Rešene naloge iz Matematike 1 za fizike

J. Kališnik

zapiski vaj na FMF UL
2010-2016

NASLOV: Rešene naloge iz Matematike 1 za fizike
AVTOR: Jure Kališnik
IZDAJA: 1. izdaja
ZALOŽNIK: samozaložba Jure Kališnik, Ljubljana
LETO IZIDA: 2016

CENA: publikacija je brezplačna
NATIS: elektronsko gradivo, dostopno na naslovu:
http://www.fmf.uni-lj.si/~kalisnik/mat1_fiz_vaje.pdf

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(076.2)(0.034.2)

KALIŠNIK, Jure, 1980-
Rešene naloge iz Matematike 1 za fizike [Elektronski vir] : zapiski vaj na FMF UL 2010-2016 / J. Kališnik. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. J. Kališnik, 2016

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/~kalisnik/mat1_fiz_vaje.pdf

ISBN 978-961-283-606-1 (pdf)

284292352

Uvod

To so zapiski vaj pri predmetu Matematika 1 za fizike, ki jih vodim od leta 2010 dalje. Vsebina se navezuje na zapiske predavanj profesorja Mrčuna, ki je bil ves ta čas predavatelj pri tem predmetu.

Ljubljana 2016
Jure Kališnik

Kazalo

1 Množice

V matematiki množice pogosto ločujemo glede na njihovo moč oziroma velikost. Za množici A in B rečemo, da sta ekvipolentni oziroma enako močni, če obstaja bijekcija med njima. V fiziki so pomembne predvsem:

· končne množice,

· števno neskončne množice (te so ekvipolentne množici naravnih števil $\mathbb{N}$),

· množice z močjo kontinuuma (te so ekvipolentne množici realnih števil $\mathbb{R}$).

(1) Poišči bijekcije:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(b) $f : \mathbb{N} \to 5\mathbb{N}$,

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da so množice $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $5\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ števno neskončne.

Če je A števno neskončna množica, nam bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$ omogoča, da elemente množice A razvrstimo po vrsti. Če na primer definiramo $a_n := f(n) \in A$, dobimo razpored

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Če želimo pokazati, da je dana množica števno neskončna, je na intuitivni ravni zato dovolj, da elemente množice razvrstimo po vrsti, formalno pa lahko nato iz tega razporeda razberemo predpis za iskano bijekcijo.

(a) Najprej se spomnimo definiciji obeh množic:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \\ \mathbb{N} \cup \{0\} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo idejo, kako bi elemente obeh množic povezali v pare:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

Sedaj definirajmo funkciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ s predpisoma:

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 1, & n &\in \mathbb{N}, \\ g(k) &= k + 1, & k &\in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Potem velja $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ in $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$, kar pomeni, da je f bijekcija.

(b) Množica $5\mathbb{N}$ je množica petkratnikov naravnih števil

$$5\mathbb{N} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}.$$

Naravno se nam ponudi naslednje naštetje večkratnikov števila 5:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & \ldots \end{array}$$

od koder preberemo, da sta iskani bijekciji $f : \mathbb{N} \to 5\mathbb{N}$ in $g : 5\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dani s predpisoma:

$$f(n) = 5n, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$g(k) = \frac{k}{5}, \qquad k \in 5\mathbb{N}.$$

(c) Bijekcij med množicama celih in pa naravnih števil je veliko, ni pa kakšne posebej odlikovane. Uporabimo lahko na primer naslednjo postavitev celih števil po vrsti

1	2	3	4	5	6	...
0	1	-1	2	-2	3	...

Ustrezni bijekciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ in $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sta dani s predpisoma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ;\ n \text{ sod}, \\ -\frac{n-1}{2} & ;\ n \text{ lih}, \end{cases}$$

$$g(k) = \begin{cases} 2k & ;\ k > 0, \\ 2|k| + 1 & ;\ k \leq 0. \end{cases}$$

$\square$

(2) Pokaži, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ števno neskončna.

Rešitev: Pri dokazu, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ števno neskončna, bomo upoštevali dejstvo, da lahko racionalna števila identificiramo z okrajšanimi ulomki. Zaporedje vseh racionalnih števil bomo definirali tako, da bodo vsote števcev in imenovalcev ulomkov naraščale, predznaki števil pa bodo alternirali. Poglejmo si nekaj prvih členov.

$$\mathbb{Q} = \{0, \underbrace{\tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}}_{\text{vsota}=2}, \underbrace{\tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}}_{\text{vsota}=3}, \underbrace{\tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}}_{\text{vsota}=4}, \ldots\}$$

Z uporabo tega postopka lahko definiramo bijekcijo med naravnimi in racionalnimi števili kljub temu, da ne znamo napisati eksplicitne formule. $\square$

(3) Poišči bijekcije:

(a) $f : (0, 1) \to (1, 5)$,
(b) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$,
(c) $f : (-5, \infty) \to \mathbb{R}$,
(d) $f : [-5, \infty) \to [-1, 1)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da imajo končni in polneskončni intervali v bistvu vsi enako število elementov, kot jih ima množica realnih števil. Možnih bijekcij je seveda veliko, poskušali pa bomo najti kakšne razmeroma preproste.

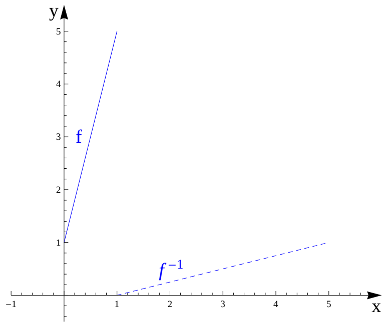
(a) Za bijekcijo $f : (0, 1) \to (1, 5)$ lahko vzamemo kar linearno funkcijo, za katero velja $f(0) = 1$ in $f(1) = 5$. Ta funkcija ima predpis

$$f(x) = 4x + 1,$$

njen inverz pa je

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{4}.$$

Poglejmo še graf funkcije f.

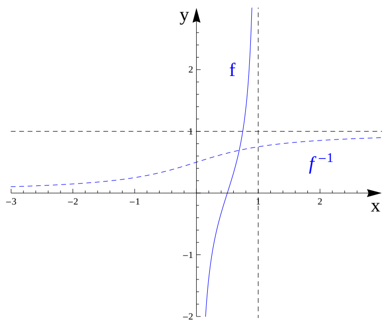


(b) V tem primeru iščemo bijekcijo med končnim odprtim intervalom $(0,1)$ in pa množico realnih števil $\mathbb{R}$. Lahko bi našli racionalno funkcijo, ki bi imela pola v robnih točkah intervala $(0,1)$, lahko pa vzamemo tudi funkcijo $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Preslikava f je potem bijekcija z inverzom

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{2}\right).$$

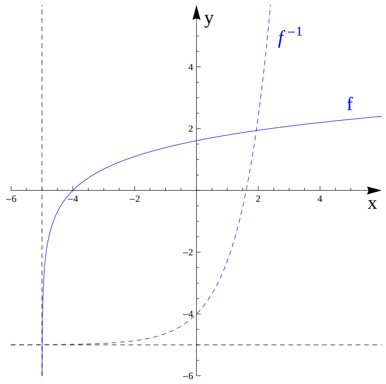


(c) Sedaj iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom $(-5,\infty)$ in pa realnimi števili. En primer bijekcije je logaritemska funkcija $f:(-5,\infty)\to\mathbb{R}$, dana s predpisom

$$f(x)=\ln(x+5)$$

in z inverzom

$$f^{-1}(x)=e^x-5.$$

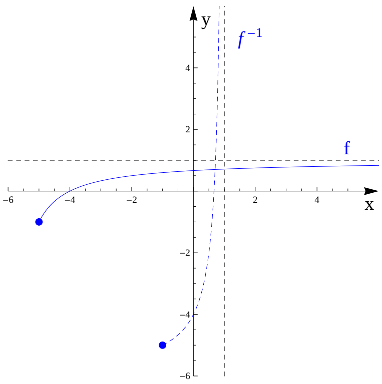


(d) Tokrat iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom $[-5, \infty)$ in končnim intervalom $[-1, 1)$. Vzamemo lahko na primer racionalno funkcijo $f : [-5, \infty) \to [-1, 1)$ s predpisom

$$f(x) = -\frac{2}{x+6} + 1.$$

Njen inverz ima predpis

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{1-x} - 6.$$



<u>Opomba:</u> Preslikave, ki smo jih konstruirali pri tej nalogi so vse zvezne. Lahko pa bi konstruirali tudi kakšne nezvezne bijekcije. $\square$

(4) Poišči bijekciji $f : [0, 1) \to (0, 1)$ in $f : [0, 1] \to (0, 1)$.

Rešitev: V tem primeru ne bomo mogli najti zvezne bijekcije $f : [0, 1) \to (0, 1)$, ker takšne preslikave sploh ni. Zato se bomo morali malo bolj potruditi.

Najprej označimo z $A \subset [0, 1)$ in $A' \subset (0, 1)$ podmnožici:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\},$$
$$A' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Po eni strani sta množici A in A' ekvipolentni (eksplicitna bijekcija je $F : A \to A'$ s predpisom $F(0) = \frac{1}{2}$ ter $F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ za $n \geq 2$), po drugi strani pa je $[0, 1) \setminus A = (0, 1) \setminus A'$. Bijekcijo $f : [0, 1) \to (0, 1)$ bomo konstruirali tako, da bomo točke izven A pustili pri miru, točke v A pa preslikali s funkcijo F:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ F(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija je bijekcija.

Na podoben način lahko konstruiramo tudi bijekcijo $f : [0, 1] \to (0, 1)$. Tokrat označimo z $A \subset [0, 1]$ in $A' \subset (0, 1)$ podmnožici

$$A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\},$$
$$A' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Bijekcija $F: A \to A'$ je sedaj podana s predpisom $F(0) = \frac{1}{2}$ ter $F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}$ za $n \geq 1$, funkcija f pa s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ F(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Opomba: Na podoben način lahko pokažemo, da so množice $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ in $(0,1]$ vse paroma ekvipolentne. Če to kombiniramo s prejšnjo nalogo, vidimo, da so vsi intervali realnih števil enako močni. □

(5) Poišči bijekcijo $f: [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$.

Rešitev: Vsako realno število $x \in [0,1)$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$0, x_1 x_2 x_3 \ldots,$$

kjer se cifra 9 ne ponavlja od nekod dalje. To pomeni, da npr. število $0,123$ zapišemo v decimalni obliki $0,123000\ldots$ in ne v obliki $0,122999\ldots$.

Bijekcijo $f: [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ lahko sedaj konstruiramo na naslednji način.

Decimalke števila $a \in [0,1)$ razdelimo v bloke oblike $99\ldots9k$, kjer je $k \neq 9$, ter z a_i označimo i-ti blok. Za $a = 0,929941$ je npr. $a_1 = 92$, $a_2 = 994$, $a_3 = 1$ ter $a_i = 0$ za $i \geq 4$. Sedaj definiramo $f: [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ s predpisom

$$f\big(0, a_1 a_2 a_3 \ldots, 0, b_1 b_2 b_3 \ldots\big) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 \ldots.$$

Potem je f bijekcija z inverzom $f^{-1}(0, c_1 c_2 c_3 \ldots) = (0, c_1 c_3 c_5 \ldots, 0, c_2 c_4 c_6 \ldots)$.

Opomba: Če bi števila razdelili na bloke velikosti ena in uporabili isto preslikavo, bi dobili injekcijo, ne pa surjekcije, saj npr. število $0,292929292929\ldots$ ne bi ležalo v sliki. Bi pa od tod lahko s pomočjo Cantor-Bernstein-Schroederjevega izreka sklepali, da sta $[0,1)$ in $[0,1) \times [0,1)$ ekvipolentni, ne da bi konstruirali bijekcijo. □

(6) Pokaži, da sta množici $(0,1) \times (0,1)$ in $(0,1)$ ekvipolentni.

Rešitev: Ekvipolenca množic ima podobne lastnosti kot relacija enakosti. Velja namreč:

· Če je $A \sim B$ in $B \sim C$, je $A \sim C$.

· Če je $A \sim A'$ in $B \sim B'$, je $A \times A' \sim B \times B'$.

Z uporabo prejšnjih nalog lahko od tod izpeljemo

$$(0,1) \times (0,1) \sim [0,1) \times [0,1) \sim [0,1) \sim (0,1),$$

kar smo želeli dokazati. □

(7) Pokaži, da sta množici $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ ekvipolentni za vsako naravno število n.

Rešitev: Nalogo bomo dokazali z indukcijo na n. Za $n = 1$ ni kaj dokazovati.

Privzemimo sedaj, da velja $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$. Potem je

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \overset{\text{I.P.}}{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Iz prejšnjih nalog pa sledi, da je

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim (0,1) \times (0,1) \sim (0,1) \sim \mathbb{R},$$

kar smo želeli dokazati.

Opomba: V okviru teorije množic torej ne moremo ločiti med sabo mnozic $\mathbb{R}^n$ pri različnih n-jih. Razlog tiči v tem, da smo preprosto spregledali del strukture teh množic. Če si elemente $\mathbb{R}^n$ (recimo za $n = 1, 2, 3$) predstavljamo kot točke v prostoru, lahko smiselno definiramo pojem razdalje med dvema elementoma. Tako postane $\mathbb{R}^n$ topološki prostor. V okviru teorije topoloških prostorov so vsi prostori $\mathbb{R}^n$ med sabo paroma različni. Korektno lahko tudi definiramo pojem dimenzije topološkega prostora, tako da je npr. dimenzija $\mathbb{R}^n$ enaka n. $\square$

(8) Naj bo $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$. Dokaži:

(a) Če sta f in g injektivni, je $g \circ f$ injektivna.
(b) Če sta f in g surjektivni, je $g \circ f$ surjektivna.
(c) Če je $g \circ f$ injektivna, je f injektivna.
(d) Če je $g \circ f$ surjektivna, je g surjektivna.

Rešitev: (a) Vzemimo $x, y \in X$, $x \neq y$. Potem je $f(x) \neq f(y)$ (ker je f injektivna), od koder sledi $g(f(x)) \neq g(f(y))$ (ker je g injektivna).

(b) Vzemimo poljuben $z \in Z$. Ker je g surjektivna, obstaja $y \in Y$, da je $g(y) = z$. Ker pa je f surjektivna, obstaja tudi $x \in X$, da je $f(x) = y$. Sledi $z = g(f(x))$.

(c) Vzemimo $x, y \in X$, $x \neq y$. Ker je $g \circ f$ injektivna, je $g(f(x)) \neq g(f(y))$. Sledi $f(x) \neq f(y)$.

(d) Vzemimo poljuben $z \in Z$. Ker je $g \circ f$ surjektivna, je $z = g(f(x))$ za nek $x \in X$. Sedaj velja $z = g(y)$, kjer je $y = f(x) \in Y$. $\square$

2 Števila

(1) Dokaži s pomočjo matematične indukcije, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $133 \,|\, 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

(c) $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Rešitev: Pri dokazovanju lastnosti naravnih števil si pogosto pomagamo s principom popolne indukcije. Če hočemo dokazati, da neka lastnost L velja za vsa naravna števila, je dovolj, da pokažemo:

· veljavnost lastnosti L za $n = 1$,

· da iz veljavnosti lastnosti L za poljuben $n \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost lastnosti L za $n + 1$.

(a) $\underline{n = 1}$:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2, \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1) + n + 1\right), \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6), \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

(b) $\underline{n = 1}$:

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12^1 = 133.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da $133 \,|\, 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$, od koder sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}.$$

Z uporabo indukcijske predpostavke od tod sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 133(k + 12^{2n-1}),$$

oziroma $133 \,|\, 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1}$, kar smo želeli dokazati.

(c) $\underline{n = 1}$:

$$1! \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 = 1.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Recimo, da za nek n velja $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$ in pokažimo, da od tod sledi $(n+1)! \leq (\frac{n+2}{2})^{n+1}$. Po indukcijski predpostavki je

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}.$$

Želimo pokazati, da velja neenakost

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \leq \Big(\frac{n+2}{2}\Big)^{n+1},$$

ki pa je ekvivalentna neenakosti

$$2 \leq \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}.$$

Zadnjo neenakost lahko dokažemo s pomočjo binomskega razvoja

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Vsota prvih dveh členov je enaka 2, vsi ostali členi pa so pozitivni. $\square$

(2) Reši neenačbi:

(a) $|x+1| < x+3$,

(b) $\dfrac{3-x}{x+1} > \sqrt{3-2x}$.

Rešitev: Neenačbe rešujemo računsko ali pa grafično. Če se lotimo reševanja neenačbe računsko, moramo paziti, da ne naredimo kakšne operacije, ki bi morebiti obrnila smer neenakosti. Tako lahko na obeh straneh neenačbe prištejemo poljubno realno število. Neenačbo smemo množiti samo s pozitivnimi realnimi števili, kvadriramo pa jo lahko, če sta obe strani pozitivni. Pri grafični obravnavi neenačbe pa preprosto narišemo grafa obeh strani in ju primerjamo. Če je neenačba komplicirana, je to lahko netrivialno opravilo.

(a) Preden začnemo z obravnavo neenačbe $|x+1| < x+3$, se spomnimo na definicijo absolutne vrednosti. Izraz na levi strani je po definiciji enak

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & ; \ x \geq -1, \\ -x-1 & ; \ x < -1. \end{cases}$$

Torej imamo opravka z dvema neenačbama: eno na intervalu $(-\infty, -1)$, drugo pa na intervalu $[-1, \infty)$.

Na intervalu $(-\infty, -1)$ imamo neenačbo

$$-x-1 < x+3,$$

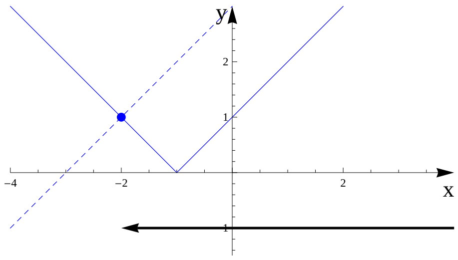
ki se prevede v neenačbo $x > -2$. Za rešitev tu tako dobimo interval $(-2, -1)$. Na intervalu $[-1, \infty)$ pa imamo po drugi strani neenačbo

$$x+1 < x+3,$$

ki je izpolnjena povsod na tem intervalu. Skupna rešitev prvotne neenačbe je torej interval

$$R = (-2, \infty).$$

Poglejmo si rešitev še grafično.



(b) Sedaj obravnavamo neenačbo

$$\frac{3-x}{x+1} > \sqrt{3-2x}.$$

Če hočemo, da bo neenačba sploh definirana, mora biti $x \neq -1$ in $3 - 2x \geq 0$. Z drugimi besedami to pomeni, da mora biti $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{3}{2}]$.

Če je $x \in (-\infty, -1)$ je leva stran neenačbe negativna, desna pa pozitivna, od koder sledi, da na tem intervalu neenačba nima rešitve.

Predpostavimo sedaj, da je $x \in (-1, \frac{3}{2}]$. Izraz $x + 1$ je potem pozitiven, zato lahko neenačbo preoblikujemo v

$$3 - x > (x + 1)\sqrt{3 - 2x}.$$

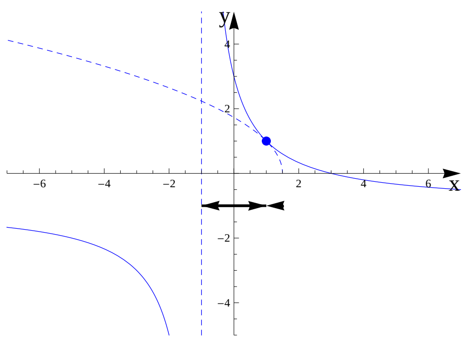
Ker sta obe strani pozitivni, lahko neenačbo sedaj kvadriramo, da dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &> (x+1)^2(3-2x), \\ x^2 - 6x + 9 &> 3x^2 - 2x^3 + 6x - 4x^2 + 3 - 2x, \\ 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 &> 0, \\ (x-1)^2(x+3) &> 0. \end{aligned}$$

Zadnja neenačba ima rešitev $(-3, 1) \cup (1, \infty)$. Ker pa mora biti $x \in (-1, \frac{3}{2}]$, je rešitev prvotne neenačbe

$$R = (-1, 1) \cup (1, \tfrac{3}{2}].$$

Poglejmo si še grafa.



□

(3) Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z = \dfrac{1}{(1+i)^8}$.

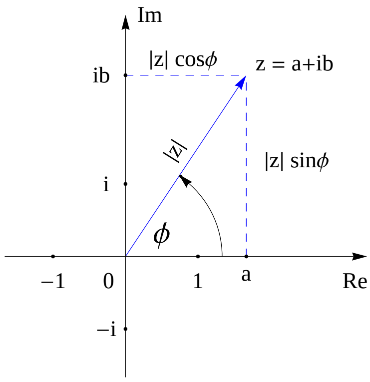
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z = a + ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z = |z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Za nas bo Eulerjev zapis zaenkrat le primeren pripomoček za računanje, ko se bomo naučili potencirati na kompleksne eksponente, pa bomo dokazali, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

□

(4) Predstavi v polarnem zapisu naslednji kompleksni števili:

(a) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, kjer je $\alpha \in (0, 2\pi)$,

(b) $z = \dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}$.

Rešitev: (a) Izračunajmo najprej absolutno vrednost števila z:

$$|z|^2 = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ker je $\alpha \in (0, 2\pi)$, od tod sledi $|z| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Izračunajmo sedaj še $\phi = \arg(z)$. Velja

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ker je $\operatorname{Re}(z) > 0$ in $\alpha \in (0, 2\pi)$, imamo $\phi, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Od tod pa iz injektivnosti funkcije tangens na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sledi $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Torej je

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

(b) Najprej opazimo, da velja

$$|z|^2 = z\overline{z} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 - i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \cdot \frac{1 - i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} = 1,$$

oziroma $|z| = 1$.

Za polarni razcep zapišimo najprej z kot vsoto realnega in imaginarnega dela:

$$z = \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 - i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 - i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \cdot \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} = \frac{(1 + i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2})^2}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1 + 2i\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}}}.$$

Z uporabo formul za sinus oziroma kosinus dvojnega kota dobimo

$$z = \cos\phi + i\sin\phi.$$

□

(5) Skiciraj množice točk v $\mathbb{C}$, ki zadoščajo danim pogojem in jih geometrijsko interpretiraj:

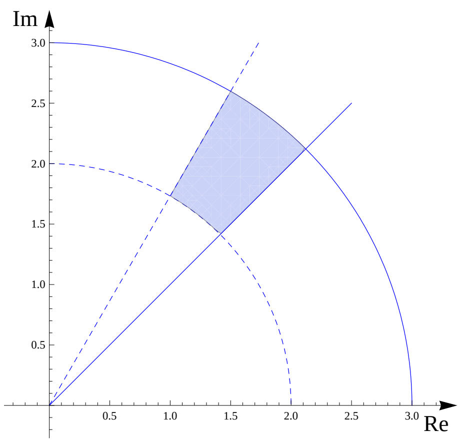
(a) $2 < |z| \leq 3$ in $\arg(z) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$,

(b) $|z - i| < 1$ in $|z + 1| \leq 1$,

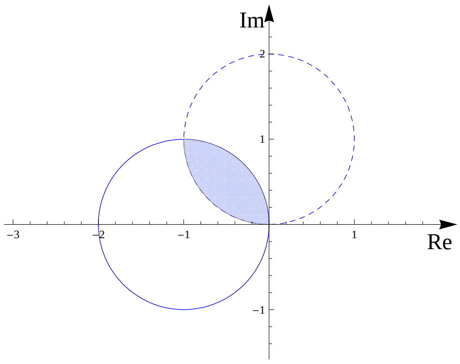
(c) $|z| + \operatorname{Re}(z) \leq 2$,

(d) $|z - 1| + |z + 1| = 5$.

Rešitev: (a) Dana množica je presek kolobarja in krožnega izseka:



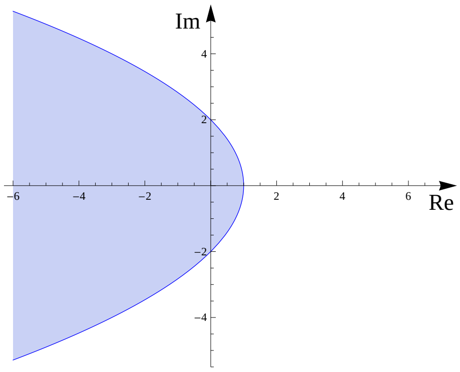
(b) Dana množica je presek dveh krogov:



(c) Pišimo $z = x + iy$. Iz neenačbe $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$ potem sledi, da je $x \leq 2$. Če dano neenačbo kvadriramo, pridemo do neenačbe

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} + x &\leq 2, \\ x^2 + y^2 &\leq (2-x)^2, \\ y^2 &\leq 4(1-x). \end{aligned}$$

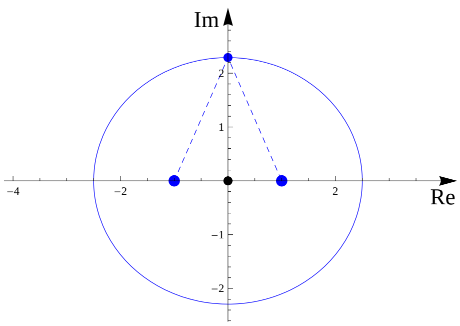
Dana množica je torej območje znotraj parabole $y^2 = 4(1-x)$:



(d) Rešitev enačbe $|z-1| + |z+1| = 5$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 1 in -1. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 1 oziroma -1. Velika polos je enaka $a = \frac{5}{2}$, mala pa $b = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Središče elipse je v koordinatnem izhodišču, njena enačba pa je

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1.$$

Do te enačbe lahko pridemo tudi po računski poti.



$\square$

(6) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$ in $\frac{z}{\overline{z}} = i$,

(b) $|z| + z = 2 + i$.

Rešitev: (a) Naj bo $z = x + iy$. Sledi:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{z}} &= i, \\ z &= i\overline{z}, \\ x + iy &= i(x - iy), \\ x + iy &= y + ix. \end{aligned}$$

Torej je $x = y$. Če vstavimo to v enačbo $|\frac{z}{z+1}| = 1$, dobimo

$$\begin{aligned} |z| &= |z+1|, \\ \sqrt{x^2 + x^2} &= \sqrt{(x+1)^2 + x^2}, \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe je torej število $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

(b) Pišimo $z = x + iy$. Potem rešujemo enačbo

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i.$$

Od tod takoj sledi $y = 1$ in po krajšem računu iz enačbe $\sqrt{x^2+1} + x = 2$ še $x = \frac{3}{4}$. Rešitev enačbe je torej $z = \frac{3}{4} + i$. $\square$

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi in nato skiciraj množici njunih rešitev:

(a) $z^3 = 1$,

(b) $z^4 = i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ ali eno rešitev, če je n lih, ali pa dve rešitvi, če je n sod. V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo tudi n-ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^3 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^3 e^{i3\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je:

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

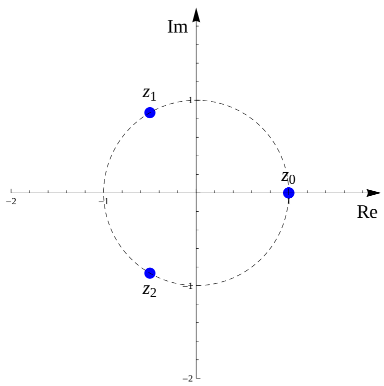
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \qquad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Eksplicitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^3 = 1$ oglišča enakostraničnega trikotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = i$. Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}.$$

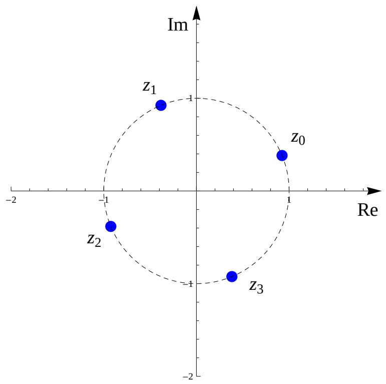
Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na enotski krožnici. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{8}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

(8) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $(z+i)^4 + (z-i)^4 = 0$,

(b) $z^n = \overline{z}$ za $n \geq 2$.

