^{-1}\in \mathcal{L}_0(X)$, potem obstaja b-adjungirani operator $((T^0-\bar{\lambda}I)^{-1})^0$ in je $\lambda\in\varrho(T)$.

Dokaz. Naj bo $\lambda\in\varrho(T)$. Ker je operator $T\in\mathcal{L}^*(X)$, je tudi $T-\lambda I\in \mathcal{L}^*(X)$. Operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja, je gosto definiran in zvezen. Iz leme 5.2 sledi celo $\mathcal{R}(T-\lambda I) = X$. Za operator $T-\lambda I$ obstaja b-adjungirani operator, ki je po korolarju 4.2.7 zvezen, torej $(T-\lambda I)^0\in\mathcal{L}^*(X)$. Dokažimo, da tudi zanj obstaja inverzni operator. Vzemimo tak element $y_0\in X$, da je $(T-\lambda I)^0 y_0 = 0$, potem velja

$$((T-\lambda I)x,y_0)_\alpha = (x,(T-\lambda I)^0 y_0)_\alpha = 0$$

za vsak $x\in X$ in $\alpha\in\Delta$. Ker je zaloga vrednosti operatorja $T-\lambda I$ ves X, izberimo $x = (T-\lambda I)^{-1}y_0$ in v zgornji relaciji dobimo : $(y_0,y_0)_\alpha = 0$. Ker to velja pri poljubnem $\alpha\in\Delta$, sledi $y_0 = 0$, kar pomeni, da operator $((T-\lambda I)^0)^{-1}$ res obstaja. Dokažimo, da je tudi gosto definiran. Če bi bilo $\overline{\mathcal{R}((T-\lambda I)^0)} \neq 0$, bi po izreku 5.6 obstajal tak indeks $\gamma_0\in\Delta$, da bi za vsak $\gamma\geq\gamma_0$ obstajal element $x_\gamma\notin J_\gamma$ z lastnostjo

$$(x_\gamma,y)_\gamma = 0,\ y\in\mathcal{R}((T-\lambda I)^0)$$

se pravi

$$0 = (x_\gamma,(T-\lambda I)^0 x)_\gamma = ((T-\lambda I)x_\gamma,x)_\gamma$$

Če pišemo $x = (T-\lambda I)x_\gamma$, dobimo

$$p_\gamma((T-\lambda I)x_\gamma) = 0$$

Ker je operator $(T-\lambda I)^{-1}$ definiran na vsem X in po predpostavki iz $\mathcal{L}_0(X)$, za poljuben $\alpha\in\Delta$ velja

$$p_\alpha((T-\lambda I)^{-1}x) \leqq C_\alpha p_\alpha(x) \quad , \; x\in X$$

kar lahko pišemo tudi v obliki

$$p_\alpha(y) \leqq C_\alpha p_\alpha((T-\lambda I)y) \quad , \; y\in X$$

V posebnem za $\alpha = \gamma$ in $y = x_\gamma$ dobimo

$$p_\gamma(x_\gamma) \leqq C_\gamma p_\gamma((T-\lambda I)x_\gamma) = 0$$

kar je v protislovju z $x_\gamma \notin J_\gamma$. Torej je tudi $\mathcal{R}((T-\lambda I)^o)$ gosta množica v X in ker je operator $(T-\lambda I)^o$ zvezen, zopet po lemi 5.2 sledi $\mathcal{R}((T-\lambda I)^o) = X$. V relaciji

$$((T-\lambda I)x,y)_\alpha = (x,(T-\lambda I)^o y)_\alpha \;\; ; \; x,y\in X,$$

tedaj smemo pisati $(T-\lambda I)x = v$, $(T-\lambda I)^o y = u$ pa dobimo

$$(v,((T-\lambda I)^o)^{-1}u)_\alpha = ((T-\lambda I)^{-1}v,u)_\alpha$$

za vsak $\alpha\in\Delta$ in poljubna $u,v\in X$. To pa ravno pomeni, da za operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja b-adjungirani operator in velja

$$((T-\lambda I)^{-1})^o = ((T-\lambda I)^o)^{-1} = (T^o-\bar{\lambda}I)^{-1}$$

Ker je prostor X H-Fréchetov, zopet iz eksistence b-adjungiranega operatorja $((T-\lambda I)^{-1})^o$ sledi njegova zveznost. Torej tudi operator $(T^o-\bar{\lambda}I)^{-1}$ obstaja, je definiran na vsem X in je zvezen, se pravi $\bar{\lambda}\in\rho(T^o)$.

Vzemimo še , da je $\bar{\lambda} \in \rho(T^o)$, se pravi operator $(T^o - \bar{\lambda}I)^{-1}$ obstaja, je gosto definiran in zvezen. Ker je tudi operator T^o zvezen, je $T^o \in \mathcal{L}^*(X)$ in tudi $T^o - \bar{\lambda}I \in \mathcal{L}^*(X)$. Sedaj na isti način kot zgoraj ugotovimo, da je $\lambda = \bar{\bar{\lambda}} \in \rho(T^{oo}) = \rho(T)$, s čimer smo dokazali izrek.

Vzemimo še operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$. Če je $\lambda \in \rho(T)$, operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja, je definiran na vsem X in je zvezen. Če je podprostor E poln, je po trditvi 4.1.6 operator $(T-\lambda I)^{-1}$ zvezen tudi v smislu norme na E. Ni pa nujno, da podprostor E preslika nazaj v E. Naj bo E poln podprostor, torej Hilbertov in z $\rho_E(S)$ označimo resolventno množico operatorja S v njem, definirano na običajen način. Če je operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$, $\lambda \in \rho(T)$ in operator $(T-\lambda I)^{-1}$ preslika podprostor E nazaj v E, je očitno tudi $\lambda \in \rho_E(T|_E)$.

<u>5.9 TRDITEV</u> Naj bo E poln podprostor v H-lokalno konveksnem prostoru X in operator $T \in \mathcal{L}_E(X)$, potem velja

$$\rho_E(T|_E) = \overline{\rho_E(T^*)}$$

<u>Dokaz</u>. Naj bo $\lambda \in \rho_E(T|_E)$, se pravi za operator $S = T|_E$ velja : $(S-\lambda I)^{-1}$ obstaja (na E), preslika E nazaj v E, je na E po normi zvezen in je gosto definiran. Adjungirani operator v običajnem smislu $((S-\lambda I)^{-1})^*$ je tudi definiran na vsem E, preslika podprostor E nazaj vase in je tam zvezen. Po trditvi 4.3.11 je

$$(S^* - \bar{\lambda}I)^{-1}x = ((S-\lambda I)^{-1})^* x$$

za vsak $x \in E$, torej $\bar{\lambda} \in \rho_E(S^*) = \rho_E(T^*)$.

Naj bo še $\lambda \in \rho_E(T^*)$, potem po istem sklepu kot zgoraj za operator T^* dobimo $\bar{\lambda} \in \rho_E(T^{**}) = \rho_E(T|_E)$.

Oglejmo si malo pobliže spekter sebiadjungiranih operatorjev.

5.10 IZREK Naj bo operator $A\in\mathcal{L}_E(X)$ a-sebiadjungiran, potem so lastne vrednosti, ki pripadajo lastnim vektorjem iz podprostora E, realne. Za dva lastna vektorja $x,y\in E$, ki pripadata različnima lastnima vrednostma, velja

$$\langle x,y\rangle = 0$$

Dokaz. Naj bo torej $Az=\lambda z$ in $z\in E$, potem velja

$$\lambda\langle z,z\rangle = \langle\lambda z,z\rangle = \langle Az,z\rangle\in R$$

Vzemimo še dve različni lastni vrednosti $\lambda\neq\mu$ z lastnima vektorjema $x,y\in E$:

$$Ax=\lambda x\ ,\ Ay=\mu y\ ;\ x,y\in E$$

potem velja

$$(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = \langle\lambda x,y\rangle-\langle x,\mu y\rangle = \langle Ax,y\rangle-\langle x,Ay\rangle = 0$$

kar smo želeli pokazati.

5.11 DISKUSIJA Operator $A\in\mathcal{L}_E(X)$ ima lahko tudi lastne vektorje izven množice E, za take primere ne moremo ničesar reči.

5.12 IZREK Naj bo $A\in\mathcal{L}(X)$ b-sebiadjungiran operator, potem so njegove lastne vrednosti realne. Za lastna vektorja x in y, ki pripadata različnima lastnima vrednostma $\lambda\neq\mu$, velja

$$x \perp\!\!\!\perp y$$

Dokaz. Prav tako kot zgoraj ugotovimo $\lambda(z,z)_\alpha\in R$, za vsak $\alpha\in\Delta$

in tudi $(\lambda-\mu)(x,y)_\alpha = 0$ pri vsakem $\alpha\in\Delta$, kar pomeni $x \perp\!\!\!\perp y$.

Ker imajo b-adjungirani in b-sebiadjungirani operatorji nekako lepše lastnosti kot a-adjungirani operatorji, bomo odslej v glavnem obravnavali le prve.

<u>5.13 LEMA</u> Naj bo operator A iz $\mathcal{L}(X)$ b-sebiadjungiran in X H-Fréchetov prostor. Potem veljata trditvi:

a) če je λ lastna vrednost operatorja A, tedaj množica $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ ni gosta v X,

b) če množica $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ ni gosta v X, obstaja indeks $\gamma_0\in\Delta$, da za vsak $\gamma \geqq \gamma_0$ obstaja element $x_\gamma \notin J_\gamma$ z lastnostjo

$$p_\gamma(Ax_\gamma-\lambda x_\gamma) = 0$$

<u>Dokaz</u>. Če je λ lastna vrednost, obstaja element $z \neq 0$, da velja $Az = \lambda z$. Po prejšnjem izreku je λ realno število in ker je

$$(z,Ax-\lambda x)_\alpha = (Az-\lambda z,x)_\alpha = 0$$

za vsak $x\in X$, je element $z \perp\!\!\!\perp \mathcal{R}(A-\lambda I)$, kar po korolarju 5.7 pomeni: množica $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ ni gosta v X.

Dokažimo še drugo trditev, naj $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ ne bo gosta množica v X, potem po izreku 5.6 obstaja indeks $\gamma_0\in\Delta$, da za vsak $\gamma \geq \gamma_0$ dobimo element $x_\gamma \notin J_\gamma$ z lastnostjo $(x_\gamma,y)_\gamma = 0$ za vsak y iz $\mathcal{R}(A-\lambda I)$. Torej je $(x_\gamma,Ax-\lambda x)_\gamma = 0$ za vsak $x\in X$, kar pomeni $(Ax_\gamma-\lambda x_\gamma,x)_\gamma = 0$. Če vzamemo $x = Ax_\gamma-\lambda x_\gamma$, dobimo

$$p_\gamma(Ax_\gamma-\lambda x_\gamma) = 0$$

kar smo želeli dokazati.

Sedaj lahko dokažemo lepo lastnost b-sebiadjungiranih operatorjev.

5.14 IZREK Spekter zveznega b-sebiadjungiranega operatorja, ki deluje v H-Fréchetovem prostoru, je realen.

Dokaz. Naj bo $A \in \mathcal{L}(X)$ b-sebiadjungiran operator in naj bo $\lambda = \xi + i\eta$ ($\eta \neq 0$) poljubno število iz spektra. Iz izreka 5.12 vemo, da tedaj λ ni lastna vrednost, kar pomeni, da operator $(A-\lambda I)^{-1}$ obstaja na $\mathcal{R}(A-\lambda I)$. Vzemimo poljuben element $y \in \mathcal{R}(A-\lambda I)$, ustrezni $x = (A-\lambda I)^{-1}y$ in izračunajmo

$$p_\alpha^2(y) = p_\alpha^2(Ax-\lambda x) = p_\alpha^2(Ax-\xi x) - 2\mathrm{Im}(Ax-\xi x, x)_\alpha + \eta^2 p_\alpha^2(x) =$$
$$= p_\alpha^2(Ax-\xi x) + \eta^2 p_\alpha^2(x)$$

Iz te relacije sledi najprej ocena $p_\alpha^2(y) \geqq \eta^2 p_\alpha^2(x)$, iz katere dobimo

$$p_\alpha((A-\lambda I)^{-1}y) \leqq \frac{1}{|\eta|} p_\alpha(y)$$

kar pomeni, da je operator $(A-\lambda I)^{-1}$ zvezen na $\mathcal{R}(A-\lambda I)$. Dokažimo še, da je zaklad vrednosti $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ gost v X. Če ne bi bil gost, bi po drugi trditvi prejšnje leme obstajal indeks $\gamma \in \Delta$ in element $x_\gamma \notin J_\gamma$ z lastnostjo

$$p_\gamma(Ax_\gamma - \lambda x_\gamma) = 0$$

Po drugi strani pa iz zgornje relacije pri $\alpha = \gamma$ in $x = x_\gamma$ sledi

$$0 = p_\gamma^2(Ax_\gamma - \lambda x_\gamma) = p_\gamma^2(Ax_\gamma - \xi x_\gamma) + \eta^2 p_\gamma^2(x_\gamma)$$

kar pomeni $p_\gamma(x_\gamma) = 0$, kar je v nasprotju s pogojem $x_\gamma \notin J_\gamma$. Za nerealno vrednost λ operator $(A-\lambda I)^{-1}$ obstaja, je zvezen in gosto definiran, torej število λ ni iz spektra.

5.15 TRDITEV Naj bo operator $A \in \mathcal{H}(X)$ in X H-Fréchetov prostor, potem je $\lambda \in \varrho(A)$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$.

Dokaz. Naj bo torej operator $A \in \mathcal{H}(X)$, se pravi je tudi iz prostora $\mathcal{L}_0(X)$. Če je $\lambda \in \varrho(A)$, to pomeni $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} = X$ in po lemi 5.2 $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$. Nekoliko več dela imamo z obratno smerjo. Naj bo torej $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$. Če λ ni realno število, je zaradi izreka 5.14 $\lambda \in \varrho(A)$ in je trditev dokazana. Število λ tudi ni lastna vrednost, ker bi po lemi 5.13 v tem primeru bilo $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} \neq X$. Torej obstaja operator $(A-\lambda I)^{-1}$, ki je definiran na vsem X. Za poljubna $x,y \in X$ obstajata elementa $u,v \in X$ z lastnostjo $(A-\lambda I)^{-1}x = u$, $(A-\lambda I)^{-1}y = v$ in imamo

$$((A-\lambda I)^{-1}x,y)_\alpha =(u,(A-\lambda I)v)_\alpha = ((A-\lambda I)u,v)_\alpha =(x,(A-\lambda I)^{-1}y)_\alpha$$

To pomeni, da je tudi operator $(A-\lambda I)^{-1}$ b-sebiadjungiran. Torej zanj obstaja b-adjungiran operator, ker je X po predpostavki H-Fréchetov, dobimo iz leme 4.2.6 zveznost operatorja $(A-\lambda I)^{-1}$ (velja celo $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}_0(X)$), torej je $\lambda \in \varrho(A)$.

5.16 DISKUSIJA Poznano je, da v primeru Hilbertovega prostora sebiadjungiran operator nima residualnega spektra. V našem primeru se v tej smeri ne da nič reči, ker nam lema 5.13 ne da dovolj močnih zaključkov.

5.17 IZREK Naj bo X H-Fréchetov prostor, potem je spekter b-sebiadjungiranega operatorja zaprta množica.

Dokaz. Dokazali bomo, da je resolventna množica $\varrho(A)$ odprta množica v ravnini kompleksnih števil. Vzemimo poljuben $\lambda_0 \in \varrho(A)$, potem obstaja zvezen operator $(A-\lambda I)^{-1}$, definiran na vsem X. V dokazu izreka 5.15 smo videli, da je tedaj ta operator tudi b-sebiadjungiran in iz $\mathcal{L}_0(X)$, torej

$$p_\alpha((A-\lambda_0 I)^{-1}x) \leqq C_\alpha p_\alpha(x)$$

za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Če je za neki $\alpha \in \Delta$ $C_\alpha = 0$, to pomeni $p_\alpha((A-\lambda_0 I)^{-1}x) = 0$ za vsak $x \in X$, oziroma $(A-\lambda_0 I)J_\alpha = X$. Ker pa je $A-\lambda_0 I \in \mathcal{L}_0(X)$, velja $(A-\lambda_0 I)J_\alpha \subset J_\alpha$, bi bilo to mogoče le v primeru $J_\alpha = X$, oziroma polnorma p_α identično enaka nič: $p_\alpha = 0$. Torej je $C_\alpha > 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$. Če pišemo $D_\alpha = 1/C_\alpha$ in $y=(A-\lambda_0 I)^{-1}x$, lahko zgornjo oceno prepišemo v obliko

$$p_\alpha((A-\lambda_0 I)y) \geqq D_\alpha p_\alpha(y)$$

Vzemimo sedaj tako točko $\lambda \in C$, da velja $|\lambda-\lambda_0| \leqq \delta \leqq D_\alpha/2$ in ocenimo

$$p_\alpha((A-\lambda I)y) \geqq p_\alpha((A-\lambda_0 I)y)-|\lambda-\lambda_0|\, p_\alpha(y) \geqq (D_\alpha - D_\alpha/2)p_\alpha(y)=D_\alpha p_\alpha(y)/2$$

Iz te ocene najprej dobimo, da je $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ gosta množica v X. Kajti v nasprotnem primeru bi zopet po lemi 5.13 obstajal indeks $\gamma \in \Delta$ in element $x_\gamma \notin J_\gamma$ z lastnostjo $p_\gamma(Ax_\gamma-\lambda x_\gamma) = 0$, kar je v protislovju z zgornjo oceno pri $\alpha = \gamma$ in $y = x_\gamma$. Prav tako λ ne more biti lastna vrednost operatorja A, kajti tedaj bi obstajal element $x_0 \neq 0$, se pravi $p_\beta(x_0) \neq 0$ vsaj za en indeks $\beta \in \Delta$ in bi bilo $p_\alpha(Ax_0-\lambda x_0) = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$, kar zopet ni mogoče zaradi zgornje ocene pri $y = x_0$ in $\alpha = \beta$. Obstaja torej inverzni operator $(A-\lambda I)^{-1}$, definiran na gosti množici $\mathcal{R}(A-\lambda I)$. Če v zgornji oceni zopet pišemo $x = (A-\lambda I)y$, dobimo

$$p_\alpha((A-\lambda I)^{-1}x) \leqq K_\alpha p_\alpha(x)$$

kjer je $K_\alpha = 2/D_\alpha$. Torej je operator $(A-\lambda I)^{-1}$ tudi zvezen, kar nazadnje pomeni $\lambda \in \rho(A)$. Množica $\sigma(A)$ je tako res zaprta.

6. STRUKTURA PROSTOROV $\mathcal{L}_o(X)$ IN $\mathcal{L}^*(X)$

6.1. Topologije na algebri $\mathcal{L}(X)$

Vzemimo množico linearnih zveznih operatorjev v H-lokalno konveksnem prostoru X, ki smo jo označili z $\mathcal{L}(X)$ in ugotovili, da je linearen prostor. Vpeljimo vanj topologijo preko omejenih množic prostora X, ki smo jih definirali v četrtem poglavju.

Označimo z $\mathcal{M}$ družino vseh omejenih množic našega H-lokalno konveksnega prostora X. Množica $\mathcal{M}$ je z inkluzijo delno urejena in usmerjena. Naj bo $\mathcal{N}$ neka poddružina družine $\mathcal{M}$. Rekli bomo, da je družina $\mathcal{N}$ zadostna, če velja

$$\bigcup_{M \in \mathcal{N}} M = X$$

Iz [19] povzemimo

6.1.1 IZREK Vsaka usmerjena in zadostna družina omejenih množic $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ definira s sistemom polnorm

$$Q_\Delta^{\mathcal{N}} = \left\{ q_\alpha^M(T) = \sup_{x \in M} p_\alpha(Tx); \quad M \in \mathcal{N},\ \alpha \in \Delta \right\}$$

na prostoru $\mathcal{L}(X)$ lokalno konveksno topologijo. $\mathcal{L}(X)$ je glede na to topologijo Hausdorffov prostor.

Če vzamemo za $\mathcal{N}$ družino končnih množic prostora X, dobimo tako imenovano šibko topologijo in prostor $\mathcal{L}(X)$ s to topologijo označimo z $\mathcal{L}_s(X)$. Druga skrajnost je, da za $\mathcal{N}$ vzamemo družino vseh omejenih množic prostora X in dobimo krepko topologijo. Prostor X s to topologijo označimo z $\mathcal{L}_b(X)$.

Za dano polnormo $q_\alpha^M \in Q_\Delta^{\mathcal{M}}$ in dana operatorja $S, T \in \mathcal{L}(X)$ lahko izračunamo vrednosti $q_\alpha^M(S)$, $q_\alpha^M(T)$ in $q_\alpha^M(ST)$, vendar med njimi ne dobimo v splošnem lepe povezave, kot je to primer v normiranih prostorih.

