PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 1
Strani 8–11

Borut Zalar:

O LIHIH MAGIČNIH KVADRATIH

Ključne besede: matematika, kombinatorika, magični kvadrati.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Zalar.pdf

O LIHIH MAGIČNIH KVADRATIH

Magični kvadrat s stranico n je kvadrat z $n \times n$ polji, v katera razporedimo števila od 1 do n^2 tako, da je vsota v vseh stolpcih, vrsticah in glavnih diagonalah enaka. Pokazali bomo, da je mogoče magične kvadrate z liho stranico sestaviti s preprosto (in za računalnik primerno) formulo.

Naj bo n velikost kvadrata (torej liho število), N pa množica ostankov pri deljenju z n, torej števila od 0 do $n - 1$. Števila od 1 do n^2, ki jih moramo razmestiti v kvadrat, bomo opisovali s parametroma r in s po formuli

$$m = nr + s + 1 \tag{1}$$

pri čemer bosta r in s elementa množice N. Vpeljimo še zapis $y = \mathrm{ost}(x)$, ki pomeni ostanek pri deljenju x z našim fiksnim številom n. Na primer $1 = \mathrm{ost}(n + 1)$. Našo definicijo razširimo še za negativne x. Koliko je $\mathrm{ost}(-1)$?

$$-1 = 0.n - 1$$

Ali naj vzamemo $\mathrm{ost}(-1) = -1$? Ne, saj v množici ostankov števila -1 ni. Iz zadrege si bomo pomagali na naslednji način:

$$-1 = -1.n + (n - 1)$$

Torej je $\mathrm{ost}(-1) = n - 1$ in podobno lahko določimo ostanke tudi ostalim negativnim številom.

Oglejmo si formuli:

$$x = \mathrm{ost}(-r + 2s) \tag{2}$$

$$y = \mathrm{ost}(r + 2s + 1) \tag{3}$$

Če si izberemo par števil (r, s) iz množice N, lahko izračunamo par (x, y), ki je ponovno par dveh števil iz N. Kako bomo zdaj prišli do magičnega kvadrata? Našim spremenljivkam moramo dati pomen. S formulo (1) smo opredelili pomen r in s, x in y pa naj pomenita vodoravno oziroma navpično koordinato kvadrata s tem, da začnemo z 0 in ne z 1. Zgornje levo polje ima torej koordinate (0, 0).

Do magičnega kvadrata pridemo tako, da jemljemo po vrsti vse pare (r, s) in po formulah (2), (3) izračunamo položaj v kvadratu, po formuli (1) pa,

Po dolgem, dolgem pogovoru se skušaj spomniti vsega, kar se je govorilo, in začudil se boš, kako nepotrebno, prazno in pogosto tudi slabo je bilo vse, kar se je govorilo.

L.N. Tolstoj

katero število moramo tja zapisati. Naredimo zgled za $n = 3$:

r	s	x	y	m
0	0	0	1	1
0	1	2	0	2
0	2	1	2	3
1	0	2	2	4
1	1	1	1	5
1	2	0	0	6
2	0	1	0	7
2	1	0	2	8
2	2	2	1	9

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Kdor je zadovoljen s tem, da zna konstruirati magične kvadrate lihe stopnje, lahko preneha brati. Za tiste, ki jih matematika resneje zanima, pa sledi dokaz, da je opisani postopek zares dober za vsak lihi n.

Bralcu prepuščam, da se prepriča o pravilnosti trditev:

$$\text{ost}(a) = \text{ost}(b) \Rightarrow \text{ost}(-a) = \text{ost}(-b) \tag{4}$$

$$\text{ost}(2a) = 2\,\text{ost}(a) \quad \text{za lihe } n \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ost}(a) &= \text{ost}(b) \\ \text{ost}(c) &= \text{ost}(d) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ost}(a+c) = \text{ost}(b+d) \tag{6}$$

V prvem koraku bomo pokazali, da se ne more zgoditi, da bi postavili dve različni števili na isto mesto. Pa denimo, da bi do navšečnosti prišlo pri parih (r, s) in (r', s'). Tedaj bi veljalo: $x = x'$ in $y = y'$ oziroma

$$\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(-r' + 2s')$$

$$\text{ost}(r + 2s + 1) = \text{ost}(r' + 2s' + 1)$$

Dobimo:

$$\text{ost}(r - 2s) = \text{ost}(r' - 2s') \qquad \text{po}(4)$$

$$\text{ost}(2r + 1) = \text{ost}(2r' + 1) \qquad \text{po}(6)$$

$$\text{ost}(2r) = \text{ost}(2r') \qquad \text{po (6)}$$

$$\text{ost}(r) = \text{ost}(r') \qquad \text{po (5)}$$

Toda r in r' sta iz množice ostankov, zato velja $\text{ost}(r) = r$ in $\text{ost}(r') = r'$, torej tudi $r = r'$. Z upoštevanjem tega in (6) dobimo iz druge enakosti

$$\text{ost}(2s) = \text{ost}(2s')$$

in seveda $s = s'$.

Domneva, da bi se dva para preslikala v isto polje kvadrata, nas je pripeljala do zaključka, da sta ta dva para pravzaprav enaka. S tem smo dokazali, da nam naša formula porazdeli števila od 1 do n^2 v kvadrat, in to tako, da dve različni števili vedno prideta v dve različni polji. Ali je mogoče, da bi kako polje ostalo prazno? Polj kvadrata je toliko kot števil. Če bi ostalo kako polje prazno, bi morali vsaj v enem polju stati dve števili, kar pa vemo, da ni res.