Rešitev: (a) S pomočjo binomske formule lahko enačbo $(z+i)^4 + (z-i)^4 = 0$ preoblikujemo v obliko

$$z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

Pišimo sedaj $w = z^2$. Potem je $w^2 - 6w + 1 = 0$, od koder dobimo

$$w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Sedaj lahko z nekaj spretnosti opazimo, da je

$$3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2.$$

Od tod dobimo vsega skupaj štiri rešitve

$$z \in \left\{\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}-1\right\}.$$

(b) Naj bo $n \geq 2$. Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^n = \overline{z}$ pomnožimo z z, dobimo:

$$z^{n+1} = |z|^2,$$
$$|z|^{n+1}e^{i(n+1)\phi} = |z|^2 e^{i2k\pi}.$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{n+1}$ za $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, e^{\frac{4\pi i}{n+1}}, \ldots, e^{\frac{2n\pi i}{n+1}}\right\}.$$

Opomba: Enačba (a) je enačba četrte stopnje, zato ima po osnovnem izreku algebre štiri kompleksne ničle (ki so v našem primeru vse realne). Iz primera (b) za $n = 1$ pa vidimo, da ima lahko že zelo preprosta enačba, ki vsebuje poleg z še $\overline{z}$, neskončno rešitev. $\square$

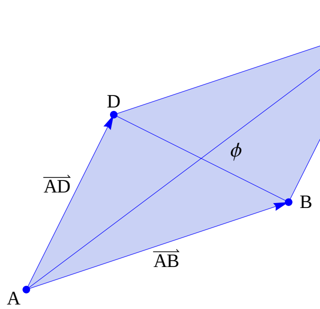
3 Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

(1) Dan je paralelogram z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ in $D(-1,1,1)$.

(a) Izračunaj dolžino stranic paralelograma in kot med njegovima diagonalama.

(b) Izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$.

Rešitev: (a) Dolžine stranic paralelograma lahko izračunamo tako, da najprej izračunamo ustrezne vektorje, nato pa še njihovo dolžino (slika je simbolna).



Stranici paralelograma sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AB} = (6,-1,1)$ in $\overrightarrow{AD} = (2,3,1)$, zato je

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38},$$
$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Kot med premicama je po definiciji ostri kot med njunima smernima vektorjema. Smeri obeh diagonal sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AC} = (8,2,2)$ in $\overrightarrow{BD} = (-4,4,0)$, od koder s pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

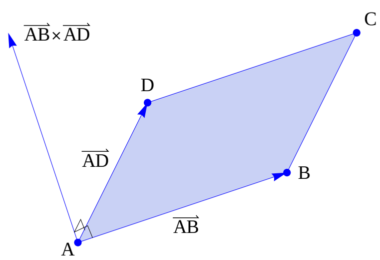
$$\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-32+8|}{\sqrt{64+4+4}\cdot\sqrt{16+16}} = \frac{24}{\sqrt{72\cdot 32}} = \frac{1}{2}.$$

To pomeni, da je $\phi = 60°$.

(b) Izračunajmo najprej vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 18\vec{k} - (3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}) = (-4,-4,20).$$

Ploščino paralelograma $ABCD$ lahko potem izračunamo s pomočjo vektorskega produkta na naslednji način. Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ kaže v smer normale na ravnino paralelograma, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata ta dva vektorja.



Od tod dobimo

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(-4,-4,20)| = \sqrt{16+16+400} = 12\sqrt{3}.$$

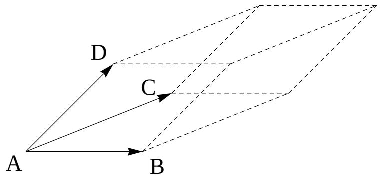
□

(2) Dane so točke $A(1,1,2)$, $B(1,4,-1)$, $C(3,3,2)$ in $D(4,-1,4)$.

(a) Izračunaj prostornino paralelepipeda, ki je napet na vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$.

(b) Izračunaj prostornino piramide $ABCD$.

Rešitev: (a) Paralelepiped je štiristrana poševna prizma, katere osnovna ploskev ima obliko paralelograma.



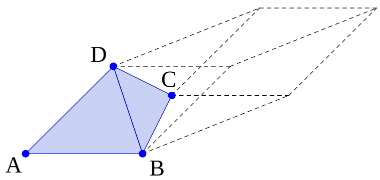
Najprej izračunajmo stranice paralelepipeda:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0,3,-3),\\ \overrightarrow{AC} &= (2,2,0),\\ \overrightarrow{AD} &= (3,-2,2).\end{aligned}$$

Prostornina danega paralelepipeda je potem enaka mešanemu produktu

$$V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+12-(-18+0+12) = 18.$$

(b) Prostornina piramide je enaka šestini prostornine paralepipeda, torej je $V_{ABCD} = 3$.



□

(3) Izračunaj presečišči:

(a) premic $p : \vec{r} = (1,2,0) + t(1,1,1)$ in $q : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = 1 - z$,

(b) ravnin $\Pi : 2x + 3y - z + 1 = 0$ in $\Sigma : x - y + z - 8 = 0$.

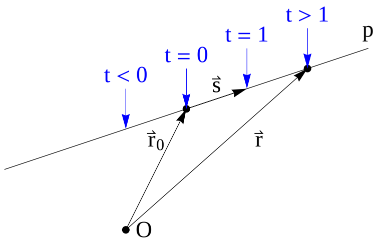
Rešitev: (a) Premica p v prostoru je podana s točko $\vec{r}_0$ na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ali pa z dvema točkama na njej. Premico lahko parametriziramo s predpisom

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

pri čemer je t parameter, ki določa, kje na premici smo, lahko pa jo podamo tudi v obliki sistema enačb

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

če uporabimo oznake $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$.



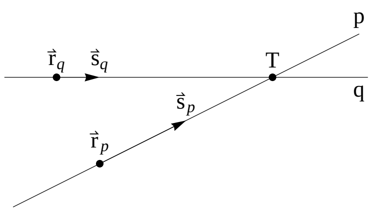
Iz podatkov preberemo, da leži na premici p točka $\vec{r}_p = (1, 2, 0)$ in da ima premica p smer $\vec{s}_p = (1, 1, 1)$, medtem, ko leži na premici q točka $\vec{r}_q = (2, 3, 1)$, njena smer pa je $\vec{s}_q = (2, 3, -1)$. Enačbi obeh premic lahko zapišemo po komponentah kot

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, & x &= 2 + 2s, \\ y &= 2 + t, & y &= 3 + 3s, \\ z &= t, & z &= 1 - s. \end{aligned}$$

Če komponente paroma izenačimo, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2 + 2s, \\ 2 + t &= 3 + 3s, \\ t &= 1 - s, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $s = 0$, $t = 1$. Presečišče premic p in q je torej točka $T(2, 3, 1)$.



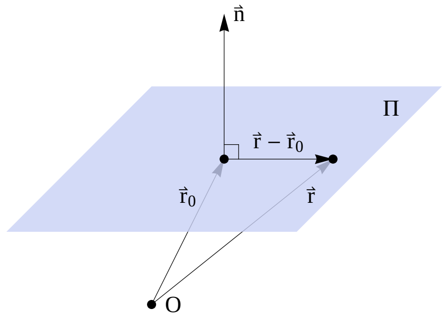
(b) Ravnina Π v prostoru je določena s točko na njej in z normalnim vektorjem, s premico in točko, ki ne leži na premici, ali pa s tremi nekolinearnimi točkami. Če ima ravnina za normalo vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, na njej pa leži točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$, lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Če označimo $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (a, b, c)$, lahko enačbo ravnine napišemo v *standardni* oziroma *normalni* obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

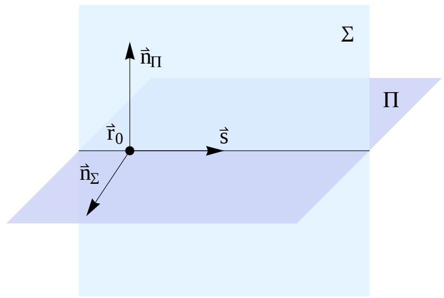


Ravnini imata normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (2,3,-1)$ in $\vec{n}_\Sigma = (1,-1,1)$, kar pomeni, da nista vzporedni. V takšnem primeru je njun presek premica s smerjo $\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma$, za izhodiščno točko pa lahko izberemo poljubno točko, ki leži na obeh ravninah. Sledi:

$$\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (2,3,-1) \times (1,-1,1) = (2,-3,-5).$$

Za točko na premici pa lahko na primer izberemo točko $\vec{r}_0 = (1,2,9)$. Torej je presek obeh ravnin premica

$$\vec{r} = (1,2,9) + t(2,-3,-5).$$



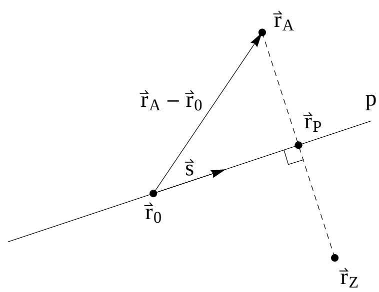
□

(4) Dani sta točka $A(7,1,3)$ in premica $p : \vec{r} = (3,-1,0) + t(1,1,2)$.

(a) Poišči pravokotno projekcijo točke A na premico p.

(b) Poišči zrcalno sliko točke A glede na premico p.

Rešitev: (a) Poglejmo si najprej skico.



Pravokotno projekcijo točke A na premico p lahko izračunamo po formuli

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + ((\vec{r}_A - \vec{r}_0) \cdot \vec{s}) \, \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2}$$

V našem primeru je $\vec{s} = (1, 1, 2)$ in $|\vec{s}|^2 = 6$. Od tod dobimo

$$\vec{r}_P = (3, -1, 0) + \big((4, 2, 3) \cdot (1, 1, 2)\big)\frac{\vec{s}}{6} = (5, 1, 4).$$

(b) Zrcalna slika točke A glede na premico p pa je

$$\vec{r}_Z = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (10, 2, 8) - (7, 1, 3) = (3, 1, 5).$$

$\square$

(5) Naj bo p premica z enačbo $\vec{r} = (4, 5, 1) + t(3, 3, 0)$, premica q pa naj bo določena kot presečišče ravnin:

$$\begin{aligned} \Pi &: 2x + 3y - 5z = 3, \\ \Sigma &: 3x - 4y + z = -4. \end{aligned}$$

Izračunaj enačbo premice, ki jo dobimo, če premico p prezrcalimo preko premice q v ravnini, ki jo določata premici p in q.

Rešitev: Najprej izračunajmo enačbo premice q. Smerni vektor kaže v smeri vektorskega produkta normal ravnin Π in Σ

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 3, -5) \times (3, -4, 1) = (-17, -17, -17).$$

Zaradi enostavnosti vzemimo vzporedni vektor $\vec{s} = (1, 1, 1)$. Najti moramo še točko na premici q. Če fiksiramo $x = 1$, dobimo sistem enačb $3y - 5z = 1$ in $-4y + z = -7$, ki ima rešitev $y = 2$ in $z = 1$. Enačba premice q je torej

$$\vec{r} = (1, 2, 1) + s(1, 1, 1).$$

Presečišče premic p in q je določeno s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} 4 + 3t &= 1 + s, \\ 5 + 3t &= 2 + s, \\ 1 &= 1 + s. \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $s = 0$ in $t = -1$, kar pomeni, da se premici p in q sekata v točki $T(1, 2, 1)$. Zrcalno sliko premice p glede na premico q dobimo tako, da najprej prezrcalimo neko točko A na premici p preko premice q v točko A' in nato potegnemo premico skozi točki T in A'. Izberimo točko $A(4, 5, 1)$. Pravokotna projekcija točke A na premico q je

$$\vec{r}_P = \vec{r}_T + ((\vec{r}_A - \vec{r}_T) \cdot \vec{s})\,\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = (1, 2, 1) + ((3, 3, 0) \cdot (1, 1, 1))\,\frac{\vec{s}}{3} = (3, 4, 3).$$

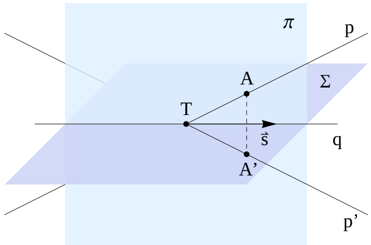
Zrcalna slika točke A glede na premico q pa je

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (2, 3, 5).$$

Enačba zrcalne slike premice p je tako enaka

$$\vec{r} = (1, 2, 1) + u(1, 1, 4).$$

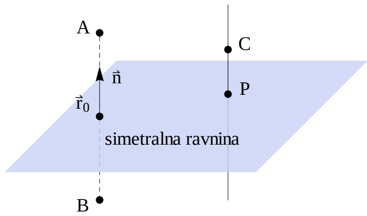
Poglejmo še sliko.



□

(6) Dane so točke $A(3,4,1)$, $B(-1,0,5)$ in $C(6,5,-4)$. Med točkami, ki so enako oddaljene od A in B, poišči tisto, ki je najbližje C.

Rešitev: Točke, ki so enako oddaljene od točk A in B, tvorijo simetralno ravnino. Ta ravnina vsebuje točko $\vec{r}_0 = (1,2,3)$, ki je razpolovišče daljice AB, njena normala pa ima smer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-4,-4,4)$.



Normalna oblika enačbe te ravnine je:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x-1, y-2, z-3) \cdot (-4,-4,4) &= 0, \\ -4x + 4 - 4y + 8 + 4z - 12 &= 0, \\ -x - y + z &= 0. \end{aligned}$$

Točka na simetralni ravnini, ki je najbliže C, je kar projekcija točke C na simetralno ravnino. Le-to lahko poiščemo kot presek simetralne ravnine in pa premice skozi C, ki je pravokotna na ravnino. Ta premica ima parametrično enačbo

$$\vec{r} = (6,5,-4) + t(-4,-4,4),$$

oziroma $x = 6 - 4t$, $y = 5 - 4t$ in $z = -4 + 4t$. Če to vstavimo v enačbo simetralne ravnine, dobimo:

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 0, \\ -(6-4t) - (5-4t) + (-4+4t) &= 0, \\ t &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

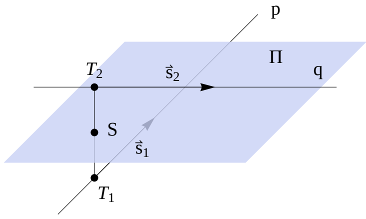
Iskana točka je torej $P(1,0,1)$. □

(7) Dani sta premici p in q z enačbama $\vec{r} = (-1,2,1) + t(-2,2,-1)$ ter $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-6}{-2}$. Izračunaj normalno enačbo ravnine π, ki je enako oddaljena od premic p in q in nobene izmed njiju ne seka.

Rešitev: Če hočemo, da ravnina π ne seka premic p in q, mora biti vzporedna obema premicama. Zato kaže njen normalni vektor v smeri vektorskega produkta smeri obeh premic

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-2, 2, -1) \times (2, 1, -2) = (-3, -6, -6).$$

Zaradi preprostosti vzemimo normalni vektor $\vec{n} = (1, 2, 2)$. Za zapis enačbe ravnine potrebujemo še točko na ravnini, ki jo lahko najdemo na naslednji način. Razdalja ravnine π od premic p in q je enaka kot razdalja ravnine π od njej vzporednih ravnin, ki vsebujeta premici p oziroma q. Če torej vzamemo dve točki iz teh dveh vzporednih ravnin, bo njuno razpolovišče ležalo v ravnini π.



Vzemimo na primer točki $T_1(-1, 2, 1)$ in $T_2(0, 1, 6)$. Njuno razpolovišče je potem točka $S(-1/2, 3/2, 7/2)$, od koder dobimo:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_S) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x + 1/2, y - 3/2, z - 7/2) \cdot (1, 2, 2) &= 0, \\ x + 1/2 + 2y - 3 + 2z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Normalna enačba ravnine π je torej

$$2x + 4y + 4z = 19.$$

□

(8) Ravnina Π je določena s premico $p : \vec{r}(t) = (2, 3, 1) + t(1, 1, 1)$ in točko $T(5, 5, 3)$.

(a) Določi enačbo ravnine Π in nato izračunaj razdaljo med ravnino Π in izhodiščem.

(b) Določi enačbo premice q, ki leži v ravnini Π, gre skozi točko T in je pravokotna na premico p.

Rešitev: (a) Ravnina Π vsebuje točko $T(5, 5, 3)$ in točko $A(2, 3, 1)$ s premice p. Njena normala je torej pravokotna na smer $\vec{s} = (1, 1, 1)$ premice p in vektor $\overrightarrow{AT} = (3, 2, 2)$, zato lahko vzamemo

$$\vec{n} = \vec{s} \times \overrightarrow{AT} = (1, 1, 1) \times (3, 2, 3) = (0, 1, -1).$$

Če upoštevamo še, da na ravnini Π leži točka T, dobimo njeno normalno enačbo

$$y - z = 2.$$

Razdalja med ravnino Π in izhodiščem je enaka razdalji med izhodiščem in pravokotno projekcijo izhodišča na ravnino Π. To projekcijo dobimo kot presek normalne premice s parametrizacijo

$$\vec{r}(s) = s(0, 1, -1)$$

in ravnine. Ko komponente normalne premice vstavimo v enačbo ravnine Π, dobimo enačbo

$$s - (-s) = 2,$$

ki ima rešitev $s = 1$. Projekcija izhodišča na ravnino Π je torej točka $P(0, 1, -1)$. Razdalja točke od ravnine je torej enaka

$$d(O, \Pi) = |\overrightarrow{OP}| = |(0, 1, -1)| = \sqrt{2}.$$

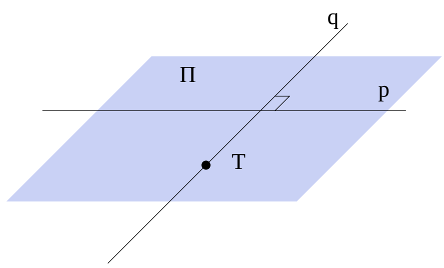
(b) Premica q vsebuje točko T, njena smer pa je pravokotna tako na $\vec{s}$ kot na $\vec{n}$, kar pomeni, da je

$$\vec{s}_q = \vec{s} \times \vec{n} = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1).$$

Od tod sledi, da je parametrizacija premice q enaka

$$\vec{r}(u) = (5, 5, 3) + u(-2, 1, 1).$$

Poglejmo še sliko.



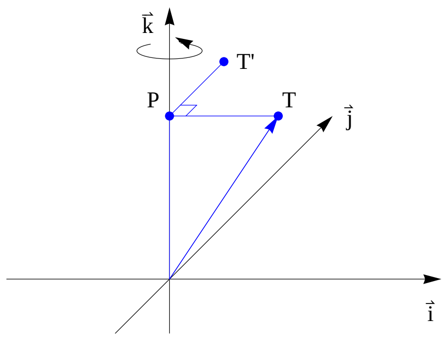
<u>Opomba:</u> Za izračun razdalje točke $T(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine z enačbo $ax + by + cz = d$ lahko uporabimo tudi formulo

$$d(T, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

(9) Ugotovi, kam se preslika točka $T(x, y, z)$, če jo zavrtimo okoli navpične osi za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$. Nato izpelji formulo za rotacijo za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$ okoli poljubne osi v prostoru.

Rešitev: Najprej bomo izpeljali formulo za rotiranje okoli navpične osi nato pa še splošno formulo.



Označimo s $P(0, 0, z)$ projekcijo točke T na navpično os in s T' točko, ki jo dobimo, če točko T zavrtimo za $90°$ okoli navpične osi. Potem velja

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_P + \overrightarrow{PT'}.$$

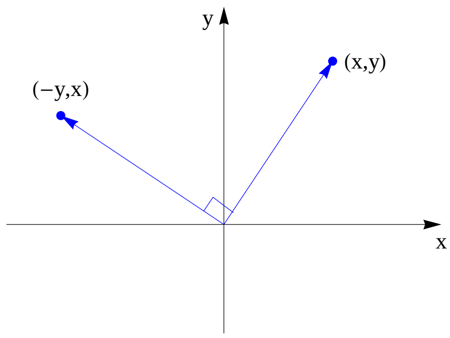
Vektor $\overrightarrow{PT'}$ je pravokoten na vektor $\overrightarrow{PT}$ in na navpično os, za njegovo dolžino pa velja $|\overrightarrow{PT'}| = |\overrightarrow{PT}|$. Od tod sledi, da je

$$\overrightarrow{PT'} = (0, 0, 1) \times \overrightarrow{PT} = (0, 0, 1) \times (x, y, 0) = (-y, x, 0)$$

in

$$\vec{r}_{T'} = (-y, x, z).$$

Če se omejimo na vrtenje v vodoravni ravnini, se pri vrtenju za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$ okoli izhodišča točka (x, y) preslika v točko $(-y, x)$.



Denimo sedaj, da hočemo točke vrteti okoli neke poljubne osi v prostoru, ki kaže v smeri enotskega vektorja $\vec{e}$. Pravokotna projekcija točke T na os vrtenja je potem enaka

$$\vec{r}_P = (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e},$$

vektor $\overrightarrow{PT'}$ pa je enak

$$\overrightarrow{PT'} = \vec{e} \times \overrightarrow{PT} = \vec{e} \times (\vec{r}_T - (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e}) = \vec{e} \times \vec{r}_T.$$

Tako dobimo

$$\vec{r}_{T'} = (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e} + \vec{e} \times \vec{r}_T.$$

<u>Opomba:</u> Za vrtenje okrog osi $\vec{e}$ za poljuben kot ϕ lahko uporabimo Rodriguesovo formulo

$$R(\vec{e}, \phi) \cdot \vec{r}_T = \cos\phi\, \vec{r}_T + (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)(1 - \cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\, \vec{e} \times \vec{r}_T.$$

$\square$

4 Zaporedja

(1) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \log_2 \left(\dfrac{2n^2 + n + 1}{(n+1)^2} \right)$,

(b) $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$,

(c) $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$,

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$,

(e) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1} \right)^{2n+2}$,

(f) $a_n = n(\log_2(2n-1) - \log_2 n - 1)$.

Rešitev: Pri računanju limit lahko uporabljamo osnovna računska pravila:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \pm \lim_{n\to\infty} (b_n),\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n),\\
&(3)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)},\\
&(4)\ \lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n) \text{ za vsak } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

ter znane limite:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ za vsak } \alpha > 0,\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r \text{ za vsak } r \in \mathbb{R},\\
&(3)\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ za vsak } |q| < 1.
\end{aligned}
$$

Pogosto prideta prav tudi naslednji formuli, ki ju bomo dokazali v poglavju o zveznosti:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} (a_n)),\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty} (a_n^{b_n}) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1) b_n}.
\end{aligned}
$$

Prva formula velja za poljubno zvezno funkcijo in nam pove, da je limita vrednosti zvezne funkcije na nekem zaporedju enaka vrednosti funkcije v limiti zaporedja. V praksi to pomeni, da lahko zamenjamo vrstni red limite in funkcije. Druga formula pa velja v primeru, ko je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$.

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \log_2 \left(\frac{2n^2 + n + 1}{(n+1)^2} \right) &= \log_2 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} \right) = \log_2 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right),\\
&= \log_2 2 = 1.
\end{aligned}
$$

Pri tej limiti smo uporabili formulo (1) za zvezno funkcijo $f(x) = \log_2 x$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = \dfrac{1}{3}.$

(d)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}, \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6}.$

Pri tej limiti smo uporabili formulo (1) za zvezno funkcijo $f(x) = x^2$. Lahko pa bi jo izračunali tudi z uporabo formule (2):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)(2n+2)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n-6}{n+1}} = e^{-6}.$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\log_2(2n-1)-\log_2 n-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\log_2\left(\frac{2n-1}{2n}\right)) = \lim\limits_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n.$

Ker je logaritemska funkcija zvezna, lahko po formuli (1) zamenjamo vrstni red limite in logaritma. Tako pridemo do limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}-1\right)n} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Rezultat pa je

$$\lim_{n\to\infty} n(\log_2(2n-1)-\log_2 n-1) = \log_2\left(\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^n\right) = \log_2 e^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\log_2 e.$$

$\square$

(2) Zaporedje je podano z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n}$. Dokaži, da je zaporedje konvergentno ne glede na izbiro začetnega člena $a_1 \in \mathbb{R}$. Limito tudi izračunaj.

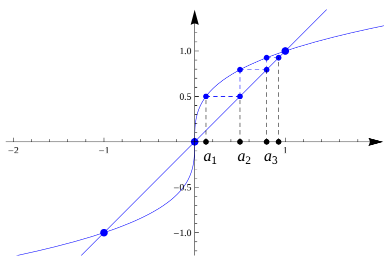
Rešitev: Pri tej nalogi je zaporedje (a_n) podano z rekurzivnim predpisom. To pomeni, da običajno ne moremo direktno izračunati n-tega člena zaporedja, ampak moramo najprej izračunati vse člene pred njim, enega za drugim. Temu primerno je tudi računanje limit takšnih zaporedij nekoliko težje.

Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Potem je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt[3]{a_n} / \lim_{n\to\infty} \\ a &= \sqrt[3]{a} \\ a^3 &= a. \end{aligned}$$

Rešitve zgornje kubične enačbe so $a \in \{-1, 0, 1\}$. Ker ima zaporedje realnih števil lahko največ eno limito, smo tako prišli do potencialnega problema, saj ni jasno, katero izmed teh treh vrednosti bi vzeli za limito. Izkazalo se bo, da je dejanska vrednost limite odvisna od začetnega člena a_1. Pri različnih izbirah začetnega člena namreč dobimo različna zaporedja. Iz rekurzivne formule sledi, da so pri začetnih vrednostih $a_1 \in \{-1, 0, 1\}$ zaporedja (a_n) konstantno enaka a_1. Torej so vse tri rešitve kubične enačbe možne limite.

Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja pri poljubni začetni vrednosti, si pomagajmo s cik-cak diagramom (narisan je primer $a_1 = \frac{1}{8}$):



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Začnemo s točko na abscisni osi, ki ustreza začetni vrednosti a_1 in poiščemo pripadajočo točko na grafu funkcije g. Nato izmenično vlečemo vodoravno črto do grafa funkcije f ali pa navpično do grafa funkcije g. Projekcije oglišč te lomljene črte na abscisno os so vrednosti zaporedja (a_n).

Risanje cik-cak črt je v bistvu grafična predstavitev računanja zaporednih členov. Točka na premici $y = x$ nam predstavlja vrednost člena a_n. Ko se dvignemo ali spustimo na ustrezno točko na grafu funkcije g, smo prišli v točko (a_n, a_{n+1}). Če želimo najti točko z absciso a_{n+1}, se moramo torej premakniti levo (desno) do premice $y = x$.

Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = \frac{1}{8}$ zaporedje konvergiralo k limiti 1. V splošnem pa nam grafična predstavitev omogoča, da postavimo naslednjo hipotezo:

· Če je $a_1 \in (-\infty, 0)$, bo $\lim_{n\to\infty}(a_n) = -1$.

· Če je $a_1 = 0$, bo $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

· Če je $a_1 \in (0, \infty)$, bo $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1$.

Pri dokazu naše domneve se bomo oprli na rezultat s predavanj, ki pravi, da je vsako naraščajoče in navzgor omejeno zaporedje konvergentno. Analogna trditev velja tudi za padajoča navzdol omejena zaporedja.