<u>6.1.2 TRDITEV</u> Naj bosta operatorja $S,T \in \mathcal{L}(X)$ in $q_\alpha^M \in Q_\Delta^{\mathcal{M}}$ poljubna polnorma. Potem je tudi $q_\alpha^{T(M)} \in Q_\Delta^{\mathcal{M}}$ ter obstajata nenegativni števili C_α, D_α in polnormi q_β^M, $q_\gamma^M \in Q_\Delta^{\mathcal{M}}$, da veljajo zveze:

(1) $q_\alpha^M(ST) = q_\alpha^{T(M)}(S)$

(2) $q_\alpha^M(ST) \leqq C_\alpha q_\beta^M(S)$

(3) $q_\alpha^M(TS) \leqq D_\alpha q_\gamma^M(T)$

<u>Dokaz</u>. Ker je T zvezen operator, je tudi omejen in za $M \in \mathcal{M}$ je tudi množica $T(M)$ iz $\mathcal{M}$. Dobimo

$$q_\alpha^M(ST) = \sup_{x \in M} p_\alpha(STx) = \sup_{y \in T(M)} p_\alpha(Sy) = q_\alpha^{T(M)}(S)$$

Zveznost operatorja S nam da tudi oceno

$$q_\alpha^M(ST) = \sup_{x \in M} p_\alpha(STx) \leqq C_\alpha \sup_{x \in M} p_\beta(Tx) \leqq C_\alpha q_\beta^M(T)$$

in prav podobno preverimo tudi zadnjo relacijo. Podobne relacije dobimo tudi za vsako drugo družino polnorm $Q_\Delta^{\mathcal{N}}$, kjer je $\mathcal{N}$ neka usmerjena in zadostna poddružina družine $\mathcal{M}$.

Če za operator T iz $\mathcal{L}(X)$ obstaja b-adjungirani operator T^0, prav tako ne dobimo kakšne dobre povezave med polnormami na njem in na operatorju T.

Če sta $S,T \in \mathcal{L}(X)$, je tudi operator $ST \in \mathcal{L}(X)$. Hitro se lahko prepričamo, da je $\mathcal{L}(X)$ algebra. Ker veljata v njej lastnosti (2) in (3), sta preslikavi $S \mapsto ST$ in $T \mapsto ST$ ($\mathcal{L}(X) \mapsto \mathcal{L}(X)$) zvezni. Množica $\mathcal{L}(X)$ je z zgornjo topologijo primer tako imenovane lokalno konveksne algebre.

Če se bomo omejili na operatorje $T\in\mathcal{L}_o(X)$ in izbrali primernejše polnorme na prostoru $\mathcal{L}_o(X)$, bomo dobili ugodnejše rezultate.

6.2. Topologija na algebrah $\mathcal{L}_o(X)$ in $\mathcal{L}_F(X)$

Vzemimo najprej prostor operatorjev $\mathcal{L}_o(X)$, to je operatorje, ki so definirani na vsem X in so zvezni v smislu

$$p_\alpha(Tx) \leqq C_\alpha p_\alpha(x) \; ; \quad x\in X,\ \alpha\in\Delta \tag{6.2.1}$$

V tem prostoru definirajmo topologijo s sistemom polnorm $Q = \{q_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, kjer je

$$q_\alpha(T) = \sup_{x\in X\setminus J_\alpha} \frac{p_\alpha(Tx)}{p_\alpha(x)} \tag{6.2.2}$$

Očitno je zaradi (6.2.1) $q_\alpha(T) \leqq C_\alpha < \infty$ in takoj se prepričamo, da je q_α res polnorma. Prava norma seveda ni, ker iz $q_\alpha(T) = 0$ sledi le $p_\alpha(Tx) = 0$ za vsak $x\in X\setminus J_\alpha$, za $x\in J_\alpha$ pa iz (6.2.1) sledi $Tx\in J_\alpha$. Torej velja tedaj za operator T le ugotovitev $\mathcal{R}(T)\subset J_\alpha$. Očitno velja tudi narobe, če je $\mathcal{R}(T)\subset J_\alpha$, je $q_\alpha(T) = 0$.

6.2.1 LEMA Če je družina polnorm $\mathcal{P}$ na prostoru X zadostna, je zadostna tudi družina polnorm Q na prostoru $\mathcal{L}_o(X)$.

Dokaz. Naj bo operator $T\in\mathcal{L}_c(X)$ neničelen : $T\neq 0$. Potem obstaja vsaj en element $x_o\in X$, da je $Tx_o\neq 0$. Ker je družina $\mathcal{P}$ zadostna, potem obstaja vsaj ena polnorma $p_{\alpha_o}\in\mathcal{P}$ z lastnostjo $p_{\alpha_o}(Tx_o) > 0$. Pri tem je tudi $p_{\alpha_o}(x_o) > 0$, ker v nasprotnem primeru ne velja pogoj (6.2.1). Torej je $x_o\in X\setminus J_{\alpha_o}$ in imamo

$$q_{\alpha_0}(T) = \sup_{x \in J_{\alpha_0}^c} \frac{p_{\alpha_0}(Tx)}{p_{\alpha_0}(x)} \geqq \frac{p_{\alpha_0}(Tx_0)}{p_{\alpha_0}(x_0)} > 0$$

Torej nam družina polnorm Q definira na prostoru $\mathcal{L}_0(X)$ neko lokalno konveksno topologijo, za katero je $\mathcal{L}_0(X)$ Hausdorffov prostor.

Dokažimo nekaj lastnosti dobljenih polnorm na prostoru $\mathcal{L}_0(X)$.

<u>6.2.2 LEMA</u> Za operatorje $T \in \mathcal{L}_0(X)$ in družini polnorm $\mathcal{P}$ in Q velja

$$p_\alpha(Tx) \leqq q_\alpha(T)p_\alpha(x) \quad ; \; x \in X, \; \alpha \in \Delta \qquad (6.2.3)$$

Zares, najprej sledi ta ocena iz definicije polnorme $q_\alpha(T)$ za vsak $x \in X \setminus J_\alpha$, vendar velja zaradi pogoja zveznosti operatorja T (6.2.1) tudi za $x \in J_\alpha$.

<u>6.2.3 LEMA</u> Za operatorje $T \in \mathcal{L}_0(X)$ imamo dve ekvivalentni definiciji polnorme $q_\alpha(T)$:

$$q_\alpha(T) = \sup_{x \in X \setminus J_\alpha} \frac{p_\alpha(Tx)}{p_\alpha(x)} = \sup_{x,y \in X \setminus J_\alpha} \frac{|(Tx,y)_\alpha|}{p_\alpha(x)p_\alpha(y)}$$

<u>Dokaz</u>. Očitno je $q'(T) \equiv \sup_{x,y \in J_\alpha^c} \frac{|(Tx,y)_\alpha|}{p_\alpha(x)p_\alpha(y)} \leqq q_\alpha(T)$, po drugi strani pa je najprej

$$|(Tx,y)_\alpha| \leqq q'_\alpha(T)p_\alpha(x)p_\alpha(y) \quad ; \; x,y \in X \setminus J_\alpha$$

in ta ocena očitno velja tudi za $x,y \in J_\alpha$. Če vzamemo $y = Tx$, dobimo

$$p_\alpha(Tx)^2 \leqq q'_\alpha(T)p_\alpha(x)p_\alpha(Tx)$$

Vrednost $q_\alpha(T)$ se nič ne spremeni, če definicijo (6.2.2) popravimo tako, da izvzamemo tiste vektorje $x \in X$, za katere je

$p_\alpha(Tx) = 0$, torej

$$q_\alpha(T) = \sup\left\{ \frac{p_\alpha(Tx)}{p_\alpha(x)}, \quad x \in X \setminus J_\alpha, \ p_\alpha(Tx) \neq 0 \right\}$$

V kolikor je $p_\alpha(Tx) = 0$ za vsak $x \in X$, je $q_\alpha(T) = 0$ in gotovo velja $q'_\alpha(T) \geqq q_\alpha(T)$. Smemo se torej omejiti na tiste $x \in X$, za katere je $p_\alpha(Tx) \neq 0$. Iz zgornje ocene tedaj dobimo

$$p_\alpha(Tx) \leqq q'_\alpha(T) p_\alpha(x) \quad ; \ x \in X \setminus J_\alpha, \quad p_\alpha(Tx) > 0$$

od koder dobimo še obratno neenačbo

$$q_\alpha(T) \leqq q'_\alpha(T)$$

6.2.4 LEMA Za operatorja $S, T \in \mathcal{L}_0(X)$ in poljubno polnormo $q_\alpha \in Q$ velja

$$q_\alpha(ST) \leqq q_\alpha(S) q_\alpha(T)$$

Dokaz. Iz nenenačbe (6.2.3) dobimo najprej

$$p_\alpha(Sx) \leqq q_\alpha(S) p_\alpha(x)$$
$$p_\alpha(Tx) \leqq q_\alpha(T) p_\alpha(x)$$

za vsak $x \in X$, od koder sledi ocena

$$p_\alpha(STx) \leqq q_\alpha(S) p_\alpha(Tx) \leqq q_\alpha(S) q_\alpha(T) p_\alpha(x)$$

iz katere sledi potem naša trditev neposredno.

6.2.5 LEMA Za identični operator I velja

$$q_\alpha(I) = 1$$

za vsak $\alpha \in \Delta$.

Dokaz je trivialen.

6.2.6 IZREK Množica operatorjev $\mathcal{L}_0(X)$ je glede na družino polnorm Q polna lokalno m-konveksna algebra.

Dokaz. Lokalno m-konveksna algebra je splošna algebra, v kateri je definirana lokalno konveksna topologija z nekim sistemom polnorm $\{q\}$, za katere velja multiplikativni aksiom

$$q(ab) \leq q(a)q(b)$$

za poljubna elementa a,b iz take algebre.

Dokažimo, da naša množica $\mathcal{L}_0(X)$ izpolnjuje te pogoje. Če sta operatorja $S,T \in \mathcal{L}_0(X)$, potem velja

$$p_\alpha(STx) \leq C_\alpha p_\alpha(Tx) \leq C_\alpha C'_\alpha p_\alpha(x)$$

torej je tudi $ST \in \mathcal{L}_0(X)$ in je $\mathcal{L}_0(X)$ očitno algebra. Ker družina polnorm Q definira na $\mathcal{L}_0(X)$ lokalno konveksno topologijo in za vsako polnormo velja lema 6.2.4, je $\mathcal{L}_0(X)$ res lokalno m-konveksna algebra.

Vzemimo neko posplošeno Cauchyjevo zaporedje $\{T_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ operatorjev iz $\mathcal{L}_0(X)$, se pravi: za poljuben $\varepsilon > 0$ in poljubno polnormo $q_\alpha \in Q$ obstaja indeks $\delta_0 \in \Gamma$ z lastnostjo

$$q_\alpha(T_{\delta'} - T_{\delta''}) < \varepsilon$$

za $\delta', \delta'' \geq \delta_0$. To oceno lahko zapišemo v obliki

$$p_\alpha(T_{\delta'}x - T_{\delta''}x) < \varepsilon\, p_\alpha(x) \tag{6.2.4}$$

za vsak $x \in X \setminus J_\alpha$ in $\delta', \delta'' \geq \delta_0$. Ta ocena velja tudi za $x \in J_\alpha$, ker so vsi operatorji $T_\delta \in \mathcal{L}_0(X)$. Torej je pri poljubnem vektorju $x \in X$ posplošeno zaporedje $\{T_\delta x\}_{\delta\in\Gamma}$ Cauchyjevo v prostoru X in ker je ta poln, obstaja limita. Definirajmo operator T s predpisom

$$Tx = \lim_{\delta \in \Gamma} T_\delta x$$

Operator T je očitno linearen. Vzemimo poljuben element $x \notin J_\alpha$, izberimo $\varepsilon > 0$ in pišimo $\varepsilon' = \varepsilon p_\alpha(x) > 0$. Potem za ε' obstaja tak indeks $\delta' \in \Gamma$, da velja: $p_\alpha(T_\delta x - Tx) < \varepsilon' = \varepsilon p_\alpha(x)$ za vsak indeks $\delta \geqq \delta'$. Od tod dobimo za poljuben $\delta \geqq \delta'$ oceno

$$p_\alpha(Tx) \leqq p_\alpha(T_\delta x - Tx) + p_\alpha(T_\delta x) \leqq \varepsilon\, p_\alpha(x) + C_\alpha^\delta p_\alpha(x) = C'_\alpha\, p_\alpha(x)$$

Za $x \in J_\alpha$ je $p_\alpha(T_\delta x) = 0$ za vsak $\delta \in \Gamma$, od koder sledi, da je tudi $p_\alpha(Tx) = 0$. Torej lahko za vsak $x \in X$ zapišemo

$$p_\alpha(Tx) \leqq C'_\alpha\, p_\alpha(x)$$

kar pomeni ravno $T \in \mathcal{L}_o(X)$. Dokazati moramo le še, da zaporedje $\{T_\delta\}_{\delta \in \Gamma}$ konvergira proti operatorju T tudi v smislu polnorm q_α. Vzemimo poljuben $\varepsilon_1 > 0$ in $\alpha \in \Delta$. Ker pri vsakem $x \in X$ zaporedje $\{T_\delta x\}$ konvergira k Tx, obstaja indeks $\delta_1 \in \Gamma$, da velja

$$p_\alpha(T_\delta x - Tx) < \varepsilon_1$$

za vsak $\delta \geqq \delta_1$. S pomočjo ocene (6.2.4), ki velja za vsak $x \in X$, dobimo za poljubni skupni naslednik δ' k indeksoma δ_o in δ_1:

$$p_\alpha(T_{\delta'} x - Tx) \leqq p_\alpha(T_{\delta'} x - T_{\delta''} x) + p_\alpha(T_{\delta''} x - Tx) < \varepsilon\, p_\alpha(x) + \varepsilon_1$$

če je le tudi $\delta' \geqq \delta_o$. Ker je ε_1 poljuben, velja za vsak $x \in X$: $p_\alpha(T_{\delta'} x - Tx) \leqq \varepsilon\, p_\alpha(x)$, od koder sledi tudi za supremum

$$q_\alpha(T_{\delta'} - T) \leqq \varepsilon$$

kar pomeni ravno konvergenco glede na polnorme q_α.

Omejimo se še na posebno podmnožico operatorjev iz algebre $\mathcal{L}_o(X)$, to je na razred operatorjev $\mathcal{L}_F(X)$, ki smo ga omenili v poglavju 4. Za operatorje $T \in \mathcal{L}_F(X)$ velja

$$p_\alpha(Tx) \leqq C\, p_\alpha(x) \tag{6.2.5}$$

Torej je konstanta C neodvisna od indeksa $\alpha\in\Delta$. Naj opomnimo, da je take operatorje, ki delujejo v splošnem lokalno konveksnem prostoru, omenjal T. Moore v [12] in jih imenoval Δ-končne operatorje.

Neposredno se lahko prepričamo, da je vsak Δ-končen operator tudi omejen in preslika naš predhilbertov podprostor E nazaj vase. Za take operatorje lahko definiramo celo pravo normo

$$\| T \| = \sup \{ p_\alpha(Tx) \ ; \ \ x\in X, \alpha\in\Delta, \ p_\alpha(x) = 1 \} \tag{6.2.6}$$

kar sledi iz zveze

$$\| T \| = \sup_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(T) \tag{6.2.7}$$

ki je ni težko preveriti.

Iz zveze (6.2.7) in leme 6.2.4 sedaj sledi:

<u>6.2.7 LEMA</u> Za operatorje $S,T \in \mathcal{L}_F(X)$ in normo $\| \ \|$ velja

$$\| ST \| \leqq \| S\| \|T\| \tag{6.2.8}$$

Δ-končni operatorji tvorijo celo normirano algebro.

<u>6.2.8 IZREK</u> Množica Δ-končnih operatorjev $\mathcal{L}_F(X)$ je Banachova algebra.

<u>Dokaz</u>. Očitno je množica $\mathcal{L}_F(X)$ algebra, v kateri imamo normo, za katero velja lastnost (6.2.8). Dokazati je treba le še njeno polnost. Naj bo $\{T_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ zopet neko posplošeno Cauchyjevo zaporedje operatorjev iz $\mathcal{L}_F(X)$, potem je to zaporedje zaradi zveze (6.2.7) Cauchyjevo tudi za vsako polnormo q_α:

$$q_\alpha(T_{\delta'} - T_{\delta''}) < \varepsilon \ ; \ \delta', \delta'' \geqq \delta_0, \ \alpha \in \Delta$$

Ker je $\mathcal{L}_0(X)$ po izreku 6.2.6 poln prostor, obstaja limitni operator T, proti kateremu konvergira zaporedje $\{T_\delta\}$ glede na polnorme q_α. Če torej v zgornji oceni vzamemo dovolj "pozen" indeks δ'', dobimo

$$q_\alpha(T_\delta - T) < \varepsilon$$

za vsak indeks $\delta \geqq \delta_0$ in vsako polnormo $q_\alpha \in Q$. Taka ocena potem velja tudi za supremum po vseh $\alpha \in \Delta$:

$$\| T_\delta - T \| \leqq \varepsilon$$

kar pomeni, da je $\mathcal{L}_F(X)$ poln prostor.

Dokažimo sedaj še dva izreka v zvezi z Δ-končnimi operatorji, ker ju bomo kasneje še rabili.

<u>6.2.9 IZREK</u> Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in operator $T \in \mathcal{L}_F(X)$ tak, da je $\|T\| < 1$. Potem operator $(I-T)^{-1}$ obstaja, je definiran na vsem X, je tudi Δ-končen, vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergira glede na operatorsko normo $\| \ \|$ k operatorju $(I-T)^{-1}$ in velja ocena

$$\| (I - T)^{-1} \| \leqq 1/(1-\|T\|)$$

<u>Dokaz</u>. Oglejmo si zaporedje operatorjev

$$S_n = I + T + T^2 + \ldots + T^n$$

Očitno je tudi S_n iz $\mathcal{L}_F(X)$ in ker velja

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| \sum_{n+1}^{n+p} T^k \| \leqq \sum_{n+1}^{n+p} \| T \|^k$$

je zaporedje $\{S_n\}$ Cauchyjevo v normi prostora $\mathcal{L}_F(X)$. Ker je le-ta po prejšnjem izreku poln, obstaja limita

$$S = I + T + T^2 + \ldots .$$

pri čemer je tudi $S \in \mathcal{L}_F(X)$. Ker velja

$$ST = TS = T + T^2 + \ldots .$$

in

$$(I - T)S = S - TS = I$$

operator $(I-T)^{-1}$ obstaja, je enak operatorju S in je definiran na vsem X. Tudi oceno za njegovo normo dobimo neposredno

$$\|(I-T)^{-1}\| \leqq \sum_{0}^{\infty} \|T\|^k = 1/(1-\|T\|)$$

Dodajmo še izrek o razsežnosti spektra operatorja $T \in \mathcal{L}_F(X)$.

<u>6.2.10 IZREK</u> Naj bo operator $T \in \mathcal{L}_F(X)$, potem je vsako število $\lambda \in \mathbb{C}$, za katerega je $|\lambda| > \|T\|$, iz resolventne množice operatorja T.

<u>Dokaz</u>. Smemo se omejiti na netrivialen operator $T \neq 0$, tedaj je tudi $\lambda \neq 0$. Tudi operator $S = \frac{1}{\lambda} T$ je tudi Δ-končen in velja

$$\|S\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T\| < 1$$

Če zapišemo

$$\lambda(\lambda I-T)^{-1} = (I-\tfrac{1}{\lambda}T)^{-1} = (I-S)^{-1}$$

lahko po prejšnjem izreku sedaj ugotovimo, da je $\lambda \in \rho(T)$.

V poglavju 4 smo imenovali b-unitaren operator tak operator $U \in \mathcal{L}(X)$, za katerega sta veljala pogoja

$$(Ux, Uy)_\alpha = (x,y)_\alpha \; ; \quad x,y \in X, \ \alpha \in \Delta$$

in

$$\mathcal{R}(U) = X$$

Če velja le prvi pogoj, smo govorili o b-izometriji. Oglejmo si še nekaj lastnosti takih operatorjev.

6.2.11 TRDITEV Vsaka b-izometrija U je Δ-končen operator z normo $\| U \| = 1$.

Dokaz. Uporabimo lemo 4.3.22

$$q_\alpha(U) = \sup_{x \in X \setminus \mathfrak{J}_\alpha} (p_\alpha(Ux)/p_\alpha(x)) = \sup_{x \in X \setminus \mathfrak{J}_\alpha} (p_\alpha(x)/p_\alpha(x) = 1$$

kar pomeni: $\| U \| = \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(U) = 1$.

6.2.12 TRDITEV Lastne vrednosti b-izometrije so po absolutni vrednosti enake 1.

Dokaz. Če je $Ux = \lambda x$, imamo

$$(x,x)_\alpha = (Ux,Ux)_\alpha = (\lambda x,\lambda x)_\alpha = |\lambda|^2(x,x)_\alpha$$

ali $(1-|\lambda|^2)(x,x)_\alpha = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$, kar pomeni $|\lambda| = 1$.

6.2.13 TRDITEV Za lastna vektorja $x,y \in X$, ki pripadata različnima lastnima vrednostima b-izometrije, velja

$$x \perp\!\!\!\perp y$$

Dokaz. Naj bo : $Ux = \lambda x$, $Uy = \mu y$ in $\lambda \neq \mu$, potem je

$$(x,y)_\alpha = (Ux,Uy)_\alpha = (\lambda x,\mu y)_\alpha = \lambda\bar{\mu}(x,y)_\alpha$$

in

$$(1-\lambda\bar{\mu})(x,y)_\alpha = 0$$

za vsak indeks $\alpha \in \Delta$, kar pomeni

$$(x,y)_\alpha = 0 \quad ,$$

oziroma $x \perp\!\!\!\perp y$.

Seveda ni nujno, da ima unitaren operator b-adjungirani operator. Za tiste, ki imajo to lastnost, dokažimo še dva izreka.

6.2.14 LEMA Operator $U \in \mathcal{L}^*(X)$ je unitaren natanko tedaj, ko velja

$$U^oU = I \quad , \quad UU^o = I$$

Dokaz. Če je operator $U \in \mathcal{L}^*(X)$ unitaren, sledi

$$(U^oUx,y)_\alpha = (Ux,Uy)_\alpha = (x,y)_\alpha$$

kar pomeni $U^oU = I$. Ker je tudi $\mathcal{R}(U) = X$, za vsak element $x \in X$ obstaja $y \in X$ z lastnostjo $x = Uy$ in velja tudi druga relacija

$$UU^ox = UU^oUy = Uy = x$$

Obraten sklep je še bolj preprost.