Zdaj moramo še izračunati vsote vrstic, stolpcev in diagonal in se prepričati, da so enake. Vsota, ki jo potrebujemo v vsaki vrstici, stolpcu ali diagonali, je $\sigma = n(n^2 + 1)/2$. Vsota vseh števil v kvadratu je namreč

$$1 + 2 + ... + n^2 = n^2(n^2 + 1)/2$$

ker pa je vrstic n in je vsota v vseh vrsticah enaka, mora ta biti (skupna vsota)$/n$.

Najprej izračunajmo vsoto za posamezno vrstico v našem kvadratu. Vrstica je določena z enačbo $y = y_0$, kjer je y_0 zaporedna številka vrstice. Če je S vsota v vrstici y_0, velja:

$$S = (nr_1 + s_1 + 1) + (nr_2 + s_2 + 1) + ... + (nr_n + s_n + 1) =$$
$$= n(r_1 + r_2 + ... + r_n) + (s_1 + s_2 + ... + s_n) + n$$

kjer smo z r_i, s_i označili tiste pare, za katere velja:

$$\text{ost}(r_i + 2s_i + 1) = y_0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Ali imata lahko dva izmed teh parov isti r, to je $r_i = r_j$, za neki par i, j? Tedaj bi bilo $\text{ost}(r + 2s_i + 1) = \text{ost}(r + 2s_j + 1)$. Iz tega bi dobili $\text{ost}(2s_i) = \text{ost}(2s_j)$ in od tod $s_i = s_j$. To bi pomenilo, da sta para enaka, kar zanika našo predpostavko, da imata dva para isti r. Na povsem podoben način uvidimo, da nobena dva para ne moreta imeti isti s. Potem je

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = 0 + 1 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

in

$$s_1 + s_2 + ... + s_n = 0 + 1 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

Seveda ni res $0 = r_1$, $1 = r_2$ itd, toda to nas ne sme motiti, saj je pomembno samo, katera števila seštevamo, nič pa njihov vrstni red. Zdaj že lahko izračunamo:

$$S = n^2(n - 1)/2 + n(n - 1)/2 + n = \sigma$$

Vrstice imajo potrebno vsoto, saj je bil y_0 poljuben. Enako vidimo, da imajo vsi stolpci potrebno vsoto, le da moramo tokrat vzeti $x = x_0$. Poskusite!

Da bo magični kvadrat čisto pravi, morate imeti tudi obe diagonali pravo vsoto. Prva je določena z enačbo $x = y$ oziroma $\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(r + 2s + 1)$. Od tod, s pomočjo (4) in (6), dobimo $\text{ost}(2r + 1) = \text{ost}(0) = 0$. Ker je $2r + 1$

liho, nenegativno in od $2n$ manjše število, nam ostane samo možnost $2r + 1 = n$ oziroma $r = (n - 1)/2$. To pomeni, da se na prvo diagonalo preslikajo tisti pari, ki imajo fiksen r in poljuben s. Če uporabimo kar prejšnje oznake, lahko zapišemo:

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = (n - 1)/2 + ... + (n - 1)/2 = n(n - 1)/2$$

ter

$$s_1 + s_2 + ... + s_n = 0 + 1 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

od koder spet dobimo: $S = \sigma$.

Druga diagonala je določena z enačbo $x + y = n - 1$ oziroma

$$\text{ost}(-r + 2s) + \text{ost}(r + 2s + 1) = n - 1 = \text{ost}(n - 1)$$

Od tod, s pomočjo (4) in (6), dobimo:

$$\text{ost}(-r + 2s) = \text{ost}(-r - 2s - 1 + n - 1)$$

in od tod

$$\text{ost}(4s - n + 2) = \text{ost}(0) = 0$$

Število $4s - n + 2$ je liho. Ker je s ostanek, imamo oceno

$$-n < 4s - n + 2 < 3n$$

Števili 0 in $2n$ sta sodi, zato nam ostane edina možnost

$$4s - n + 2 = n \quad \text{oziroma} \quad s = (n - 1)/2$$

Na drugo diagonalo se preslikajo pari s fiksnim s in vsemi mogočimi r, kar nam da

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = 0 + 1 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$$
$$s_1 + s_2 + ... + s_n = (n - 1)/2 + ... + (n - 1)/2 = n\ (n - 1)/2$$

in ponovno $S = \sigma$. Dokaz je s tem končan.

Če boste malo pobrskali po starih letnikih Preseka, boste našli podoben članek, ki je podal konstrukcijo magičnih kvadratov, katerih stranica je deljiva s 4. Ostali so torej še tisti sodi kvadrati, katerih stranica ni deljiva s 4. Tudi take kvadrate je mogoče konstruirati, z izjemo kvadrata 2 x 2, o njih pa bomo spregovorili kdaj drugič. Bralcem v premislek:

1) Zakaj za sode n ni mogoče konstruirati podobne formule z ostanki?
2) Kaj se skriva za izbiro koeficientov $-1, 2, 0$ ter $1, 2, 1$ v formulah:

$$x = \text{ost}(ar + bs + c)$$
$$y = \text{ost}(dr + es + f)$$

Ali je morebiti vseeno kakšni so? Ali pa sta to edini trojici koeficientov, ki nam dasta magični kvadrat?

Borut Zalar