Vsakega izmed možnih primerov je potrebno obravnavati posebej, a so ideje v vseh primerih podobne, zato si bomo podrobneje pogledali primer, ko je $a_1 \in (1, \infty)$. Radi bi pokazali, da je v tem primeru zaporedje (a_n) padajoče in navzdol omejeno z 1.

Pri tem si bomo pomagali s principom popolne indukcije. Predpostavimo torej, da je $a_n \in (1, \infty)$. Naš cilj je potem pokazati, da je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n, \\ a_{n+1} &> 1. \end{aligned}$$

Ker je po indukcijski predpostavki $a_n > 1$, iz dejstva, da je $g(x) = \sqrt[3]{x}$ naraščajoča funkcija, sledi

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} > \sqrt[3]{1} = 1.$$

Ker pa za $x > 1$ velja $x > \sqrt[3]{x}$, je

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} < a_n.$$

Dokazali smo torej, da je zaporedje (a_n) padajoče in navzdol omejeno z 1, od koder sledi, da je konvergentno. Izmed kandidatov $a \in \{-1, 0, 1\}$, je možna limita le $a = 1$.

Na podoben način lahko dokažemo tudi naslednje trditve:

· Če je $a_1 \in (-\infty, -1)$, je zaporedje (a_n) naraščajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -1$.

· Če je $a_1 \in (-1, 0)$, je zaporedje (a_n) padajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -1$.

· Če je $a_1 \in (0, 1)$, je zaporedje (a_n) naraščajoče in $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$.

<u>Opomba:</u> V tem primeru bi lahko zaporedje (a_n) izračunali eksplicitno, saj je

$$a_n = a_1^{\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

Dobesedno lahko ta predpis uporabimo za $a_1 > 0$, pri negativnih začetnih vrednostih pa moramo biti pazljivi. $\square$

(3) Naj bo $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$ za $n \geq 1$. Izračunaj limito zaporedja (a_n).

Rešitev: Pri tej nalogi imamo zaporedje (a_n) sicer podano eksplicitno, a na težko izračunljiv način. Če izračunamo prvih nekaj členov, bi dobili vrednosti (zaokrožene na tri decimalke):

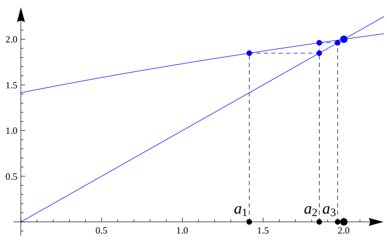
$$\begin{aligned} a_1 &= 1.414, \\ a_2 &= 1.848, \\ a_3 &= 1.962, \\ a_4 &= 1.990, \\ a_5 &= 1.998. \end{aligned}$$

Začetni členi nam dajejo slutiti, da zaporedje (a_n) narašča, vendar še ne vemo točno, ali kam konvergira, ali pa raste v nedogled. Ko računamo člene, lahko opazimo, da jih pravzaprav računamo rekurzivno enega za drugim. To pomeni, da lahko zaporedje (a_n) podamo z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ in z začetnim členom $a_1 = \sqrt{2}$.

Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Če na rekurzivni zvezi uporabimo limito, dobimo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2+a_n} / \lim_{n\to\infty} \\ a &= \sqrt{2+a} \\ a^2 &= 2+a. \end{aligned}$$

Rešitvi te enačbe sta $a \in \{-1, 2\}$. Ker so členi zaporedja (a_n) pozitivni, je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2$, če seveda ta limita obstaja. Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si pomagajmo s cik-cak diagramom:



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt{2+x}$. Slika nam da slutiti, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2. Formalno bomo to domnevo dokazali s pomočjo indukcije. Najprej opazimo, da za $x \in (0, 2)$ velja

$$x < \sqrt{2+x} < 2.$$

Pokažimo najprej, da je zaporedje navzgor omejeno z 2. Po definiciji je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Denimo sedaj, da je $a_n < 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Če v neenakost $\sqrt{2+x} < 2$ vstavimo $x = a_n$, dobimo $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < 2$.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. Ker vsi členi zaporedja (a_n) ležijo na intervalu $(0, 2)$, iz enakosti $x < \sqrt{2+x}$ sledi $a_n < \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$.

Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in navzgor omejeno z 2, torej je konvergentno, na začetku pa smo že pokazali, da od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} = 2.$$

□

(4) Fibonaccijevo zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ ter rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Določi splošni člen zaporedja.

Rešitev: Pri Fibonaccijevemu zaporedju je vsak člen vsota prejšnjih dveh členov. Prvih nekaj členov je tako

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13,\ a_8 = 21, \ldots$$

V nadaljevanju bomo izračunali eksplicitno formulo za splošni člen zaporedja.

Rekurzivni zvezi oblike

$$a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n,$$

kjer sta a in b realni števili, rečemo linearna diferenčna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Zaporedja, ki zadoščajo takšni enačbi, lahko izrazimo v eksplicitni obliki. Za začetek poskusimo z nastavkom $a_n = \lambda^n$ in ga vstavimo v rekurzivno zvezo

$$\lambda^{n+2} = a\lambda^{n+1} + b\lambda^n.$$

Po krajšanju z λ^n tako pridemo do karakteristične enačbe

$$\lambda^2 = a\lambda + b,$$

ki ima dve rešitvi $\lambda_{1,2}$. Rekurzivni zvezi tako zadoščata zaporedji $a_n = \lambda_1^n$ in $a_n = \lambda_2^n$, ker je zveza linearna, pa tudi vsaka linearna kombinacija teh dveh zaporedij. Izkaže se, da je poljubno zaporedje, ki zadošča dani rekurzivni zvezi, oblike:

(1) $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
(2) $a_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Vrednosti konstant C_1 in C_2 izračunamo z upoštevanjem začetnih členov zaporedja.

V primeru Fibonaccijevega zaporedja je karakteristična enačba enaka

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

in ima rešitvi:

$$\lambda_1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$\lambda_2 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja je tako oblike

$$a_n = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Z upoštevanjem začetnih vrednosti $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Od tod dobimo eksplicitno formulo za člene Fibonaccijevega zaporedja

$$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

(5) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Rešitev: Poglejmo prvih nekaj členov:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ a_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{10}} + \tfrac{1}{\sqrt{11}} + \tfrac{1}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

Spet imamo opravka s čedalje večjimi vsotami čedalje manjših členov. V primerih, ko imamo opravka z zaporedji, katerih členi so komplicirani izrazi, se pogosto splača te člene poenostaviti s pomočjo kakšnih ocen.

Vsak člen v vsoti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

je manjši od $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Torej je $a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ za vsak n. Po drugi strani pa je vsak člen v zgornji vsoti večji od $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, kar pomeni, da je $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n$. Oboje skupaj nam da oceni

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Leva in desna stran zgornje neenakosti konvergirata k 1, zato bo tudi zaporedje (a_n) konvergiralo k 1. Formalno to dokažemo z uporabo izreka o sendviču, ki pravi naslednje:

Izrek (Izrek o sendviču)**.** *Če sta zaporedji (b_n) in (c_n) konvergentni in imata enaki limiti ter velja še $b_n \leq a_n \leq c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ od nekod dalje, je tudi zaporedje (a_n) konvergentno in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n).$$

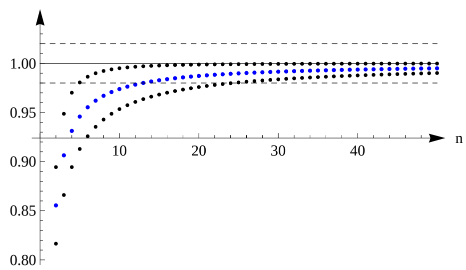
Če definiramo:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \\ c_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \end{aligned}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $b_n \leq a_n \leq c_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n) = 1$. Z uporabo izreka o sendviču torej dobimo

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1.$$

Poglejmo še skico.



$\square$

(6) Izračunaj limite zaporedij z danimi splošnimi členi:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$,

(c) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Rešitev: Za izračun limit zaporedij v katerih nastopajo n-ti koreni lahko včasih uporabimo naslednjo trditev.

Naj bo (b_n) zaporedje s pozitivnimi členi. Potem velja: Če je konvergentno zaporedje $(\frac{b_{n+1}}{b_n})$, je konvergentno tudi zaporedje $(\sqrt[n]{b_n})$ in je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

(a) Poglejmo si najprej limito $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Izberimo $b_n = n$. Potem je $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$ in

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

(b) Izberimo sedaj $b_n = n^2+1$. Potem je $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$ in

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1.$$

(c) Izberimo $b_n = \frac{n^n}{n!}$. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

<u>Opomba 1:</u> Na podoben način lahko izračunamo tudi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1,$$

kjer je k poljubno naravno število in p poljuben polinom s pozitivnimi koeficienti.

<u>Opomba 2:</u> Podobna zaporedja bomo srečali pri uporabi kvocientnega in pa korenskega kriterija za konvergenco vrst. Ta trditev pove, da nam da korenski kriterij isto limito kot kvocientni kriterij. $\square$

(7) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Rešitev: Pri izračunu danih vsot si bomo na zvit način pomagali z de Moivrovo formulo. Definirajmo:

$$x = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{4} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n},$$
$$y = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Potem velja

$$x + iy = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2^k} (\cos k + i \sin k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^k.$$

Imamo torej vsoto geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in s količnikom $\frac{e^i}{2}$. Po znani formuli je ta vsota enaka

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+1)} - 1}{\frac{1}{2} e^i - 1}.$$

Vrednost člena a_n je potem enaka imaginarni komponenti kompleksnega števila na desni. Iz enakosti

$$\frac{\frac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+1)} - 1}{\frac{1}{2} e^i - 1} = \frac{(\frac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+1)} - 1)(\frac{1}{2} e^{-i} - 1)}{(\frac{1}{2} e^i - 1)(\frac{1}{2} e^{-i} - 1)} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}} e^{in} - \frac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+1)} - \frac{1}{2} e^{-i} + 1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^i - \frac{1}{2} e^{-i} + 1}$$

tako dobimo

$$a_n = \frac{\frac{1}{2^{n+2}} \sin n - \frac{1}{2^{n+1}} \sin(n+1) + \frac{1}{2} \sin 1}{\frac{5}{4} - \cos 1}.$$

Limita zaporedja (a_n) je torej

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+2}} \sin n - \frac{1}{2^{n+1}} \sin(n+1) + \frac{1}{2} \sin 1}{\frac{5}{4} - \cos 1} = \frac{\frac{1}{2} \sin 1}{\frac{5}{4} - \cos 1} = \frac{2 \sin 1}{5 - 4 \cos 1}.$$

$\square$

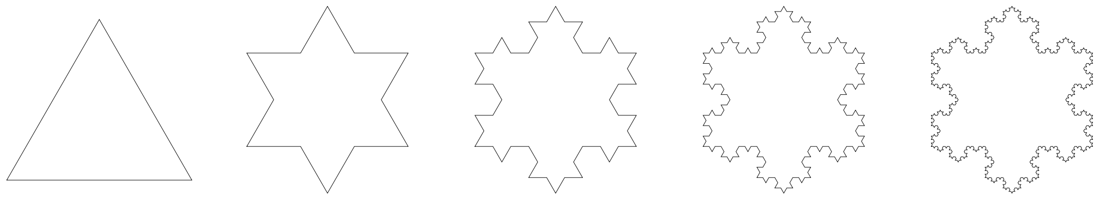
5 Vrste

(1) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke.

Rešitev: Kochova snežinka je ravninska množica, ki jo dobimo po naslednjem postopku:

· začnemo z enakostraničnim trikotnikom,
· v vsakem koraku na srednjo tretjino vsake stranice dodamo enakostranični trikotnik.

Prvih nekaj iteracij tega postopka je narisanih na spodnji sliki.



Pokazali bomo, da v limiti dobimo lik z neskončnim obsegom in s končno ploščino.

Označimo z a_1 dolžino stranice prvotnega enakostraničnega trikotnika. Lik, ki ga dobimo v n-ti iteraciji, ima potem dolžino stranice enako $a_n = \frac{a_1}{3^{n-1}}$, vseh stranic pa je $3 \cdot 4^{n-1}$. Obseg tega lika je potem enak

$$o_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a_1}{3^{n-1}} = 3a_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Dobimo geometrijsko zaporedje, ki narašča čez vse meje.

Poglejmo si še ploščino Kochove snežinke. Označimo z S_1 ploščino začetnega trikotnika. Trikotniki, ki jih dodamo v n-ti iteraciji, imajo potem ploščino enako $\frac{S_1}{9^{n-1}}$ in jih je $3 \cdot 4^{n-2}$. V n-tem koraku se torej ploščina poveča za $S_n = 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{S_1}{9^{n-1}}$, ploščina Kochove snežinke pa je enaka

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \tfrac{S_1}{3}\left(1 + \tfrac{4}{9} + \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 + \ldots\right) = S_1 + \tfrac{S_1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \tfrac{8}{5}S_1.$$

<u>Opomba</u>: Za izračun vsote poljubne geometrijske vrste lahko uporabimo formulo

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \tfrac{a}{1-q},$$

ki velja za vse $|q| < 1$. □

(2) Razišči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Rešitev: Številska vrsta je zaporedje števil (a_n), ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(s_n).$$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}(s_n) = 1.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$:

Potreben pogoj za konvergenco vrste je, da konvergirajo njeni členi proti 0. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1,$$

od tod sklepamo, da vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ divergira. □

(3) Razišči konvergenco vrst z uporabo primerjalnega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+3n+1}{n^4+2n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum a_n$ in $\sum b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \le b_n$ za vse n od nekod dalje.

· Če je vrsta $\displaystyle\sum b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum a_n$ konvergentna.

· Če je vrsta $\displaystyle\sum a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum b_n$ divergentna.

Tipično bomo vrste primerjali z vrstami oblike $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ali pa z geometrijskimi vrstami. Pri tem bomo uporabili dejstvo, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$:

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+3n+1}{n^4+2n}$:

Tokrat lahko ocenimo

$$\frac{4n^2+3n+1}{n^4+2n} < \frac{4n^2+3n+1}{n^4} = \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}.$$

Vrste $\sum \frac{4}{n^2}$, $\sum \frac{3}{n^3}$ in $\sum \frac{1}{n^4}$ konvergirajo, zato konvergira tudi vrsta $\sum \frac{4n^2+3n+1}{n^4+2n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$:

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna. $\square$

(4) Razišči konvergenco vrst z uporabo kvocientnega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n (2n)!}{(3n)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$, $a > 0$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Kvocientni kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

· Če je $D < 1$, je vrsta konvergentna.

· Če je $D > 1$, je vrsta divergentna.

· Če je $D = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$:

Računajmo

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} 2^{-n}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ker je $D < 1$, vrsta $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$ konvergira.

Pri računanju limite smo uporabili naslednji enakosti:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = 2n+1,$$

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n+2)2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = 2n+2.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$:

Tokrat imamo

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)^{n+1}(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{8e}{27} < 1,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$ konvergira.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$:

Tokrat imamo $a_n = \frac{n!}{(an)^n}$. Sledi

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(a(n+1))^{n+1}}}{\frac{n!}{(an)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^n n^n}{n!a^{n+1}(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{ae}.$$

Velja torej naslednje:

· če je $a > \frac{1}{e}$, vrsta konvergira,

· če je $a < \frac{1}{e}$, vrsta divergira.

Posebej moramo obravnavati še primer, ko je $a = \frac{1}{e}$. Tedaj je

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Če primerjamo dva zaporedna člena, dobimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Za zaporedje $(1+\frac{1}{n})^n$ vemo, da je naraščajoče in da ima limito e. Ker so vsi členi tega zaporedja strogo manjši od e, je

$$a_{n+1} > a_n,$$

kar pomeni, da členi vrste naraščajo. Vrsta torej divergira, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste, da členi limitirajo proti nič. □

(5) Razišči konvergenco vrst z uporabo korenskega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{n}$, $a > 0$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Korenski kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- Če je $C < 1$, je vrsta konvergentna.
- Če je $C > 1$, je vrsta divergentna.
- Če je $C = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$:

Računajmo

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = e^{-4}.$$

Ker je $e^{-4} < 1$, vrsta $\sum \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{n}$:

Sedaj velja

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Vrsta $\sum \left(\frac{a}{n}\right)^n$ torej konvergira za vsak $a > 0$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$:

Tokrat je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vrsta $\sum \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ torej konvergira. Pri tem smo upoštevali, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

□

(6) Razišči konvergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ za $a > 0$.

Rešitev: Z uporabo kvocientnega ali pa korenskega kriterija bi dobili

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

kar nam nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:
Raabejev kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

- Če je $R > 1$, je vrsta konvergentna.
- Če je $R < 1$, je vrsta divergentna.
- Če je $R = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)\cdots(a+n+1)}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n} = a.$$

Po Raabejevem kriteriju sledi, da je vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergentna za $a > 1$ in divergentna za $a < 1$. Pri $a = 1$ dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ki divergira.

Opomba 1: Pri $a = 2$ dobimo konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+1)(2+2)\cdots(2+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

S primerjalnim kriterijem lahko potem dokažemo, da vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergira za $a \geq 2$, divergira pa za $a \leq 1$. Za $1 < a < 2$ pa je konvergenco vrste težko dokazati brez uporabe Raabejevega kriterija.

Opomba 2: S pomočjo Raabejevega kriterija lahko dokažemo, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

Opomba 3: Če izračunamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, avtomatično sledi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. $\square$

(7) Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo absolutno oziroma pogojno:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, za $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$,

(c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$.

Rešitev: Za vrsto $\sum a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

· konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum |a_n|$,

· konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Alternirajoča vrsta je vrsta oblike $\sum (-1)^{n-1} a_n$ ali pa $\sum (-1)^n a_n$, kjer je $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:

Leibnizev kriterij: Če absolutne vrednosti

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$:

Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Sklepamo, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$.

Vemo že, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Za $0 < \alpha \leq 1$ je vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg}\frac{1}{2}, \operatorname{tg}\frac{1}{3}, \operatorname{tg}\frac{1}{4}, \ldots$$

monotono pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0,1]$ ter $\operatorname{tg}(0)=0$. Torej je vrsta $\sum(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ konvergentna.

Pokažimo sedaj, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x\in[0,1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Vrsta $\sum(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ je torej pogojno konvergentna.

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$:

Vrsta je alternirajoča, vendar pa absolutne vrednosti njenih členov ne padajo monotono proti nič, zato Leibnizevega kriterija ne moremo uporabiti. Pokazali bomo celo, da vrsta divergira.

Razdelimo vrsto tako, da vzamemo skupaj po dva zaporedna člena. Za vsak $n>1$ tako dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Od tod sledi, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja

$$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \sum_{n=2}^{n+1}\frac{2}{n-1}.$$

Vemo, da harmonična vrsta divergira, zato sode delne vsote naraščajo proti neskončnosti. To pa pomeni, da je dana vrsta divergentna. $\square$

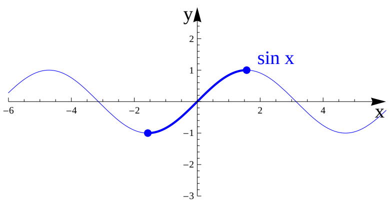
6 Funkcije ene realne spremenljivke

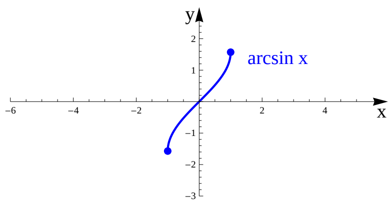
(1) Nariši grafe funkcij:

(a) $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

(b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ in $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

Rešitev: (a) Poglejmo najprej grafa funkcij $\sin x$ in $\arcsin x$.





Funkcija $\sin x$ je liha in periodična s periodo 2π. Če hočemo definirati njen inverz, jo moramo najprej zožiti na interval, kjer je injektivna. Ponavadi vzamemo interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1].$$

Njen inverz je potem funkcija arkus sinus, ki je bijekcija

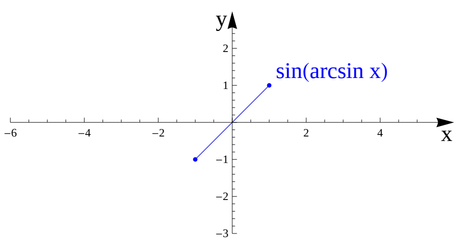
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Označimo sedaj $f(x) = \sin(\arcsin x)$ in $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

Funkcija f je definirana na $D_f = [-1, 1]$. Za vsak $x \in D_f$ pa velja

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

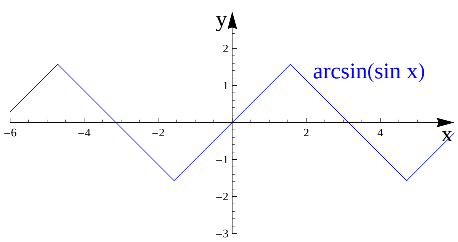
Graf funkcije f je torej kar zožitev identitete na interval $[-1, 1]$.



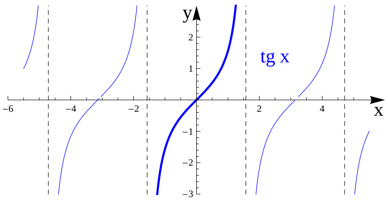
Funkcija g je po drugi strani definirana na $D_g = \mathbb{R}$, vendar pa enakost

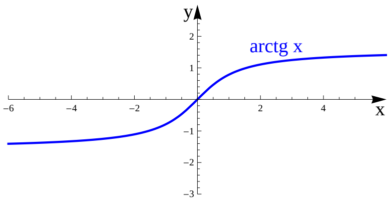
$$\arcsin(\sin x) = x$$

velja le za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Graf funkcije g ima obliko trikotnega vala.



(b) Poglejmo sedaj še grafa funkcij $\operatorname{tg} x$ in $\operatorname{arc\,tg} x$.





Funkcija $\operatorname{tg} x$ je liha in periodična s periodo π, v točkah oblike $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pa ima pole. Injektivna je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\operatorname{tg} : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}.$$

Njen inverz je funkcija arkus tangens, ki je bijekcija

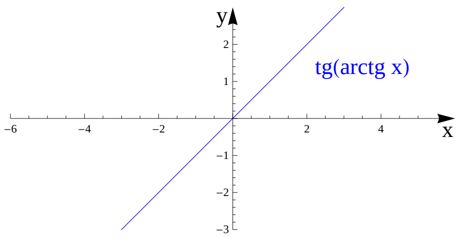
$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Označimo sedaj $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ in $g(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

Funkcija $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ je definirana na celem $\mathbb{R}$, kjer velja

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x.$$

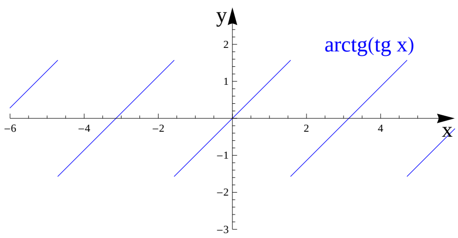
Graf funkcije $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ je torej simetrala lihih kvadrantov



Funkcija $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ pa je definirana povsod, kjer je definiran tangens, enakost

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$$

pa velja le za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Graf funkcije $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ ima obliko žagastega vala.

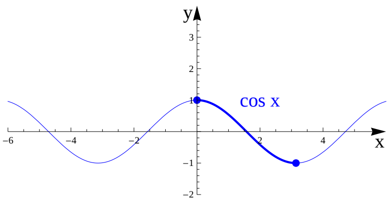


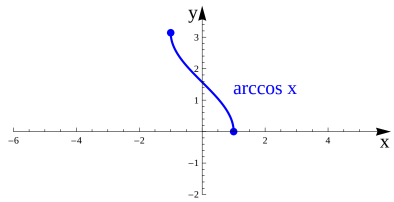
$\square$

(2) Dokaži enakost

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & ;\ x \in [0,1], \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & ;\ x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Rešitev: Tokrat poglejmo grafa funkcij $\cos x$ in $\arccos x$.





Funkcija $\cos x$ je soda in periodična s periodo 2π, injektivna pa je na intervalu $[0,\pi]$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1].$$

Njen inverz je funkcija arkus kosinus

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

To pomeni, da za vsak $\phi \in [0,\pi]$ velja

$$\arccos(\cos\phi) = \phi.$$

Vzemimo sedaj poljuben $x \in [0,1]$. Potem ga lahko zapišemo v obliki $x = \cos\phi$ za enoličen $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Torej velja

$$\arccos x = \arccos(\cos\phi) = \phi.$$

Po drugi strani pa z uporabo forumule $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ dobimo

$$\sin\phi = \sqrt{1-x^2}.$$

Ker je $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pa od tod sledi, da je $\phi = \arcsin\sqrt{1-x^2}$. Za $x \in [0,1]$ torej velja

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Poglejmo sedaj še primer, ko je $x \in [-1,0]$. Potem je $x = \cos\phi$ za enoličen $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ in velja

$$\arccos x = \arccos(\cos\phi) = \phi.$$

Podobno kot prej velja tudi

$$\sin\phi = \sqrt{1-x^2}.$$

Do razlike pa pride, ko na obeh straneh zgornje enačbe izračunamo arkus sinus. Pri prejšnji nalogi smo namreč spoznali, da za $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ velja

$$\arcsin(\sin\phi) = \pi - \phi.$$

Torej je $\pi - \phi = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ oziroma

$$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

$\square$

(3) Hiperbolični tangens je definiran s predpisom $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

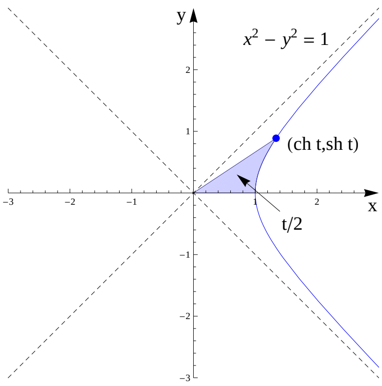
(a) Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in nato skiciraj graf funkcije th.

(b) Poišči inverz funkcije th.

Rešitev: (a) Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

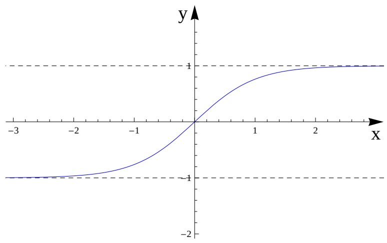
Podobno kot lahko s sinusom in kosinusom parametriziramo krožnico $x^2 + y^2 = 1$, lahko s predpisom $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ parametriziramo desni krak hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Parameter t pri tem ustreza dvakratniku predznačene ploščine lika, ki ga opišejo zveznice hiperbole s koordinatnim izhodiščem pri parametrih med 0 in t.



Hiperbolični tangens $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je definiran kot kvocient funkcij sh in ch. Ker je funkcija ch povsod pozitivna, je th definiran na celi realni osi, v točki $x = 0$ pa ima ničlo. Ima vodoravni asimptoti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,\\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.\end{aligned}$$

S pomočjo odvoda se da pokazati, da povsod narašča. Poglejmo še skico njegovega grafa.