6.2.15 IZREK Spekter unitarnega operatorja $U \in \mathcal{L}^*(X)$ leži na enotni krožnici.

Dokaz. Ker je $\|U\| = 1$ in po lemi 6.2.3 tudi $\|U^o\| = \sup_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(U^o) =$ $= \sup_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(U) = 1$, po izreku 6.2.10 za vsako število λ, ki je po absolutni vrednosti nad 1, velja $\lambda \in \rho(U)$ in tudi $\lambda \in \rho(U^o)$. Ker U^{-1} obstaja, je $0 \in \rho(U)$. Naj bo $0 < |\lambda| < 1$, potem je $\frac{1}{|\lambda|} > 1$ in je $\frac{1}{\lambda} \in \rho(U^o)$. Da je tudi tedaj $\lambda \in \rho(U)$, sledi iz zveze

$$(\lambda I-U)^{-1} = \left[\lambda U(U^o-\tfrac{1}{\lambda}I)\right]^{-1} = \tfrac{1}{\lambda}(U^o-\tfrac{1}{\lambda}I)^{-1}U^o$$

6.3. Algebra operatorjev $\mathcal{L}^*(X)$

V razdelku 4.2 smo videli, da za vsak operator ne obstaja nujno njegov b-adjungirani operator in smo zato z $\mathcal{L}^*(X)$ označili množico operatorjev iz $\mathcal{L}_o(X)$, za katere tak operator obstaja. Kot vemo, je tedaj b-adjungirani operator tudi iz množice $\mathcal{L}_o(X)$.

Preden bomo povedali kaj več o množici operatorjev $\mathcal{L}^*(X)$, si oglejmo nekaj zgledov takih operatorjev na prostoru $X = L_2^{loc}(R)$.

6.3.1 PRIMER Naj bo $K(s,t) \neq 0$ za $0 \leq s,t \leq 1$ in $K(s,t) = 0$ drugod ter $K(s,t) \in L_2([0,1] \times [0,1])$, potem za integralski operator s tem jedrom vedno obstaja b-adjungirani operator.

Zares, pišimo

$$y(s) = (Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt \ ; \quad 0 \leq s \leq 1$$

in $y(s) = 0$ za $1 < s$. Očitno operator T preslika prostor $L_2^{loc}(R)$ vase in je zvezen

$$p_n(Tx)^2 \leq \int_0^1 |K(s,t)|^2 dt \cdot \int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq C^2 p_1(x)^2$$

Za poljubna elementa $x,y \in L_2^{loc}(R)$ in $\alpha = n \in N$ velja

$$(Tx,y)_n = \int_0^n \overline{y}(s)ds \int_0^1 K(s,t)x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt \int_0^1 K(s,t)\overline{y}(s)ds = (x, T^o y)_n$$

pri čemer je

$$(T^o y)(s) = \int_0^1 \overline{K(t,s)}y(t)dt$$

za $0 \leq s \leq 1$ in $(T^o y)(s) = 0$ za $s > 1$.

Vzemimo še naslednji zgled, ki je podoben primeru 4.2.14.

6.3.2 PRIMER Naj bo $K(s,t) \neq 0$ za $(s,t) \in M = \bigcup_{i=1}^{\infty} ([i,i+1] \times [i,i+1])$ in $K(s,t) = 0$ drugod ter $\int_0^n\int_0^n |K(s,t)|^2 ds dt < \infty$ za vsak $n \in N$. Potem za operator s tem jedrom vedno obstaja b-adjungirani operator.

Za $s > 0$ velja

$$(Tx)(s) = \int_{[s]}^{[s]+1} K(s,t)x(t)dt$$

medtem ko je za $s < 0$ $(Tx)(s) = 0$. Iz predpostavk se hitro vidi, da je T zvezen operator iz $L_2^{loc}(R)$ vase. Zopet izračunajmo

$$(Tx,y)_n = \int_0^m \overline{y}(s)ds \int_{[s]}^{[s]+1} K(s,t)x(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} \overline{y}(s)ds \int_k^{k+1} K(s,t)x(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} x(s)ds \int_k^{k+1} K(t,s)\overline{y}(t)dt = (x,T^o y)_n$$

kjer smo definirali operator

$$(T^o y)(s) = \int_{[s]}^{[s]+1} \overline{K(t,s)} y(t)dt$$

za $s \geq 0$ in $(T^o y)(s) = 0$ za $s < 0$. Če je $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, je operator T b-sebiadjungiran.

Ker je množica operatorjev $\mathcal{L}^*(X)$ vsebovana v algebri $\mathcal{L}_o(X)$, bomo tudi v njej vzeli topologijo, ki jo inducira družina polnorm Q.

Če sta operatorja S,T iz $\mathcal{L}^*(X)$, potem tudi za operator ST obstaja b-adjungiran operator $(ST)^o = T^o S^o \in \mathcal{L}^*(X)$. Tako ima tudi množica $\mathcal{L}^*(X)$ strukturo algebre. Dokazali bomo še nekaj njenih lastnosti.

6.3.3 LEMA Za vsak operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ in poljubno polnormo $q_\alpha \in Q$ veljata relaciji

(1) $q_\alpha(T) = q_\alpha(T^o)$

(2) $q_\alpha(T^\circ T) = q_\alpha(T)^2$

Dokaz. Prva relacija sledi iz leme 6.2.3:

$$q_\alpha(T) = \sup_{x,y\in J_\alpha^c} \frac{|(Tx,y)_\alpha|}{p_\alpha(x)p_\alpha(y)} = \sup_{x,y\in J_\alpha^c} \frac{|(T^\circ y,x)_\alpha|}{p_\alpha(x)p_\alpha(y)} = q_\alpha(T^\circ)$$

nakar lahko po lemi 6.2.4 še ocenimo

$$q_\alpha(T^\circ T) \leqq q_\alpha(T^\circ)q_\alpha(T) = q_\alpha(T)^2$$

Medtem ko imamo po drugi strani

$$p_\alpha(Tx)^2 = (x,T^\circ Tx)_\alpha \leqq p_\alpha(x)p_\alpha(T^\circ Tx) \leqq p_\alpha(x)^2 q_\alpha(T^\circ T)$$

za vsak $x\in X\setminus J_\alpha$, kar sledi iz ocene (6.2.3). Če delimo to neenačbo s $p_\alpha(x)$ in naredimo supremum po vseh $x\in X\setminus J_\alpha$, dobimo

$$q_\alpha(T)^2 \leqq q_\alpha(T^\circ T)$$

kar nam skupaj z zgornjo neenačbo da ravno relacijo (2).

Dodajmo še izrek o polnosti:

6.3.4 LEMA Naj bo X H-lokalno konveksen prostor. Potem je $\mathcal{L}^*(X)$ tudi poln prostor.

Dokaz. Naj bo torej X H-lokalno konveksen prostor, ki je po predpostavki poln. Vzemimo posplošeno Cauchyjevo zaporedje operatorjev $\{T_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$ iz $\mathcal{L}^*(X)$. Ker je po izreku 6.2.6 prostor $\mathcal{L}_0(X)$ poln, to zaporedje konvergira proti nekemu operatorju $T\in\mathcal{L}_0(X)$. K temu zaporedju tvorimo še zaporedje b-adjungiranih operatorjev $\{T_\delta^\circ\}_{\delta\in\Gamma}$, ki je zaradi lastnosti (1) v zadnji lemi tudi Cauchyjevo in zato konvergira k nekemu operatorju $S\in\mathcal{L}_0(X)$. Zapišimo sedaj razliko in ocenimo

$$|(Tx,y)_\alpha-(x,Sy)_\alpha| = |(Tx,y)_\alpha-(T_\delta x,y)+(x,T_\delta^o y)_\alpha-(x,Sy)_\alpha| \leqq$$
$$\leqq q_\alpha(T-T_\delta)p_\alpha(x)p_\alpha(y) + q_\alpha(T_\delta^o-S)p_\alpha(x)p_\alpha(y)$$

Če za poljubno majhen $\varepsilon>0$ vzamemo dovolj "pozen" indeks $\delta\in\Gamma$, dobimo

$$|(Tx,y)_\alpha - (x,Sy)_\alpha| \leqq 2\varepsilon\, p_\alpha(x)p_\alpha(y)$$

za poljubna $x,y\in X$. Ker je $\varepsilon>0$ poljubno majhen, dobimo za vsak $\alpha\in\Delta$ in $x,y\in X$

$$(Tx,y)_\alpha = (x,Sy)_\alpha$$

kar pomeni, da za operator T obstaja b-adjungirani operator $T^o = S$.

Algebra $\mathcal{L}^*(X)$ z zgoraj definirano lokalno konveksno topologijo je primer tako imenovane LMC^*- algebre, ki je posplošitev C^* - algeber in jih je obravnaval K. Schüdgen v [18]. LMC^* - algebra je multiplikativna topološka $*$- algebra, v kateri je topologija definirana s sistemom polnorm $\{q\}$, za katere veljata aksioma: $q(ab) \leqq q(a)q(b)$ in $q(a^*a) = q(a)^2$ za poljubna elementa a in b iz algebre. Kot smo videli v pomožnem izreku 6.3.3, algebra $\mathcal{L}^*(X)$ zadošča tema pogojema in dobljene ugotovitve lahko strnemo v izrek:

<u>6.3.5 IZREK</u> Naj bo X H-lokalno konveksen prostor. Potem je $\mathcal{L}^*(X)$ polna LMC^* - algebra.

Kasneje bo ugodno, če bo algebra $\mathcal{L}^*(X)$ sodčasta, se pravi vsaka konveksna, uravnovešena, zaprta in absorbirajoča množica v $\mathcal{L}^*(X)$ je okolica izhodišča ([19]).

6.3.6 TRDITEV Če je X H-Fréchetov prostor, je $\mathcal{L}^*(X)$ sodčasta LMC*- algebra.

Dokaz. Če je družina polnorm $\mathcal{P}$ na prostoru X števna, je tudi družina polnorm Q na $\mathcal{L}^*(X)$ števna. Po prejšnjem izreku je $\mathcal{L}^*(X)$ poln prostor in je torej Fréchetov, kar pomeni, da je 2. kategorije. Vsak lokalno konveksen prostor 2. kategorije pa je sodčast ([19]).

Podobno kot se dajo splošne C*-algebre reprezentirati z operatorji, se dajo tudi splošne LMC*-algebre reprezentirati z operatorji, vendar ne bodo le-ti imeli,kot lahko pričakujemo,v splošnem tako lepih lastnosti kot v primeru C*-algeber. G. Lassner je v [10] pokazal, da je vsaka sodčasta LMC*-algebra topološko in algebrajsko $*$- izomorfna neki lokalno konveksni algebri v splošnem neomejenih operatorjev, ki delujejo na nekem predhilbertovem prostoru $\mathfrak{D}$ z lastnostjo, da za vsak $A \in \mathcal{A}$ obstaja operator $A^+ \in \mathcal{A}$ tako, da je

$$(Ax,y) = (x,A^+y) \ ; \quad x,y \in \mathfrak{D}$$

Topologijo na $\mathcal{A}$ določa sistem polnorm

$$q_M(A) = \sup_{x,y \in M} |(Ax,y)|$$

kjer je M taka množica na $\mathfrak{D}$, da je $q_M(A) < \infty$ za vsak operator $A \in \mathcal{A}$. Algebro operatorjev z omenjenimi lastnostmi imenuje G. Lassner Op*-algebro. Z $\mathcal{L}_+(\mathfrak{D})$ označimo maksimalno lokalno konveksno algebro na predhilbertovem prostoru $\mathfrak{D}$ z zgornjimi lastnostmi.

Če je prostor X H-Fréchetov, je po prejšnjem izreku $\mathcal{L}^*(X)$ sodčasta LMC*- algebra in iz [10] povzemimo :

6.3.7 IZREK Če je X H-Fréchetov prostor, je algebra $\mathcal{L}^*(X)$ algebrajsko in topološko $*$- izomorfna neki Op^*- algebri $\mathcal{A}$ z lastnostma

$$q_M(AB) \leqq q_M(A)q_M(B)$$

$$q_M(A^+) = q_M(A)$$

za vsak operator $A \in \mathcal{A}$.

Torej se dajo operatorji iz $\mathcal{L}^*(X)$, ki delujejo na H-Fréchetovem prostoru X reprezentirati z nekimi neomejenimi operatorji, ki delujejo na predhilbertovem prostoru. Oglejmo si nekoliko bolj natančno to reprezentacijo za naše operatorje.

Vzemimo polnormo $q_\alpha \in Q$ in definirajmo množico

$$I_\alpha(X) = \{T \in \mathcal{L}^*(X), \quad q_\alpha(T) = 0\}$$

Če je $q_\alpha(T) = 0$, je, kot smo videli $\mathcal{R}(T) \subset J_\alpha$ in narobe, če je $p_\alpha(Tx) = 0$ za vsak $x \in X$, je potem tudi $q_\alpha(T) = 0$ zaradi zveznosti operatorja T. Tako, da imamo tudi naslednjo karakterizacijo množice $I_\alpha(X)$

$$I_\alpha(X) = \{T \in \mathcal{L}^*(X) \;, \quad p_\alpha(Tx) = 0 \text{ za vsak } x \in X\}$$

Dokažimo nekaj lastnosti te množice.

6.3.8 LEMA Množica $I_\alpha(X)$ je zaprt dvostranski ideal v algebri $\mathcal{L}^*(X)$.

Dokaz. Če je $T \in I_\alpha(X)$ in $S \in \mathcal{L}^*(X)$, velja

$$q_\alpha(ST) \leqq q_\alpha(S)q_\alpha(T) = 0$$

$$q_\alpha(TS) \leqq q_\alpha(T)q_\alpha(S) = 0$$

Dokažimo še zaprtost. Naj bo $\{T_\delta\}_{\delta\in\Gamma} \subset I_\alpha(X)$ posplošeno zaporedje , ki konvergira proti operatorju T iz $\mathcal{L}^*(X)$. Od tod sledi, da za poljubno majhen $\varepsilon > 0$ obstaja indeks $\delta_0 \in \Gamma$ z lastnostjo

$$q_\alpha(T_\delta - T) < \varepsilon$$

za vsak $\delta \geq \delta_0$. Od tod za poljuben $\delta \geq \delta_0$ dobimo

$$q_\alpha(T) \leqq q_\alpha(T - T_\delta) + q_\alpha(T_\delta) = q_\alpha(T - T_\delta) < \varepsilon$$

ker je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen, je $q_\alpha(T) = 0$.

<u>6.3.9 LEMA</u> Če je $\alpha \leqq \beta$, velja $I_\beta(X) \subset I_\alpha(X)$.

Zares, če je $T \in I_\beta(X)$, pomeni $p_\beta(Tx) = 0$ za vsak $x \in X$. Potem je tudi $p_\alpha(Tx) \leqq p_\beta(Tx) = 0$ za vsak $x \in X$, oziroma velja $T \in I_\alpha(X)$.

<u>6.3.10 LEMA</u> Ideal $I_\alpha(X)$ je tudi zaprt za adjungiranje:

$$T \in I_\alpha(X) \Longrightarrow T^0 \in I_\alpha(X)$$

Spomniti se je treba le lastnosti $q_\alpha(T) = q_\alpha(T^0)$.

Definirajmo sedaj kvocientne prostore

$$\mathcal{L}^*_\alpha(X) = \mathcal{L}^*(X)/I_\alpha(X)$$

Za operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ pišimo

$$T_\alpha = T + I_\alpha(X)$$

kot element kvocientnega prostora $\mathcal{L}^*_\alpha(X)$. Zanj imamo pravo normo

$$\| T_\alpha \|_\alpha = q_\alpha(T)$$

Adjungirani operator je $T^*_\alpha = T^0 + I_\alpha(X)$ in velja

$$\| T_\alpha^* \|_\alpha = q_\alpha(T^O) = q_\alpha(T) = \| T_\alpha \|_\alpha$$

Ker je $T_\alpha^* T_\alpha = (T^O + I_\alpha(X))(T + I_\alpha(X)) = T^O T + I_\alpha(X)$, velja tudi

$$\| T_\alpha^* T_\alpha \|_\alpha = q_\alpha(T^O T) = q_\alpha(T)^2 = \| T_\alpha \|_\alpha^2$$

Če še iz [10] privzamemo polnost algebre $\mathcal{L}_\alpha^*(X)$, lahko zapišemo:

<u>6.3.11 TRDITEV</u> Za vsak indeks $\alpha \in \Delta$ je $\{ \mathcal{L}_\alpha^*(X), \| \ \|_\alpha \}$ C^*-algebra.

Dobili smo torej C^*-algebro operatorjev, ki delujejo na H-Fréchetovem prostoru X. Po drugi strani je $\mathcal{L}_\alpha^*(X)$ kot C^*-algebra $*$- izomorfna neki C^*-algebri $\mathcal{B}(H_\alpha)$ omejenih operatorjev, ki delujejo na nekem Hilbertovem prostoru H_α. Simbolično to prireditev zapišimo v obliki

$$\mathcal{L}_\alpha^*(X) \ni T_\alpha \longleftrightarrow \varphi_\alpha(T_\alpha) \in \mathcal{B}(H_\alpha)$$

Pri tem še velja : $\| T_\alpha \|_\alpha = \| \varphi_\alpha(T_\alpha) \|_\alpha'$, kjer je $\| \ \|_\alpha'$ operatorska norma v $\mathcal{B}(H_\alpha)$.

Iz Hilbertovih prostorov H_α naredimo direktno vsoto $\mathcal{H} = \sum_\alpha \oplus H_\alpha$ ter algebrajsko vsoto $\mathcal{D} = \sum_\alpha H_\alpha$ in za vsak $\xi = \sum_{i=1}^n x_{\alpha_i} \in \mathcal{D}$ definirajmo operator

$$\varphi(T)\xi = \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i}(T_{\alpha_i}) x_{\alpha_i}$$

Označimo z $\mathcal{A}$ množico vseh operatorjev, ki jih dobimo na tak način. Če vzamemo enotsko kroglo K_α v Hilbertovem prostoru H_α, lahko za vsak operator $\varphi(T) \in \mathcal{A}$ definiramo polnormo

$$q_\alpha^{K_\alpha}(\varphi(T)) = \sup_{\xi, \eta \in K_\alpha} |(\varphi(T)\xi, \eta)| = \| T_\alpha \|_\alpha$$

pri tem je $q_\alpha^{K_\alpha}(\varphi(T)) < \infty$ za vsak $\varphi(T) \in \mathcal{A}$. Lahko se prepričamo, da je opisana prireditev $T \mapsto \varphi(T)$ res algebrajski in topološki izomorfizem ([18]).

Naj bo sedaj X spet splošen H-lokalno konveksen prostor in si oglejmo množico $\mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{L}^*(X)$, se pravi tiste Δ-končne operatorje, za katere obstaja b-adjungirani operator.

<u>6.3.12 TRDITEV</u> Za operator $T \in \mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{L}^*(X)$ veljata lastnosti

$$\| T \| = \| T^o \|$$
$$\| T^o T \| = \| T \|^2$$

Zares, ker je operator T Δ-končen, lahko v lemi 6.3.3 naredimo supremum po vseh $\alpha \in \Delta$ in dobimo taki lastnosti tudi za normo.

<u>6.3.13 IZREK</u> Če je X H-lokalno konveksen prostor, je $\{\mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X), \| \ \|\}$ C^*-algebra.

<u>Dokaz</u>. Očitno je tudi $\mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{L}^*(X)$ algebra, v kateri imamo normo z zgornjima lastnostma. Dokažimo še, da je polna. Ker je to podalgebra polne algebre $\mathcal{L}_F(X)$, zadošča pokazati, da je zaprta. Vzemimo neko posplošeno zaporedje $\{T_\delta\}_{\delta \in \Gamma}$ iz podalgebre, ki konvergira k operatorju T po normi. Očitno je tudi $T \in \mathcal{L}_F(X)$. Naj bo $\{T^o_\delta\}_{\delta \in \Gamma}$ zaporedje ustreznih b-adjungiranih operatorjev, ki je zaradi prve lastnosti v prejšnji trditvi tudi Cauchyjevo in ker je prostor $\mathcal{L}_F(X)$ poln, konvergira proti nekemu operatorju $S \in \mathcal{L}_F(X)$. Vzemimo poljubna $x, y \in X$, poljuben $\alpha \in \Delta$ in ocenimo

$$|(Tx,y)_\alpha - (x,Sy)_\alpha| \leqq |(Tx,y)_\alpha - (T_\delta x,y)_\alpha| + |(x,T^o_\delta y)_\alpha - (x,Sy)_\alpha| \leqq$$
$$\leqq (\|T - T_\delta\| + \|T^o_\delta - S\|) p_\alpha(x) p_\alpha(y) \leqq 2\varepsilon p_\alpha(x) p_\alpha(y)$$

če le vzamemo dovolj "pozen" indeks $\delta \in \Gamma$. Ker lahko izberemo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen, sledi, da za operator T obstaja b-adjungiran operator $T^o = S$, kar pomeni $T \in \mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$.

6.4 Reprezentacija algeber $\mathcal{L}_o(X)$ in $\mathcal{L}^*(X)$ s projektivnimi limitami

V prvem poglavju smo spoznali, da je vsak poln lokalno konveksen prostor izomorfen projektivni limiti Banachovih prostorov in da je vsak H-lokalno konveksen prostor izomorfen projektivni limiti Hilbertovih prostorov. Sedaj imamo podobno situacijo: algebra $\mathcal{L}_o(X)$ je po izreku 6.2.6 lokalno m-konveksna algebra, medtem ko je $\mathcal{L}^*(X)$ po izreku 6.3.4 LMC*-algebra. Nastane vprašanje, ali imata ti algebri kakšno zvezo s projektivnimi limitami lepših algeber ?