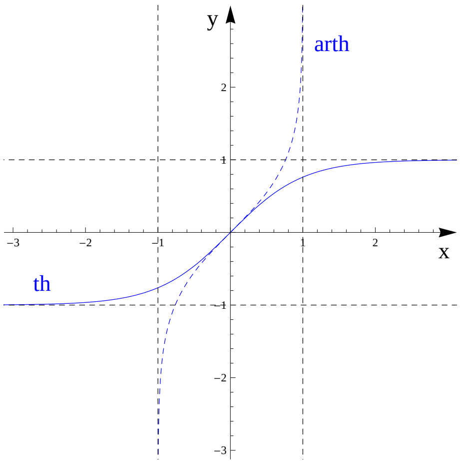
(b) Izračunajmo sedaj inverz funkcije th. Rečemo mu area hiperbolični tangens in ga označimo z arth. Funkcija arth je definirana na intervalu $(-1, 1)$, njen predpis pa dobimo s pomočjo naslednjega računa:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \\
e^y(x-1) &= -e^{-y}(x+1), \\
e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x}, \\
y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

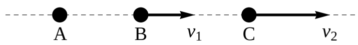
Poglejmo še grafa funkcij th in arth v istem koordinatnem sistemu.



Opomba: Za hiperbolične funkcije veljajo podobne formule kot za trigonometrične funkcije. Najpomembnejše med njimi so:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \\
\operatorname{th}(x+y) &= \tfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.
\end{aligned}
$$

Adicijski izrek za funkcijo th je pravzaprav matematična preobleka formule za seštevanje hitrosti v posebni teoriji relativnosti. Denimo, da imamo točke A, B in C ter privzemimo, da se točka B giblje s hitrostjo v_1 glede na točko A, točka C pa s hitrostjo v_2 glede na točko B.



V nerelativistični mehaniki se potem točka C premika glede na točko A s hitrostjo, ki je enaka

$$v = v_1 + v_2.$$

V posebni teoriji relativnosti se ne sešteva hitrosti, ampak parameter ω, ki je definiran s predpisom

$$\operatorname{th}\omega = \frac{v}{c} \Longleftrightarrow \omega = \operatorname{arth}\frac{v}{c}.$$

Iz enakosti $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dobimo

$$\operatorname{th}\omega = \operatorname{th}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{\operatorname{th}\omega_1 + \operatorname{th}\omega_2}{1 + \operatorname{th}\omega_1 \operatorname{th}\omega_2}.$$

Če sedaj upoštevamo definicijo parametra ω in dobljeno enakost pomnožimo s c, dobimo relativistično formulo za seštevanje hitrosti

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Formula $v = v_1 + v_2$ je približek te formule, ki je veljaven pri majhnih hitrostih. $\square$

(4) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$.

Rešitev: Limite funkcij računamo podobno kot limite zaporedij, upoštevamo pa naslednji splošni navodili:

· če je funkcija f zvezna v točki a, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,

· če predpis za funkcijo f ni definiran v točki a, poskušamo najti tak predpis g, ki je definiran v a, in da za x blizu a $(x \neq a)$ velja $f(x) = g(x)$.

(a) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x},$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1} = -\frac{5}{2}.$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(c) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x - 1}{x + 2} = -2.$$

(d) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x + 2)(x - 1)}{(1 - x)(1 + x + x^2)},$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x + 2}{1 + x + x^2} = -1.$$

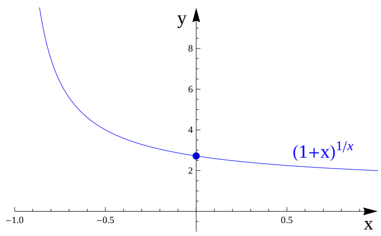
$\square$

(5) Naj bo g poljubna zvezna funkcija, za katero je $g(0) = 0$.

(a) Dokaži, da velja $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(b) Dokaži, da velja $\lim_{x \to 0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$.

Rešitev: (a) Predpis $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ je definiran za vsak $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, kjer definira zvezno funkcijo. Pri tej nalogi bomo pokazali, da lahko funkcijo f zvezno razširimo skozi $x = 0$, če definiramo $f(0) = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.



Limita $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ je pomembna predvsem zato, ker jo potrebujemo za izračun odvoda naravnega logaritma.

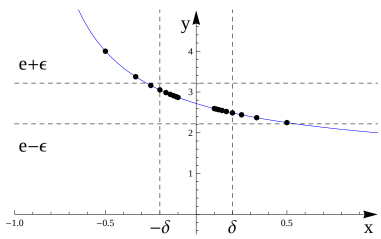
Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Najti želimo tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ veljalo

$$|f(x) - e| < \epsilon.$$

Pri tem si bomo pomagali z naslednjima znanima limitama zaporedij

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$
$$\lim_{n \to \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Ti limiti povesta, da se približujemo k e, ko gremo proti nič po številih oblike $x = \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{Z}$. Naš cilj bo, da pokažemo, da podobno velja tudi za ostale x blizu števila nič.



Izberimo sedaj poljuben $x \in (0,1)$. Potem obstaja enolično določen $n_x \in \mathbb{N}$, da velja $\frac{1}{n_x+1} \leq x < \frac{1}{n_x}$ oziroma $n_x < \frac{1}{x} \leq n_x + 1$. Iz prve neenakosti dobimo neenakost

$$1 + \frac{1}{n_x + 1} \leq 1 + x < 1 + \frac{1}{n_x}.$$

Vsa tri števila v tej neenakosti so večja od ena, zato pridemo s potenciranjem do ocene

$$\left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} < \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{\frac{1}{x}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Zaporedji na levi in na desni strani verige neenakosti konvergirata proti e, zato lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq N$ velja

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \epsilon$$

Vzemimo $\delta = \frac{1}{N}$. Za $0 < x < \delta$ je potem $n_x \geq N$, od koder sledi

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} < e + \epsilon$$

Torej je

$$\lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Za $-1 < x < 0$ je dokaz podoben. Za vsak tak x obstaja enolično določen $n_x \in \mathbb{N}$, da velja $-\frac{1}{n_x} < x \leq -\frac{1}{n_x+1}$. Levo limito lahko nato dokažemo s pomočjo neenakosti

$$\left(1 - \frac{1}{n_x+1}\right)^{-n_x} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 - \frac{1}{n_x}\right)^{-n_x-1}.$$

(b) Pri nalogi (a) smo pokazali, da bo f zvezna funkcija na intervalu $(-1, \infty)$, če definiramo $f(0) = e$. Od tod sledi, da je tudi funkcija $f \circ g$ zvezna, kar pa v posebnem pomeni, da je

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)).$$

Po predpostavki je $f(g(0)) = f(0) = e$, zato je

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)) = e.$$

Opomba: Izraz $(1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}}$ ni dobro definiran, če je $g(x) = 0$. Zato je treba pri zapisu limite

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$$

po tihem predpostavljati, da je $(1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$, če je $g(x) = 0$. V primerih, ki so zanimivi, je ponavadi $x = 0$ izolirana ničla funkcije g, zato ni problemov z nedefiniranostjo tega predpisa v okolici točke $x = 0$. $\square$

(6) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$,

(c) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x + \cos x)^{1/\operatorname{tg} x}$.

Rešitev: Pri računanju teh limit si bomo pomagali z limito

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e,$$

ki velja za poljubno zvezno funkcijo g, za katero je $g(0) = 0$. S pomočjo te limite lahko izračunamo limite oblike

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x))^{h(x)},$$

kjer je $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ in $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \pm\infty$. Velja namreč

$$\lim_{x\to 0}(1+g(x))^{h(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\ln((1+g(x))^{h(x)})} = \lim_{x\to 0} e^{g(x)h(x)\ln((1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}})} = e^{\lim\limits_{x\to 0} g(x)h(x)}.$$

Ekvivalentno pa velja tudi

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)h(x)},$$

kjer je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ in $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \pm\infty$.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

(c)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{1/\operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0}((1+\operatorname{tg} x)\cos x)^{1/\operatorname{tg} x} = e\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\operatorname{tg} x},\\
&= e\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(\cos x\sin x)} = e\cdot(e^{-\frac{1}{2}})^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\sin x)},\\
&= e\cdot(e^{-\frac{1}{2}})^0 = e.
\end{aligned}$$

□

(7) Naj bo funkcija f definirana s predpisom $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$. Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj njene limite na robu definicijskega območja.

Rešitev: Funkcija $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ je definirana na $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$, zato nas zanimajo limite pri $x\to\pm\infty$ in pa pri $x\to 0$.

Ker je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$, je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}.$$

Limite funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ pri $x\to 0$ pa ne moremo izračunati s prevedbo na kakšno znano limito. V takem primeru ponavadi poskušamo limito uganiti in nato našo domnevo dokazati. V primeru funkcije f bi tako lahko ugotovili, da sta leva in desna limita pri $x=0$ različni in da velja

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$$

Pokažimo npr. po definiciji, da velja $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$.

Izberimo $\epsilon > 0$. Brez škode se lahko omejimo na primer, ko je $\epsilon < 1$. Sedaj želimo najti tak $\delta > 0$, da bo za vsak $0 < x < \delta$ veljalo $|f(x) - 0| < \epsilon$ oziroma $\frac{1}{1+e^{1/x}} < \epsilon$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^{1/x}} &< \epsilon,\\
\frac{1}{\epsilon} - 1 &< e^{1/x},\\
\ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) &< \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Ker je $\epsilon < 1$, od tod sledi

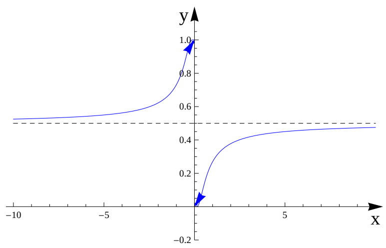
$$\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right)} > x.$$

Če torej izberemo $\delta = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right)}$, bo za vsak $0 < x < \delta$ veljalo $|f(x)| < \epsilon$.

Da je $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$, lahko dokažemo na podoben način.

Ker leva in desna limita nista enaki, limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ ne obstaja.

Grafično to pomeni, da grafa funkcije f ne moremo zvezno razširiti preko $x = 0$.



Opomba: Limita funkcije f v dani točki obstaja natanko takrat, ko obstajata leva in desna limita funkcije f v dani točki in sta enaki. $\square$

(8) Naj bo $f(x) = (x+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}$. Določi območje zveznosti funkcije f. Ali je možno funkcijo f zvezno razširiti na $\mathbb{R}$?

Rešitev: Dani predpis definira zvezno funkcijo na množici $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko funkcijo f zvezno razširimo še na točko $x = -1$, v točki $x = 1$ pa ima funkcija f skok.

$x = -1$: Pišimo $g(x) = x + 1$ in $h(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}$. Potem je $g(-1) = 0$ in $|h(x)| < \frac{\pi}{2}$, kar pomeni, da je funkcija f v okolici točke $x = -1$ produkt omejene funkcije in pa funkcije, ki ima v točki $x = -1$ ničlo. Pokazali bomo, da od tod sledi

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} g(x)h(x) = 0.$$

Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$, obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (-1-\delta, -1+\delta)\setminus\{-1\}$ velja $|x+1| < \frac{\epsilon}{\frac{\pi}{2}}$. Za $x \in (-1-\delta, -1+\delta)\setminus\{-1\}$ potem velja

$$\left|(x+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2}\right| < \frac{\epsilon}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \epsilon.$$

Pri poljubnem ϵ je torej $|g(x)h(x)| < \epsilon$, če je le x dovolj blizu -1. Sledi $\lim\limits_{x\to -1} g(x)h(x) = 0$.

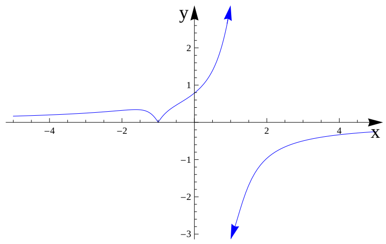
$x = 1$: Velja $\lim\limits_{x\to 1+} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2}$ in $\lim\limits_{x\to 1-} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$, od koder sledi

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = -\pi,$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \pi.$$

Funkcije f torej ne moremo zvezno razširiti na $\mathbb{R}$.

Poglejmo še graf funkcije f.



Opomba: Na podoben način lahko pokažemo tudi naslednjo trditev. Če je $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ in je g omejena funkcija v okolici točke a, je

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

□

(9) S pomočjo metode bisekcije poišči na eno decimalko natančno rešitev enačbe $\cos x = x$.

Rešitev: Poznamo metode, s pomočjo katerih lahko rešujemo polinomske, trigonometrične, eksponentne in druge enačbe. V kolikor te metode delujejo, lahko najdemo natančne rešitve enačb. Če točne rešitve ne znamo najti, pa lahko približno rešitev poiščemo s kakšno numerično metodo. Metoda bisekcije je ena izmed njih.

Pri metodi bisekcije uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,

· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$,

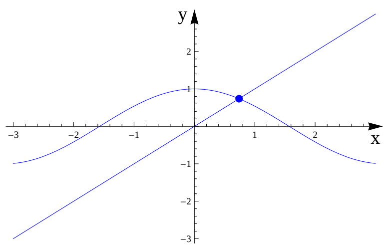
· izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo,

· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Delovanje metode temelji na dejstvu, da je graf zvezne funkcije neprekinjen. Če ima torej funkcija v enem krajišču intervala negativno vrednost, v drugem pa pozitivno vrednost, mora imeti nekje na intervalu ničlo.

Poskusimo sedaj rešiti enačbo $\cos x = x$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev nekje na intervalu $[0, 1]$.



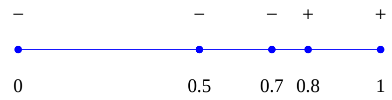
Da bi lahko uporabili metodo bisekcije, enačbo najprej prepišimo v obliko $x - \cos x = 0$ in definirajmo funkcijo $f(x) = x - \cos x$. Velja $f(0) = -1$ in $f(1) = 0.46$, zato bomo začeli z intervalom $[0, 1]$.

· $f(0.5) = -0.38$, zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,

· $f(0.8) = 0.10$, zato bo ničla na intervalu $[0.5, 0.8]$,

· $f(0.7) = -0.06$, zato bo ničla na intervalu $[0.7, 0.8]$.

Ker je $f(0.75) = 0.02$, bomo za približek vzeli število $x = 0.7$.



Bolj natančen približek za rešitev enačbe je $x = 0.739085$. $\square$

7 Odvod

(1) Izračunaj njihove odvode, nato pa nariši v isti diagram grafe funkcij:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad g(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{2x}{1-x^2}, \quad h(x) = -\operatorname{arc\,tg} \tfrac{x+1}{x-1}.$$

Rešitev: Izračunajmo najprej odvode:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2} \cdot \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$h'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vidimo, da imajo vse tri funkcije iste odvode. Od tod lahko sklepamo, da se te tri funkcije na vsakem intervalu, na katerem so vse tri definirane, paroma razlikujejo za konstantne vrednosti. Te konstante so lahko načeloma odvisne od izbire intervala.

Poglejmo si najprej funkciji f in g. Velja $D_f = \mathbb{R}$ in $D_g = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$. Sklepamo, da se funkciji f in g na vsakemu izmed intervalov $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ in $(1,\infty)$ razlikujeta za konstanto. To konstanto lahko določimo s primerjavo vrednosti v neki konkretni točki, ali pa z izračunom asimptote v neskončnosti, če je le-ta vodoravna.

$$\begin{array}{lll}
(-\infty,-1): & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0, \\
(-1,1): & f(0) = 0 \quad \text{in} \quad g(0) = 0, \\
(1,\infty): & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0.
\end{array}$$

Od tod dobimo

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2} & ; \ x < -1, \\ \operatorname{arc\,tg} x & ; \ -1 < x < 1, \\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2} & ; \ x > 1. \end{cases}$$

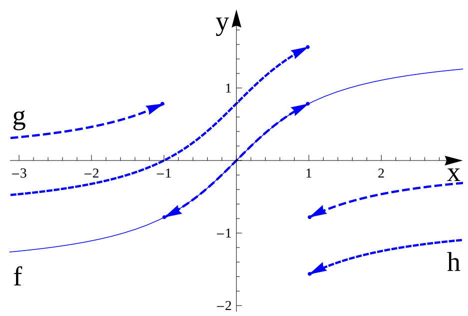
Primerjajmo še funkciji f in h. Velja $D_h = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$ in

$$\begin{array}{lll}
(-\infty,1): & f(0) = 0 \quad \text{in} \quad h(0) = \dfrac{\pi}{4}, \\
(1,\infty): & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = -\dfrac{\pi}{4}.
\end{array}$$

Sledi

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4} & ; \ x < 1, \\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{3\pi}{4} & ; \ x > 1. \end{cases}$$

Poglejmo si še grafe vseh treh funkcij:



$\square$

(2) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Dokaži, da je funkcija f zvezna, povsod odvedljiva in ni zvezno odvedljiva v točki $x = 0$.

Rešitev: Iz definicije sledi, da je funkcija f zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebej moramo preveriti še, da velja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

V okolici točke $x = 0$ lahko zapišemo $f(x) = g(x)h(x)$, kjer je $g(x) = x^2$ in $h(x) = \sin \frac{1}{x}$. Funkcija g ima v točki $x = 0$ ničlo, medtem ko je funkcija h omejena z 1 v okolici točke $x = 0$. Od tod sledi $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, kar pomeni, da je funkcija f zvezna tudi v točki $x = 0$.

Izračunajmo sedaj odvod funkcije f. V točki $x = 0$ ga moramo izračunati po definiciji

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Pri zadnjem enačaju lahko uporabimo isti postopek kot pri dokazu zveznosti funkcije f.

Za točke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa lahko odvod izračunamo kar s pomočjo pravil za odvajanje.

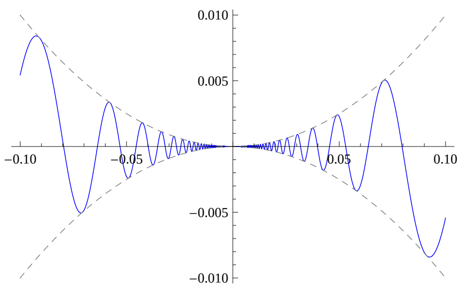
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Torej je funkcija f odvedljiva povsod in velja

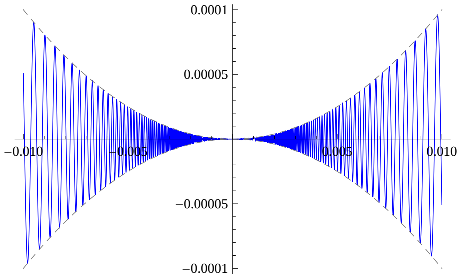
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

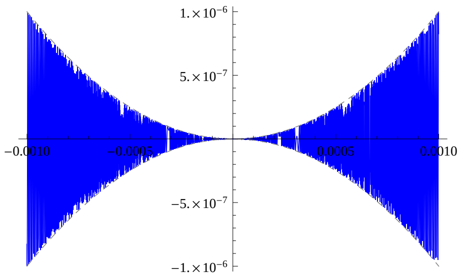
Funkcija f pa NI zvezno odvedljiva v točki $x = 0$, saj ne obstaja limita $\lim_{x \to 0} f'(x)$. Izraz $2x \sin \frac{1}{x}$ gre sicer proti 0 pri $x \to 0$, vendar pa izraz $\cos \frac{1}{x}$ zavzame vse vrednosti med -1 in 1 poljubno blizu točke $x = 0$.

Poglejmo si sedaj graf funkcije f:



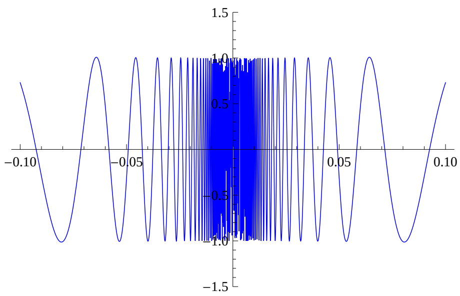
Graf funkcije f si lahko predstavljamo kot sinusoido, katere amplituda se približuje 0, ko gre $x \to 0$, perioda pa prav tako postaja poljubno majhna. Če pogledamo graf v zelo majhnih okolicah točke 0, je v principu graf funkcije še vedno krivulja, ki pa je s pisalom fiksne širine ne moremo narisati, ker so periode 'valov' premajhne. Zato bi graf, če bi ga poskušali narisati, v okolice točke $x = 0$ izgledal kot na spodnji sliki.





Na grafu lahko opazimo, da ima funkcija vodoravno tangento v točki $x = 0$. Dejstvo, da funkcija f ni zvezno odvedljiva, pa sledi iz opazke, da imajo tangente na graf funkcije f poljubno blizu točke 0 naklone med -1 in 1.

Poglejmo še graf funkcije f':



Vidimo, da limita $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ni enaka vrednosti 0, ampak je v nekem smislu ta limita kar cel interval $[-1, 1]$. $\square$

(3) S pomočjo Lagrangeevega izreka dokaži, da za $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ velja

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Rešitev: Spomnimo se najprej:

Lagrangeev izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a, b) odvedljiva. Potem obstaja $c \in (a, b)$, za katerega velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Definirajmo sedaj $f(x) = \operatorname{tg} x$. Sledi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, zato lahko z uporabo Lagrangeevega izreka najdemo $c \in (a, b)$, za katerega velja

$$\frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

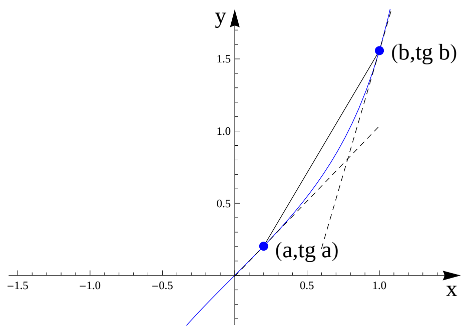
Funkcija $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ je na intervalu (a, b) naraščajoča, zato je

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b},$$

oziroma

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Opomba: Zgornjo neenakost lahko geometrično interpretiramo na naslednji način: Naklon sekante grafa funkcije tg med točkama $(a, \operatorname{tg} a)$ in $(b, \operatorname{tg} b)$ je večji od naklona tangente v točki a in manjši od naklona tangente v točki b.



□

(4) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{1/x}$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcij.

L'Hospitalovo pravilo: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke x_0 (razen morda v x_0) in naj gresta obe hkrati proti 0 ali pa obe hkrati proti $\pm\infty$ pri $x \to x_0$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki.

Pravilo velja tudi za enostranske limite in limite v neskončnosti.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\dfrac{1}{n} \lim\limits_{x\to 0+} x^n = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{e^x} = 0.$

(d) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\pi - x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}} = 2\lim\limits_{x\to\pi} \sin^2\dfrac{x}{2} = 2.$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = 1$ (Zadnja enakost sledi iz limite (b)).

(f) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x}+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}{1}} = e^3.$

$\square$

(5) Izračunaj polinomske asimptote danih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$,

(b) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Rešitev: Polinom p je polinomska asimptota funkcije f pri $x \to \infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - p(x)) = 0.$$

Analogno definiramo tudi polinomske asimptote pri $x \to -\infty$.

Tipični primeri funkcij s polinomskimi asimptotami so racionalne funkcije, primera funkcij, ki nimata polinomskih asimptot, pa sta logaritemska in eksponentna funkcija.

Če je polinom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomska asimptota funkcije f, lahko njegove koeficiente izračunamo v naslednjem zaporedju:

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n},\\
a_{n-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}},\\
&\vdots \qquad\quad \vdots\\
a_0 &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x)).
\end{aligned}$$

Število n poskušamo uganiti. Če izberemo prevelik n, dobimo prvo limito enako nič, v primeru premajhnega n pa je ta limita neskončna.

(a) $\underline{f(x) = \sqrt{x^2+x}}$:

Po občutku sklepamo, da ima funkcija f linearno asimptoto. Poskusimo najprej izračunati asimptoto, ko gre $x \to \infty$:

$$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\tfrac{1}{x}} = 1,$$

$$n_+ = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}.$$

Od tod sledi, da ima funkcija f linearno asimptoto

$$y_+(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Ko gre $x \to -\infty$, pa dobimo:

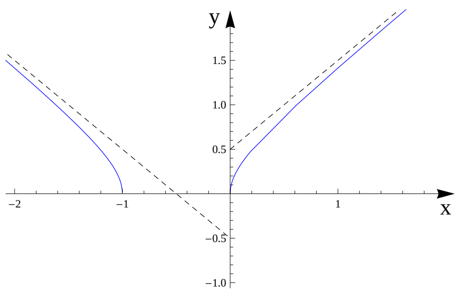
$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1,$$

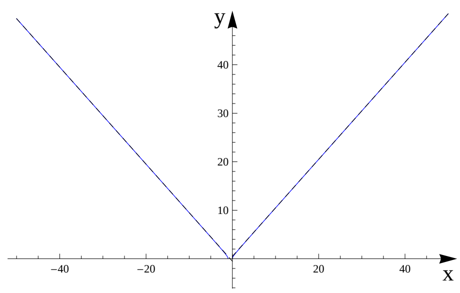
$$n_- = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je asimptota pri $x \to -\infty$ premica

$$y_-(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni linearni asimptoti.





(b) $\underline{f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}}$:

V tem primeru bo imela funkcija f kvadratno asimptoto. Računajmo:

$$a_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$a_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

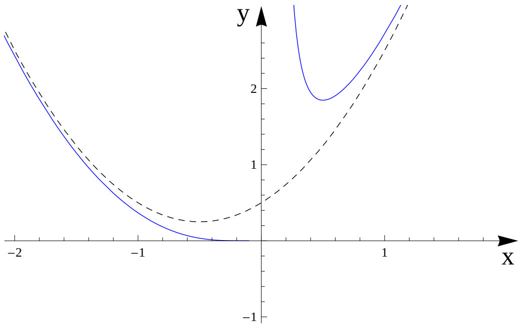
$$a_0 = \lim_{x\to\infty} (x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{\frac{1}{x}} + 1}{-\frac{2}{x}},$$

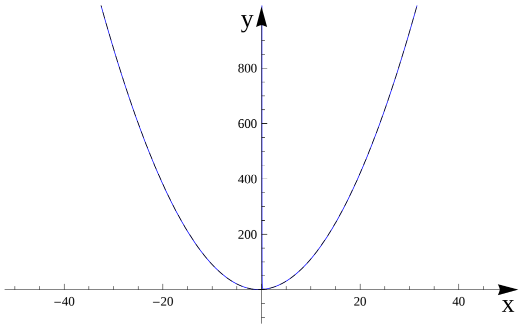
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Isti račun pokaže, da je kvadratna funkcija

$$p(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

asimptota funkcije f tudi, ko gre $x \to -\infty$.





□

(6) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = x\ln^2 x$,

(b) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij so nam v pomoč naslednji podatki, ki jih lahko predhodno izračunamo:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,

· stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja, tangente na robu definicijskega območja,

· prevoji, intervali konveksnosti in konkavnosti.

(a) $\underline{f(x) = x\ln^2 x}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (0, \infty)$ in ima ničlo v točki $x = 1$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\ln^2 x = \infty.$$

  Funkcija f pri $x \to \infty$ nima polinomske asimptote.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2).$$

  Torej je funkcija f naraščajoča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. V točki $x = e^{-2}$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 1$ pa lokalni minimum. Velja

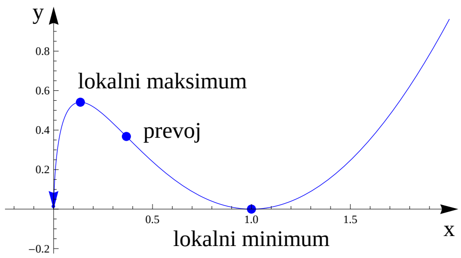
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x(\ln x + 2) = \infty,$$

  od koder sklepamo, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ navpično tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

  Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$, v točki $x = e^{-1}$ pa ima prevoj.