V prostoru $\mathcal{L}_o(X)$ imamo sistem polnorm Q, ki zadošča pogoju

$$q_\alpha(ST) \leqq q_\alpha(S)\, q_\alpha(T) \tag{6.4.1}$$

Sistem polnorm $\mathcal{P}$ na prostoru X je po predpostavki delno urejen in usmerjen, medtem ko sistem polnorm Q na prostoru $\mathcal{L}_o(X)$ ni več nujno tak. Označimo s Q^{max} družino vseh polnorm na $\mathcal{L}_o(X)$, ki so glede na polnorme Q zvezne in ustrezajo pogoju (6.4.1). Družina Q^{max}, ki vsebuje družino Q, je očitno usmerjena, saj za poljubni polnormi $q', q'' \in Q^{max}$ obstaja polnorma q iz Q^{max} z lastnostma $q'(T) \leqq q(T)$, $q''(T) \leqq q(T)$ za poljuben operator $T \in \mathcal{L}_o(X)$ (vzeti moramo le $q(T) = \max\{q'(T), q''(T)\}$).

Zopet definirajmo množice

$$I_q(X) = \{T \in \mathcal{L}_o(X),\ q(T) = 0\}$$

ki so zaprti dvostranski ideali, v kar se prav tako prepričamo, kot smo se za množice $I_\alpha(X)$ v prejšnjem razdelku. Označimo z

$$\mathcal{L}_q(X) = \mathcal{L}_o(X)/I_q(X)$$

faktorske algebre z elementi $T_q = T + I_q(X)$ za vsak $T \in \mathcal{L}_o(X)$. Označimo s K_q naravno upodobitev algebre $\mathcal{L}_o(X)$ v $\mathcal{L}_q(X)$, torej $T_q = K_q(T)$. Na algebri $\mathcal{L}_q(X)$ imamo zopet pravo normo

$$\| T_q \|_q = q(T)$$

Vzemimo dve polnormi $q', q'' \in Q^{max}$ z lastnostjo

$$q'(T) \leqq q''(T) \quad , \quad T \in \mathcal{L}_o(X)$$

potem za ustrezna ideala velja

$$I_{q''}(X) \subset I_{q'}(X) \tag{6.4.2}$$

v kar se zopet tako prepričamo kot v prejnjem razdelku. Za ustrezni kvocientni algebri potem velja

$$\mathcal{L}_{q'}(X) = \mathcal{L}_{q''}(X)/I_{q'}(X)$$

Označimo s $K_{q'q''} : \mathcal{L}_{q''}(X) \mapsto \mathcal{L}_{q'}(X)$ naravno upodobitev prve algebre v drugo. V primeru, da je $q' = q''$, je $K_{q'q''} = I_{\mathcal{L}_{q'}}$. Torej lahko zapišemo

$$K_{q'q''}(T_{q''}) = T_{q'}$$

oziroma

$$K_{q'q''} \circ K_{q''} = K_{q'}$$

Ker velja še ocena

$$\| K_{q'q''}(T_{q''}) \|_{q'} = \| T_{q'} \|_{q'} = q'(T) \leqq q''(T) = \| T_{q''} \|_{q''}$$

so linearne preslikave $K_{q'q''}$ zvezne in zaradi inkluzije (6.4.2) dobro definirane.

Prostori $\mathcal{L}_q(X)$ v splošnem niso polni, zato jih razširimo do polnih prostorov $\widetilde{\mathcal{L}}_q(X)$. Tudi ustrezne kanonske preslikave zvezno razširimo na $\widetilde{K}_{q'q''}: \widetilde{\mathcal{L}}_{q''}(X) \mapsto \widetilde{\mathcal{L}}_{q'}(X)$. Sedaj lahko tvorimo projektivno limito prostorov $\widetilde{\mathcal{L}}_q(X)$

$$\mathcal{A} = \operatorname*{proj\,lim}_{q \in Q_{max}} \widetilde{\mathcal{L}}_q(X)$$

Ker so množice $I_q(X)$ dvostranski ideali, zopet velja

$$T_q S_q = (T + I_q(X))(S + I_q(X)) = TS + I_q(X)$$

in lahko ocenimo normo

$$\| T_q S_q \|_q = q(TS) \leqq q(T)q(S) = \| T_q \|_q \| S_q \|_q$$

Torej so $\widetilde{\mathcal{L}}_q(X)$ Banachove algebre. Topologijo na projektivni limiti definirajo polnorme

$$g((T_q)_q) = \| T_{q'} \|_{q'} = q'(T)$$

kjer je $q' \in Q^{max}$ poljubna polnorma in $(T_q)_q \in \mathcal{A}$. Pri tem zgornja definicija polnorme g ravno pomeni, da je preslikava $T \mapsto (T_q)_q$ zvezna iz algebre $\mathcal{L}_o(X)$ na neki podprostor $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$. Ker so po konstrukciji vsi prostori $\mathcal{L}_q(X)$ gosti v $\widetilde{\mathcal{L}}_q(X)$, je tudi podprostor $\mathcal{A}_1$ gost v $\mathcal{A}$. Če predpostavimo, da je X H-lokalno konveksen prostor s števno polnormami, je prostor $\mathcal{L}_o(X)$ poln, polni so tudi vsi prostori $\mathcal{L}_q(X)$ (gl.[8]) in podprostor $\mathcal{A}_1$ zaprt v $\mathcal{A}$. To pomeni $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. Naše ugotovitve lahko združimo v izrek:

<u>6.4.1 IZREK</u> Naj bo X H-lokalno konveksen prostor, potem je algebra $\mathcal{L}_o(X)$ topološko izomorfna nekemu gostemu podprostoru projektivne limite Banachovih algeber. Če je X H-Fréchetov prostor, je $\mathcal{L}_o(X)$ izomorfna projektivni limi-

ti Banachovih algeber.

Vzemimo sedaj še algebro $\mathcal{L}^*(X)$. V njej polnorme $q_\alpha \in Q$ zadoščajo še pogojema

$$q_\alpha(T^o) = q_\alpha(T) \tag{6.4.3}$$

$$q_\alpha(T^oT) = q_\alpha(T)^2 \tag{6.4.4}$$

Podobno kot zgoraj zopet označimo s Q^{max} množico polnorm na $\mathcal{L}^*(X)$, ki so zvezne glede na polnorme $q_\alpha \in Q$ in zadoščajo zgornjima pogojema.

Analogno definiramo tudi dvostranske ideale

$$I_q^*(X) = \{ T \in \mathcal{L}^*(X),\ q(T) = 0 \} \ ; \ q \in Q^{max}$$

in faktorske algebre

$$\mathcal{L}_q^*(X) = \mathcal{L}^*(X)/I_q^*(X)$$

V njih imamo norme $\|T_q\|_q = q(T)$ za vsak $T_q = T + I_q^*(X)$. Zaradi lastnosti (6.4.3) je $I_q^*(X)$ $*$- ideal in veljata tudi za norme ti lastnosti

$$\| T_q T_q^* \|_q = q(T^oT) = q(T)^2 = \|T_q\|_q^2$$

in

$$\| T_q^* \|_q = q(T^o) = q(T) = \| T_q \|_q$$

kjer smo pisali $T_q^* = T^o + I_q^*(X)$. V [10] je pokazano, da so za splošne LMC*- algebre ustrezne faktorske algebre $\mathcal{A}_q$, $q \in Q^{max}$, vedno polne. To pomeni, da so naše algebre $\mathcal{L}_q^*(X)$ C*- algebre in podobno kot v prejšnjem izreku imamo :

<u>6.4.2 IZREK</u> Če je X H-lokalno konveksen prostor, je LMC*- algebra $\mathcal{L}^*(X)$ topološko izomorfna projektivni limiti C*- algeber.

V poglavju 5 smo definirali spekter operatorja $T \in \mathcal{L}(X)$ in videli, da je $\lambda \in \rho(T)$ natanko tedaj, ko je $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Za operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ bi analogno definirali : $\lambda \in \rho_*(T)$ natanko tedaj, ko je $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}^*(X)$. Spekter operatorja $T \in \mathcal{L}^*(X)$ je potem množica $\sigma_*(T) = \rho_*(T)^c$. Lahko tudi rečemo : število λ je iz $\rho_*(T)$ natanko tedaj, ko je iz $\rho(T)$ in za operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja b-adjungiran operator. Veljata torej inkluziji

$$\rho_*(T) \subset \rho(T) \ , \quad \sigma(T) \subset \sigma_*(T)$$

za vsak $T \in \mathcal{L}^*(X)$.

Pojavi se vprašanje, kdaj se za operator $T \in \mathcal{L}^*(X) \subset \mathcal{L}(X)$ obe definiciji ujemata. Če je X splošen H-lokalno konveksen prostor in tudi operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ splošen, ne dobimo pozitivnega odgovora. Dobili ga bomo v dveh posebnih primerih.

<u>6.4.3 TRDITEV</u> Naj bo X H-Fréchetov prostor, operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$, $\lambda \in \rho(T)$ in operator $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}_o(X)$, potem je $\lambda \in \rho_*(T)$.

<u>Dokaz</u>. Videti je treba, da za operator $(T-\lambda I)^{-1}$ obstaja b-adjungirani operator. Če je $\lambda \in \rho(T)$ in $T \in \mathcal{L}^*(X)$, potem na enak način, kot v dokazu trditve 5.8 vidimo, da operator $((T-\lambda I)^{-1})^o$ obstaja in je zvezen.

<u>6.4.4 TRDITEV</u> Če je X H-Fréchetov prostor in A b-sebiadjungiran operator v njem, velja

$$\sigma(A) = \sigma_*(A)$$

<u>Dokaz</u>. Vzemimo $\lambda \in \rho(A)$, se pravi operator $(A-\lambda I)^{-1}$ obstaja, je zvezen in po lemi 5.2 celo velja $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$. Od tod sledi, da

velja tudi $\mathcal{R}(A-\bar{\lambda}I) = X$. Če bi se zgodilo, da je $\overline{\mathcal{R}(A-\bar{\lambda}I)} \neq X$ za neko število $\lambda = \xi + i\eta$, $\eta \neq 0$, bi po lemi 5.13 obstajal element $x_\gamma \in J_\gamma^c$ z lastnostjo

$$p_\gamma((A-\bar{\lambda}I)x_\gamma) = 0$$

Na enak način kot v dokazu izreka 5.14 pa bi dobili

$$p_\alpha((A-\bar{\lambda}I)x\ ) \geq \eta^2 p_\alpha(x)$$

za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Če pišemo v zadnji neenačbi $x = x_\gamma$ in $\alpha = \gamma$, dobimo $p_\gamma((A-\bar{\lambda}I)x_\gamma) > 0$, kar je v nasprotju z zgornjim. Tudi operator $(A-\bar{\lambda}I)^{-1}$ obstaja. V to se moramo prepričati le še v primeru, da λ ni realen. Toda tudi tedaj ta operator obstaja, ker po izreku 5.14 $\bar{\lambda}$ ni lastna vrednost operatorja A. Zapišimo identiteto

$$((A-\lambda I)x,y)_\alpha = (x,(A-\bar{\lambda}I)y)_\alpha$$

in jo prepišimo v obliko

$$(u,(A-\bar{\lambda}I)^{-1}v)_\alpha = ((A-\lambda I)^{-1}u,v)_\alpha$$

kjer sta $u,v \in X$ poljubna. Iz te zveze ugotovimo, da ima operator $(A-\lambda I)^{-1}$ b-adjungiranega $((A-\lambda I)^{-1})^o = (A-\bar{\lambda}I)^{-1}$ in po izreku 4.2.8 sledi $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}_o(X)$. Torej je $\lambda \in \varrho_*(A)$.

Iz izreka 6.4.2 sledi naslednji izrek o povezavi spektra operatorja $T \in \mathcal{L}^*(X)$ s spektri operatorjev T_q iz C^*- algeber $\mathcal{L}_q(X)$, ki velja za splošne LMC^*- algebre ([18]).

<u>6.4.5 IZREK</u> Naj bo X poljuben H-lokalno konveksen prostor in operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$, potem veljata relaciji

(1) $\sigma_*(T) = \bigcup_{q \in G^{max}} \sigma_q(T_q)$

(2) $r_*(T) = \sup_{q \in Q^{max}} r_q(T_q)$

kjer sta σ_q in r_q spekter oziroma spektralni radij operatorja T_q v C^*- algebri $\mathcal{L}_q^*(X)$.

Iz zgornjih trditev je očitno, da čeprav je lahko $\sigma_q(T_q)$ omejena množica in $r_q(T_q) < \infty$ za vsak $q \in Q^{max}$, se prav lahko zgodi, da je $\sigma_*(T)$ neomejena množica in tudi $r_* = \infty$.

6.5. Pozitivni elementi algebre $\mathcal{L}^*(X)$

Kasneje bomo delali s posebnim razredom b-sebiadjungiranih operatorjev, s tako imenovanimi pozitivnimi operatorji. Postavimo definicijo :

6.5.1 DEFINICIJA b-sebiadjungiran operator A je pozitiven natanko tedaj, ko velja

$$(Ax,x)_\alpha \geq 0 \qquad (6.5.1)$$

za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$.

Včasih bomo za pozitiven operator A pisali $A \geq 0$. Če je X H-Fréchetov prostor, dobimo še eno karakterizacijo pozitivnih operatorjev.

6.5.2 TRDITEV Naj bo X H-Fréchetov prostor in operator A b-sebiadjungiran, potem je A pozitiven natanko tedaj, ko je njegov spekter $\sigma(A)$ nenegativen.

Dokaz. Naj bo operator A pozitiven in $\lambda < 0$ poljubno število. Najprej hitro ugotovimo, da λ ni lastna vrednost operatorja A, kajti v nasprotnem primeru bi obstajal element $x_0 \neq 0$ z lastnostjo $Ax_0 = \lambda x_0$. Ker je $x_0 \neq 0$, bi obstajal indeks $\alpha_0 \in \Delta$, da bi bilo $p_{\alpha_0}(x_0) > 0$. Tedaj bi veljala ocena

$$0 > \lambda p_{\alpha_0}(x_0)^2 = \lambda(x_0,x_0)_{\alpha_0} = (Ax_0,x_0)_{\alpha_0} \geqq 0$$

kar ni mogoče. Ker λ ni lastna vrednost, obstaja operator $(A-\lambda I)^{-1}$. Dokažimo, da je množica $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ gosta v X. Če ne bi bila, bi po lemi 5.13 obstajal indeks $\gamma \in \Delta$ in element $x_\gamma \in J_\gamma^c$ z lastnostjo $p_\gamma(Ax_\gamma - \lambda x_\gamma) = 0$, kar pomeni $(Ax_\gamma - \lambda x_\gamma, x) = 0$ za vsak $x \in X$. Sedaj bi sledilo

$$0 > \lambda(x_\gamma,x_\gamma)_\gamma = (\lambda x_\gamma - Ax_\gamma, x_\gamma)_\gamma + (Ax_\gamma,x_\gamma)_\gamma \geqq 0$$

kar zopet ni mogoče in je res $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda I)} = X$. Ker je A zvezen, po lemi 5.2 zopet sledi $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$. Dokažimo še, da je inverzni operator $(A-\lambda I)^{-1}$ tudi zvezen. V ta namen pri poljubnem $\alpha \in \Delta$ naredimo oceno

$$p_\alpha^2(Ax-\lambda x) = p_\alpha^2(Ax) - 2\lambda(Ax,x)_\alpha + \lambda^2 p_\alpha(x)^2 \geqq \lambda^2 p_\alpha(x)^2$$

in če v njej pišemo $Ax-\lambda x = y$, dobimo

$$p_\alpha((A-\lambda I)^{-1}y) \leqq \frac{1}{|\lambda|} p_\alpha(y)$$

Torej je res $\lambda \in \varrho(A)$.

Dokažimo še obratno smer. Naj bo spekter operatorja $A \in \mathcal{H}(X)$ nenegativen. Po trditvi 6.4.4 je tudi spekter $\sigma_*(A) = \sigma(A)$ nenegativen in po izreku 6.4.5 je nato tudi spekter $\sigma_q(A_q)$ v algebri $\mathcal{L}_q^*(X)$ za vsak $q \in Q^{max}$ nenegativen. To pa pomeni, da je vsak operator A_q pozitiven, torej tudi za $q = q_\alpha$ sledi

$$(A_\alpha x,x)_\alpha \geqq 0$$

za vsak $x \in X$ in vsak $\alpha \in \Delta$. Če upoštevamo $A_\alpha = A + I_\alpha^*(X)$, dobimo

$$(Ax,x)_\alpha = (A_\alpha x,x)_\alpha - (Cx,x)_\alpha = (A_\alpha x,x)_\alpha \geqq 0$$

za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Pri tem je bil $C \in I^*_\alpha(X)$ poljuben element. Operator A je torej res pozitiven.

Naj opomnimo, da nam zgornji izrek pove, da so preko definicije 6.5.1 vpeljani pozitivni operatorji ravno pozitivni elementi LMC*- algebre $\mathcal{L}^*(X)$.

Kot zanimivo posledico dobimo :

6.5.3 KOROLAR Naj bo X H-Fréchetov prostor in A pozitiven operator v njem, katerega spekter sestoji le iz točke 0, potem je A ničelen operator.

Zares, ker je $\sigma_*(A) = \sigma(A) = \{0\}$, je po izreku 6.4.5 tudi $\sigma_q(A_q) = \{0\}$ za vsak $q \in Q^{max}$, torej tudi za $q_\alpha \in Q$. To pomeni $\sigma(A_\alpha) = \{0\}$ oziroma $q_\alpha(A) = 0$ za vsak $\alpha \in \Delta$. Ker je družina polnorm Q zadostna, je $A = 0$.

Dodajmo še izrek o kvadratnem korenu pozitivnega operatorja, ki velja za splošne LMC*- algebre ([18]) :

6.5.4 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor. Potem za vsak pozitiven operator A obstaja tak pozitiven operator B, da velja

$$A = B^2$$

Pri tem je operator B enolično določen in komutira z vsemi operatorji, s katerimi komutira operator A.

6.6 Omejeni elementi algeber $\mathcal{L}_o(X)$ in $\mathcal{L}^*(X)$

V algebri $\mathcal{L}_o(X)$ lahko definiramo množico omejenih elementov (omejeni del algebre $\mathcal{L}_o(X)$) :

$$\mathcal{B}(X) = \{ A \in \mathcal{L}_o(X) , \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(A) < \infty \}$$

toda hitro se lahko prepričamo, da je to že znana množica.

6.6.1 TRDITEV Omejeni del lokalno m-konveksne algebre $\mathcal{L}_o(X)$ je ravno množica Δ-končnih operatorjev $\mathcal{L}_F(X)$.

Zares, če je $T \in \mathcal{L}_F(X)$, je $p_\alpha(Tx) \leqq C\, p_\alpha(x)$ za vsak $x \in X$ in je tedaj tudi $q_\alpha(T) \leq C$, se pravi $T \in \mathcal{B}(X)$. Če je obratno $T \in \mathcal{B}(X)$, obstaja konstanta $C \geqq 0$, da velja $q_\alpha(T) \leqq C < \infty$ za vsak $\alpha \in \Delta$ ali

$$\sup_{x \in X \setminus J_\alpha} ((p_\alpha(Tx)/p_\alpha(x)) \leqq C$$

oziroma

$$p_\alpha(Tx) \leqq C\, p_\alpha(x)$$

za vsak $x \in X \setminus J_\alpha$, toda ker je $T \in \mathcal{L}_o(X)$, lahko tudi za $x \in J_\alpha$ pišemo $p_\alpha(Tx) \leqq C\, p_\alpha(x)$. Torej je zgornja ocena izpolnjena pri nekem $C \geqq 0$ za vsak $x \in X$, kar pomeni $T \in \mathcal{L}_F(X)$.

Če se omejimo na množico $\mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$, imamo opravka z omejenimi elementi LMC*- algebre $\mathcal{L}^*(X)$. Ta množica je z normo $\|T\| = \sup\limits_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(T)$,kot vemo iz izreka 6.3.12, prava C^*- algebra.

Iz teorije splošnih LMC*- algeber povzemimo sedaj naslednje tri izreke (gl.[18]).

6.6.2 IZREK Za vsak operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ so naslednje trditve ekvivalentne

(1) $T \in \mathcal{L}_F(X)$

(2) $T = T_1 + iT_2$; $T_j \in \mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{H}(X)$, $j=1,2$

(3) $T = T_1 + iT_2$; $T_j \in \mathcal{H}(X)$ in $\mathfrak{S}_*(T_j)$ omejena, $j=1,2$

(4) $T = T_1 + iT_2$; $-\lambda I \leqq T \leqq \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$

Dalje

6.6.3 IZREK Če je operator $A \in \mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{H}(X)$, so naslednje trditve ekvivalentne

(1) $\| A \| = \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(A) \leqq 1$

(2) $\sigma_*(A) \subset [-1,1]$

(3) $-I \leqq A \leqq I$

Dodajmo še nazadnje izrek o karakterizaciji omejenih operatorjev z njegovimi reprezentacijami.

6.6.4 IZREK Operator $T \in \mathcal{L}^*(X)$ je Δ-končen natanko tedaj, ko je vsaka njegova reprezentacija $\varphi(T)$, ki smo jo omenili v izreku 6.3.6, omejen operator v predhilbertovem prostoru $\mathcal{D}$.

7. TOPOLOGIJE NA DUALNEM PROSTORU

Označimo z X' množico zveznih linearnih funkcionalov, ki delujejo na našem H-lokalno konveksnem prostoru X. Podobno kot v razdelku 6.1 lahko ugotovimo, da nam vsaka zadostna družina omejenih množic na X definira na X' neko lokalno konveksno topologijo. Vzemimo dva najbolj pogosta primera.