(b) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V točki $x = -1$ ima ničlo, premica $y = \frac{\pi}{4}$ pa je njena vodoravna asimptota. Leva in desna limita funkcije f v točki $x = 0$ sta:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Graf funkcije f se v okolici $x =$ z desne približuje točki $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, z leve pa $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2 + (x+1)^2} = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Za vsak $x \in D_f$ velja $f'(x) < 0$, torej je funkcija f padajoča na vsakem izmed intervalov $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$. Stacionarnih točk nima. V točki $x = 0$ ima odvod limito

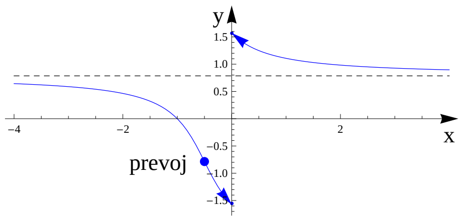
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -1,$$

kar pomeni, da se graf funkcije f približuje točkama $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ in $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ pod kotom $\phi = -45°$.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}.$$

Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$ in konkavna na $(-\infty, -\frac{1}{2})$, v točki $x = -\frac{1}{2}$ pa ima prevoj.



(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$. Ničlo ima v točki $x = 0$, pol pa v točki $x = 2$. Funkcija f sicer ni racionalna funkcija, vseeno pa ima dve različni linearni asimptoti. Računajmo:

$$k_+ = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1.$$

$$n_+ = \lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\right),$$
$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} = 1.$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1.$$

$$n_- = \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right),$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{(-\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1)(\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1)}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-2x}{x+2}}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} = -1.$$

Pri računanju limit smo upoštevali dejstvi, da za pozitivna števila velja $x = \sqrt{x^2}$, za negativna števila pa $x = -\sqrt{x^2}$.

Linearni asimptoti funkcije f sta torej $y_+(x) = x+1$ in $y_-(x) = -x-1$.

- Odvod funkcije f je enak

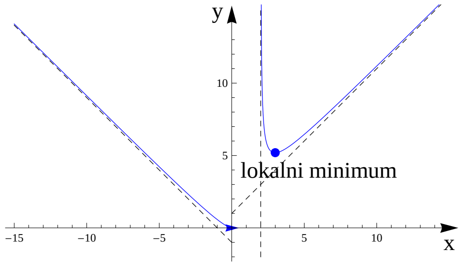
$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2(2x-6)}{(x-2)^2} = (x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}}.$$

Torej je funkcija f naraščajoča na $(3,\infty)$ in padajoča na $(-\infty,0)\cup(2,3)$. Točki $x_1 = 0$ in $x_2 = 3$ sta stacionarni točki funkcije f, obe sta lokalna minimuma. Točka $x = 0$ je sicer na robu definicijskega območja, ima pa graf funkcije f v tej točki vodoravno levo tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak:

$$f''(x) = \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} + (x-3)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot\frac{(x-2)^3-3x(x-2)^2}{(x-2)^6},$$
$$= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} + (3-x)\sqrt{\frac{1}{x(x-2)^5}}(x+1),$$
$$= \frac{\sqrt{x^2(x-2)^2}+(3+2x-x^2)}{\sqrt{x(x-2)^5}} = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}.$$

Vidimo, da je funkcija f konveksna povsod, kjer je definirana. Poglejmo še njen graf.



□

(7) Skiciraj graf Gaussove funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}$ in $\sigma > 0$. Kakšen je pomen parametrov μ in σ?

Rešitev: Gaussova funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ je definirana na celi realni osi in je povsod pozitivna. Ko gre $x \to \pm\infty$, se graf funkcije f približuje abscisni osi. Njen odvod je

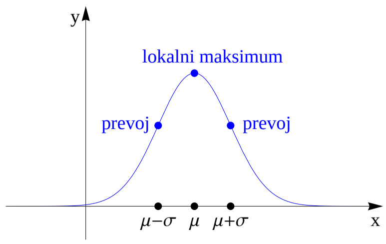
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right).$$

Od tod sklepamo, da funkcija f narašča na intervalu $(-\infty, \mu)$, pada pa na intervalu (μ, ∞). V točki $x = \mu$ ima (globalni) maksimum.

Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Funkcija f je konveksna na $(-\infty, \mu - \sigma) \cup (\mu + \sigma, \infty)$, konkavna pa na $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. V točkah $x = \mu \pm \sigma$ ima prevoja.



Z dano Gaussovo funkcijo opišemo normalno porazdelitev s povprečno vrednostjo μ in s standardnim odklonom σ. Sprememba parametra μ povzroči, da se graf prestavi levo ali desno. Tako dobljen graf je simetričen glede na os $x = \mu$. Parameter σ določa, kako razpršena je normalna porazdelitev. Če σ povečamo, se graf raztegne, njegov vrh pa se zniža. V kolikor pa σ zmanjšamo, se vrh dvigne, graf pa se zoži. Konstanta $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ je izbrana tako, da je ploščina lika pod krivuljo enaka 1.

Najpogosteje uporabljamo standardno normalno porazdelitev

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

ki ustreza parametroma $\mu = 0$ in $\sigma = 1$. □

(8) Skiciraj krivulji, ki sta podani v parametrični obliki:

(a) $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 3\sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ za $t \in \mathbb{R}$ in nek $a > 0$.

Rešitev: Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija

$$\vec{r} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ nek interval. Predstavljamo si lahko, da opisuje gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in [t_0, t_1]$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t. Pomemben je tudi vektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\vec{r}(t+s) - \vec{r}(t)}{s} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

ki ga fizikalno interpretiramo kot hitrost točke, geometrično pa ponazarja smerni vektor tangente na krivuljo v danem položaju.

Pri skiciranju tira vektorske funkcije si pomagamo z naslednjimi podatki:

· skiciramo grafa in poiščemo stacionarne točke obeh komponent,

· označimo položaje, ki ustrezajo stacionarnim točkam,

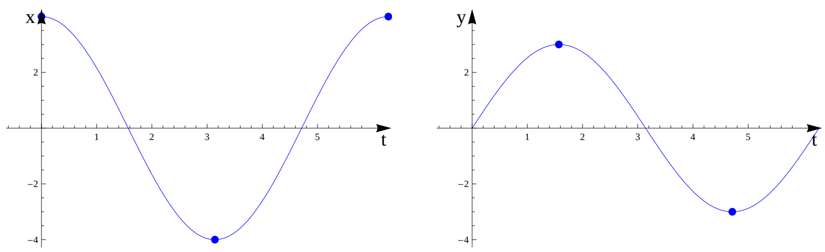
· analiziramo limitno in asimptotično obnašanje obeh komponent.

Z upoštevanjem teh podatkov lahko sedaj poskusimo skicirati graf. Na intervalih, kjer funkcija $x(t)$ narašča, se točka premika v desno, kjer pa pada, pa v levo. Podobno nam naraščanje funkcije $y(t)$ pove, da se točka premika navzgor, padanje pa pomeni, da se premika navzdol. V stacionarnih točkah funkcije x je tangenta na tir funkcije navpična, v stacionarnih točkah funkcije y pa vodoravna. Če imata ob nekem času obe funkciji x in y odvod enak nič, se lahko zgodi, da dobimo na tiru ost.

(a) Poskusimo najprej skicirati graf krivulje, ki je podana s predpisom:

$$x(t) = 4\cos t,$$
$$y(t) = 3\sin t.$$

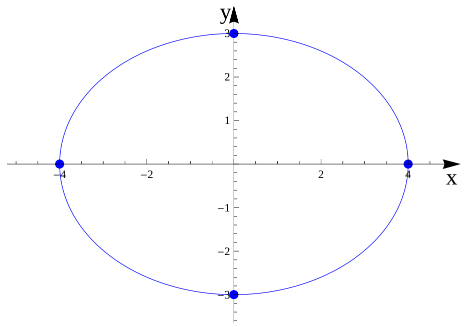
Grafa komponent sta na spodnji sliki.



Odvoda komponent sta $\dot{x}(t) = -4\sin t$ in $\dot{y}(t) = 3\cos t$. Zanimajo nas točke, kjer je vsaj eden izmed odvodov enak nič. To so točke $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$. Položaji točke pri teh parametrih so:

$$\vec{r}(0) = (4, 0),$$
$$\vec{r}(\tfrac{\pi}{2}) = (0, 3),$$
$$\vec{r}(\pi) = (-4, 0),$$
$$\vec{r}(\tfrac{3\pi}{2}) = (0, -3),$$
$$\vec{r}(2\pi) = (4, 0).$$

Z obeh grafov lahko razberemo, da se na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ točka premika levo in gor, na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ levo in dol, na $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ desno in dol ter na $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ desno in gor. Z upoštevanjem teh podatkov lahko skiciramo krivuljo.



Vidimo, da po obliki krivulja spominja na elipso. Da je to res elipsa, lahko dokažemo, če krivuljo zapišemo v implicitni obliki. Velja namreč

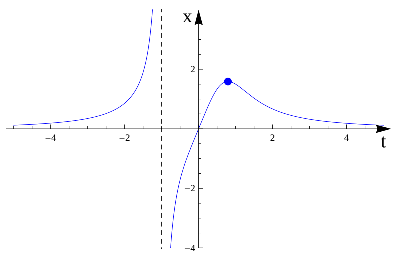
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = \frac{16\cos^2 t}{16} + \frac{9\sin^2 t}{9} = 1.$$

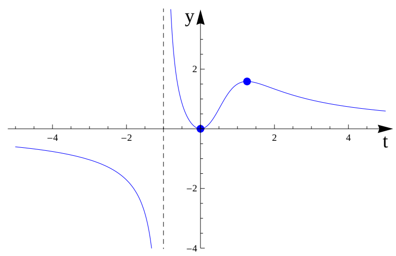
Gre torej za elipso s polosema $a = 4$ in $b = 3$.

(b) Izračunajmo najprej odvoda obeh komponent:

$$\dot{x} = \frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$
$$\dot{y} = \frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Funkcija x ima stacionarno točko $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, medtem ko ima y stacionarni točki $t = 0$ in $t = \sqrt[3]{2}$. Če upoštevamo še pole in asimptote obeh koordinat, dobimo naslednja grafa.





Sedaj bomo poskusili skicirati Descartov list. Odvodi komponent nam povedo, da ležijo točke:

$$\vec{r}(0) = (0,0),$$
$$\vec{r}(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}) = (a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}),$$
$$\vec{r}(\sqrt[3]{2}) = (a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$$

na krivulji in da so tangente na krivuljo v teh točkah vodoravne oziroma navpične. Začnimo z risanjem krivulje na primer pri parametru $t = 0$. Tedaj je položaj točke enak $(0,0)$, tangenta na krivuljo pa je vodoravna. Na intervalu $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ se točka premika desno in navzgor, dokler ne pride do položaja $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$, kjer je tangenta na krivuljo navpična. Nato se za $t \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$ točka premika levo in navzgor in pride do položaja $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$, kjer je tangenta na krivuljo vodoravna. Na intervalu $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ se točka premika levo in navzdol ter se asimptotično približuje koordinatnemu izhodišču. Da bi izračunali, pod kakšnim kotom pride v koordinatno izhodišče, moramo najprej izračunati, kaj se dogaja z naklonom tangente na krivuljo. Naklon tangente na krivuljo v položaju, ki ustreza parametru t, je enak

$$k(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

V našem primeru je torej

$$k(t)=\frac{\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Vidimo, da v limiti velja

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}=\infty,$$

kar pomeni, da pride krivulja v koordinatno izhodišče v navpični smeri.

Zaenkrat smo obravnavali del krivulje, ki ustreza parametrom na intervalu $[0,\infty)$, in ugotovili, da je ta del krivulje omejen. Sedaj bomo analizirali še obnašanje krivulje pri negativnih parametrih. Ko se parameter približuje vrednosti $t=-1$, gresta tako x kot y v neskončnost. Bolj natančno: ko t pada proti -1, gre $x\to-\infty$ in $y\to\infty$. To pomeni, da točka potuje v neskončnost v smeri levo in navzgor. Podobno lahko ugotovimo, da gre v primeru, ko t narašča proti -1, točka v neskončnost v smeri desno in navzdol. Izkaže se, da se krivulja v obeh primerih približuje neki poševni asimptoti. Koeficient te asimptote je enak

$$k=\lim_{t\to-1}k(t)=\lim_{t\to-1}\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}=1,$$

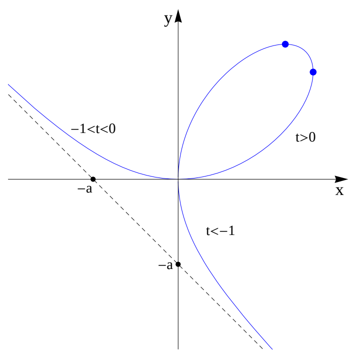
začetna vrednost pa je enaka

$$n=\lim_{t\to-1}(y(t)-kx(t))=\lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)}=-a.$$

Descartov list ima torej asimptoto

$$y=-x-a.$$

Za konec omenimo še, da se pri $t\to-\infty$ točka ponovno približuje koordinatnemu izhodišču, tokrat v navpični smeri.



□

(9) Izračunaj enačbo tangente na krivuljo $5x^2-6xy+5y^2=16$ v točki $(2,2)$.

Rešitev: Včasih imamo zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko podano z implicitno enačbo. Ker je eksplicitno izražavo načeloma težko poiskati, lahko odvod izračunamo posredno z odvajanjem enačbe.

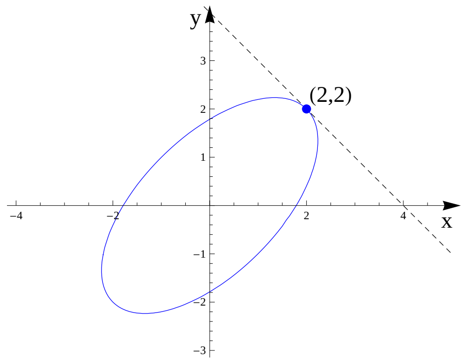
V našem primeru z odvajanjem enačbe $5x^2-6xy+5y^2=16$ po x dobimo:

$$\begin{aligned}10x-6(y+xy')+10yy'&=0,\\ y'(10y-6x)&=6y-10x,\\ y'&=\frac{3y-5x}{5y-3x}.\end{aligned}$$

V točki $(2,2)$ je torej $y' = -1$, enačba tangente pa je

$$y = -x + 4.$$

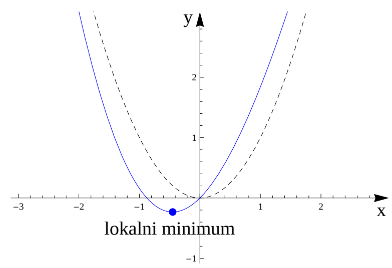
Pri Matematiki 2 bomo spoznali, da enačba $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ določa elipso s polosema $\sqrt{2}$ in $2\sqrt{2}$ v smeri simetral kvadrantov. Točka $(2,2)$ je eno izmed temen elipse.



□

(10) Z uporabo Newtonove metode poišči stacionarno točko funkcije $f(x) = x^2 + \sin x$ na tri decimalke natančno.

Rešitev: Funkcija f je definirana na celi realni osi. Njen graf oscilira okoli grafa kvadratne parabole $y = x^2$.



Lokalni minimum je v točki, ki zadošča enačbi $f'(x) = 2x + \cos x = 0$. Te enačbe ne znamo natančno rešiti, zato bomo približek rešitve poiskali z Newtonovo metodo.

Newtonova metoda:

Če rešujemo enačbo $g(x) = 0$, kjer je g odvedljiva funkcija, lahko približek rešitve poiščemo z naslednjim algoritmom:

· izberemo začetni približek x_0,

· induktivno računamo $x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

V našem primeru je $g(x) = f'(x) = 2x + \cos x$ in $g'(x) = 2 - \sin x$. Vzemimo začetni približek $x_0 = 0$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -0.500, \\
x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = -0.451, \\
x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = -0.450, \\
x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} = -0.450.
\end{aligned}$$

Vidimo, da se začnejo vrednosti ponavljati, zato je $x = -0.450$ približek za stacionarno točko.

Opomba: Newtonova metoda praviloma konvergira hitreje kot bisekcija, a včasih ne deluje. Problem se namreč pojavi, kadar je za neki približek x_k vrednost $f'(x_k)$ blizu 0. V takšnem primeru je naslednji približek x_{k+1} lahko zelo slab.

Če funkcija f ni odvedljiva, ali pa je odvod težko računati, lahko uporabimo sorodno sekantno metodo. Postopek je isti, le da uporabljamo rekurzivni korak

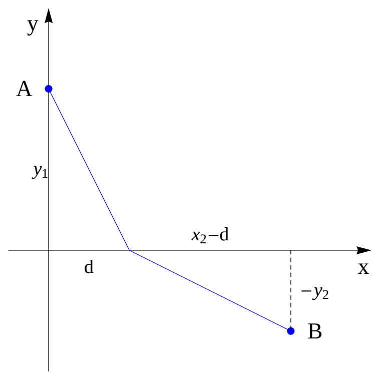
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

ki je odvisen od predhodnih dveh členov. □

(11) Točkasto telo se giblje po ravnini z enakomerno hitrostjo v_1, če je v zgornji polravnini, in s hitrostjo v_2, če je v spodnji polravnini. Po kateri poti bo najhitreje prišlo iz točke $A(0, y_1)$ do $B(x_2, y_2)$, če je $y_1, x_2 > 0$ in $y_2 < 0$?

Rešitev: Pri tej nalogi iščemo najhitrejšo pot od točke A do točke B. Vseh možnih poti je neskončno (rabili bi celo neskončno parametrov, da bi jih lahko opisali). Zato bomo najprej zožili nabor morebitnih kandidatov.

Pri iskanju najhitrejše poti se lahko omejimo na poti, ki so sestavljene iz dveh ravnih poti. Takšne poti lahko parametriziramo s parametrom d, ki pove, kje dana pot seka abscisno os.



Čas, ki ga točka potrebuje, da pride po dani poti od A do B je

$$t(d) = \frac{\sqrt{d^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - d)^2 + y_2^2}}{v_2}.$$

Matematična formulacija našega problema je sedaj sledeča: Poišči minimum funkcije

$$t : [0, x_2] \to \mathbb{R}.$$

Poiščimo najprej stacionarne točke.

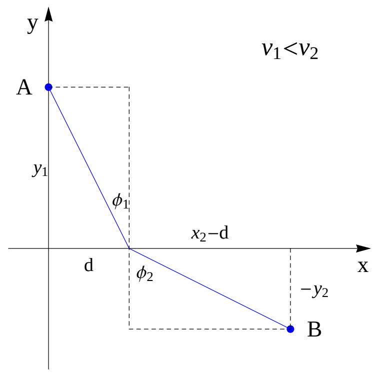
$$t'(d) = \frac{1}{2}\frac{2d}{v_1\sqrt{d^2+y_1^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2(x_2-d)}{v_2\sqrt{(x_2-d)^2+y_2^2}}.$$

Sledi

$$t'(d) = 0 \iff \frac{d}{v_1\sqrt{d^2+y_1^2}} = \frac{x_2-d}{v_2\sqrt{(x_2-d)^2+y_2^2}}.$$

Če uporabimo oznake s spodnje slike, lahko zapišemo tudi

$$t'(d) = 0 \iff \frac{\sin\phi_1}{v_1} = \frac{\sin\phi_2}{v_2}.$$



Stacionarna točka d_0 je torej implicitno določena s kotoma ϕ_1 in ϕ_2. Z analizo predznaka odvoda vidimo, da funkcija t pada levo od d_0 in narašča desno od d_0. Od tod sledi, da je v d_0 globalni minimum funkcije t.

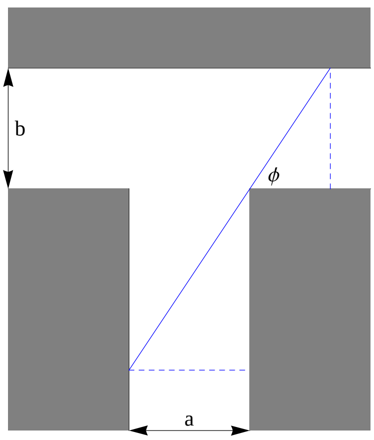
Najhitrejša pot med A in B je torej pot, za katero velja

$$\frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

□

(12) Hodnik širine a se nadaljuje pravokotno v hodnik širine b. Kako dolga sme biti lestev, da jo bomo še lahko prenesli vodoravno okrog kolena?

Rešitev: Poglejmo si tloris hodnika.



Lestev želimo zavrteti iz navpične v vodoravno lego. Da bi jo lahko zavrteli do kota ϕ, bo morala biti lestev krajša kot najdaljša daljica, ki jo še lahko pod kotom ϕ včrtamo v hodnik. Dolžina te najdaljše daljice je enaka

$$d(\phi) = \frac{a}{\cos\phi} + \frac{b}{\sin\phi}.$$

Lestev bomo lahko prenesli okrog kolena, če bo njena dolžina krajša od vseh možnih vrednosti $d(\phi)$ za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Iščemo torej minimum funkcije

$$d : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Poiščimo stacionarne točke.

$$d'(\phi) = \frac{a\sin\phi}{\cos^2\phi} - \frac{b\cos\phi}{\sin^2\phi}.$$

Sledi

$$d'(\phi) = 0 \iff \frac{\sin^3\phi}{\cos^3\phi} = \frac{b}{a} \iff \operatorname{tg}\phi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Funkcija d ima torej eno stacionarno točko $\phi_0 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Z analizo predznaka odvoda ugotovimo, da funkcija d pada na $(0, \phi_0)$ in narašča na $(\phi_0, \frac{\pi}{2})$. Od tod sledi, da doseže d v točki ϕ_0 globalni minimum. Poleg tega velja še $\lim\limits_{\phi\to 0+} d(\phi) = \infty$ in $\lim\limits_{\phi\to\frac{\pi}{2}-} d(\phi) = \infty$.

Izračunajmo sedaj še vrednosti $d(\phi_0)$. Najprej velja

$$\frac{1}{\cos\phi_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\phi_0} = \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
d(\phi_0) &= \frac{a}{\cos\phi_0} + \frac{b}{\sin\phi_0}, \\
&= \frac{1}{\cos\phi_0}\left(a + \frac{b}{\operatorname{tg}\phi_0}\right), \\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}\left(a + b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right), \\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}\,a\left(1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}\right), \\
&= a\big(1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}, \\
&= \big(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Okrog kolena lahko torej prenesemo lestve, ki so krajše od $\big(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}}$. □

8 Nedoločeni integral

(1) Izračunaj integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \quad \left(\text{splošno } \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx;\ a,b>0\right)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad (a>0)$,

(c) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \quad \left(\text{splošno } \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx\right)$:

Vzemimo novo spremenljivko $t=\frac{x}{3}$. Potem je $dt=\frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C}}.$$

V splošnem primeru vzemimo $t=\frac{ax}{b}$, kar nam da $dt=\frac{a\,dx}{b}$. Sledi

$$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2+1}\,dx = \frac{b}{b^2a}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b}+C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad (a>0)$:

Vzemimo novo spremenljivko $t=\frac{x}{a}$. Potem je $dt=\frac{dx}{a}$ in

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin\tfrac{x}{a}+C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t=\sin x$. Potem je $dt=\cos x\,dx$ in

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3\,dt = \tfrac{t^4}{4}+C = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}\sin^4 x+C}}.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2 + 25$. Sledi $dt = 2x\,dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+25}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln\left(x^2+25\right) + C}}.$$

Opomba: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$:

Definirajmo $t = \sqrt{1+e^{2x}}$. Potem je $dt = \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ oziroma $\frac{dt}{t^2-1} = \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. Sledi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx &= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt,\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right) + C}}.\end{aligned}$$

Opomba: Alternativno bi lahko uporabili, da velja

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \begin{cases} \operatorname{arcth} t + C & ;\ |t| > 1, \\ \operatorname{arth} t + C & ;\ |t| < 1, \end{cases}$$

kar nam da

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = -\operatorname{arcth}\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right) + C.$$

Funkciji arcth in arth sta area kotangens in area tangens. □

(2) Izračunaj integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u \ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,

· $dv \ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\int \arctg x \, dx$:

Vzemimo $u = \arctg x$ in $dv = dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x^2+1}$ in $v = x$ ter

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \underline{\underline{x \arctg x - \frac{1}{2} \ln \left(x^2+1\right) + C}}.$$

(b) $\int \arcsin x \, dx$:

Najprej integriramo po delih $u = \arcsin x$, $dv = dx$, nato pa uvedimo $t = 1 - x^2$.

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-1/2} \, dt, \\ &= x \arcsin x + \sqrt{t} + C = \underline{\underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}}. \end{aligned}$$

(c) $\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad (a, b \in \mathbb{R})$:

Pri tem integralu bomo eksponentno funkcijo dvakrat integrirali, trigonometrični funkciji pa dvakrat odvajali.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx, \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} (-\sin bx) \, dx \right), \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx. \end{aligned}$$

Iz te implicitne oblike lahko izrazimo

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} + C}}.$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2+b^2} + C}}.$$

Opomba: Poleg integriranja realnih funkcij poznamo tudi integriranje kompleksnih funkcij. Poglejmo si, kako bi lahko na ta način izračunali zgornja dva integrala. Naj bo $\lambda = a + ib$ kompleksno število. Potem velja

$$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Če označimo

$$I_c = \int e^{ax} \cos bx \, dx \text{ in } I_s = \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

je torej

$$\int e^{\lambda x}\,dx = I_c + iI_s.$$

Po drugi strani pa je:

$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda x}\,dx &= \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C,\\
&= \frac{1}{a+ib}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + C,\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx) + C,\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big((b\sin bx + a\cos bx) + i(a\sin bx - b\cos bx)\big) + C,\\
&= \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + i\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.
\end{aligned}$$

Vidimo, da smo izračunali oba integrala hkrati, ne da bi uporabili metodo integriranja po delih. Cena, ki smo jo plačali, pa je, da operiramo s kompleksnimi namesto z realnimi funkcijami. □

(3) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago algoritem, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.
- Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}.$
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx:$

Razcep na parcialne ulomke se glasi:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},\\
&= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2},\\
&= \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ 2A + B + C &= 1, \\ A &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 0$ in $C = -1$. Sledi

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x+1} + C}}.$$

(b) $\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx$:

Razcepimo najprej integrand na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned} \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4} &= \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{x^2(x^2 + 25)}, \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 25}, \\ &= \frac{A(x^3 + 25x) + B(x^2 + 25) + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2 + 25)}, \\ &= \frac{25B + 25Ax + x^2(B + D) + x^3(A + C)}{x^2(x^2 + 25)}. \end{aligned}$$

Tako pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} A + C &= 1, \\ B + D &= 4, \\ 25A &= 25, \\ 25B &= -25, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 5$. Rezultat je torej

$$\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^2 + 25} \right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{5} + C}}.$$

(c) $\int \frac{2}{(x^2 + 1)^2}\, dx$:

Integracija s pomočjo razcepa racionalne funkcije na parcialne ulomke dobro deluje, če so vsi kvadratni faktorji v njenem števcu kvečjemu na prvo potenco. V primeru višjih potenc pa si pomagamo z nastavkom.

- Zapišemo $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ in faktoriziramo q.
- Uporabimo nastavek:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A \ln|x - a|$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B \ln(x^2 + bx + c) + C \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$,

- $\frac{\tilde r(x)}{\tilde q(x)}$, kjer polinom $\tilde q$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\tilde r$ pa ima stopnjo za eno nižjo kot $\tilde q$.

- Odvajamo obe strani in izračunamo koeficiente.

Vzemimo nastavek

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = A\ln(x^2+1) + B\operatorname{arc\,tg} x + \frac{C+Dx}{x^2+1}.$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(x^2+1)^2} &= \frac{2Ax+B}{x^2+1} + \frac{D(x^2+1)-(C+Dx)2x}{(x^2+1)^2},\\ &= \frac{2A(x^3+x)+B(x^2+1)-2Cx+D(-x^2+1)}{(x^2+1)^2},\\ &= \frac{2Ax^3+x^2(B-D)+x(2A-2C)+B+D}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Dobimo sistem petih enačb za pet neznank:

$$\begin{aligned}2A &= 0,\\ B-D &= 0,\\ 2A-2C &= 0,\\ B+D &= 2,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$. Sledi

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \underline{\underline{\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{x^2+1}}} + C.$$

□

(4) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$.

Rešitev: Pri integralih tipa $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kjer je R racionalna funkcija, si pomagamo z univerzalno trigonometrično substitucijo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Z uporabo trigonometričnih enakosti lahko izrazimo:

$$\begin{aligned}dx &= \frac{2\,dt}{1+t^2},\\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2},\end{aligned}$$

kar nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)},\\ &= \int \frac{2}{t^2+9}\,dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.}}\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$:

Univerzalna trigonometrična substitucija nas sicer vedno pripelje do rezultata, vendar pa v primeru, ko nastopata sin in cos v integrandu v višjih potencah, hitro pridemo do kompliciranih racionalnih funkcij. Zato se nam splača na začetku s pomočjo adicijskih izrekov čimbolj znižati potence v integrandu.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{\cos 2x+1}{2}}\,dx = \int \frac{2}{\cos 2x+3}\,dx.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko $2x = u$ in nato še $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{2}{\cos 2x+3}\,dx = \int \frac{du}{\cos u+3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2},\\ &= \int \frac{dt}{t^2+2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right)+C.}}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$:

Ta integral lahko izračunamo brez uporabe univerzalne trigonometrične substitucije, če poskusimo z novo spremenljivko $t = 2+\sin x$. Potem je $dt = \cos x\,dx$ in

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \underline{\underline{\ln|2+\sin x|+C.}}$$

□

(5) Izračunaj integrale iracionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$

Rešitev: Integrale tipa $\int \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integriramo na naslednji način:

(1) Če je polinom p konstanten, integral prevedemo na enega izmed integralov:

$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a>0,$$
$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a>0,$$
$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \quad a>0.$$

(2) Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \tilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

kjer je C konstanta, polinom $\tilde{p}$ pa ima stopnjo eno manjšo kot p.

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$:

Med računanjem bomo uvedli novo spremenljivko $t = x+\frac{1}{2}$, kar nam da $dx = dt$ in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C,$$
$$= \underline{\underline{\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| + C.}}$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$:

Pri tem primeru bomo uvedli novo spremenljivko $t = x-1$, kar nam spet da $dx = dt$. Sledi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin(x-1)+C.}}$$

(c) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$:

V tem primeru bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = A\sqrt{x^2+4x} + \int \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)+B}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = B = 1$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\, dx &= \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} = \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}, \\ &= \underline{\underline{\sqrt{x^2+4x} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right| + C}}. \end{aligned}$$

Zadnji integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x + 2$. $\square$

9 Določeni integral

(1) Izračunaj določena integrala s pomočjo Newton-Leibnizeve formule:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$.

Rešitev: Določeni integral je s pomočjo Riemannovih vsot praviloma zelo težko izračunati, zato ga običajno računamo s pomočjo Leibnizove formule. Naj bosta f in F zvezni funkciji na $[a, b]$, za kateri velja $F'(x) = f(x)$ za $x \in (a, b)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}.$

<u>Opomba</u>: Na ta integral pogosto naletimo, zato se splača zapomniti naslednjo lastnost. Velja

$$\int_a^b \sin^2 kx\, dx = \int_a^b \cos^2 kx\, dx = \frac{b-a}{2},$$

če je dolžina intervala $[a, b]$ večkratnik periode funkcij $\sin kx$ oziroma $\cos kx$. To pomeni, da je $b - a = n \cdot \frac{2\pi}{k}$ za neko naravno število n.

(b) Za izračun tega integrala najprej opomnimo, da velja

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = \begin{cases} \cos x & ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos x & ;\ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Tako dobimo

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}.$$

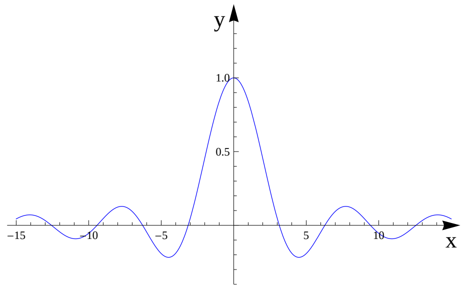
□

(2) S trapezno metodo za $n = 4$ in Simpsonovo metodo za $n = 2$ približno izračunaj integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali dve numerični metodi za približni izračun določenega integrala, ne da bi dejansko poznali nedoločeni integral. To je še posebej uporabno, ko imamo opravka s funkcijami, katerih nedoločeni integrali niso elementarne funkcije.

Kot primer si bomo pogledali funkcijo $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Rečemo ji tudi sinc funkcija, uporablja pa se pri filtriranju signalov.



Pri trapezni metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo trapezov. Pri tem uporabljamo naslednji algoritem:

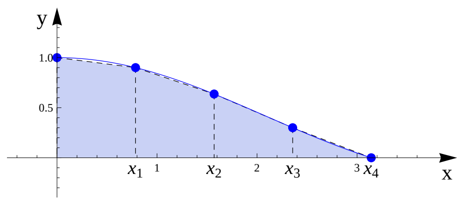
· Razdeli $[a,b]$ s točkami $x_i = a + i \cdot \dfrac{(b-a)}{n}$, za $0 \leq i \leq n$, na n delov in piši $y_i = f(x_i)$.

· $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) + R_n.$

Izraz R_n je napaka aproksimacije, ki jo lahko ocenimo navzgor s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Vsak izmed dobljenih n trapezov ima višino enako $\frac{b-a}{n}$, izraz v oklepaju pa predstavlja dvakratnik vsote njihovih srednjic. V našem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0,\pi]$, aproksimirali s štirimi trapezi.



Vidimo, da se naš približek le malo razlikuje od dejanskega lika.

Najprej napišimo tabelo vrednosti:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y_i	1.000	0.900	0.636	0.300	0.000

Od tod dobimo aproksimacijo

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\pi}{8}\,(1 + 2(0.900 + 0.636 + 0.300) + 0) = \underline{\underline{1.835}}.$$

Pri Simpsonovi metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo n likov, ki so od zgoraj omejeni s kvadratno parabolo, ki interpolira po tri zaporedne točke. V tem primeru vzamemo $2n$ delilnih točk. Določeni integral je potem enak

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}) + R_n,$$

kjer lahko napako aproksimacije ocenimo s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

V tem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0, \pi]$, aproksimirali z dvema likoma, ki sta omejena z grafoma parabol, ki interpolirata točke $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$ oziroma $\{(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))\}$. Sledi

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(1 + 4(0.900 + 0.300) + 2\cdot 0.636 + 0\right) = \underline{\underline{1.851}}.$$

Natančna vrednost tega integrala, zaokroženega na tri decimalke, je enaka

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \underline{\underline{1.852}}.$$

Vidimo, da je aproksimacija s Simpsonovo metodo precej dobra.

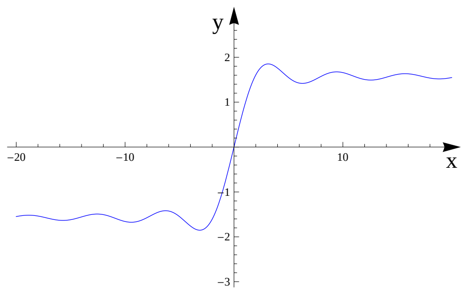
Opomba: Funkcija

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

je nedoločen integral funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Imenujemo jo integralski sinus. Je omejena, s pomočjo metod kompleksne integracije pa lahko pokažemo, da velja

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Poglejmo še njen graf.



□

(3) Izračunaj izlimitirane integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad a > 0,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}.$

Rešitev: Določeni integral je v osnovni verziji definiran za zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu. Njegovim posplošitvam na funkcije, ki imajo pole, ali pa na neomejena območja rečemo izlimitirani integrali.

Če želimo izračunati takšen integral, integracijsko območje najprej razkosamo na intervale, tako da bomo na vsakem intervalu imeli singularnost v največ enem krajišču ali pa da bo interval neomejen le v eno smer.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b)$, ki je neomejena v okolici točke b. V takšnih primerih lahko definiramo izlimitirani integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Geometrično to pomeni, da lahko ploščino lika, ki je sicer neomejen, poljubno dobro aproksimiramo s ploščinami omejenih likov.

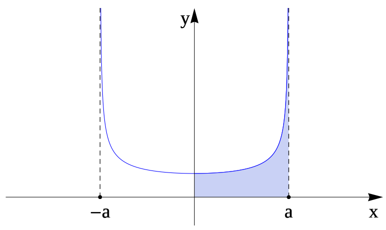
Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, \infty)$, definiramo izlimitirani integral s predpisom

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Analogno definiramo tudi izlimitirane integrale v primeru, ko je integracijski interval odprt na levi strani.

(a) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$:

Funkcija, ki jo integriramo, je neomejena v okolici desnega krajišča.



Najprej se spomnimo, da velja

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{a-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^{a-\epsilon}, \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\arcsin(1 - \tfrac{\epsilon}{a}) - \arcsin 0\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$:

Računajmo:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}(x\ln x - x)\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+}(-1-(\epsilon\ln\epsilon-\epsilon)) = \underline{\underline{-1}}.$$

Integral smo izračunali s pomočjo integracije po delih, pri limiti pa smo upoštevali, da velja $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\epsilon\ln\epsilon = 0$, kar lahko pokažemo s pomočjo L'Hospitalovega pravila.

(c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$:

V tem primeru integriramo zvezno funkcijo po intervalu, ki je neomejen. Pri računanju bomo uvedli novo spremenljivko $t = \ln x$.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{c\to\infty}\int_e^c \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{c\to\infty}\int_1^{\ln c}\frac{dt}{t} = \lim_{c\to\infty}\ln|t|\Big|_1^{\ln c} = \lim_{c\to\infty}\ln(\ln c) = \infty.$$

Vidimo, da ta integral ne konvergira. □

(4) Povprečna hitrost molekul kisika pri temperaturi T je enaka

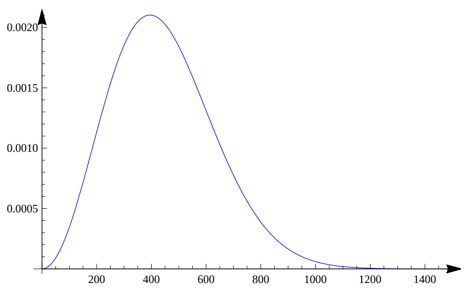
$$\overline{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\,dv,$$

kjer je $k = 1.38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ in $m = 5.31\cdot 10^{-26}\,kg$. Izračunaj povprečno hitrost molekul kisika pri temperaturi $T = 300K$.

Rešitev: Maxwell-Boltzmannova porazdelitev hitrosti molekul kisika je podana z gostoto

$$p(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

za $v > 0$. S k označimo Boltzmannovo konstanto, z m maso molekule kisika, s T pa temperaturo kisika. Pri tej nalogi si bomo pogledali, kako se izračuna povprečna hitrost molekul plina z uporabo izlimitiranega integrala.



Z grafa gostote lahko preberemo, da ima večina molekul kisika hitrost nekje med 100 in 1000 metri na sekundo. Nekatere molekule imajo tudi višjo hitrost, a jih je relativno malo.

Hitrost molekul lahko zavzame le nenegativne vrednosti, zato bomo integrirali po intervalu $[0,\infty)$, povprečno hitrost pa bomo označili z $\overline{v}$. Le ta je enaka

$$\overline{v} = \int_0^\infty v p(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\,dv.$$

Pišimo $a = \frac{m}{2kT}$. Potem v bistvu računamo nedoločeni integral $\int v^3 e^{-av^2}\,dv$. Če uvedemo novo spremenljivko $t = -av^2$, je $dt = -2av\,dv$ in

$$\int v^3 e^{-av^2}\,dv = \frac{1}{2a^2}\int te^t\,dt = \frac{1}{2a^2}\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = \frac{1}{2a^2}\left(te^t - e^t\right) + C.$$

Zadnji integral smo izračunali z integracijo po delih z izbiro $u = t$ in $e^t\,dt = dv$. Če upoštevamo zvezo med v in t, od tod dobimo

$$\int v^3 e^{-av^2}\,dv = \frac{1}{2a^2}\left(-av^2e^{-av^2} - e^{-av^2}\right) + C = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{av^2+1}{e^{av^2}} + C.$$

Sedaj dobimo

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\,dv = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{av^2+1}{e^{av^2}}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{2a^2}(0-1) = \frac{1}{2a^2}.$$

Pri $x \to \infty$ smo upoštevali dejstvo, da je $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{av^2+1}{e^{av^2}} = 0$, ki sledi z uporabo L'Hospitalovega pravila. Povprečna hitrost molekul kisika je tako enaka

$$\overline{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi\cdot\frac{1}{2a^2} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2\pi\cdot\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}.$$

Če upoštevamo podatke $k = 1.38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$, $m = 5.31\cdot 10^{-26}\,kg$ in $T = 300K$, dobimo povprečno hitrost

$$\overline{v} = 445\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

□

(5) Ugotovi, ali izlimitirani integrali konvergirajo:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Rešitev: Izlimitiranih integralov praviloma ne znamo vedno izračunati. Včasih pa je koristna že zgolj informacija, ali dani integral sploh konvergira. Le-to lahko dobimo s pomočjo naslednjih kriterijev:

(1) Naj bo g zvezna funkcija na $[a, b]$.

· $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(b-x)^s}\,dx$ konvergira, če je $s < 1$.

· $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(b-x)^s}\,dx$ divergira, če je $s \geq 1$ in $g(b) \neq 0$.

(2) Naj bo g zvezna in omejena funkcija na $[b, \infty)$.

- $\int\limits_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\, dx$ konvergira, če je $s > 1$.
- $\int\limits_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\, dx$ divergira, če je $s \leq 1$ in $|g(x)| > m > 0$ za vse x od nekje dalje.

Pri določanju konvergence izlimitiranih integralov tako ponavadi najprej uganemo, katera izmed zgornjih možnosti nastopi, nato pa poskušamo integrand zapisati v ustrezni obliki.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$:

Pri tem integralu imamo singularnost pri $x = 1$. Najprej zapišimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Če definiramo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$, je g zvezna funkcija na intervalu $[0, 1]$. Ker je še $s = 1/2 < 1$, ta integral konvergira.

(b) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\, dx$:

Integrand je zvezna funkcija na neomejenem integracijskem intervalu $[1, \infty)$. Zato moramo ugotoviti ali dani integral konvergira v neskončnosti. Zapišimo

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1} = \frac{\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}}{x^2}$$

in definirajmo $g(x) = \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}$. Tako definirana funkcija g je zvezna na intervalu $[1, \infty)$, njena limita pri $x \to \infty$ pa je

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1} = 1.$$

Iz obstoja limite v neskončnosti in pa zveznosti sklepamo, da je funkcija g omejena na intervalu $[1, \infty)$. Poleg tega je $s = 2$, zato dani integral konvergira.

(c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$:

Sedaj nas zanima konvergenca integrala Gaussove funkcije. Ker je Gaussova funkcija soda funkcija, je dovolj obravnavati samo konvergenco integrala

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Obravnavali bomo torej obnašanje integranda v neskončnosti. Pišimo

$$e^{-x^2} = \frac{\frac{x^2}{e^{x^2}}}{x^2}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ je zvezna na intervalu $[0, \infty)$. Da bi pokazali, da je omejena, bomo pokazali, da je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Pomagali si bomo z L'Hospitalovim pravilom in z uvedbo nove spremenljivke $t = x^2$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

Ker je $s = 2 > 1$, integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ konvergira. $\square$

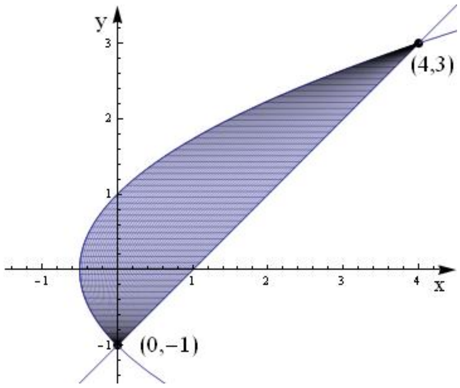
10 Uporaba integrala

(1) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x + 1$ in $y = x - 1$.

Dokaz. Nalogo bomo rešili na dva načina.

1. način:

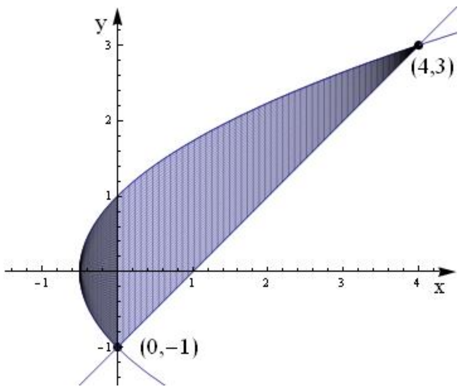
Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $y \in [-1, 3]$. Leva in desna robna krivulja našega lika imata v tem primeru enačbi $x(y) = \frac{y^2-1}{2}$ oziroma $x(y) = y + 1$.



Sledi:

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \left(\frac{y^2-1}{2} \right) \right) dy, \\
&= \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy, \\
&= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-1}^{3}, \\
&= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}.
\end{aligned}$$

2. način: Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki x. Spodnji rob lika je v našem primeru sestavljen iz krivulje $y = -\sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 0]$ in pa iz krivulje $y = x - 1$ na intervalu $[0, 4]$. Zgornji del roba sestoji iz krivulje $y = \sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 4]$. Ploščino lika bomo izračunali, tako da bomo lik razdelili na dva kosa (en del bo levo od ordinatne osi, drugi del pa desno od ordinatne osi). S tem dosežemo, da imata oba lika zgornji in spodnji rob definiran s po enim samim predpisom.



Računajmo:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x+1} - \left(-\sqrt{2x+1}\right)\right)\, dx + \int_{0}^{4} \left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right)\, dx, \\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\, dx + \int_{0}^{4} \left(\sqrt{2x+1} - x + 1\right)\, dx, \\
&= \frac{2}{3}\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{1}{3}\,(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{0}^{4}, \\
&= \frac{2}{3} + \left((9-8+4) - \frac{1}{3}\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}.
\end{aligned}
$$

<u>Opomba</u>: Pri tej nalogi smo videli, da integracija po x ni vedno najboljša in najlažja pot. Če smo integrirali po y, smo lahko ploščino izračunali v enem kosu, pa še integrand je bil bolj enostaven. $\square$

(2) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje astroida. Astroida je podana v parametrični obliki:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 t, \\
y(t) &= a\sin^3 t
\end{aligned}
$$

za $t \in [0, 2\pi]$ in nek $a > 0$.

Rešitev: Astroida je krivulja, ki po obliki spominja na zvezdo.

Podamo jo lahko v parametrični obliki z vektorsko funkcijo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, kjer je:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 t, \\
y(t) &= a\sin^3 t,
\end{aligned}
$$

za parametre $t \in [0, 2\pi]$. Lahko pa jo podamo tudi v implicitni obliki z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Če imamo krivuljo v parametrični obliki podano s predpisom $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, potem družina zveznic med krivuljo in pa koordinatnim izhodiščem opiše lik, katerega ploščina je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt.$$

Pri tem je treba biti pozoren na predznak. Če se po krivulji premikamo v 'pozitivni' smeri glede na izhodišče, dobimo običajno ploščino, pri premikanju v 'negativni' smeri pa negativno predznačeno ploščino. Če se del poti premikamo v pozitivni smeri del poti pa v negativni smeri, je treba obravnavati vsak kos posebej. Če je krivulja sklenjena (to je $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$), pa lahko uporabimo katerokoli izmed formul

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\, dt.$$

Za izračun ploščine astroide moramo najprej izračunati odvoda koordinat x in y:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3a\cos^2 t \sin t,\\ \dot{y} &= 3a\sin^2 t\cos t.\end{aligned}$$

Od tod dobimo $x\dot{y} - \dot{x}y = 3a^2\cos^2 t\sin^2 t$ in

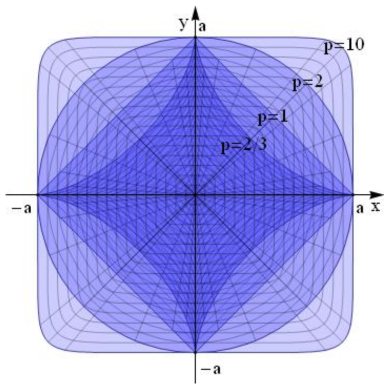
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t\sin^2 t\, dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \underline{\underline{\frac{3\pi a^2}{8}}}.$$

Opomba: Astroida spada v družino krivulj oblike $|x|^p + |y|^p = a^p$ za $p \in (0, \infty)$. Pri $p = 2$ dobimo krožnico s polmerom a, pri $p = \frac{2}{3}$ pa astroido. Te krivulje imajo naravno parametrizacijo

$$\begin{aligned}x(t) &= \pm a|\cos t|^{\frac{2}{p}},\\ y(t) &= \pm a|\sin t|^{\frac{2}{p}},\end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Predznaki so določeni s predznaki funkcij cos oziroma sin.

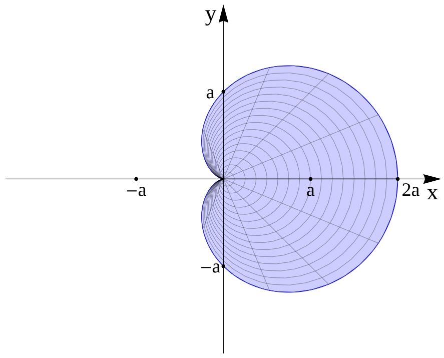
Pri velikih p dobimo like, ki čedalje bolj aproksimirajo kvadrat, pri majhnih p pa like s ploščino, ki se približuje 0.



□

(3) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje kardioida, ki je podana v polarnih koordinatah z enačbo $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, kjer je $a > 0$.

Rešitev: Računamo ploščino lika, ki spominja na srce.



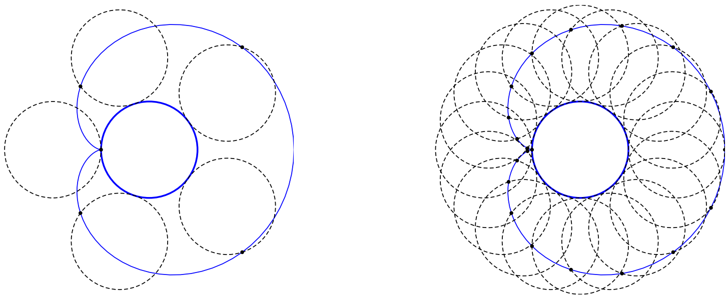
Ploščino lika, ki je omejen s krivuljo podano v polarnih koordinatah, izračunamo po formuli

$$S = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2\,d\phi.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\phi)^2\,d\phi,\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\phi+\cos^2\phi)\,d\phi,\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos\phi+\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)\,d\phi,\\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\phi+2\sin\phi+\frac{\sin 2\phi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi},\\
&= \underline{\underline{\frac{3a^2\pi}{2}}}.
\end{aligned}$$

<u>Opomba</u>: Kardioido lahko opišemo kot krivuljo, ki jo opiše točka na obodu krožnice, ki se kotali po zunanji strani neke druge krožnice z enakim polmerom.



□

(4) Izračunaj obseg astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za $a > 0$.

Rešitev: Spomnimo se, da lahko astroido parametriziramo s predpisom:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 t,\\
y(t) &= a\sin^3 t
\end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Sledi:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t,$$
$$\dot{y} = 3a\sin^2 t \cos t.$$

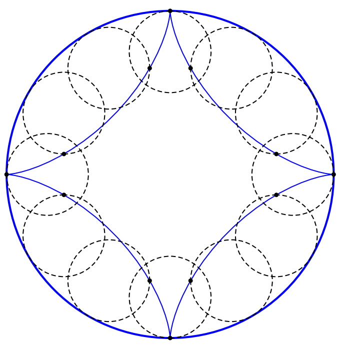
Dolžino parametrično podane krivulje izračunamo po formuli

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

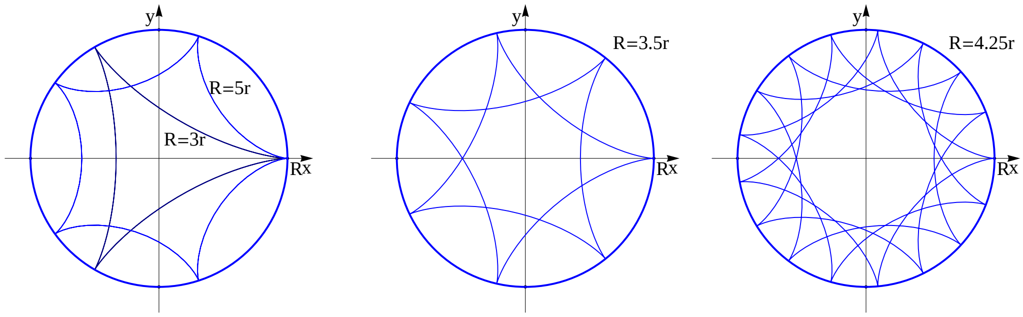
Tako dobimo:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt, \\ &= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\, dt, \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt, \\ &= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt, \\ &= -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \\ &= \underline{\underline{6a}}. \end{aligned}$$

Opomba: Astroida spada tudi v družino hipocikloid. To so krivulje, ki jih dobimo s kotaljenjem krožnice s polmerom r po notranjem obodu večje krožnice s polmerom R. Če velja $R = 4r$, dobimo ravno astroido.



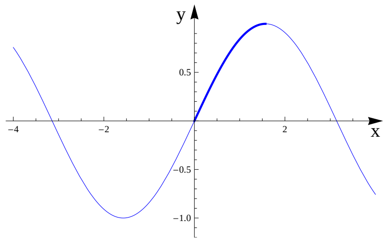
Če je razmerje $R = nr$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dobimo krivuljo z n ostmi, če pa je $R = \frac{p}{q}r$, pa dobimo krivuljo s p ostmi, ki q-krat 'obkroži' izhodišče preden se spet sklene.



$\square$

(5) S pomočjo trapezne metode izračunaj dolžino sinusoide $f(x) = \sin x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tako da bo napaka manjša od 0.01.