Če vzamemo družino vseh omejenih množic na X, dobimo preko polnorm

$$q_M(f) = \sup_{x \in M} |f(x)|, \quad f \in X'$$

kjer je M neka omejena množica iz X, krepko topologijo in prostor X' s to topologijo označimo z X'_b.

Če vzamemo na X le končne množice, dobimo s polnormami

$$q_{x_1 \dots x_n}(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|$$

tako imenovano šibko topologijo in prostor X' s to topologijo označimo z X'_s.

Na podoben način tvorimo potem topologije tudi na drugih dualih prostora X. Pri tem rečemo, da je prostor X semirefleksiven, če velja $(X'_b)' = X$ in je refleksiven, če je $(X'_b)'_b = (X,\mathcal{P})$. Pri tem smo z $(X,\mathcal{P})$ označili naš H-lokalno konveksen prostor X s topologijo, ki jo inducira družina polnorm $\mathcal{P}$.

Ker je teorija linearnih funkcionalov na H-lokalno konveksnem prostoru že precej obdelana v [15], jo kaj več tu ne bomo obravnavali. Zapišimo iz [15] le nekaj zanimivejših rezultatov.

<u>7.1 IZREK</u> Naj bo X H-lokalno konveksen prostor, potem veljajo naslednje trditve :

(1) X je semirefleksiven,

(2) X je refleksiven natanko tedaj, ko je sodčast,

(3) X'_b je enak induktivni limiti Hilbertovih prostorov.

Kot smo ugotovili že v razdelku 6.3 je vsak Fréchetov prostor sodčast, kar pomeni iz zgornjega, da je H-Fréchetov prostor vedno refleksiven.

Kot zanimivost naj dodamo še, da lahko tudi na prostoru X' dobimo hilbertske polnorme.

7.2 TRDITEV Če je M H-gladka, uravnovešena, omejena in zaprta množica v H-lokalno konveksnem prostoru X, je

$$p_M(f) = \sup_{x \in M} |f(x)|$$

hilbertska polnorma na X'.

8. PROJEKTORJI IN SPEKTRALNA RAZČLENITEV

8.1. Projektorji

Naj bo še naprej X H-lokalno konveksen prostor, kdaj pa kdaj pa bomo še zahtevali, da je tudi Fréchetov. V prostoru $\mathcal{L}^*(X)$ definirajmo projektorje :

8.1.1 DEFINICIJA Operator $P \in \mathcal{L}^*(X)$ imenujemo projektor, če zanj veljata relaciji

(1) $P^2 = P$

(2) $P^o = P$

Zgoraj smo s P^o označili b-adjungirani operator operatorja P. Identični in ničelni operator sta očitno projektorja, vprašanje pa je, če je razred projektorjev še kaj bogatejši. Oglejmo si zopet kakšen primer iz prostora $L_2^{loc}(\mathbb{R})$.

8.1.2 PRIMER Operator oblike

$$(Px)(s) = \begin{cases} \int_{[s]}^{[s]+1} x(t)dt & , s \geqq 0 \\ 0 & , s < 0 \end{cases}$$

kjer je $x(t) \in L_2^{loc}(R)$, je projektor v smislu zgornje definicije.

Zares, preverimo zgornja pogoja

$$(P^2x)(\tau) = \int_{[\tau]}^{[\tau]+1} (Px)(s)ds = \int_{[\tau]}^{[\tau]+1} ds \int_{[s]}^{[s]+1} x(t)dt = \int_{[\tau]}^{[\tau]+1} x(t)dt \int_{[\tau]}^{[\tau]+1} ds = (Px)(\tau)$$

za $\tau \geqq 0$, medtem ko je za $\tau < 0$: $(P^2x)(\tau) = (Px)(\tau) = 0$. Izračunajmo še

$$(Px,y)_n = \int_0^n \overline{y}(s)ds \int_{[s]}^{[s]+1} x(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \overline{y}(s)ds \int_k^{k+1} x(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} x(t)dt \int_k^{k+1} \overline{y}(s)ds = (x,Py)_n$$

Oglejmo si nekaj lastnosti projektorjev.

8.1.3 LEMA Za poljuben projektor P v H-lokalno konveksnem prostoru X in poljubno polnormo $q_\alpha \in Q$ velja alternativa :
ali je $q_\alpha(P) = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{R}(P) \subset J_\alpha$
ali je $q_\alpha(P) = 1$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{R}(P) \cap J_\alpha^c \neq \emptyset$.

Dokaz. Naj bo $x \in X$ poljuben element, potem velja identiteta

$$x = Px + (x-Px)$$

pri tem je za poljuben $\alpha \in \Delta$

$$(Px,x-Px)_\alpha = (Px,x)_\alpha - (Px,Px)_\alpha = (Px,x)_\alpha - (P^2x,x)_\alpha = 0$$

Zato je

$$p_\alpha(x)^2 = p_\alpha(Px)^2 + p_\alpha(x-Px)^2$$

od koder sledi

$$p_\alpha(Px)^2 \leqq p_\alpha(x)^2$$

oziroma

$$q_\alpha(P) = \sup_{x \in X \setminus J_\alpha} (p_\alpha(Px)/p_\alpha(x)) \leqq 1$$

Že v začetku razdelka 6.2 smo videli, da je $\mathcal{R}(P) \subset J_\alpha$ natanko tedaj, ko je $q_\alpha(P) = 0$, zato vzemimo še tak indeks $\alpha \in \Delta$, da je $\mathcal{R}(P) \cap J_\alpha^c \neq \emptyset$, potem je $q_\alpha(P) \neq 0$ in v oceni

$$q_\alpha(P) = q_\alpha(P^2) \leqq q_\alpha(P)q_\alpha(P)$$

lahko krajšamo s $q_\alpha(P)$ in imamo k zgornji še obratno neenačbo

$$q_\alpha(P) \geqq 1$$

Vzemimo poljuben neničelen projektor P, potem je tudi

$$\| P \| = \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(P) \leqq 1$$

toda, ker je sistem polnorm Q zadosten, obstaja vsaj ena polnorma $q_\alpha \in Q$, da velja $q_\alpha(P) \neq 0$ in po prejšnji lemi sledi $q_\alpha(P) = 1$, kar pomeni $\| P \| = 1$. Zapišimo torej

<u>8.1.4 TRDITEV</u> Vsak neničelen projektor je Δ-končen z normo 1.

Do projektorjev lahko pridemo še na drug način. Najprej se spomnimo definicije 2.11, v kateri smo zapisali, da ima množica $M \subset X$ lastnost H, če obstaja posplošeno zaporedje $\{y_\sigma\} \subset M$ z lastnostjo

$$\lim_{\sigma \in \Gamma} p_\alpha(y_\sigma) = \inf_{y \in M} p_\alpha(y)$$

za vsak $\alpha \in \Delta$. Torej obstaja minimizirajoče zaporedje za vse indekse α hkrati.

Vzemimo tak podprostor X_1 našega H-lokalno konveksnega prostora X, da ima za vsak $x \in X$ množica $x + X_1$ lastnost H. Potem po korolarju 2.13 velja enolična razcepitev

$$x = x_1 + x_2 \ ; \quad x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_1^{\perp\!\!\perp}$$

V taki situaciji lahko definiramo operator

$$P : X \longmapsto X_1$$

s predpisom $Px = x_1$.

<u>8.1.5 TRDITEV</u> Zgoraj definirani operator P je projektor v smislu definicije 8.1.1.

<u>Dokaz</u>. Očitno je P linearen in zvezen operator. Vzemimo polju-

ben element $x \in X$ in ga razcepimo $x = x_1 + x_2$, potem velja

$$P^2x = P(Px) = Px_1 = x_1 = Px$$

Zapišimo še razcepa za poljubna elementa $x, y \in X$:

$$x = x_1 + x_2 \quad ; \ x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_1^{\perp\!\!\perp}, \ x_1 = Px$$

$$y = y_1 + y_2 \quad ; \ y_1 \in X_1, \ y_2 \in X_1^{\perp\!\!\perp}, \ y_1 = Py$$

potem velja

$$(Px,y)_\alpha = (x_1,y)_\alpha = (x_1,y_1+y_2)_\alpha = (x_1,y_1)_\alpha =$$
$$= (x_1+x_2,y_1)_\alpha = (x,y_1)_\alpha = (x,Py)_\alpha$$

Pojavi se povsem upravičeno vprašanje : če imamo dan projektor P, ali ima tedaj množica $x + \mathcal{R}(P)$ za vsak $x \in X$ lastnost H? Dokažimo najprej izrek :

<u>8.1.6 IZREK</u> Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in $P \in \mathcal{L}^*(X)$ projektor v njem, potem je tudi I-P projektor in če definiramo množici $M_1 = \mathcal{R}(P)$ in $M_2 = \mathcal{R}(I-P)$, sta to zaprta podprostora v X. Vsak element $x \in X$ se da enolično pisati v obliki

$$x = u + v \ ; \quad u \in M_1 \ , \ v \in M_2$$

pri čemer je $M_1 \perp\!\!\perp M_2$.

<u>Dokaz</u>. Najprej velja $(I-P)^2 = I-P-P+P^2 = I-P$ in tudi $(I-P)^o = I-P^o = I-P$. Linearnost in zveznost operatorja I-P je tudi očitna, potem sta množici M_1 in M_2 res zaprta podprostora. Vzemimo $x \in M_1$ in $y \in M_2$, potem je

$$(x,y)_\alpha = (Px',(I-P)y')_\alpha = (Px',y')_\alpha - (Px',Py')_\alpha =$$

$$= (Px',y')_\alpha - (P^2x',y')_\alpha = 0$$

za vsak $\alpha \in \mathcal{A}$, kar pomeni $M_1 \perp\!\!\!\perp M_2$.

Za poljuben $x \in X$ lahko zapišemo razčlenitev

$$x = Px + (I-P)x$$

kjer je $u = Px \in M_1$ in $v = x-Px \in M_2$. Če bi imeli še eno razcepitev

$$x = u' + v' \ ; \quad u' \in M_1, \ v' \in M_2$$

bi to pomenilo : $u' = Px'$, $v' = (I-P)y'$ in bi veljalo

$$0 = P(x-x') + (I-P)(x-y')$$

od koder bi dobili

$$0 = p_\alpha^2(P(x-x')) + p_\alpha^2((I-P)(x-y'))$$

za vse $\alpha \in \mathcal{A}$, kar pomeni $P(x-x') = 0$ in $(I-P)(x-y') = 0$ ali $u' = Px' = Px = u$, $v' = (I-P)y' = (I-P)x = v$.

<u>8.1.7 KOROLAR</u> Naj bo P projektor v H-lokalno konveksnem prostoru X in $M = \mathcal{R}(P)$, potem ima za vsak $x \in X$ množica $x + M$ lastnost H.

<u>Dokaz</u>. Smemo se omejiti na primer $x \neq 0$. Vzemimo torej poljuben neničelen element $x \in X$ in poiščimo najkrajšo razdaljo od izhodišča do množice $x + M$. Naj bo z poljuben element iz M in izrazimo

$$p_\alpha^2(x-z) = p_\alpha^2((x-Px) - (z-Px)) = p_\alpha^2(x-Px) + p_\alpha^2(z-Px)$$

kjer smo upoštevali, da je $x-Px \in M_2 = \mathcal{R}(I-P)$, $z-Px \in M$. Najmanjšo vrednost dobimo ravno za $z = Px$ in element, na katerem je infimum dosežen, je $y = x-Px$, ki je neodvisen od indeksa $\alpha\in\Delta$.

8.2. Pozitivni operatorji

Oglejmo si še nekaj lastnosti pozitivnih operatorjev, ki smo jih definirali v razdelku 6.5. Tedaj smo imenovali pozitiven operator tak b-sebiadjungiran operator A, za katerega je

$$(Ax,x)_\alpha \geqq 0 \tag{8.2.1}$$

za vsak $x\in X$ in $\alpha\in\Delta$. Za tak operator smo tudi uvedli zapis $A \geqq 0$. Dodajmo še nekaj izrekov v zvezi s pozitivnimi operatorji.

8.2.1 LEMA Za pozitiven operator A velja

$$|(Ax,y)_\alpha|^2 \leqq (Ax,x)_\alpha (Ay,y)_\alpha \quad ; \; x,y\in X, \; \alpha\in\Delta \tag{8.2.2}$$

Dokaz je prav tak kot v primeru Hilbertovega prostora. Vzamemo $z = x + \lambda(Ax,y)_\alpha y$, kjer je λ poljubno realno število in izračunamo

$$0 \leqq (Az,z)_\alpha = (Ax,x)_\alpha + 2\lambda|(Ax,y)_\alpha|^2 + \lambda^2|(Ax,y)|_\alpha^2 (Ay,y)_\alpha$$

od koder sledi ravno zgornja neenačba.

V izreku 6.5.4 smo tudi že spoznali, da za pozitivni operator A obstaja operator $A^{1/2}$ - kvadratni koren, ki je spet pozitiven in komutira z vsemi operatorji, s katerimi komutira operator A. Iz te lastnosti bomo dokazali naslednji pomožni izrek.

8.2.2 LEMA Produkt dveh pozitivnih operatorjev, ki komutirata, je spet pozitiven operator.

Dokaz. Naj bo torej $A \geqq 0$, $B \geqq 0$ in velja $AB = BA$. Ker za operator B obstaja pozitiven kvadratni koren $B^{1/2}$, ki komutira z operatorjem A, velja

$$(ABx,x)_\alpha = (AB^{1/2}B^{1/2}x,x)_\alpha = (B^{1/2}AB^{1/2}x,x)_\alpha = (AB^{1/2}x,B^{1/2}x)_\alpha \geqq 0$$

V množico b-sebiadjungiranih operatorjev $\mathcal{H}(X)$ uvedimo naslednjo relacijo

$$A \leqq B \Leftrightarrow (Ax,x)_\alpha \leqq (Bx,x)_\alpha \quad \text{za vsak } x \in X \text{ in } \alpha \in \Delta \qquad (8.2.3)$$

Ta relacija je očitno tranzitivna, refleksivna in tudi antisimetrična je. Če je namreč $A \leqq B$ in $B \leqq A$, to pomeni : $(Ax,x)_\alpha = (Bx,x)_\alpha$ ali $((A-B)x,x)_\alpha = 0$ za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$, kar po korolarju 4.3.2 pomeni $A = B$.

Dokažimo sedaj trditev :

8.2.3 TRDITEV Naj bo operator A b-sebiadjungiran, potem za vsak indeks $\alpha \in \Delta$ velja

$$\inf \{ C : |(Ax,x)_\alpha| \leqq C\, p_\alpha^2(x),\ x \in X \} = q_\alpha(A)$$

Dokaz. Označimo $D_\alpha = \inf \{ C : |(Ax,x)_\alpha| \leqq C p_\alpha^2(x),\ x \in X \}$. Ker je $A \in \mathcal{L}_0(X)$, po lemi 6.2.2 velja

$$|(Ax,x)_\alpha| \leqq p_\alpha(Ax) p_\alpha(x) \leqq q_\alpha(A)\, p_\alpha^2(x)$$

od koder sledi

$$D_\alpha \leqq q_\alpha(A)$$

Ta ocena velja seveda za poljuben operator $A \in \mathcal{L}_0(X)$. Za dokaz obratne ocene bomo upoštevali, da je $A \in \mathcal{H}(X)$. V ta namen vzemimo poljubno število $\lambda > 0$ in zapišimo

$$p_\alpha^2(Ax) = \frac{1}{4}\left[(A(\lambda x+\tfrac{1}{\lambda}Ax),\lambda x+\tfrac{1}{\lambda}Ax)_\alpha - (A(\lambda x-\tfrac{1}{\lambda}Ax),\lambda x-\tfrac{1}{\lambda}Ax)_\alpha\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{D_\alpha}{4}\left[p_\alpha^2(\lambda x+\tfrac{1}{\lambda}Ax) + p_\alpha^2(\lambda x-\tfrac{1}{\lambda}Ax)\right] = \frac{D_\alpha}{2}\left[\lambda^2 p_\alpha^2(x) + \frac{1}{\lambda^2}\, p_\alpha^2(Ax)\right]$$

Pri tem smo upoštevali, da za polnorme p_α velja paralelogramsko pravilo (1.2). Naj bo sedaj $x \in X$ tak element, da je $p_\alpha(Ax) \neq 0$, tedaj je tudi $p_\alpha(x) \neq 0$, ker je $A \in \mathcal{L}_0(X)$. Zgornji oklepaj doseže najmanjšo vrednost za $\lambda^2 = p_\alpha(Ax)/p_\alpha(x)$ in tedaj dobimo oceno

$$p_\alpha(Ax)^2 \leqq D_\alpha p_\alpha(Ax)p_\alpha(x)$$

oziroma

$$p_\alpha(Ax) \leqq D_\alpha p_\alpha(x)$$

Ta ocena velja očitno tudi za tiste $x \in X$, za katere je $p_\alpha(Ax)=0$. Če naredimo supremum po vseh $x \in X$, za katere je $p_\alpha(x) \neq 0$, dobimo

$$q_\alpha(A) \leqq D_\alpha$$

kar smo želeli dokazati.

8.2.4 KOROLAR Za operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ obstajata realni konstanti m in M z lastnostjo

$$mI \leqq A \leqq MI$$

pri čemer velja

$$\max\{|m|, |M|\} = \| A \|$$

Zares, ker je $A \in \mathcal{H}(X)$, po prejšnjem izreku za vsak $\alpha \in \Delta$ posebej obstajata konstanti m_α in M_α z lastnostjo

$$m_\alpha(x,x)_\alpha \leqq (Ax,x)_\alpha \leqq M_\alpha(x,x)_\alpha$$

Pri tem je

$$\max\{|m_\alpha|, |M_\alpha|\} = q_\alpha(A)$$

Toda, ker je naš operator A tudi Δ-končen, obstaja

$$\sup_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(A) = \|A\| < \infty$$

in zaradi zgornjega je tudi $M = \sup_{\alpha\in\Delta} M_\alpha < \infty$ in $m = \inf_{\alpha\in\Delta} m_\alpha < \infty$ ter velja

$$\max\{|m|, |M|\} = \|A\|$$

Oglejmo si še eno posledico zgornjega izreka.

<u>8.2.5 KOROLAR</u> Za poljubna operatorja $A, B \in \mathcal{H}(X)$, za katera velja $0 \leqq A \leqq B$, sledi

$$q_\alpha(A) \leqq q_\alpha(B)$$

za vsak $\alpha\in\Delta$.

Zares, ker je $0 \leqq (Bx,x)_\alpha \leqq M^B_\alpha(x,x)_\alpha$, po zgornji posledici velja $M^B_\alpha = q_\alpha(B)$, torej

$$(Ax,x)_\alpha \leqq (Bx,x)_\alpha \leqq q_\alpha(B)(x,x)_\alpha$$

Upoštevajmo še oceno 8.2.2 in dobimo

$$|(Ax,y)_\alpha|^2 \leqq (Ax,x)_\alpha(Ay,y)_\alpha \leqq q^2_\alpha(B)p^2_\alpha(y)p^2_\alpha(x)$$

V tej oceni po korenjenju in deljenju s $p_\alpha(x).p_\alpha(y)$ naredimo supremum po vseh parih $x,y \in X\setminus J_\alpha$ in dobimo

$$q_\alpha(A) \leqq q_\alpha(B)$$

Pojdimo sedaj k pomembnemu izreku o monotonem zaporedju pozitivnih operatorjev.

8.2.6 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor in $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ posplošeno zaporedje pozitivnih operatorjev, za katere pri $\gamma' \leq \gamma''$ velja

$$A_{\gamma'} \leqq A_{\gamma''}$$

Naj obstaja še operator $C\in\mathcal{H}(X)$ z lastnostjo

$$A_\gamma \leqq C \;, \quad \gamma\in\Gamma$$

Potem obstaja pozitiven operator $A\in\mathcal{H}(X)$ h kateremu konvergirajo operatorji A_γ v "krepkem smislu"

$$Ax = \lim_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma x$$

Prav tako tudi monotono padajoče zaporedje navzdol omejenih operatorjev "krepko" konvergira k nekemu b-sebiadjungiranemu operatorju.