Rešitev: Računamo dolžino loka sinusoide na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Ker je $f'(x) = \cos x$, nas torej zanima določeni integral

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Pri računanju dolžin krivulj praviloma naletimo na integrale iracionalnih funkcij, ki jih je težko integrirati, zato nam prav pridejo metode numerične integracije. Označimo

$$g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

Spomnimo se, da je napaka aproksimacije pri trapezni metodi enaka

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |g''(x)| = \frac{\pi^3}{96n^2} \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |g''(x)|.$$

Število n bomo izbrali tako, da bo iz zgornje ocene sledilo $|R_n| < 0.01$. V ta namen moramo najprej oceniti velikost $|g''(x)|$. Odvoda funkcije g sta:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}, \\ g''(x) &= -\frac{2\cos 2x\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1+\cos^2 x)}. \end{aligned}$$

Maksimum funkcije g'' sicer lahko poiščemo natančno, a je s tem lahko kar nekaj dela, zato je dovolj, če ga navzgor ocenimo. Velja

$$|g''(x)| \leq \frac{2|\cos 2x|\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1+\cos^2 x)} \leq \frac{2\cdot 1\cdot\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2\cdot 1} = \sqrt{2} + \frac{1}{4} < \frac{7}{4}.$$

Od tod sledi, da je

$$|R_n| \leq \frac{\pi^3}{96n^2} \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |g''(x)| \leq \frac{7\pi^3}{4\cdot 96n^2}.$$

Ker želimo, da bo $|R_n| < 0.01$, je dovolj najti n, ki zadošča

$$\frac{7\pi^3}{0.01\cdot 4\cdot 96} \leq n^2.$$

Dobri so $n \geq 8$. Torej bomo integrirali funkcijo $g(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ s trapezno metodo pri $n = 8$. Poglejmo si tabelo vrednosti v delilnih točkah:

x_k	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$
y_k	1.414	1.401	1.361	1.301	1.225	1.144	1.071	1.019	1

Sledi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \approx \frac{\pi}{32}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8\right) = 1.9101.$$

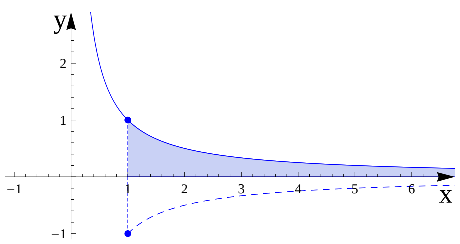
Dejanska dolžina tega loka sinusoide je približno 1.910098895. Vidimo, da je napaka precej manjša od naše ocene. □

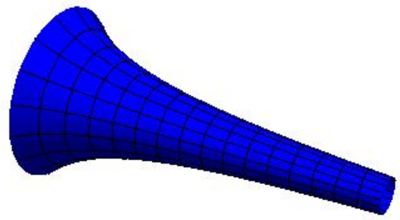
(6) Graf funkcije f, kjer je $f(x) = \frac{1}{x}$, zavrtimo na intervalu $[1, \infty)$ okoli osi x.

(a) Izračunaj volumen dobljenega telesa.

(b) Pokaži, da je površina dobljenega telesa neskončna.

Rešitev: Telo, ki ga študiramo pri tej nalogi, včasih imenujemo tudi Torricellijeva trobenta. To je bil eden prvih znanih primerov teles, ki imajo končen volumen in neskončno površino.





(a) Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[x_1, x_2]$, je enak

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2\, dx.$$

Volumen Torricellijeve trobente je tako enak

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = -\pi \frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = \underline{\underline{\pi}}.$$

(b) Površina rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[x_1, x_2]$, pa je enaka

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ker je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, moramo torej pokazati, da integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

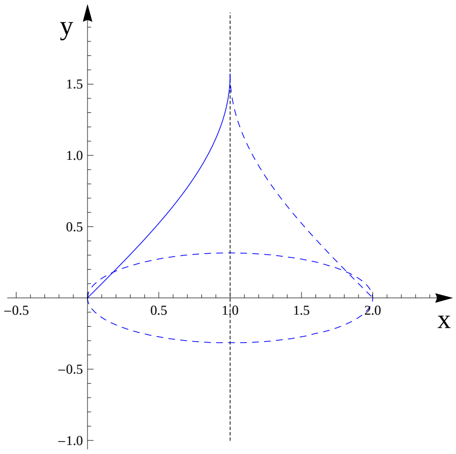
divergira. To bi lahko pokazali s pomočjo kriterija, ki smo ga spoznali pri obravnavi izlimitiranih integralov. Lahko pa naredimo preprosto oceno

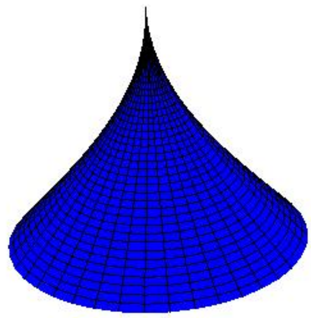
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$$

Ker integral na desni divergira, divergira tudi integral na levi. □

(7) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = \arcsin x$, $x \in [0, 1]$, zavrtimo okoli osi $x = 1$.

Rešitev: Pri vrtenju krivulje $y = \arcsin x$ okoli osi $x = 1$ dobimo telo naslednje oblike.





Ker tokrat krivuljo vrtimo okoli navpične osi, bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Razdalja točke na krivulji $y = \arcsin x$, ki je na višini y, od osi $x = 1$ je enaka $d(y) = 1 - \sin y$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(y)^2 \, dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin y + \sin^2 y) \, dy, \\ &= \pi \left((y + 2\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \right), \\ &= \underline{\underline{\pi \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)}}. \end{aligned}$$

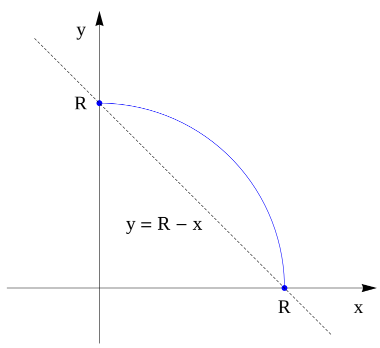
□

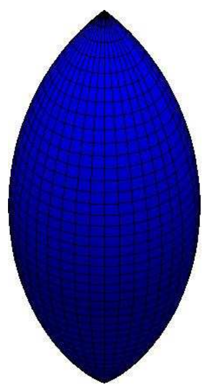
(8) Dan je krožni lok

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\},$$

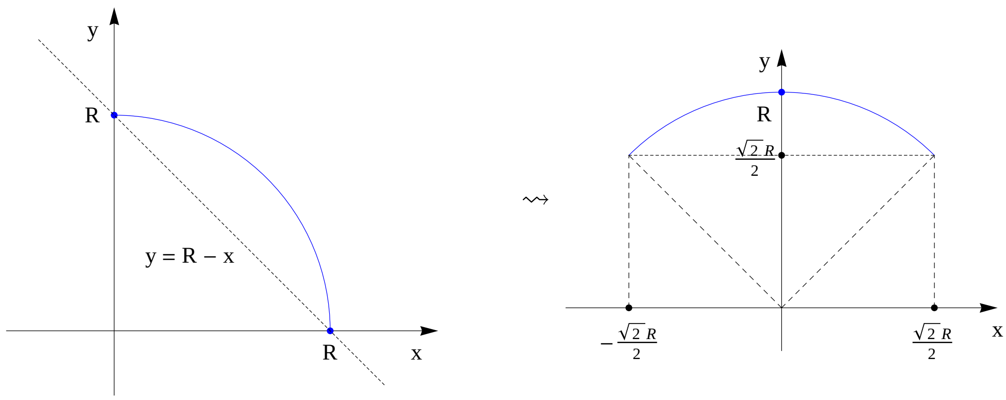
kjer je R pozitivno realno število. Kolikšna je površine vrtenine, ki jo dobimo, če dani lok zavrtimo okoli premice $y = R - x$?

Rešitev: Našo vrtenino dobimo tako, da krožni lok zavrtimo okrog tetive.





Da bomo lahko direktno uporabili formulo za računanje volumna vrtenin, bomo najprej krožni lok in tetivo zavrteli za $45°$.



Isto telo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R$ zavrtimo okoli abscisne osi na intervalu $[-\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R]$. Ker je $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, je površina vrtenine torej enaka

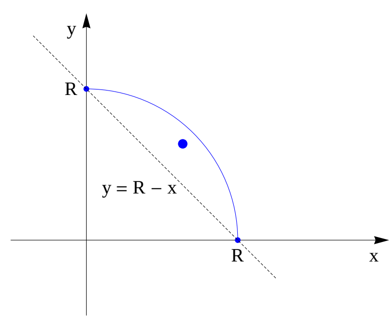
$$P = 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx, \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} \left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx, \\
&= 2\pi \left(Rx - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}, \\
&= 2\pi \left(\sqrt{2}R^2 - \sqrt{2}R^2\frac{\pi}{4}\right), \\
&= \underline{\underline{2\sqrt{2}\pi R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}.
\end{aligned}$$

Opomba: Površino plašča vrtenine lahko izračunamo tudi s pomočjo Guldinovega pravila.

Guldinovo pravilo: Površina plašča vrtenine, ki ga dobimo pri vrtenju loka okoli neke osi, je enaka produktu dolžine loka in pa dolžine poti, ki jo pri enem vrtljaju opiše geometrijsko središče loka.



Koordinati geometrijskega središča loka $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ sta:

$$x_* = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}{l},$$
$$y_* = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}{l},$$

kjer je l dolžina loka.

V našem primeru sta zaradi simetrije obe koordinati središča enaki, zato potrebujemo samo x-koordinato središča krožnega loka $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ na $x \in [0, R]$. Dobimo jo po formuli

$$x_* = \frac{\int_0^R x\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx}{l}.$$

Dolžina krožnega loka je $l = \frac{\pi R}{2}$, integral v števcu pa je enak:

$$\begin{aligned}
\int_0^R x\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx &= \int_0^R x\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx, \\
&= R\int_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx; \qquad R^2 - x^2 = t, \\
&= -\frac{R}{2}\int_{R^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}, \\
&= -R \cdot t^{1/2}\Big|_{R^2}^0, \\
&= R^2.
\end{aligned}$$

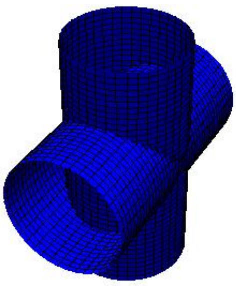
Od tod sledi, da za središče krožnega loka velja $x_* = \frac{2R}{\pi}$, iz Guldinovega pravila pa sledi

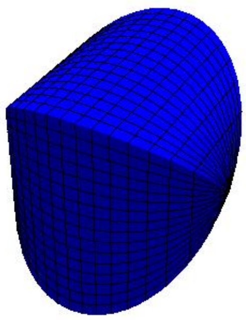
$$P = 2\pi\left(\sqrt{2}\frac{2R}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)\frac{\pi R}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\pi R^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

$\square$

(9) Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo kot presek dveh središčno in pravokotno sekajočih se valjev enakih polmerov.

Rešitev: Poglejmo si primer, ko imata oba valja polmer R in ko ima eden izmed njiju os v smeri osi y, drugi pa v smeri osi z.





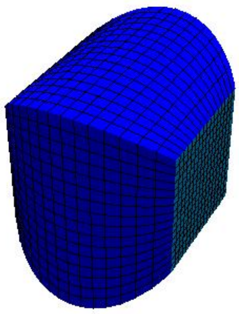
V tem primeru naše telo ni dobljeno z vrtenjem nekega lika, zato moramo za izračun volumna ubrati drugačno pot. Telo lahko predstavimo kot množico točk

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq R^2,\, x^2+z^2 \leq R^2\}.$$

Če presekamo telo z ravnino $x = x_0$, dobimo kot presek kvadrat

$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \leq R^2 - x_0^2,\, z^2 \leq R^2 - x_0^2\},$$

katerega ploščina je enaka $S(x_0) = 4(R^2 - x_0^2)$.



Volumen bomo sedaj izračunali tako, da bomo telo najprej razdelili na kvadre, ki jih dobimo z odebelitvijo takšnih presekov, in nato sešteli vsote njihovih volumnov s pomočjo Riemannovega integrala. Velja

$$dV = 4(R^2 - x^2)dx$$

in

$$V = \int_{-R}^{R} dV = 4\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = 4\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \underline{\underline{\frac{16}{3}R^3}}.$$

□

11 Taylorjeva vrsta

(1) Izračunaj Taylorjeve polinome:

(a) reda 2 funkcije $f(x) = x \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,

(b) reda 3 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ okoli točke $a = 0$,

(c) reda 2 funkcije $E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ okoli točke $a = 0$.

Rešitev: Pogosto znamo natančno izračunati vrednosti funkcije f in njenih odvodov v neki točki $x = a$, v točkah blizu a pa ne. Za približen izračun vrednosti funkcije v okolici točke a si pomagamo s Taylorjevimi polinomi. Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko v okolici točke $x = a$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom reda n

$$T_n\, f(x; a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Red Taylorjevega polinoma izberemo tako, da dobimo željeno natančnost aproksimacije. Pri višanju reda dobimo čedalje boljše aproksimacije $f(x) \approx T_n\, f(x; a)$ za x blizu a. V posebnem primeru, ko je f polinom stopnje n, Taylorjev polinom $T_n\, f$ sovpada z f.

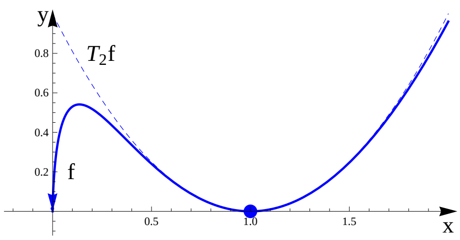
(a) Za funkcijo $f(x) = x \ln^2 x$ velja:

$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x,$$
$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}.$$

Od tod dobimo $f(1) = f'(1) = 0$ in $f''(1) = 2$, kar nam da

$$T_2\, f(x; 1) = (x-1)^2.$$

Kot vidimo na sliki, Taylorjev polinom $T_2\, f$ precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici stacionarne točke $x = 1$.



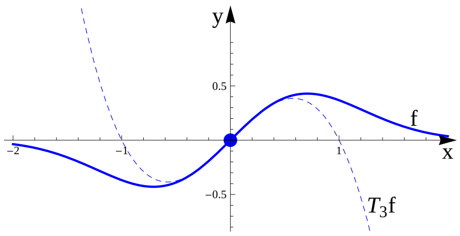
(b) Izračunajmo sedaj Taylorjev polinom reda 3 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ v okolici točke $a = 0$. Odvodi funkcije f so:

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$$
$$f''(x) = (-6x + 4x^3)e^{-x^2},$$
$$f'''(x) = (-6 + 24x^2 - 8x^4)e^{-x^2}.$$

Torej je $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ in $f'''(0) = -6$, kar nam da

$$T_3\, f(x; 0) = x - x^3.$$

Poglejmo še skico. Vidimo, da je aproksimacija dobra za $|x| < \frac{1}{2}$, nato pa čedalje slabša.



(c) Izraz $E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ predstavlja polno energijo relativističnega delca z maso m in s hitrostjo v. Odvoda funkcije E sta:

$$E'(v) = mc^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = mv\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$E''(v) = m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + mv\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right).$$

Sledi $E(0) = mc^2$, $E'(0) = 0$ in $E''(0) = m$, od koder dobimo aproksimacijo

$$E(v) \approx mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Pri majhnih hitrostih je torej polna energija delca približno enaka vsoti mirovne energije mc^2 in pa nerelativistične kinetične energije $\frac{1}{2}mv^2$.

Opomba: Taylorjev polinom $T_n f$, ki ga dobimo pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$, ima lastnost, da je

$$(T_n f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{za vse } 0 \leq k \leq n.$$

V posebnem primeru je $T_1 f$ linearna funkcija, katere graf je tangenta na graf funkcije f v točki $x = a$. Polinomi $T_n f$ so torej posplošitev pojma tangente. Opomniti velja, da Taylorjev polinoma reda n nima nujno stopnje n, ampak največ n. $\square$

(2) Z uporabo Taylorjevega izreka oceni napaki naslednjih aproksimacij:

(a) $\operatorname{arc\,tg} x \approx x$ za $|x| < \frac{1}{2}$,

(b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ za $|x| < \frac{1}{2}$.

Rešitev: Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko zapišemo kot vsoto

$$f(x) = T_n f(x; a) + R_n(x).$$

Pri tem smo z R_n označili ostanek oziroma napako pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$ s Taylorjevim polinomom reda n. Taylorjev izrek nam pove, da lahko ostanek $R_n(x)$ zapišemo v obliki

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

za nek t na intervalu med a in x. Na intervalu $|x - a| < \delta$ lahko torej velikost napake pri aproksimaciji $f(x) \approx T_n f(x; a)$ ocenimo z izrazom

$$|R_n| \leq \max_{|t-a|<\delta} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) Definirajmo $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Potem je $T_1 f(x;0) = x$, zato nas zanima ocena velikosti napake aproksimacije

$$\operatorname{arc\,tg} x \approx T_1 f(x;0).$$

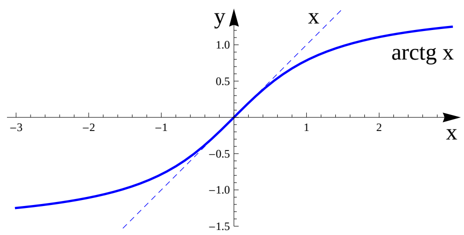
Velja:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Po Taylorjevem izreku imamo oceno

$$|R_1| \leq \max_{|t|<\frac{1}{2}} \left| -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \right| \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} < \tfrac{1}{8}.$$

Dejanska napaka je še precej manjša kot naša ocena. Izkaže se, da je ta napaka manjša od 0.05. Boljšo oceno bi dobili, če bi upoštevali, da je v bistvu tudi Taylorjev polinom reda 2 enak $T_2 f(x;0) = x$.



Rezultat te naloge lahko uporabimo na naslednji način. Funkcija arc tg nam pretvarja naklon klanca v radiane. To pomeni, da na primer 1-odstotni klanec ustreza kotu 0.01 radiana, kar je približno 0.57°. Podobno ima 10-odstotni klanec kot, ki je približno 5.7°. Po tej aproksimaciji bi 50-odstotni klanec ustrezal kotu 28.5°, dejansko pa ustreza kotu 26.5°. Vidimo, da napaka še ni prevelika.

(b) Vzemimo sedaj $f(x) = \cos x$. Potem je

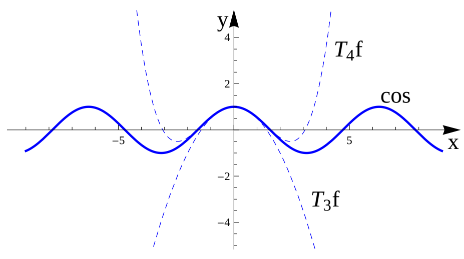
$$T_3 f(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Velja še $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ in $f^{(4)}(x) = \cos x$, zato lahko na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ napako aproksimacije ocenimo z izrazom

$$|R_3| < \max_{|t|<\frac{1}{2}} |\cos t| \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \leq 0.0026.$$

Pri tem smo uporabili oceno $|\cos t| \leq 1$.

Poglejmo še skico, kjer je poleg $T_3 f$ še polinom $T_4 f$. Vidimo, da funkcij cos, $T_3 f$ in $T_4 f$ praktično ne moremo razločiti na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sta pa ti aproksimaciji pri večjih vrednostih čedalje slabši, saj sta polinoma neomejena, kosinus pa omejen.



$\square$

(3) Izračunaj limite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{a\sin x - \sin(ax)}{x^2 \sin x}$, $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Limite kvocienta načeloma računamo z uporabo L'Hospitalovega pravila, vendar pa včasih pridemo do rezultata hitreje z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto. Še posebej to pride do izraza, ko imamo opravka s kompliciranimi funkcijami, katerih odvodi imajo čedalje več členov.

Pri metodi razvoja v Taylorjevo vrsto vsak člen nadomestimo s prvimi dvemi ali tremi členi v razvoju in pogledamo, kaj vse se pokrajša. Če se slučajno pokrajša vse, moramo pogledati še nadaljnje člene.

(a) Pri tej limiti bomo uporabili Taylorjevi aproksimaciji $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots$ in $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots)-1}{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots)}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x^2}{2}+\ldots}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\ldots}, \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(b) Sedaj bomo nekajkrat uporabili sinusno vrsto $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ Od tod sledi:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{a\sin x - \sin(ax)}{x^2\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{a(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots)-(ax-\frac{a^3x^3}{3!}+\frac{a^5x^5}{5!}+\ldots)}{x^2(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots)}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!}(a^3-a)+\frac{x^5}{5!}(a-a^5)+\ldots}{x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}+\ldots}, \\
&= \frac{a^3-a}{6}.
\end{aligned}$$

$\square$

(4) Izračunaj konvergenčni polmer in območje konvergence naslednjih potenčnih vrst:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n n}$.

Rešitev: Funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

se imenuje *potenčna vrsta* s središčem v a. Za vsako potenčno vrsto obstaja število $R \geq 0$, ki mu rečemo *konvergenčni polmer* vrste, da velja:

(a) Vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$, divergira za $|x-a| > R$, v točkah $|x-a| = R$ pa lahko ali konvergira ali pa divergira.

(b) Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[a-r, a+r]$ za vsak $r \in R$.

(c) Vsota vrste je analitična funkcija na $(a-R, a+R)$. Če vrsta konvergira v kakšnem izmed krajišč, je tudi tam zvezna po Abelovem izreku.

Konvergenčni polmer potenčne vrste lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \\ \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \\ \frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \end{aligned}$$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$:

V tem primeru imamo potenčno vrsto s središčem v točki $a = 0$ in s koeficienti $a_n = n+1$. Sledi

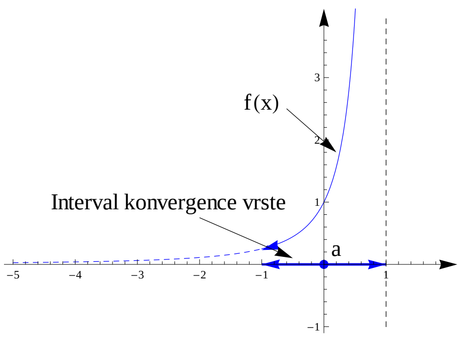
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (-1, 1)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = -1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = -1$,

$\cdot\ x = 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 1$.

Opomba: Od tod sklepamo, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $(-1, 1)$. Da se pokazati, da vrsta na intervalu $(-1, 1)$ konvergira k funkciji $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. V tem smislu je funkcija $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ razširitev vsote potenčne vrste na interval $(-1, 1)$, dana potenčna vrsta pa predstavlja razvoj te funkcije v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.



(b)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$:

Sedaj imamo potenčno vrsto s središčem v koordinatnem izhodišču in s koeficienti $a_n = \frac{1}{n^n}$. Sledi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

V tem primeru je konvergenčni polmer vrste enak $R = \infty$, kar pomeni, da vrsta konvergira za vsa realna števila. Funkcijam, ki so enake vsoti kakšne potenčne vrste na celi realni osi, rečemo *cele* funkcije. Najbolj znani primeri takšnih funkcij so polinomi, eksponentne funkcije in pa sinus ter kosinus.

(c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n}$:

V tem primeru imamo opravka s potenčno vrsto, ki ima neskončno ničelnih koeficientov. Velja namreč $a_{2n} = \frac{1}{4^n n}$ in $a_{2n+1} = 0$. V takšnih primerih moramo ponavadi za izračun konvergenčnega polmera uporabiti bolj splošno formulo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4^n n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da vrsta konvergira na intervalu $I = (-2, 2)$. V robnih točkah pa velja:

$$x = \pm 2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 2)^{2n}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = \pm 2.$$

□

(5) Določi območje konvergence danih potenčnih vrst, nato pa še izračunaj njuni vsoti:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$.

Rešitev: Pri izračunu vsote potenčne vrste lahko uporabimo izrek, ki pravi, da lahko potenčne vrste členoma odvajamo in integriramo:

Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ in

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

njena vsota na $(a-R, a+R)$. Potem za $x \in (a-R, a+R)$ velja:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

(a) Potenčna vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ ima središče v $a = 1$ in koeficiente $a_n = \frac{1}{n}$. Konvergenčni polmer vrste je enak

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (0, 2)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = 0 \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty \Rightarrow$ vrsta konvergira pri $x = 0$,

$\cdot\ x = 2 \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 2$.

Od tod sledi, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $[0, 2)$, ki je analitična v njegovi notranjosti.

Definirajmo sedaj funkcijo $f : [0, 2) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Z odvajanjem zgornje vrste dobimo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

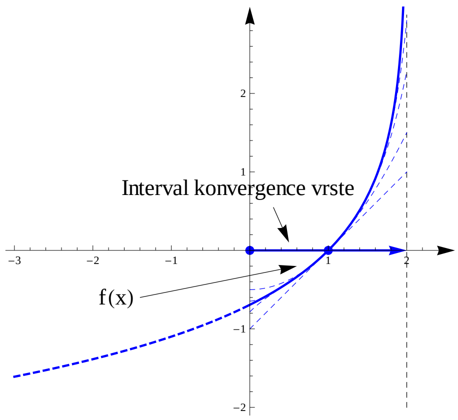
Pri tem smo uporabili formulo za vsoto geometrijske vrste. Z integriranjem sedaj dobimo

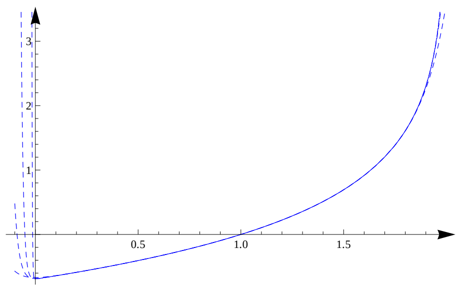
$$f(x) = -\ln(2-x) + C.$$

Vrednost konstante C lahko dobimo z izračunom funkcije f v kakšni točki. Najlažje je vzeti kar središče potenčne vrste. Pri $x = 1$ tako dobimo $f(1) = 0 = C$, od koder sledi

$$f(x) = -\ln(2-x).$$

Na levi sliki so narisani grafi vsote vrste, njene razširitve in pa aproksimacij vsote vrste s končnimi vsotami za $k \in \{1, 2, 5, 10\}$.





Zanimivo je pogledati, kaj se zgodi s končnimi aproksimacijami, če pogledamo vrednosti, ki so malce manjše od nič. Na desni sliki so prikazane aproksimacije za $k \in \{20, 50, 100, 500\}$.

Opazimo lahko, da na intervalu $[0, 2)$ aproksimacije konvergirajo k funkciji f. Kakor hitro pa je $x < 0$, pa se aproksimacije precej oddaljijo od funkcije.

(b) Konvergenčni polmer vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ je enak

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n+2}{(n+3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)!}{(n+2)(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} = \infty,$$

kar pomeni, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če definiramo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kot vsoto potenčne vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

je torej f cela funkcija. Če našo vrsto členoma integriramo, dobimo

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}(e^x - x - 1).$$

Z uporabo osnovnega izreka analize sedaj sledi

$$f(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \frac{(e^x-1)x - (e^x - x - 1)}{x^2} = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2}.$$

□

(6) Določi območje konvergence in izračunaj vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

nato pa še vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Rešitev: Naj bo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Iz formule

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1$$

sklepamo, da je konvergenčni polmer vrste enak $R = 1$. Vrsta konvergira tudi pri $x = \pm 1$, od koder sledi, da je $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Ker lahko potenčne vrste členoma odvajamo, je

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Z integriranjem dobimo

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

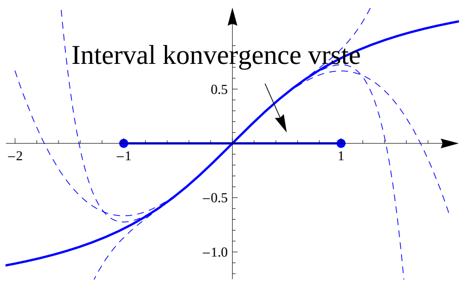
Konstanto C določimo z izračunom v neki točki, ki je ponavadi kar središče potenčne vrste. Dobimo $0 = f(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 + C$, kar nam da $C = 0$. Posredno smo tako izračunali Taylorjevo vrsto funkcije arc tg v okolici točke $x = 0$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

ki konvergira za $|x| \leq 1$. Če izberemo $x = 1$, pa dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \operatorname{arc\,tg} 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Poglejmo še graf funkcije arc tg in pa nekaj končnih aproksimacij s Taylorjevimi polinomi.



Opomba: Teorija potenčnih vrst nam med drugim pomaga izračunati tudi vsote nekaterih zanimivih številskih vrst. Glavno idejo lahko strnemo v naslednjih nekaj korakov:

· Poišči potenčno vrsto, katere izračun v neki točki sovpada z dano številsko vrsto.

· Izračunaj vsoto potenčne vrste v poljubni točki.

· Vstavi v izraz za vsoto potenčne vrste ustrezno vrednost.