Dokaz. Vzemimo poljuben element $x\in X$, indeks $\alpha\in\Delta$ in označimo s

$$Q^\alpha_\gamma(x) = (A_\gamma x,x)_\alpha$$

posplošeno zaporedje nenegativnih realnih števil, ki je monotono naraščajoče in navzgor omejeno :

$$Q^\alpha_\gamma(x) = (A_\gamma x,x)_\alpha \leqq (Cx,x)_\alpha \leqq q_\alpha(C)p_\alpha(x)^2$$

Torej obstaja limita

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} Q^\alpha_\gamma(x) = Q^\alpha(x)$$

Vzemimo sedaj dva indeksa $\gamma',\gamma''\in\Gamma$ z lastnostjo $\gamma''\geqq\gamma'$, potem je operator $D = A_{\delta''} - A_{\delta'}$ tudi pozitiven in omejen od zgoraj

$$(Dx,x)_\alpha = (A_{\delta''}x,x)_\alpha - (A_{\delta'}x,x)_\alpha \leqq (A_{\delta''}x,x)_\alpha \leqq (Cx,x)_\alpha$$

po prejšnjem korolarju potem velja

$$q_\alpha(D) \leqq q_\alpha(C)$$

za vsak $\alpha \in \Delta$. Iz neenačbe (8.2.2) sedaj sledi ocena

$$|(Dx,y)_\alpha|^2 \leqq (Dx,x)_\alpha (Dy,y)_\alpha$$

iz katere pri $y = Dx$ dobimo

$$p_\alpha(Dx)^4 \leqq (Dx,x)_\alpha (D^3x,x)_\alpha \leqq (Dx,x)_\alpha q_\alpha(D)^3 p_\alpha(x)^2 \leqq$$
$$\leqq (Dx,x)_\alpha q_\alpha(C)^3 p_\alpha(x)^2$$

Izpišimo to oceno na daljši način

$$p_\alpha(A_{\delta'}x - A_{\delta''}x)^4 \leqq [(A_{\delta''}x,x)_\alpha - (A_{\delta'}x,x)_\alpha]\, q_\alpha(C)^3 p_\alpha(x)^2$$

Indeks $\alpha \in \Delta$ je bil do sedaj poljuben, sedaj pa moramo ločiti dva primera. Če je $q_\alpha(C) = 0$ ali je $x \in J_\alpha$, je

$$p_\alpha(A_{\delta''}x - A_{\delta'}x)^4 = 0$$

za poljubna $\delta', \delta'' \in \Gamma$. V nasprotnem primeru izberimo poljubno majhen $\varepsilon > 0$. Ker je posplošeno zaporedje $Q^\alpha_\delta(x)$ konvergentno, obstaja tak indeks $\delta_0 = \delta_0(\alpha, \varepsilon) \in \Gamma$, da velja

$$|(A_{\delta'}x,x)_\alpha - (A_{\delta''}x,x)_\alpha| < \varepsilon/(q^3_\alpha(C)p^2_\alpha(x))$$

za poljubna indeksa $\delta', \delta'' \geqq \delta_0$ in dobimo

$$p_\alpha(A_{\delta'}x - A_{\delta''}x)^4 \leqq \varepsilon$$

Torej je zaporedje $\{A_\delta x\}$ Cauchyjevo in ker je prostor X poln, je konvergentno. Pišimo

$$Ax = \lim_{\delta \in \Gamma} A_\delta x$$

in dokažimo, da je tako definirani operator A zopet b-sebiadjungiran. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$, poljuben $\alpha \in \Delta$ in poljubna elementa $x, y \in X$, potem obstaja tak indeks $\delta_0 \in \Gamma$, da veljata neenačbi

$$p_\alpha(Ax - A_\delta x) < \varepsilon\ , \quad p_\alpha(Ay - A_\delta y) < \varepsilon$$

za vsak $\delta \geq \delta_0$. Pri teh elementih lahko ocenimo

$$|(Ax,y)_\alpha - (x,Ay)_\alpha| \leqq |(Ax,y)_\alpha - (A_\delta x,y)_\alpha + (x,A_\delta y)_\alpha - (x,Ay)_\alpha| \leqq$$

$$\leqq p_\alpha(Ax-A_\delta x)p_\alpha(y) + p_\alpha(x)p_\alpha(A_\delta y-Ay) \leqq \varepsilon(p_\alpha(x)+p_\alpha(y))$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen in leva stran ni odvisna od δ_0, velja

$$(Ax,y)_\alpha = (x,Ay)_\alpha$$

Ker je tudi indeks $\alpha \in \Delta$ čisto poljuben, je operator A res b-sebiadjungiran.

Poseben primer b-sebiadjungiranih operatorjev so projektorji, katerih nekaj lastnosti smo že zapisali. Med drugim smo ugotovili, da je vsak projektor Δ-končen ($P \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$) in ima normo 1. Dodajmo še dva pomožna izreka.

<u>8.2.7 LEMA</u> Za vsak projektor P velja

$$0 \leqq P \leqq I$$

Zares, najprej velja

$$(Px,x)_\alpha = (P^2x,x)_\alpha = (Px,Px)_\alpha = p_\alpha(Px)^2 \qquad (8.2.4)$$

Od tod najprej sledi

$$(Px,x)_\alpha = p_\alpha(Px)^2 \geqq 0$$

kar pomeni $P \geqq 0$. Po drugi strani pa je

$$(Px,x)_\alpha = p_\alpha(Px)^2 \leqq q_\alpha(P)^2 p_\alpha(x)^2 \leqq p_\alpha(x)^2 = (x,x)_\alpha$$

torej velja še $P \leqq I$.

<u>8.2.8 LEMA</u> Naj bosta P_1 in P_2 poljubna projektorja. Potem veljata trditvi

(1) $P_1P_2 = P_2 \Rightarrow P_1P_2 = P_2P_1$

(2) $P_1P_2 = P_2 \Leftrightarrow P_1 \geqq P_2$

<u>Dokaz</u>. Če je $P_1P_2 = P_2$, velja: $P_2P_1 = P_2^oP_1^o = (P_1P_2)^o = P_2^o = P_2 = P_1P_2$. Iz zveze $P_1P_2 = P_2$ dobimo tudi

$$(P_1-P_2)^2 = P_1^2-P_1P_2-P_2P_1+P_2^2 = P_1-2P_2+P_2 = P_1 - P_2$$

Ker je tudi $(P_1-P_2)^o = P_1-P_2$, je operator P_1-P_2 projektor. Po zadnji lemi tedaj sledi $P_1-P_2 \geqq 0$ ali $P_1 \geqq P_2$.

Naj bo obratno $P_1-P_2 \geqq 0$, potem je $I-P_1 \leqq I-P_2$. Upoštevajmo, da sta tudi $I-P_1$ in $I-P_2$ projektorja ter relacijo (8.2.4)

$$p_\alpha((I-P_1)P_2x)^2 = ((I-P_1)P_2x,P_2x)_\alpha \leqq ((I-P_2)P_2x,P_2x)_\alpha = 0$$

ker to velja za vsak indeks $\alpha \in \Delta$ in vsak element $x \in X$, sledi

$$(I-P_1)P_2 = 0$$

ali $P_2 = P_1P_2$, s čimer smo v celoti dokazali zgornjo lemo.

8.3. Funkcija operatorja $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$

Vzemimo Δ-končen in b-sebiadjungiran operator A, potem po korolarju 8.2.4 zanj obstajata konstanti m in M z lastnostjo

$$m(x,x)_\alpha \leqq (Ax,x)_\alpha \leqq M(x,x)_\alpha \quad ; \quad x \in X, \alpha \in \Delta$$

Naj bo p(t) polinom z realnimi koeficienti

$$p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \dots . + a_n t^n$$

in definirajmo operator

$$p(A) = a_o I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots . + a_n A^n$$

Očitno je tudi p(A) linearen operator.

8.3.1 TRDITEV Če je operator A b-sebiadjungiran in Δ-končen, je tak tudi operator p(A), kjer je p(t) poljuben polinom z realnimi koeficienti.

Dokaz. Izračunajmo : $(p(A)x,y)_\alpha = (\sum_{k=0}^{n} a_k A^k x, y)_\alpha = \sum_0^n a_k (x, A^k y)_\alpha =$ $= (x, \sum_0^n a_k A^k y)_\alpha = (x, p(A)y)_\alpha$, torej je $p(A) \in \mathcal{H}(X)$. Če še upoštevamo lastnosti polnorme q_α, dobimo

$$q_\alpha(p(A)) \leqq \sum_{k=0}^{n} |a_k| q_\alpha(A)^k$$

od koder sledi

$$\sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(p(A)) \leqq \sum_0^n |a_k| \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(A)^k \leqq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, \|A\|^k < \infty$$

8.3.2 IZREK Prireditev $p(t) \longmapsto p(A)$, ki poljubnemu polinomu p(t) z realnimi koeficienti priredi operator p(A) iz $\mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{H}(X)$, je linearna, multiplikativna in pozitivna :

$$c_1 p(t) + c_2 q(t) \longmapsto c_1 p(A) + c_2 q(A)$$

$$p(t).q(t) \longmapsto p(A).q(A)$$

$$p(t) \geqq 0,\ m \leqq t \leqq M \longmapsto p(A) \geqq 0$$

<u>Dokaz</u>. Prvi dve lastnosti hitro preverimo s kratkim računom, nekoliko več dela imamo le z zadnjo. Naj bo torej $p(t) \geqq 0$ za $t \in [m,M]$, potem se v tem intervalu ta polinom da zapisati v obliki

$$p(t) = c \prod_{i=1}^{l} (t-\alpha_i) \prod_{j=1}^{r} (\beta_j - t) \prod_{k=1}^{s} [(t-\gamma_k)^2 + \delta_k^2]$$

Pri tem je $c > 0$, $\alpha_i \leqq m$ in $\beta_j \geqq M$. Tretji produkt vsebuje vse morebitne dvojne realne ničle med m in M ter vse kompleksne korene polinoma. Ustrezni operator je

$$p(A) = c \prod_{i=1}^{l} (A-\alpha_i I) \prod_{j=1}^{r} (I\beta_j - A) \prod_{k=1}^{s} [(A-\gamma_k I)^2 + \delta_k^2 I]$$

V zgornjem produktu so vsi faktorji pozitivni, na primer

$$((A-\alpha_i I)x,x)_\alpha = (Ax,x)_\alpha - \alpha_i (x,x)_\alpha \geqq (m-\alpha_i)(x,x)_\alpha \geqq 0$$

in prav podobno se prepričamo za vse ostale. Ti faktorji očitno tudi med seboj komutirajo in po lemi 8.2.2 je tedaj tudi njihov produkt pozitiven, se pravi $p(A) \geqq 0$.

<u>8.3.3 KOROLAR</u> Če je operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$, velja $mI \leqq A \leqq MI$ in če sta $p(t)$ in $q(t)$ taka polinoma z realnimi koeficienti, da zanju velja

$$p(t) \leqq q(t)\ ,\quad t \in [m,M]$$

potem za ustrezna operatorja $p(A)$ in $q(A)$ velja

$$p(A) \leqq q(A)$$

Zares, uporabiti moramo le zgornji izrek za polinom $q(t)-p(t) \geqq 0$.

Isto kot smo naredili za polinome, lahko naredimo tudi za širši razred funkcij. Vzemimo najprej funkcije, ki so definirane na intervalu $[m,M]$, so od zgoraj polzvezne in so na tem intervalu nenegativne. Vsako tako funkcijo $u(t)$ lahko aproksimiramo s padajočim zaporedjem polinomov $p_n(t)$, ki v intervalu $[m,M]$ konvergirajo k funkciji $u(t)$. Po prejšnjem izreku je potem tudi zaporedje pozitivnih operatorjev $p_n(A)$ monotono padajoče in navzdol omejeno z operatorjem 0. To zaporedje po korolarju 8.2.5 "krepko" konvergira proti nekemu b-sebiadjungiranemu operatorju, ki ga označimo z $u(A)$. Pri tem je operator $u(A)$ enolično določen z zaporedjem polinomov $\{p_n(t)\}$, v kar se prav tako prepričamo, kot v primeru običajnega Hilbertovega prostora (gl.[16]).

Zgornji razred funkcij nato še razširimo na poljubne od zgoraj polzvezne funkcije, definirane na intervalu $[m,M]$. Vsako tako funkcijo lahko pišemo v obliki

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

pri čemer sta $u_1(t)$ in $u_2(t)$ spet od zgoraj polzvezni in nenegativni funkciji. Ustrezni operator zapišemo

$$u(A) = u_1(A) - u_2(A)$$

<u>8.3.4 IZREK</u> Za vsak operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ in za vsako na intervalu $[m,M]$ od zgoraj polzvezno funkcijo $u(t)$ dobimo operator

$$u(A) \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$$

Priredítev $u(t) \longmapsto u(A)$ je linearna, multiplikativna in homogena :

$$c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \longmapsto c_1u_1(A) + c_2u_2(A)$$

$$u_1(t).u_2(t) \longmapsto u_1(A).u_2(A)$$

$$u_1(t) \leqq u_2(t),\ t\in[m,M] \longmapsto u_1(A) \leqq u_2(A)$$

Dokaz tega izreka je prav tak kot v primeru Hilbertovega prostora in ga tu ne bomo ponavljali. Treba je le vzeti k funkcijam $u_i(t)$ dovolj dobre polinomske aproksimacije, za katere pa že velja podoben izrek.

Še vedno imejmo operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ in vzemimo konkretno funkcijo

$$e_s(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \leqq s \\ 0 & , \quad t > s \end{cases} \tag{8.3.1}$$

pri čemer je $t\in[m,M]$. Pravzaprav imamo družino funkcij $\{e_s(t)\}$, $s\in[m,M]$, ki so vse očitno od zgoraj polzvezne in nenegativne . Po prejšnjem izreku dobimo zanje družino operatorjev, ki jih pišimo v obliki

$$E_s = e_s(A)$$

Ti operatorji so b-sebiadjungirani in Δ-končni. Pri tem pa velja še

$$E_s^2 = e_s(A)^2 = e_s(A) = E_s$$

zaradi zveze $e_s^2(t) = e_s(t)$. $\{E_s\}$ je torej družina projektorjev, nekaj njihovih lastnosti bo opisal naslednji izrek.

<u>8.3.5 LEMA</u> Za družino projektorjev $\{E_s\}$ veljajo lastnosti

a) $E_sE_r = E_rE_s = E_s$ za $s \leqq r$

b) $E_s = 0$ za $s < m$

c) $E_s = I$ za $s \geqq M$

d) $E_{s+0} = E_s$

Dokaz. Če je $s \leqq r$, je $e_s(t)e_r(t) = e_s(t)$ in po prejšnjem izreku sledi trditev a). Če je $s < m$, je $e_s(t) = 0$ za vsak $t \in [m, M]$, torej $E_s = 0$. V kolikor je $s \geqq M$, je $e_s(t) = 1$ za vsak $t \in [m, M]$, torej $E_s = I$.

Dokažimo še, da je funkcija $s \mapsto E_s$ z desne zvezna. Vzemimo fiksen $s \in [m, M]$ in naj bo $\{p_n(t)\}$ zaporedje polinomov, ki konvergira k funkciji $e_s(t)$ v intervalu $[m, M]$. Pri tem naj še velja

$$p_n(t) \geqq e_{s+1/n}(t)$$

Po izreku 8.3.4 za ustrezne operatorje velja

$$p_n(A) \geqq E_{s+1/n} \geqq E_s$$

pri tem smo upoštevali še lemo 8.2.8, ki nam za $s+1/n > s$ da

$$E_{s+1/n}E_s = E_s \Leftrightarrow E_{s+1/n} \leqq E_s$$

Ker gre zaporedje operatorjev $p_n(A)$ proti operatorju E_s, gre tudi zaporedje operatorjev $E_{s+1/n}$ proti operatorju E_s, kar pomeni zveznost z desne.

Družino operatorjev $\{E_s\}$, ki ima lastnosti a) - d) bomo imenovali tudi spektralna družina projektorjev.

8.4 Spektralna razčlenitev operatorja $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$

V prejšnjem razdelku smo za operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ dobili spektralno familijo $\{E_s\}$. Vzemimo neko zvezno funkcijo $f(t)$, definirano na intervalu $[m, M]$, ki ga določa operator A. V tem intervalu vzemimo neko razdelitev

$$s_0 < m < s_1 < \dots\dots < s_{n-1} < M \leqq s_n$$

in naj bo $\nu_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, poljubna točka, le za prvo in zadnjo še zahtevajmo : $\nu_1 \geqq m$, $\nu_n \leqq M$. Definirajmo funkcijo

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(e_{s_k}(t) - e_{s_{k-1}}(t))$$

kjer so funkcije $e_{s_k}(t)$ oblike (8.3.1). $\varphi_n(t)$ je stopničasta funkcija, ki je od zgoraj polzvezna. Zanjo po izreku 8.3.4 dobimo operator

$$\varphi_n(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}})$$

Tudi za zvezno funkcijo f(t) dobimo ustrezni operator f(A). Ker je f(t) zvezna funkcija, lahko na vsakem podintervalu zapišemo

$$m_k \leqq f(t) \leqq M_k \ ; \quad s_{k-1} \leqq t \leqq s_k$$

Če pišemo $\omega = \max_k (M_k - m_k)$, dobimo oceno

$$-\omega \leqq f(t) - \varphi_n(t) \leqq \omega$$

Po izreku 8.3.4 zopet sledi, da tudi za ustrezne operatorje velja

$$-\omega I \leqq f(A) - \varphi_n(A) \leqq \omega I$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki

$$|((f(A) - \varphi_n(A))x,x)_\alpha| \leqq \omega (x,x)_\alpha$$

ki velja za vsak $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$. Ker je tudi $f(A) - \varphi_n(A)$ b-sebiadjungiran operator, po trditvi 8.2.3 sledi

$$q_\alpha(f(A) - \varphi_n(A)) \leqq \omega \ , \quad \alpha \in \Delta$$

Če število delišč večamo tako, da gredo dolžine vseh podintervalov proti nič, zaporedje operatorjev "enakomerno" (glede na polnorme q_α) konvergira k operatorju $f(A)$. Zapišimo

$$f(A) = \int_{m-0}^{M} f(s)dE_s = \lim \sum_{k=0}^{n} f(\nu_k)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) \qquad (8.4.1)$$

kjer imamo limito na desni v smislu topologije, ki jo v prostoru $\mathcal{L}^*(X)$ inducirajo polnorme $\{q_\alpha\}$.

Iz zgornjega sledi še

$$(f(A)x,y)_\alpha = \int_{m-0}^{M} f(s)d(E_s x,y)_\alpha \ , \quad \alpha\in\Delta \qquad (8.4.2)$$

kjer je sedaj na desni strani Stieltjesov integral v običajnem smislu.

Ugotovljene izsledke združimo v izrek :

<u>8.4.1 IZREK</u> Naj bo operator $A\in\mathcal{H}(X)\cap\mathcal{L}_F(X)$, potem zanj obstaja v intervalu $[m,M]$ spektralna družina projektorjev $\{E_s\}$ z lastnostmi a) do d) v lemi 8.3.5. Pri tem za vsako zvezno funkcijo $f(t)$ velja

$$f(A) = \int_{m-0}^{M} f(t)dE_t \qquad (8.4.3)$$

V posebnem za $f(t) = t$ dobimo

$$A = \int_{m-0}^{M} t dE_t \qquad (8.4.4)$$

Za vsak fiksen $s\in[m,M]$ je operator E_s limita v "krepkem" smislu polinomov operatorja A.

V segmentu $[m,M]$ obstaja le ena spektralna familija, za katero velja zveza (8.4.4).

<u>Dokaz</u>. Preveriti moramo le še zadnjo trditev. Če bi imeli še eno spektralno družino $\{F_s\}$, za katero bi veljalo (8.4.4), bi to pomenilo, da velja tudi

$$A^i = \int_{m-0}^{M} s^i dF_s \quad ; \quad i=0,1,\ldots$$

kar sledi za $i=0$ direktno, za $i=1,2,\ldots$ pa iz zveze

$$\Big[\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(F_{s_k}-F_{s_{k-1}})\Big]^i=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^i(F_{s_k}-F_{s_{k-1}})$$

kajti za $k\neq j$ velja : $(F_{s_k}-F_{s_{k-1}})(F_{s_j}-F_{s_{j-1}})=0$. Od tod sledi, da velja tudi za polinome

$$p(A)=\int_{m-0}^{M}p(t)dF_t$$

ali tudi

$$(p(A)x,y)_\alpha=\int_{m-0}^{M}p(t)d(F_tx,y)_\alpha\quad;\quad x,y\in X,\ \alpha\in\mathcal{L}$$

in po Weierstrassovem izreku tudi za vsako zvezno funkcijo $f(t)$

$$(f(A)x,y)_\alpha=\int_{m-0}^{M}f(t)d(F_tx,y)_\alpha$$

Če dobljeno zvezo primerjamo z (8.4.2), dobimo

$$\int_{m-0}^{M}f(t)d((E_t-F_t)x,y)_\alpha=0$$

za vsak $\alpha\in\mathcal{L}$, poljubna elementa $x,y\in X$ in vsako zvezno funkcijo $f(t)$. Po izreku, kdaj je Stieltjesov integral enak nič za vsako zvezno funkcijo, sledi

$$g(t)=((E_t-F_t)x,y)_\alpha=c$$

za $t=m-o$, $t=M$ in za vse točke t, kjer je $g(t)$ zvezna ali vsaj z ene strani zvezna. Toda v točki $t=M$ je $g(M)=E_M-F_M=I-I=0$, torej $c=0$. Ker sta F_t in E_t zvezni z desne, je

$$((E_t-F_t)x,y)_\alpha=0$$

za vsak $t\in[m,M]$ in vsak indeks $\alpha\in\mathcal{L}$ ter poljubna $x,y\in X$, torej velja

$$E_t=F_t$$

8.4.2 KOROLAR Za operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ in zvezno funkcijo $f(t)$ v intervalu $[m,M]$ je tudi

$$f(A) \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$$

pri čemer velja ocena

$$\| f(A) \| = \max \{ |f(t)|,\ m \leqq t \leqq M \}$$

Dokaz. Že od prej vemo, da je $f(A) \in \mathcal{H}(X)$. Ker je $f(t)$ zvezna funkcija, obstajata konstanti c_1, c_2 z lastnostjo

$$c_1 \leqq f(t) \leqq c_2 , \quad t \in [m,M]$$

Če to oceno upoštevamo v Stieltjesovih vsotah, dobimo

$$c_1 I = c_1 \sum_{k=1}^{m} (E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\nu_k)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) \leqq c_2 \sum_{k=1}^{n} (E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) = c_2 I$$

kar nam v limiti da

$$c_1 I \leqq f(A) \leqq c_2 I$$

oziroma

$$c_1 (x,x)_\alpha \leqq (f(A)x,x)_\alpha \leqq c_2 (x,x)_\alpha$$

in po izreku 8.2.3 tedaj sledi

$$q_\alpha(f(A)) = \max \{ |c_1|, |c_2| \}$$

Enaka ocena potem velja tudi za supremum

$$\| f(A) \| = \sup_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(f(A)) = \max \{ |c_1|, |c_2| \} < \infty$$

s čimer smo zgornji korolar dokazali.

Dokažimo še naslednji izrek :

8.4.3 IZREK Naj bo $A \in \mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{H}(X)$ in $\{E_s\}$ njegova spektralna družina. Potem velja : točka $t \in [m,M]$, v kateri funkcija

$t \mapsto E_t$ ni zvezna, je lastna vrednost operatorja A. Množica $\mathcal{R}(E_t - E_{t-0})$ je prostor ustreznih lastnih vektorjev.

Dokaz. Vzemimo poljubna $s, r \in [m, M]$ in najprej dokažimo trditev

$$s \leqq r \Rightarrow s(E_r - E_s) \leqq A(E_r - E_s) \leqq r(E_r - E_s) \qquad (8.4.5)$$

V ta namen zopet vzemimo neko delitev intervala $[m, M]$:

$$s_0 < m < s_1 < \ldots\ldots < s_{n-1} < M \leqq s_n$$

in naj bodo zopet vmestne točke $\nu_k \in [s_{k-1}, s_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, poljubne, le za prvo in zadnjo naj bo : $\nu_1 \geqq m$, $\nu_n \leqq M$. Označimo Stieltjesovo vsoto

$$S = \sum_{k=1}^{n} \nu_k (E_{s_k} - E_{s_{k-1}})$$

Naj za vrednosti s in r velja : $s_i \leqq s \leqq s_{i+1}$, $s_j \leqq r \leqq s_{j+1}$, vzemimo še neko število $\tau \in [m, M]$ in si oglejmo vsoto

$$(S - \tau I)(E_r - E_s) = \sum_{k=1}^{n} (\nu_k - \tau)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}})(E_r - E_s)$$

razbijmo jo na več delov in upoštevajmo lastnosti družine $\{E_s\}$

$$(S - \tau I)(E_r - E_s) = \sum_{k=1}^{i} (\nu_k - \tau)\left[(E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) - (E_{s_k} - E_{s_{k-1}})\right] +$$
$$+ (\nu_{i+1} - \tau)(E_{s_{i+1}} - E_s) + \sum_{k=i+2}^{j} (\nu_k - \tau)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}}) +$$
$$+ (\nu_{j+1} - \tau)(E_r - E_{s_j}) + \sum_{k=j+2}^{n} (\nu_k - \tau)\left[(E_r - E_r) - (E_s - E_s)\right] =$$
$$= (\nu_{i+1} - \tau)(E_{s_{i+1}} - E_s) + (\nu_{j+1} - \tau)(E_r - E_{s_j}) +$$
$$+ \sum_{k=i+2}^{j} (\nu_k - \tau)(E_{s_k} - E_{s_{k-1}})$$

Po limitnem prehodu dobimo

$$(A - \tau I)(E_r - E_s) = \int_s^r (t - \tau)\, dE_t$$

Če v tej relaciji pišemo $\tau = s$ in nato $\tau = r$, dobimo

$$(A - sI)(E_r - E_s) = \int_s^r (t-s)dE_t \geqq 0$$

$$(A - rI)(E_r - E_s) = \int_s^r (t-r)dE_t \leqq 0$$

kar nam da ravno oceno (8.4.5).

Naj sedaj funkcija $t \longmapsto E_t$ naredi v točki t_o skok, se pravi

$$P_{t_0} = E_{t_0} - E_{t_0-0} \neq 0$$

Operator P_{t_0} je zopet projektor in iz ocene (8.4.5) dobimo

$$(t_o - \frac{1}{n})P_{t_0} \leqq AP_{t_0} \leqq t_o P_{t_0}$$

od koder pri $n \to \infty$ sledi

$$(A - t_o I)P_{t_0} = 0$$

Torej za vsak $x \in X$ velja $(A - t_o I)P_{t_0} x = 0$, oziroma če pišemo $y = P_{t_0} x$, sledi

$$Ay = t_o y \ , \quad y \in \mathcal{R}(P_{t_0})$$

Za operator $A \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ lahko izrek 8.4.1 še posplošimo na zvezne kompleksne funkcije, če jih pišemo v obliki

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

kjer sta $f_1(t)$ in $f_2(t)$ zvezni realni funkciji. Na ta način dobimo operator

$$f(A) = f_1(A) + if_2(A) = \int_{m-0}^{M} f(t)dE_t$$

Pri tem seveda operator $f(A)$ ni več b-sebiadungiran, vendar zanj obstaja adjungirani operator :

8.4.4 IZREK Za vsak operator A iz $\mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ in vsako zvezno kompleksno funkcijo f(t) ($t \in [m,M]$) dobimo operator

$$f(A) = \int_{m-0}^{M} f(t)\, dE_t$$

pri čemer je f(A) iz $\mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$. Njegov b-adjungirani operator je

$$f(A)^o = \int_{m-0}^{M} \overline{f(t)}\, dE_t$$

Dokaz. Očitno sta operatorja $f_1(A)$ in $f_2(A)$ iz $\mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$, zato je tudi $f(A) \in \mathcal{L}_F(X)$. Izračunajmo

$$(f(A)x,y)_\alpha = (f_1(A)x,y)_\alpha + i(f_2(A)x,y)_\alpha =$$

$$= (x,(f_1(A) - if_2(A))y)_\alpha = (x,f(A)^o y)_\alpha$$

To pomeni, da za operator f(A) obstaja b-adjungirani operator:

$$f(A)^o = f_1(A) - if_2(A) = \int_{m-0}^{M} \overline{f(t)}\, dE_t$$

Naj opomnimo, da bi tudi za unitaren operator $U \in \mathcal{L}^*(X)$ lahko dobili spektralno dekompozicijo po podobni poti, kot smo jo prehodili z operatorji iz množice $\mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$.

Da se nam je posrečila spektralna razčlenitev za sebiadjungirane operatorje iz množice $\mathcal{L}_F(X) \cap \mathcal{L}^*(X)$, ni presenetljivo, saj je ta algebra celo izomorfna von Neumannovi algebri, kar bomo videli v naslednjem izreku.

8.4.5 IZREK Naj bo X H-lokalno konveksen prostor. Potem je C^*-algebra $\mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ izomorfna neki von Neumannovi algebri.

Dokaz. C^*-algebra z enoto je izomorfna von Neumannovi algebri natanko tedaj, ko sta izpolnjena pogoja (gl.[5]):

1. Vsako monotono naraščajoče posplošeno zaporedje hermitskih elementov, ki so od zgoraj omejeni z nekim hermitskim elementom, ima natančno zgornjo mejo.

2. Za vsak pozitiven neničelen element x te algebre obstaja stanje f, ki je na elementu x od nič različno in za vsako monotono naraščajoče posplošeno zaporedje $\{y_\gamma\}$ pozitivnih elementov, ki ima natančno zgornjo mejo $y \geqq 0$, velja

$$f(y) = \sup_{\gamma\in\Gamma} f(y_\gamma)$$

Vzemimo torej monotono naraščajoče zaporedje operatorjev $\{A_\gamma\} \subset \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ $(\gamma' \leqq \gamma'' \Rightarrow A_{\gamma'} \leqq A_{\gamma''})$, ki je navzgor omejeno ($A_\gamma \leqq B$, $B \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ za vsak $\gamma\in\Gamma$). Po izreku 8.2.6 obstaja "krepka" limita $A \in \mathcal{H}(X)$. Očitno je tudi $A \in \mathcal{L}_F(X)$. Dokažimo, da je operator A ravno natančna zgornja meja.

Vzemimo poljuben $x\in X$, $\alpha\in\Delta$, $\gamma\in\Gamma$ in ocenimo

$$|(A_\gamma x,x)_\alpha - (Ax,x)_\alpha| \leqq p_\alpha(A_\gamma x - Ax)p_\alpha(x)$$

Od tod sledi, da tudi zaporedje $\{(A_\gamma x,x)\}_{\gamma\in\Gamma}$ konvergira proti $(Ax,x)_\alpha$. Če na desni strani neenačbe $(A_{\gamma'}x,x)_\alpha \leqq (A_{\gamma''}x,x)$, ki velja za $\gamma' \leqq \gamma''$, naredimo limito po vseh $\gamma''\in\Gamma$, za katere je $\gamma'' \geqq \gamma'$, dobimo $(A_{\gamma'}x,x)_\alpha \leqq (Ax,x)_\alpha$. Torej je A zgornja meja, je pa tudi najmanjša zgornja meja, kajti če je tudi operator C zgornja meja, velja za vsak $\gamma\in\Gamma$: $(A_\gamma x,x)_\alpha \leqq (Cx,x)_\alpha$. Toda, ker zaporedje $\{A_\gamma x\}$ konvergira k Ax, velja

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma x,x)_\alpha = (Ax,x)_\alpha \leqq (Cx,x)_\alpha$$

kar pomeni, da je operator A res natančna zgornja meja.

Preveriti moramo še drugi pogoj. Vzemimo poljuben pozitiven neničelen operator A iz $\mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$. Ker je $A \neq 0$, obstaja vsaj en element $y\neq 0$, da velja $Ay\neq 0$ in zaradi zadostnosti polnorm p_α obstaja potem vsaj ena polnorma $p_{\alpha_0}\in\mathcal{P}$ z lastnostjo $p_{\alpha_0}(Ay)\neq 0$. Ker je $p_{\alpha_0}(Ay)\leqq C_{\alpha_0}p_{\alpha_0}(y)$, je tudi $p_{\alpha_0}(y)\neq 0$. Zato lahko izberemo element $x_0=y/p_{\alpha_0}(y)$, ki ima lastnost $p_{\alpha_0}(x_0) = 1$. S pomočjo tega elementa in indeksa $\alpha_0\in\Delta$ konstruirajmo funkcional

$$f(T) = (Tx_0,x_0)_{\alpha_0}\ , \quad T\in\mathcal{L}^*(X)\cap\mathcal{L}_F(X)$$

Očitno je f linearen in zvezen zaradi ocene

$$|f(T)| \leqq |(Tx_0,x_0)_{\alpha_0}| \leqq q_{\alpha_0}(T)\leqq \|T\|$$

Ker je $f(I) = (x_0,x_0)_{\alpha_0} = 1$, velja $\|f\| = 1$. Funkcional f je tudi pozitiven

$$f(T^oT) = (T^oTx_0,x_0)_{\alpha_0} = (Tx_0,Tx_0)_{\alpha_0} \geqq 0,\quad T\in\mathcal{L}^*(X)\cap\mathcal{L}_F(X)$$

Torej je funkcional f stanje. Ali je njegova vrednost na operatorju A enaka nič ? Recimo, da je $f(A) = (Ax_0,x_0)_{\alpha_0} = 0$, ker je $A\geqq 0$, po izreku 6.5.4 obstaja pozitiven kvadratni koren $B = A^{1/2}$ in lahko zapišemo

$$0 = (Ax_0,x_0)_{\alpha_0} = (B^2x_0,x_0)_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}(Bx_0)^2$$

od koder sledi

$$p_{\alpha_0}(Ay) = p_{\alpha_0}(y)p_{\alpha_0}(Ax_0) = p_{\alpha_0}(y)p_{\alpha_0}(B^2x_0) \leqq$$

$$\leqq p_{\alpha_0}(y)q_{\alpha_0}(B)p_{\alpha_0}(Bx_0) = 0$$

kar je v protislovju s predpostavko $p_{\alpha_0}(Ay)\neq 0$.

Imejmo sedaj posplošeno monotono naraščajoče zaporedje operatorjev $\{A_\delta\}_{\delta\in\Gamma}$, ki naj ima natančno zgornjo mejo C. Torej za operator C veljata zahtevi

(a) $(A_\delta x,x) \leqq (Cx,x)_\alpha$, za vse $x \in X$, $\alpha \in \Delta$ in $\delta \in \Gamma$

(b) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja indeks $\delta_0 \in \Gamma$, da za poljuben $x \in X$ in $\alpha \in \Delta$ velja: $(A_{\delta_0} x,x)_\alpha \geqq (Cx,x)_\alpha - \varepsilon (x,x)_\alpha$.

Iz prvega pogoja pri $x = x_0$ in $\alpha = \alpha_0$ sledi

$$(A_\delta x_0,x_0)_{\alpha_0} \leqq (Cx_0,x_0)_{\alpha_0}$$

za vsak $\delta \in \Gamma$, torej velja ta ocena tudi za supremum

$$\sup_{\delta \in \Gamma} f(A_\delta) = \sup_{\delta \in \Gamma} (A_\delta x_0,x_0)_{\alpha_0} \leqq (Cx_0,x_0)_{\alpha_0} = f(C)$$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$, potem po lastnosti (b) obstaja indeks $\delta_0 \in \Gamma$, da velja

$$\sup_{\delta \in \Gamma} f(A_\delta) \geqq (A_{\delta_0} x_0,x_0)_{\alpha_0} \geqq (Cx_0,x_0)_{\alpha_0} - \varepsilon = f(C) - \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, sledi: $\sup_{\delta \in \Gamma} f(A\ ) \geqq f(C)$ in skupaj z zgornjo oceno dobimo enakost.

Naredili smo spektralno razčlenitev za poljuben Δ-končen in b-sebiadjungiran operator. Sedaj pa bi hoteli isto narediti za poljuben b-sebiadjungiran operator. V ta namen naredimo nekaj priprav.

8.5 Komutativnost in redukcija operatorjev iz $\mathcal{L}(X)$

Ta dva pojma uvedemo v H-lokalno konveksen prostor podobno kot v poljubnem Hilbertovem prostoru. Naj bosta A in B poljubna zvezna operatorja, definirana na vsem X $(A,B \in \mathcal{L}(X))$, potem rečemo, da A in B komutirata, če velja $AB = BA$.

Za komutativnost preverimo nekaj lastnosti, ki jih bomo kasneje še srečali.

8.5.1 TRDITEV Naj bodo operatorji A, B in B_n iz $\mathcal{L}(X)$. Potem zanje veljajo trditve:

1) če A komutira z B_1 in B_2, potem A komutira tudi z B_1B_2 in z B_1+B_2,

2) če A komutira z B, obstaja operator B^{-1} in je $\mathcal{D}(B^{-1})=X$, potem A komutira tudi z B^{-1},

3) če A komutira z vsakim operatorjem B_n in zaporedje $\{B_n\}$ "krepko" konvergira k operatorju C, potem A komutira tudi z njim,

4) če obstajata operatorja A^o in B^o ter A komutira z B, potem A^o komutira z B^o.

Dokaz. Lastnost 1) je očitna. Tudi lastnost 2) preverimo kaj hitro, kajti operatorji A, B in B^{-1} so definirani povsod. Če vzamemo poljuben $x \in X$, obstaja element $y \in X$, da velja $y = B^{-1}x$ in dobimo

$$Ax = ABy = ABB^{-1}x = BAB^{-1}x$$

kar pomeni $B^{-1}Ax = AB^{-1}x$.

Vzemimo sedaj zaporedje operatorjev $\{B_n\}$, ki krepko konvergira k operatorju C in z vsemi operator A komutira. Za poljuben $\varepsilon > 0$ in $\alpha \in \Delta$ velja ocena

$$p_\alpha(ACx-CAx) \leq p_\alpha(ACx-AB_nx) + p_\alpha(B_nAx-CAx) \leq$$

$$\leq q_\alpha(A)p_\alpha(Cx-B_nx) + p_\alpha(B_nAx-CAx) < q_\alpha(A)\varepsilon + \varepsilon$$

če je le n dovolj velik. Ker leva stran ni odvisna od števila n, dobimo

$$p_\alpha(ACx - CAx) = 0 \ , \ \alpha \in \Delta$$

oziroma $AC = CA$.

Tudi zadnjo trditev hitro preverimo; ker A^o in B^o obstajata, po trditvi 4.3.9 sledi

$$A^o B^o = (BA)^o = (AB)^o = B^o A^o$$

Poseben primer imamo, če operator $A \in \mathcal{L}(X)$ komutira z nekim projektorjem P : $AP = PA$. Če pišemo $Q = I-P$, je po izreku 8.1.6 tudi Q projektor in tudi z njim operator A komutira

$$AQ = A - AP = A - PA = QA$$

Iz te zveze dobimo še relaciji

$$PAP = APP = AP \tag{8.5.1}$$

in

$$QAQ = AQ \tag{8.5.2}$$

Zapišimo še zvezo

$$A = (P + Q)A = PA + QA = AP + AQ \tag{8.5.3}$$

Če pišemo $X_1 = \mathcal{R}(P)$ in $X_2 = \mathcal{R}(Q)$, vemo, da velja

$$X = X_1 \oplus X_2$$

kjer sta podprostora X_1 in X_2 medseboj ortogonalna. Definirajmo še operatorja

$$A_P = A|_{X_1} \ , \ A_Q = A|_{X_2}$$

Iz lastnosti (8.5.1) in (8.5.2) potem sledi, da operator A_P preslika podprostor X_1 vase in operator A_Q podprostor X_2 vase.

Za vsak element $x = (x_1 + x_2) \in X$, kjer je $x_1 \in X_1$ in $x_2 \in X_2$, velja

$$Ax = A_P x_1 + A_Q x_2$$

kar sledi iz relacije (8.5.3).

V taki situaciji, kot smo jo sedaj opisali, bomo rekli, da podprostora X_1 in X_2 reducirata operator A.

8.6. Spektralna razčlenitev operatorja $A \in \mathcal{H}(X)$

Pri dokazovanju eksistence spektralne razčlenitve operatorja $A \in \mathcal{H}(X)$ nam bo v pomoč že dokazana razčlenitev za Δ-končne in b-sebiadjungirane operatorje. Dokažimo najprej izrek:

8.6.1 IZREK Naj bo X H-Fréchetov prostor in operator A iz $\mathcal{L}^*(X)$, potem obstajata operatorja $B = (I+A^oA)^{-1}$ in $C = A(I+A^oA)^{-1}$ ter velja

$$B \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X) \quad , \quad C \in \mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$$

Pri tem je $\|B\| \leq 1$, $\|C\| \leq 1$ in B pozitiven operator.

Dokaz. Ker je $(A^oAx,x)_\alpha = (Ax,Ax)_\alpha \geq 0$, je operator A^oA pozitiven in so tedaj vsa negativna realna števila po trditvi 6.5.2 iz $\varrho(A^oA)$. Operator $I+A^oA$ je tudi pozitiven in vsa števila manjša od 1 so v njegovi resolventni množici, torej obstaja operator $(I+A^oA)^{-1} = B$. Ker je tudi $-1 \in \varrho(A^oA)$, je po lemi 5.2 $\mathcal{R}(I+A^oA) = X$, ali $\mathcal{D}(B) = X$. Vzemimo poljuben element $z \in X$, potem obstaja element $x \in X$ z lastnostjo $z = (I+A^oA)x$, oziroma $x = Bz$. Dobimo

$$p_\alpha^2(z) = p_\alpha^2((I+A^oA)x) = p_\alpha^2(x) + 2\mathrm{Re}(x,A^oAx)_\alpha + p_\alpha^2(A^oAx) =$$

$$= p_\alpha^2(x) + 2p_\alpha^2(Ax) + p_\alpha^2(A^0Ax) \geqq p_\alpha^2(x) \qquad (8.6.1)$$

Od tod sledi: $p_\alpha(Bz) \leqq p_\alpha(z)$ za vsak $\alpha \in \Delta$, kar že pomeni, da je operator B iz $\mathcal{L}_F(X)$ in

$$\| B \| = \sup_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(B) \leqq \sup_{\alpha\in\Delta} \sup_{x\in X\setminus\}_\alpha} (p_\alpha(Bx)/p_\alpha(x)) \leqq 1$$

Dokažimo, da za operator B obstaja b-adjungirani operator. Naj bosta $x,y\in X$ poljubna, potem obstajata elementa $u,v\in X$, da velja $u = Bx$ in $v = By$, oziroma $x=(I+A^0A)u$ in $y=(I+A^0A)v$. Velja

$$(Bx,y)_\alpha = (u,(I+A^0A)v)_\alpha = (u,v)_\alpha + (u,A^0Av)_\alpha =$$

$$= (u,v)_\alpha + (A^0Au,v)_\alpha = ((I+A^0A)u,v)_\alpha = (x,By)_\alpha$$

kar pomeni, da obstaja operator B^0 in je enak operatorju B, torej je B iz $\mathcal{H}(X)$. Operator B je celo pozitiven:

$$(Bx,x)_\alpha = (Bx,(I+A^0A)Bx)_\alpha = (Bx,Bx)_\alpha + (Bx,A^0ABx)_\alpha =$$

$$= p_\alpha(Bx)^2 + p_\alpha(ABx)^2 \geqq 0$$

Oglejmo si še operator C. Ker operator B obstaja, obstaja tudi operator $C = AB$ in ker je $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) = X$, je tudi $\mathcal{D}(C)=X$. Naj bo $z\in X$ poljuben element, potem obstajata elementa $x,y\in X$, da velja $x = Bz$, $y = Cz = ABz = Ax$ in če prepišemo prvi del relacije (8.6.1), dobimo

$$p_\alpha^2(z) = p_\alpha^2(x) + 2p_\alpha^2(Ax) + p_\alpha^2(A^0Ax) =$$

$$= p_\alpha^2(Bz) + 2p_\alpha^2(Cz) + p_\alpha^2(A^0Ax) \geqq p_\alpha^2(Cz)$$

Od tod zopet sledi $C \in \mathcal{L}_F(X)$ in $\| C \| \leqq 1$. Ker za operatorja A in B obstajata b-adjungirana operatorja, tudi za C obstaja b-adjungirani operator C^0 z lastnostjo

$$C^o = (AB)^o = B^oA^o = BA$$

Torej je $C \in \mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$, s čimer smo zgornji izrek v celoti dokazali.