□

(7) Razvij dane funkcije v Taylorjeve vrste okoli točke $a = 0$:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x + x^2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rešitev: Naj bo f gladka funkcija na neki okolici $(a - \delta, a + \delta)$ točke a. *Taylorjeva vrsta* funkcije f glede na točko a je potenčna vrsta

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Če Taylorjeva vrsta konvergira k funkciji f na $(a - \delta, a + \delta)$, rečemo, da je f *analitična* funkcija na $(a - \delta, a + \delta)$. Omeniti velja, da se lahko zgodi, da Taylorjeva vrsta dane funkcije konvergira k neki drugi funkciji. Osnovni primeri Taylorjevih vrst so:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && |x| < 1, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots, && |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Za poljubno realno število α je posplošeni binomski simbol definiran s predpisom

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pri $\alpha = -1$ tako dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

(a) Za razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto v okolici dane točke moramo izračunati vrednosti vseh odvodov funkcije v tej točki. V splošnem je računanje odvodov težko in zamudno, včasih pa si lahko delo olajšamo, če znamo dano funkcijo zapisati kot produkt funkcij, katerih Taylorjeve vrste že poznamo. V našem primeru je:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2-3x+x^2} = \frac{1}{(2-x)(1-x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{x}{2})(1-x)}, \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}, \\
a_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right), \\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right),
\end{aligned}$$

za splošni člen pa velja

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Taylorjeva vrsta funkcije f glede na točko $x = 0$ je torej

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \cdots$$

(b) V tem primeru je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= -\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\ a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

za splošni člen pa velja

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Torej je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots$$

(c) Pri razvoju funkcije f v Taylorjevo vrsto si bomo pomagali z binomsko formulo:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-x)^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-k(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} (-1)^n x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n. \end{aligned}$$

V primeru $k = 2$ tako na primer dobimo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

$\square$

(8) Razvij funkcijo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

Rešitev: V verjetnosti, statistiki, fiziki, računalništvu in drugod je pomembna standardna normalna porazdelitev z verjetnostno gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Je ena izmed funkcij, katere nedoločeni integral ni elementarna funkcija. Njen nedoločeni integral ponavadi označimo s Φ, omogoča pa nam, da računamo verjetnosti, da normalno porazdeljena slučajna spremenljivka zavzame vrednosti na določenem intervalu.

Funkcijo Φ lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto, ki konvergira na celi realni osi. Pri tem bomo uporabili dejstvo, da lahko potenčne vrste členoma integriramo. Uporabili bomo formulo

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!},$$

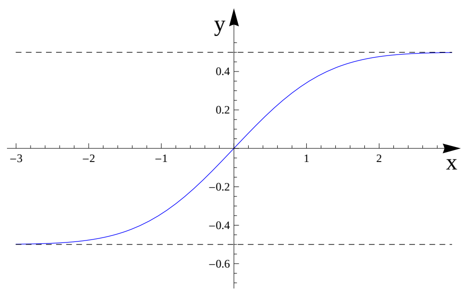
od koder sledi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1) 2^n n!}.$$

Če izračunamo prvih nekaj členov, dobimo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \cdots \right).$$

Funkcija Φ je liha, omejena in ima vodoravni asimptoti $y = \pm 0.5$. Njen graf po obliki spominja na graf funkcije $\operatorname{arc\,tg}$, njene vrednosti pa se zelo hitro približujejo asimptoti.



V praksi se pogosto uporabljajo tabele z vrednostmi funkcije Φ, za majhne vrednosti x pa lahko solidno aproksimacijo dobimo z uporabo Taylorjeve vrste. $\square$

(9) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = n(1-x)x^n$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Ali zaporedje funkcij (f_n) konvergira enakomerno na $[0,1]$ k funkciji f?

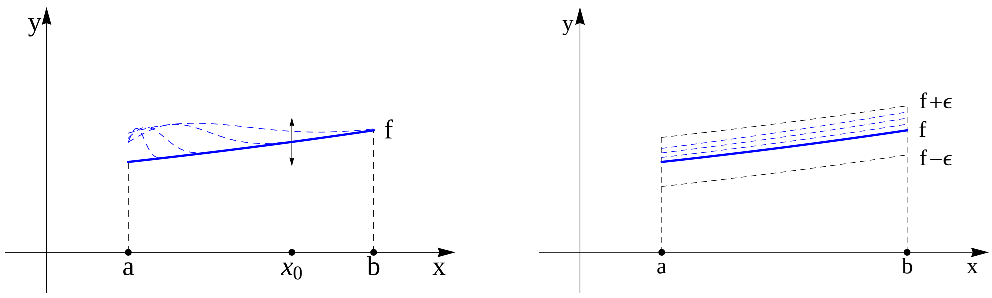
Rešitev: Pri študiju zaporedij realnih oziroma kompleksnih števil imamo na razpolago bolj ali manj eno samo smiselno definicijo pojma konvergence zaporedja. Pri funkcijah pa lahko, odvisno od uporabe, definiramo več med sabo neekvivalentnih načinov konvergence. Tukaj bomo spoznali dva izmed njih. Naj bodo funkcije (f_n) in f definirane na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potem:

(a) Zaporedje (f_n) konvergira k f *po točkah* na I, če je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$.

(b) Zaporedje (f_n) konvergira k f *enakomerno* na I, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za vsak $n \geq N$ in za vsak $x \in I$ velja $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Konvergenca po točkah pomeni, da v izbrani točki $x_0 \in I$ in pri dani natančnosti ϵ funkcijo f dovolj dobro aproksimirajo vsi f_n od nekega N dalje.

Enakomerna konvergenca pa pomeni, da pri izbrani natančnosti ϵ funkcijo f dovolj dobro aproksimirajo vse funkcije f_n od nekod dalje na celem intervalu I. To pomeni, da lahko izberemo tak N, ki je hkrati dober za vse $x \in I$. Enakomerna konvergenca torej implicira konvergenco po točkah, obratno pa ni vedno res.



Pri računanju si pomagamo z naslednjo ekvivalentno definicijo enakomerne konvergence. Ekvivalentno je namreč zahtevati, da zaporedje $c_n = \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$ konvergira k 0.

(a) Izberimo $x \in [0, 1]$.

$\cdot\ x \in \{0, 1\} \Rightarrow f_n(x) = 0$ za vsak $n \Rightarrow f(x) = 0$,

$\cdot\ x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n(1 - x)x^n = (1 - x) \lim_{n\to\infty} nx^n = 0.$

Zaporedje (f_n) torej po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = 0.$$

(b) Poglejmo sedaj razliko med posameznimi funkcijami in pa limitno funkcijo. Upoštevali bomo, da nas zanimajo samo $x \in [0, 1]$.

$$|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = |n(1 - x)x^n| = n(1 - x)x^n.$$

Ker so vse funkcije zvezne, interval pa je končen in zaprt, lahko supremum zamenjamo z maksimumom. Sledi

$$c_n = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

Iščemo torej maksimume funkcij f_n na intervalu $[0, 1]$. Računajmo

$$f_n'(x) = -nx^n + n^2(1 - x)x^{n-1} = nx^{n-1}\left(n(1 - x) - x\right) = nx^{n-1}\left(n - (n + 1)x\right).$$

Ničle odvodov so v $x_0 = 0$, kjer imajo funkcije minimume, in pa v točkah $x_n = \frac{n}{n+1}$, kjer imajo funkcije maksimume. Sledi

$$c_n = f_n(x_n) = n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n \cdot \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Limita zaporedja (c_n) je enaka

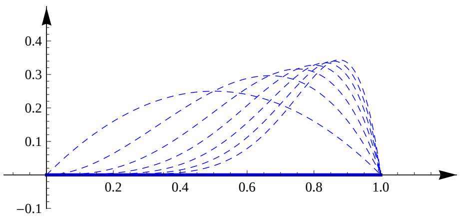
$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$

Pri majhnih ϵ-ih bo torej za dovolj velike n veljalo

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) > \epsilon,$$

kar pomeni, da konvergenca ni enakomerna.

Na sliki vidimo, da gredo za vsak $x \in [0,1]$ vrednosti $f_n(x)$ proti 0 pri $n \to \infty$, vendar pa se grafi funkcij f_n po obliki bistveno razlikujejo od grafa funkcije f.



$\square$

12 Funkcije večih spremenljivk

(1) Skiciraj naravni definicijski območji, nivojnice in grafa danih funkcij:

(a) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}$.

Rešitev: (a) Funkcija $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$ bo definirana, če bo:

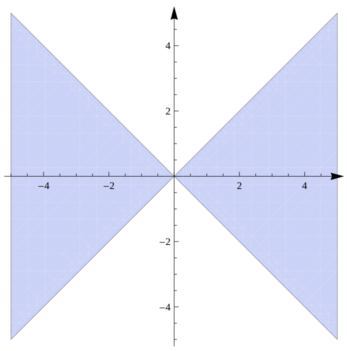
$\cdot\ x \neq 0$,

$\cdot\ -1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 1$.

Iz drugega pogoja dobimo, da za $x > 0$ velja $-x \leq y \leq x$, za $x < 0$ pa $-x \geq y \geq x$. Sledi

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \wedge -x \leq y \leq x) \vee (x < 0 \wedge x \leq y \leq -x)\}.$$

Definicijsko območje funkcije f sestoji iz dveh kvadrantov, ki sta zarotirana za kot $\frac{\pi}{4}$ glede na standardne koordinatne kvadrante.



Nivojnice funkcije f so množice oblike

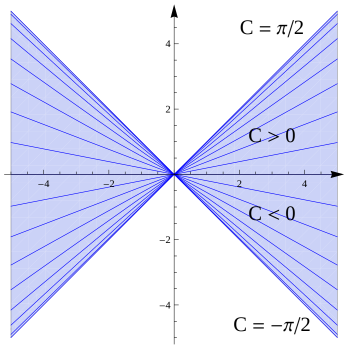
$$f(x,y) = C,$$

pri različnih izbirah konstante C. Nivojnice funkcije dveh spremenljivk večinoma sestojijo iz krivulj, lahko pa vsebujejo tudi kakšno izolirano točko.

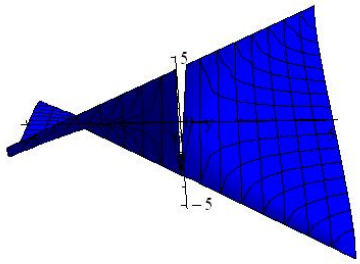
V našem primeru so nivojnice krivulje, ki zadoščajo enačbi:

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{y}{x} &= C, \\ \frac{y}{x} &= \sin C, \\ y &= (\sin C)x. \end{aligned}$$

Možne vrednosti konstante C ležijo na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Za vsak tak C je ustrezna nivojnica premica s smernim koeficientom $\sin C$, vendar brez točke $(0,0)$.



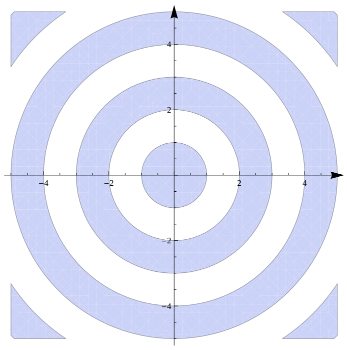
Graf funkcije f skiciramo tako, da vsako izmed teh premic dvignemo na ustrezno višino.



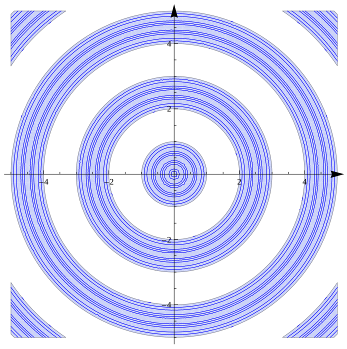
(b) Funkcija $f(x,y) = \sqrt{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}$ bo definirana, če bo $\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}) \geq 0$. To bo res za

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1].$$

Definicijsko območje je torej unija kolobarjev z notranjim polmerom $r_k = 2k$ in z zunanjim polmerom $R_k = 2k+1$ za $k \geq 1$. Pri $k = 0$ dobimo krog s polmerom $R = 1$.



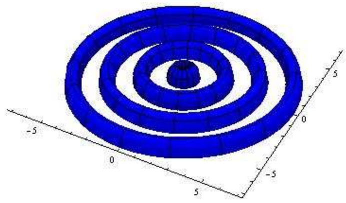
Nivojnice so krožnice s središči v točki $(0,0)$ in s polmeri R, za katere je $\sin(\pi R) \geq 0$.



V tem primeru je graf funkcije f rotacijska ploskev, ki jo lahko narišemo takole:

$\cdot$ Nad abscisno osjo narišemo graf funkcije $x \mapsto \sqrt{\sin \pi x}$.
$\cdot$ Graf zavrtimo okoli navpične osi.

Poglejmo si še skico.

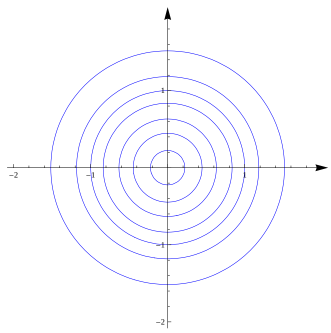


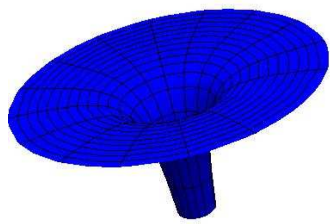
$\square$

(2) Izračunaj nivojnice in gradientno vektorsko polje potenciala

$$V(x, y) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Rešitev: Nivojnice potenciala V so krožnice s središči v koordinatnem izhodišču, njegov graf pa ima naslednjo obliko.





Gradientno vektorsko polje funkcije dveh spremenljivk f je vektorsko polje

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

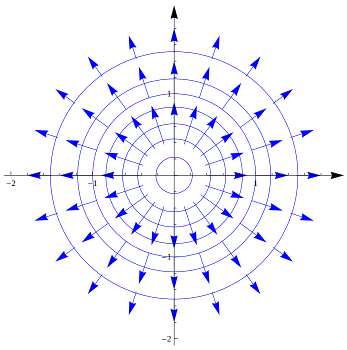
V primeru funkcije $V(x, y) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \frac{mMGx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \frac{mMGy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

od koder dobimo

$$\nabla V = \left(\frac{mMGx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \frac{mMGy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right).$$

Gradientno vektorsko polje je pravokotno na nivojnice in kaže v smeri najhitrejšega naraščanja potenciala.



Potencial V predstavlja potencialno energijo telesa z maso m v gravitacijskem polju telesa z maso M. Gravitacijska sila kaže v nasprotni smeri gradienta potenciala

$$\vec{F} = -\nabla V.$$

Ponavadi gravitacijsko silo predstavimo v polarnih koordinatah, kjer je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\phi, \sin\phi)$ enotsko vektorsko polje v radialni smeri. Tedaj je

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{r^2}\vec{e}_r.$$

$\square$

(3) Aproksimiraj funkcijo

$$f(x, y) = (x^2 + x + 1)\sin y + e^x$$

s Taylorjevim polinomom reda 3 v okolici točke $a = (0, 0)$.

Rešitev: Gladko funkcijo $f = f(x, y)$ lahko v okolici točke $a = (x_0, y_0)$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom stopnje n:

$$\begin{aligned} T_n(x, y) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a) \cdot (x - x_0)^{n-k}(y - y_0)^k. \end{aligned}$$

Izračunajmo najprej vse parcialne odvode do reda tri:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x + 1)\sin y + e^x, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + x + 1)\cos y,$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y + e^x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x + 1)\cos y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x^2 + x + 1)\sin y,$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x, \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2\cos y, \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -(2x + 1)\sin y, \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -(x^2 + x + 1)\cos y.$

Če izračunamo vrednosti teh parcialnih odvodov v točki $a = (0, 0)$ in uporabimo formulo za Taylorjev razvoj, dobimo

$$T_3(x, y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{6}x^3 + x^2 y - \frac{1}{6}y^3.$$

Opomba: Graf Taylorjevega polinoma stopnje ena

$$T_1(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

je ravno tangentna ravnina na graf funkcije v točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. $\square$

(4) Van der Waalsova enačba stanja

$$nRT = (V - B)\left(p + \frac{A}{V^2}\right)$$

povezuje temperaturo, tlak in volumen plina. S totalnim diferencialom oceni, za koliko se spremeni tlak plina, če se temperatura in volumen plina spremenita za dT oziroma dV.

Rešitev: Van der Waalsova enačba stanja

$$nRT = (V - B)\left(p + \frac{A}{V^2}\right)$$

implicitno določa tlak plina kot funkcijo temperature in volumna plina $p = p(T, V)$. V termodinamiki je pomemben podatek, kako se spremeni tlak plina pri majhnih spremembah temperature in volumna. To spremembo lahko aproksimiramo s totalnim diferencialom

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T}\, dT + \frac{\partial p}{\partial V}\, dV.$$

Matematično je ta formula aproksimacija funkcije p s Taylorjevim polinomom reda 1. Za izračun parcialnih odvodov bi lahko najprej iz Van der Waalsove enačbe eksplicitno izrazili p in ga nato parcialno odvajali. Za vajo pa bomo raje parcialna odvoda izračunali kar z implicitnim odvajanjem Van der Waalsove enačbe po spremenljivkah T in V. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} nR &= (V - B)\frac{\partial p}{\partial T}, \\ 0 &= \left(p + \frac{A}{V^2}\right) + (V - B)\left(\frac{\partial p}{\partial V} - \frac{2A}{V^3}\right). \end{aligned}$$

Od tod lahko eksplicitno izrazimo parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - B}, \\ \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2A}{V^3} - \frac{p + \frac{A}{V^2}}{V - B} = \frac{2A}{V^3} - \frac{nRT}{(V - B)^2}, \end{aligned}$$

kar nam da formulo

$$dp = \frac{nR}{V - B}\, dT + \left(\frac{2A}{V^3} - \frac{nRT}{(V - B)^2}\right) dV.$$

$\square$

(5) Poišči vse lokalne ekstreme danih funkcij in jih klasificiraj:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$,

(c) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Rešitev: Ekstreme funkcij dveh spremenljivk iščemo v dveh korakih. Najprej poiščemo stacionarne točke funkcije f. V stacionarnih točkah je tangentna ravnina na graf funkcije vodoravna, dobimo pa jih kot rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Tip stacionarne točke lahko določimo s pomočjo matrike drugih odvodov funkcije f:

$$H_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f. Če je $\det H_{(x_0,y_0)} > 0$, ima f v (x_0, y_0) lokalni ekstrem, in sicer:

· če je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, zavzame f v (x_0, y_0) lokalni minimum,

· če je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, zavzame f v (x_0, y_0) lokalni maksimum.

Če je $\det H_{(x_0,y_0)} < 0$, f v (x_0, y_0) nima ekstrema (ima sedlo). Če pa je $\det H_{(x_0,y_0)} = 0$, pa moramo pogledati višje odvode.

(a) $\underline{f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y}$:

Velja $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$. Od tod dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5, \\ xy &= 2. \end{aligned}$$

Če iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{2}{x}$ in vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0, \\ (x^2 - 1)(x^2 - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija f ima štiri stacionarne točke $T_1(1,2)$, $T_2(2,1)$, $T_3(-1,-2)$ in $T_4(-2,-1)$. Izračunajmo sedaj druge odvode:

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$,

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$,

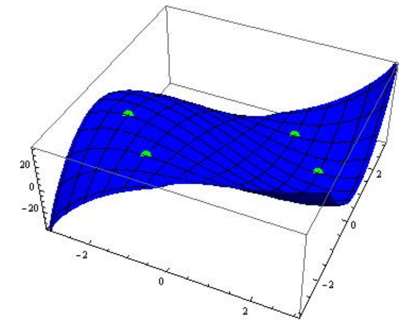
· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$.

Sledi

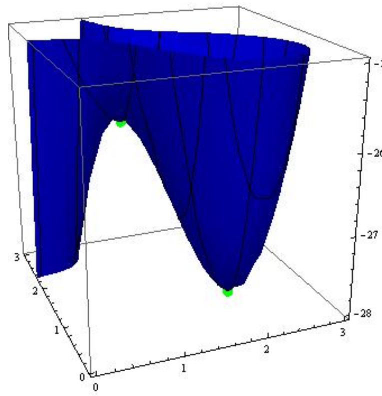
$$H_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \; H_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \; H_{(-1,-2)} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}, \; H_{(-2,-1)} = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}.$$

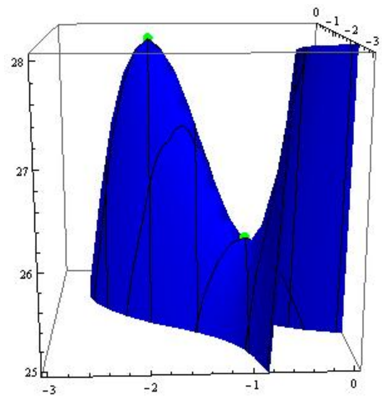
Od tod sklepamo, da ima f v točki $T_2(2,1)$ lokalni minimum, v točki $T_4(-2,-1)$ lokalni maksimum, v točkah $T_1(1,2)$ in $T_3(-1,-2)$ pa sedlo.

Poglejmo si graf funkcije v okolici stacionarnih točk.



Če narišemo vse koordinatne osi v istem merilu, dobimo naslednji sliki.





V točki T_2 je torej dno doline, v katero vodi prehod skozi sedlo v točki T_1. Podobno je v točki T_4 vrh hriba, s katerega se lahko spustimo do sedla v točki T_3.

(b) $\underline{f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y}$:

Tukaj je $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1$. Dobimo sistem enačb:

$$x^2 = 8y,$$
$$y^2 = x.$$

Sledi:

$$y^4 = 8y,$$
$$y(y^3 - 8) = 0.$$

Funkcija f ni definirana v točkah, kjer je $y = 0$, zato ima eno samo stacionarno točko $T(4, 2)$. Drugi odvodi f so:

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{16}{x^3}$,

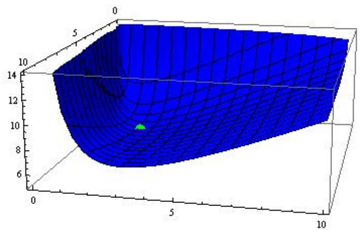
· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$,

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}$.

Imamo

$$H_{(4,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix},$$

od koder sledi, da ima f v točki T lokalni minimum. Poglejmo še graf funkcije f.



(c) $\underline{f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)}$:

Velja $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y)$. Tako dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2y^2 &= 0, \\ -x^2 + 2y^2 - 4y &= 0. \end{aligned}$$

Če enačbi seštejemo, dobimo $x = 2y$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} 2y^2 + 4y &= 0, \\ y(y + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija f ima dve stacionarni točki $T_1(0, 0)$ in $T_2(-4, -2)$. Izračunajmo še druge odvode:

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2)$,

· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)$,

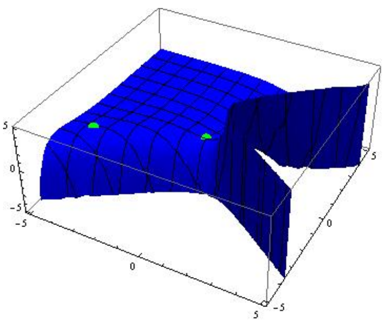
· $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$.

Tako dobimo

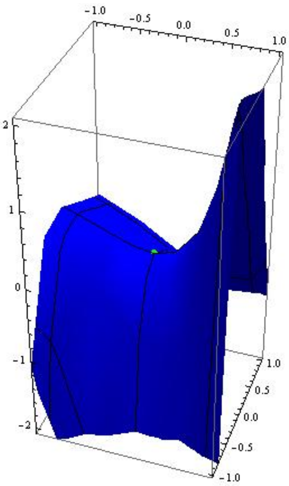
$$H_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \; H_{(-4,-2)} = e^{-2} \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

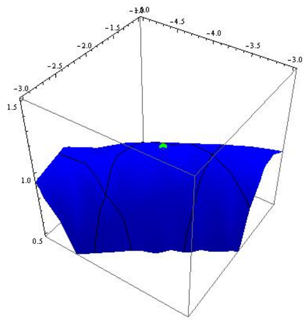
Vidimo, da ima f v točki $T_1(0, 0)$ sedlo, v točki $T_2(-4, -2)$ pa lokalni maksimum.

Poglejmo še graf funkcije f.



V okolici stacionarnih točk pa graf izgleda takole.

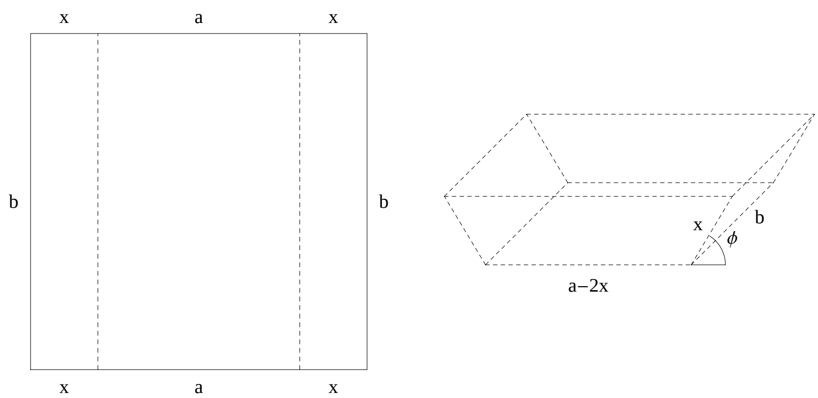




$\square$

(6) Pravokoten karton s stranicama dolžine a in b prepognemo na razdalji x vzdolž obeh daljših stranic za kot ϕ. Določi x in ϕ tako, da bo volumen dobljenega telesa maksimalen.

Rešitev: Ko prepognemo karton, dobimo telo v obliki žleba, ki v prerezu izgleda kot unija pravokotnika in dveh trikotnikov.



Volumen telesa v odvisnosti od spremenljivk x in ϕ je enak

$$V(x, \phi) = (a - 2x)x \sin \phi \, b + x^2 \sin \phi \cos \phi \, b.$$

Parcialna odvoda funkcije V sta:

$$V_x = (a - 4x)\sin\phi\, b + 2x \sin\phi \cos\phi\, b,$$
$$V_\phi = (a - 2x)x \cos\phi\, b + x^2 b(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$

kar pomeni, da stacionarne točke funkcije V zadoščajo sistemu enačb:

$$\sin\phi\, b(a - 4x + 2x\cos\phi) = 0,$$
$$xb((a - 2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi)) = 0.$$

Ker je $b \neq 0$, bo prvi enačbi zadoščeno, če velja $\sin\phi = 0$ ali $a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. V primeru, ko je $\sin\phi = 0$, je $V = 0$, zato gre za minimum. Zato nas zanima primer, ko je $a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. Podobno dobimo minimum tudi, ko velja $x = 0$ v drugi enačbi. Za izračun maksimuma funkcije V moramo torej rešiti sistem enačb:

$$a - 4x + 2x\cos\phi = 0,$$
$$(a - 2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 0.$$

Iz prve enačbe lahko izpeljemo, da je

$$\cos\phi = 2 - \frac{a}{2x}.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo:

$$(a - 2x)\left(2 - \frac{a}{2x}\right) + x\left(2\left(2 - \frac{a}{2x}\right)^2 - 1\right) = 0,$$
$$2a - 4x - \frac{a^2}{2x} + a + x\left(7 - \frac{4a}{x} + \frac{a^2}{2x^2}\right) = 0,$$
$$3x - a = 0,$$
$$x = \frac{a}{3}.$$

Pri $x = \frac{a}{3}$ je $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumen dobljenega telesa bo torej maksimalen, ko bo:

$$x = \frac{a}{3},$$
$$\phi = \frac{\pi}{3}.$$

$\square$