Nekajkrat bomo rabili še naslednji pomožni izrek :

<u>8.6.2 LEMA</u> Naj bo $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistem ortogonalnih projektorjev z vsoto I in naj bodo $X_n = \mathcal{R}(P_n)$ ustrezni podprostori. Naj bo dana še družina operatorjev $\{A_n\}_{n=1} \subset \mathcal{L}_o(X)$ z lastnostjo, da jih podprostori X_n reducirajo na b-sebiadjungirane operatorje. Ti operatorji naj bodo glede na posamezne polnorme q_α enakomerno omejeni

$$q_\alpha(A_n) \leqq D_\alpha , \qquad n \in N$$

Potem obstaja natanko en b-sebiadjungiran operator A, ki ga podprostori X_n reducirajo na operatorje A_n in velja

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n$$

za vsak $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$.

<u>Dokaz</u>. Vzemimo poljuben $x \in X$, potem velja

$$p_\alpha(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n)^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} q_\alpha(A_n)^2 p_\alpha(x_n)^2 \leqq D_\alpha^2 p_\alpha(x)^2$$

To pomeni, da je zgornji operator A definiran na vsem X in je $A \in \mathcal{L}_o(X)$.

Ker je $A_k x_k = A_k P_k x = P_k A_k x \in X_k$ za vsak $x_k \in X_k$, velja

$$(Ax,y)_\alpha - (x,Ay)_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k x_k, y_k)_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} (x_k, A_k x_k)_\alpha = 0$$

kjer smo upoštevali, da so podprostori X_k med seboj ortogonalni zaradi ortogonalnosti projektorjev P_k. Torej je operator A b-sebiadjungiran. Dokazati moramo le še enoličnost. Privzemimo, da bi bil še en operator A' z lastnostjo $(A'x,y)_\alpha = (x,A'y)_\alpha$ za $x,y \in \mathcal{D}(A')$ in bi se na vsakem podprostoru X_k reduciral na operator A_k. Ker velja

$$p_\alpha(A'x) = p_\alpha(\sum_{k=1}^{\infty} A'x_k) = p_\alpha(\sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k) \leqq C_\alpha p_\alpha(x)$$

je $\mathcal{D}(A') = X$ in tudi $A' \in \mathcal{L}_0(X)$ ter velja

$$A'x = \sum_{k=1}^{\infty} A'x_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k = Ax$$

torej je $A' = A$, s čimer je zgornja lema potrjena.

Vzemimo sedaj poljuben operator $A \in \mathcal{H}(X)$. Po izreku 8.6.1 vemo, da obstaja operator $B = (I+A^2)^{-1} \in \mathcal{H}(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$ ter operator $C = AB = A(I+A^2)^{-1} \in \mathcal{L}^*(X) \cap \mathcal{L}_F(X)$. Pri tem je $\|B\| \leqq 1$ in $\|C\| \leqq 1$. Ker je operator B celo pozitiven, velja $0 \leqq B \leqq I$, ali na daljši način zapisano

$$0 \leqq (Bx,x)_\alpha \leqq (x,x)_\alpha; \quad x \in X, \ \alpha \in \Delta$$

Po izreku 8.4.1 obstaja za operator B spektralna družina $\{F_t\}$ v intervalu $[0,1]$ z lastnostjo

$$B = \int_0^1 t\,dF_t$$

Pri tem je funkcija $t \mapsto F_t$ tudi v točki 0 zvezna, če bi namreč F_t pri $t=0$ naredila skok, bi bila točka $t=0$ po izreku 8.4.3 lastna vrednost operatorja B in operator B^{-1} ne bi obstajal. To pomeni $F_0 = 0$.

Definirajmo družino projektorjev

$$P_n = F_{\frac{1}{n}} - F_{\frac{1}{n+1}} \quad ; \quad n=1,2,\ldots.$$

ki ima očitno lastnost : $P_n P_m = 0$ za $n \neq m$ in $P_n^2 = P_n$ ter zanje velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = F_1 - F_o = I$$

Pišimo $X_n = \mathcal{R}(P_n)$, potem so prostori X_n paroma ortogonalni in njihova direktna vsota je ves prostor X.

Operatorji A, B, C in $(I+A^2)$ so povsod definirani, zato lahko relacijo $A(I+A^2) = (I+A^2)A$ pomnožimo z leve in desne z operatorjem B :

$$BA(I+A^2)B = B(I+A^2)AB$$

od koder sledi

$$AB = BA$$

in prav tako velja $BC = BAB = ABB = CB$, oziroma

$$CB = BC$$

Torej operator B komutira z operatorjema A in C.

Ker operator C komutira z operatorjem B, komutira tudi z vsemi polinomi operatorja B in s krepkimi limitami polinomov od B. To pomeni, da operator C komutira tudi z operatorji F_t in P_n kot tudi z operatorji oblike $s_n(B)$, kjer je

$$s_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \text{ , } & \frac{1}{n+1} < t \leqq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ , } & \text{drugod} \end{cases}$$

Funkcija $t.s_n(t) = 1$ za $t \in (1/(n+1), 1/n]$ in enaka nič drugod, zato da po ugotovitvah razdelka 8.4 ravno projektor P_n in velja

$$B.s_n(B) = s_n(B).B = P_n$$

Od tod sledi

$$AP_n = AB.s_n(B) = C.s_n(B) = s_n(B)C = s_n(B)AB = s_n(B)BA = P_nA$$

Torej tudi operator A komutira s projektorjem P_n. Pišimo

$$A_n = AP_n = C.s_n(B)$$

Podprostori X_n reducirajo operator A na operatorje A_n, ki so Δ-končni, namreč, ker je $C \in \mathcal{L}_F(X)$ in $s_n(B) \in \mathcal{L}_F(X)$, je tudi $A_n = C.s_n(B) \in \mathcal{L}_F(X)$ in velja

$$\| A_n \| \leqq \| C \| \| s_n(B) \| \leqq (n+1)$$

Operatorji A_n so tudi enakomerno omejeni glede na posamezne polnorme q_α

$$q_\alpha(A_n) \leqq q_\alpha(A)q_\alpha(P_n) \leqq q_\alpha(A) \tag{8.6.2}$$

Tudi za operatorje A_n obstaja spektralna razčlenitev

$$A_n = \int_{a_n-0}^{b_n} t dE_t^n$$

pri tem sta meji a_n in b_n končni zaradi ocene

$$|(A_nx,x)_\alpha| \leqq q_\alpha(A_n)(x,x)_\alpha \leqq \|A_n\|(x,x)_\alpha \leqq (n+1)(x,x)_\alpha$$

za vsak $\alpha \in \Delta$. Kadar pišemo skalarne produkte, se zgornja oblika integrala še malo spremeni, upoštevajmo namreč oceno

$$|(A_nx,x)_\alpha| \leqq q_\alpha(A_n)(x,x)_\alpha \leqq q_\alpha(A)(x,x)_\alpha$$

kar pomeni, da obstajata konstanti m' in M', da je

$$m'_\alpha (x,x)_\alpha \leqq (A_nx,x)_\alpha \leqq M'_\alpha (x,x)_\alpha \tag{8.6.3}$$

Torej so vsi operatorji A_n v istih mejah pri fiksnem indeksu $\alpha \in \Delta$. Vzemimo torej fiksen indeks $\alpha \in \Delta$, tak $n \in N$, da bo $[m'_\alpha, M'_\alpha] \subset \subset [a_n, b_n]$ ter $s \in [a_n, m'_\alpha)$, potem za vsak element oblike $y = E_s^n x$

velja

$$E_t^n y = E_t^n E_s^n x = E_s^n x = y$$

če je le $t \geqq s$. To pomeni

$$(A_n y,y)_\alpha = \int_{a_n-0}^{s} + \int_{s}^{b_n} t\,d(E_t^n y,y)_\alpha \leqq s\int_{a_n-0}^{s} d(E_t^n y,y)_\alpha = s(E_s^n y,y)_\alpha =$$
$$= s(y,y)_\alpha$$

kar je zaradi ocene (8.6.3) mogoče le za element $y \in J_\alpha$. Za vsak $s \in [a_n, m_\alpha')$ je torej $E_s^n x \in J_\alpha$ za poljuben $x \in X$. Vzemimo še $s \in (M_\alpha', b_n]$, potem velja za vsak element oblike $y = E_s^n x - x$ zveza

$$E_t^n y = E_t^n E_s^n x - E_t^n x = 0$$

če je le $t \leqq s$. Od tod sledi

$$(A_n y,y)_\alpha = \int_{a_n-0}^{s} + \int_{s}^{b_n} t\,d(E_t^n y,y)_\alpha = \int_{s}^{b_n} t\,d(E_t^n y,y)_\alpha \geqq$$
$$\geqq s\int_{s}^{b_n} d(E_t^n y,y)_\alpha = s(y,y)_\alpha$$

kar je zopet mogoče zaradi ocene (8.6.3) le za $y \in J_\alpha$. Se pravi za $s \in (M_\alpha', b_n]$ velja: $E_s^n x = x + y$, kjer je $y \in J_\alpha$.

Imamo torej dva primera: če je $s < m_\alpha'$, je $d(E_s^n x,x)_\alpha = 0$ in tudi za $s > M_\alpha'$ je $d(E_s^n x,x)_\alpha = d((x,x)_\alpha + (y,x)_\alpha) = 0$. Torej velja

$$(A_n x,x)_\alpha = \int_{a_n-0}^{m_\alpha'-0} + \int_{m_\alpha'-0}^{M_\alpha'} + \int_{M_\alpha'}^{b_n} t\,d(E_t^n x,x)_\alpha = \int_{m_\alpha'-0}^{M_\alpha'} t\,d(E_t^n x,x)_\alpha$$

Če je število n tako, da ne velja inkluzija $[m_\alpha', M_\alpha'] \subset [a_n, b_n]$, lahko ustrezno povečamo interval na $[a_n', b_n'] \supset [a_n, b_n]$, da bo zgornja inkluzija izpolnjena. Torej velja zadnja zveza za vsako število $n \in \mathbb{N}$, s čimer smo dosegli, da na desni strani nimamo več odvisnosti od števila $n \in \mathbb{N}$.

Za spektralne družine $\{E_t^n\}$ veljajo po izreku 8.4.1 naslednje lastnosti:

(1) za $s \leqq r$ je $E_s^n \leqq E_r^n$

(2) $E_{s+0}^n = E_s^n$

(3) za $s < a_n$ je $E_s^n = 0$, za $s \geqq b_n$ je $E_s^n = I$

Pri tem so E_s^n projektorji, torej b-sebiadjungirani operatorji, ki jih podprostori X_n reducirajo. Ker velja še

$$q_\alpha(E_s^n) \leqq 1$$

so glede na posamezne polnorme enakomerno omejeni. Po lemi 8.6.2 obstaja b-sebiadjungiran operator E_s, dan s predpisom

$$E_s x = \sum_{n=1}^{\infty} E_s^n P_n x \tag{8.6.4}$$

za vsak $x \in X$. Vsak podprostor X_n reducira operator E_s na operator E_s^n. Operator E_s je projektor, ker velja

$$E_s^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} E_s^n P_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} E_s^k P_k x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E_s^n P_n E_s^n P_n x = E_s x$$

in tudi lastnostim (1), (2) in (3) zadošča : za $s \leqq r$ je

$$(E_s x, x)_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (E_s^n P_n x, x)_\alpha \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (E_r^n P_n x, x)_\alpha = (E_r x, x)_\alpha$$

Če gre $s \to -\infty$, gredo vsi operatorji $E_s^n \to 0$ in velja $E_s = 0$.
Če gre $s \to \infty$, gredo vsi operatorji $E_s^n \to I$ in velja $E_s = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$.

Definirajmo projektorje oblike

$$Q_m = E_m - E_{m-1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

in naj bodo $Y_m = \mathcal{R}(Q_m)$ podprostori, kamor projicirajo. Pišimo

$$S_m = \int_{m-1}^{m} t\, dE_t$$

Operatorji S_m so spet b-sebiadjungirani in Δ-končni. So pa celo enakomerno omejeni glede na posamezne polnorme. Velja namreč

$$p_\alpha^2(S_m x) = \int_{m-1}^{m} t^2 d(E_t x, x)_\alpha = \int_{m-1}^{m} t^2 d\Big[\sum_{n=1}^{\infty} (E_t^n P_n x, x)_\alpha\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} t^2 d(E_t^n P_n x, x)_\alpha =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{M} t^2 d(E_t^n P_n x, x)_\alpha \leqq \sum_n \int_{m'_\alpha - 0}^{M'_\alpha} t^2 d(E_t^n P_n x, x)_\alpha \leqq \sum_n p_\alpha^2(A_n P_n x) \leqq q_\alpha^2(A) p_\alpha^2(x)$$

Pri tem smo pisali $M = [m, m-1] \cap [m'_\alpha, M'_\alpha]$, upoštevali neenačbo (8.6.2) in dejstvo, da lahko vrsto členoma integriramo, ker imajo funkcije $(E_t^n P_n x, x)_\alpha$ enakomerno omejene totalne variacije zaradi ocene $|(E_t^n P_n x, x)_\alpha| \leqq p_\alpha(E_t^n P_n x) p_\alpha(x) \leqq p_\alpha(E_t x) p_\alpha(x) \leqq p_\alpha^2(x)$.

Po lemi 8.6.2 obstaja b-sebiadjungiran operator S, ki se na posameznem podprostoru Y_m ujema z operatorjem S_m.

$$Sx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m x_m = \sum_{-\infty}^{\infty} S_m Q_m x$$

Za vsak $x \in X$ imamo

$$Sx = \sum_{-\infty}^{\infty} S_m x_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} t dE_t x_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} t dE_t x = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x$$

Dokazati moramo še, da je dobljeni operator S enak našemu izhodnemu operatorju A. Za vsak element $x_n \in X_n$ velja

$$E_s x_n = E_s^n x_n$$

kjer je $\{E_s^n\}$ spektralna družina operatorja A_n, zato leži v končnem intervalu $[a_n, b_n]$. To pomeni $E_s x_n$ je konstantna funkcija za $s < a_n$ in za $s \geqq b_n$, tako imamo

$$Sx_n = \int_{a_n - 0}^{b_n} t dE_t x_n = \int_{a_n - 0}^{b_n} t dE_t^n x_n = A_n x_n = A x_n$$

Torej se b-sebiadjungirana operatorja A in S ujemata na vsakem podprostoru X_n in po lemi 8.6.2 sta tedaj enaka : S = A.

Tako smo dobili spektralno razcepitev za operator A

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t \qquad (8.6.5)$$

Dokažimo še, da je spektralna družina $\{E_s\}$ enolično določena z operatorjem A. Najprej ugotovimo : vsak operator $T \in \mathcal{L}_o(X)$, ki komutira z operatorjem A, komutira tudi z operatorji E_s. Res, če operator T komutira z operatorjem A, potem komutira tudi z operatorjem $B = (I+A^2)^{-1}$, ker je $\mathcal{D}(B) = X$ (trditev 8.5.1). Operator T komutira tudi z vsemi polinomi od B in njihovimi krepkimi limitami, tedaj T komutira tudi z operatorjem $P_n = B.s_n(B)$. Se pravi, da operator T reducira vsak podprostor X_n. V tem podprostoru je operator E_s^n limita polinomov operatorja A, torej T komutira tudi z E_s^n, iz česar nazadnje sklepamo, da operator T komutira tudi z operatorjem $E_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_s^n P_n$.

Dokazali smo torej trditev :

$$AT = TA \Longrightarrow TE_s = E_s T \quad , \qquad T \in \mathcal{L}_o(X) \qquad (8.6.6)$$

Operator A komutira z operatorji E_s, kar razvidimo iz zveze

$$AE_s x = SE_s x = \sum_{-\infty}^{\infty} S_m E_s x_m = E_s \sum_{-\infty}^{\infty} S_m x_m = E_s Ax \qquad (8.6.7)$$

Vzemimo sedaj, da imamo še eno spektralno družino $\{E_s'\}$, za katero tudi velja

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t'$$

pri tem tudi operatorji E_s' komutirajo z operatorjem A in po lastnosti (8.6.6) velja $E_s' E_s = E_s E_s'$. Tudi projektorji $Q_m = E_m - E_{m-1}$ komutirajo z vsemi operatorji E_s' in velja

$$AQ_m = \int_{a_m-0}^{b_m} t dE_t = \int_{a_m-0}^{b_m} t dE_t'$$

To pomeni, da operatorja E_s in E_s' sovpadata v podprostorih $Y_m = \mathcal{R}(Q_m)$. Ker so Y_m med seboj ortogonalni in njihova direktna vsota je ves prostor X, sovpadata družini E_s in E'_s povsod. Dokazali smo tako izrek :

8.6.3 IZREK Naj bo X H-Fréchetov prostor, potem za vsak operator $A \in \mathcal{H}(X)$ velja

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t \tag{8.6.8}$$

kjer je $\{E_s\}$ spektralna družina projektorjev z lastnostmi

(1) za $s \leqq r$ je $E_s \leqq E_r$

(2) $E_{s+0} = E_s$

(3) $E_s \to 0$, če $s \to -\infty$ in $E_s \to I$, če $s \to \infty$

Družina $\{E_s\}$ je z operatorjem A enolično določena in komutira z vsemi operatorji, s katerimi komutira operator A.

Kadar računamo s skalarnimi produkti, se integral (8.6.8) v resnici ne razteza po vsej realni osi. Dokažimo izrek :

8.6.4 IZREK Naj bo X H-Fréchetov prostor in operator $A \in \mathcal{H}(X)$, potem za vsak indeks $\alpha \in \Delta$, obstajata konstanti m_α in M_α, da velja

$$(Ax,y)_\alpha = \int_{m_\alpha - 0}^{M_\alpha} t d(E_t x,y)_\alpha$$

kjer je $\{E_s\}$ spektralna družina operatorja A.

Dokaz. Ker je $A \in \mathcal{H}(X)$, po trditvi 8.2.3 vemo, da obstajata konstanti m_α in M_α z lastnostjo

$$m_\alpha(x,x)_\alpha \leqq (Ax,x)_\alpha \leqq M_\alpha(x,x)_\alpha$$

Sedaj za operator A naredimo prav tak sklep, kot smo ga naredili za operator A_n in družino $\{E^n_s\}$. Dobimo : za $s < m_\alpha$ je $E_s x \in J_\alpha$ in $(E_s x,y)_\alpha = 0$, za $s > M_\alpha$ je $E_s x - x \in J_\alpha$ in $(E_s x,y)_\alpha = (x,y)_\alpha$

kar nam da nazadnje

$$(Ax,y)_\alpha = \int_{-\infty}^{m_\alpha - 0} + \int_{m_\alpha - 0}^{M_\alpha} + \int_{M_\alpha}^{\infty} t\,d(E_t x,y)_\alpha = \int_{m_\alpha - 0}^{M_\alpha} t\,d(E_t x,y)_\alpha$$

L I T E R A T U R A

1 Achieser N.I.,Glasmann I.M.: Theorie der Linearen Operatoren im Hilbert Raum.
Akademie-Verlag, Berlin, 1954

2 Antonovskij M.J.,Boltjanskij V.G.,Sarimsakov T.A.: Topologičeskie polupolja.
Izd. Sam. Gu., Taškent, 1960

3 Antonovskij M.J.,Boltjanskij V.A.,Sarimsakov T.A.: Metričeskie prostranstva nad polupoljami.
Tr. Taškent. Gos. un-ta,vip 191, Taškent, 1962

4 Antonovskij M.J.,Boltjanskij V.G.,Sarimsakov T.A.: Očerk teorii topologičeskih polupolej.
Uspehi mat. nauk 21(1966)185-218

5 Dixmier J.: Les C^*-algebres et leur representations.
Gauthier-Villars, Paris, 1969

6 Groethendick A.: Topological vector spaces.
Gordon Break 1973

7 Hadžiev D.: O proektivnih predelah gilbertovih prostranstv.
Izv.akad.nauk Uzb.SSR 3(1974)89-90

8 Köthe G.: Topologische lineare Räume.
Springer b.107, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960

9 Lassner G.: Topological algebras of operators.
Reports on Math.Phys. 3(1972)279-293

10 Lassner G.: Über Realisierungen gewisser $*$-Algebren.
Math.Nachr. 52(1972)161-166

11 Michael E.A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras.
Mem.Amer.math.soc. 11(1952)1-79

12 Moore T.: Banach algebras of operators on localy convex spaces.
Bull.Amer.Math.Soc. 75(1969)68-73

13 Precupanu T.: Espaces lineaires a semi-normes hilbertiennes.
An.Sti.Univ."Al I Cuza" Iasi sect.I a Matem. 15(1969)83-93

14 Precupanu T.: Sur le produits scalaires dans des espaces vector topologique.
Rev.Roum.de Math.Paresset Appl. 13(1968)85-90

15 Precupanu T.: Sur l´espaces dual d´un espace lineaire à semi-normes hilbertiennes.
An.Sti.Univ."Al I Cuza" Iasi sect.I a Matem. 19(1973)73-78

16 Riesz F.,Nagy B.S.: Vorlesungen über Funkcionalanalysis.
Veb Deutsch. Verlag der Wissensch., Berlin, 1973

17 Shaefer H.: Topological vector spaces.
Mc Hillar ser. 1966

18 Schmüdgen K.: Über LMC*-algebren.
Math.Nachrichten 68(1974)167-182

19 Wloka J.,Floret K.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Raumen.
Lectures Notes in Math., Springer 1968

20 Yoshida K.: Funkcionalnij analiz.
Mir, Moskva, 1967

21 Pietsch A.: Nuclear locally convex spaces.
Spinger-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York, 1972

22 Precupanu T.,Munteau I.: On H-smooth in linear spaces.
An.Sti.Univ."Al I Cuza" Iasi sect.I a Matem. 20(1974)311-316