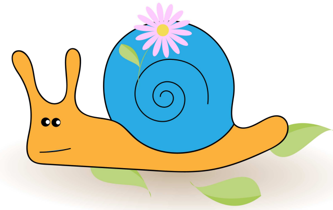
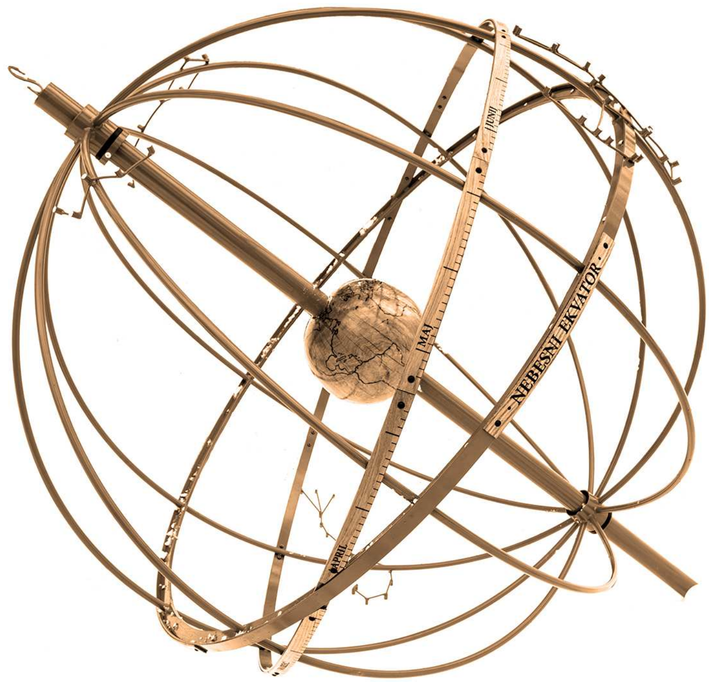
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

5



PRESEK LETNIK 48 (2020/2021) ŠTEVILKA **5**



PRESEK

→ O REŠEVANJU FUNKCIJSKIH ENAČB
→ RAZKLON NA STEKLENI PRIZMI
→ GIBANJE ZEMLJE IN MERJENJE ČASA
→ DINAMIČNO PROGRAMIRANJE

ISSN 0351-6652

9 770351 665852

Iskanje ponesrečencev na morju

→ Zaradi prevrnjenih čolnov vsako leto umre na stotine ljudi, ker jih reševalne ekipe ne odkrijejo pravočasno. Morski tokovi in vreme so zelo spremenljivi, pogosto odnesejo pogrešane daleč od mesta, kjer jih iščejo reševalci. Z uporabo nove tehnike, ki temelji na diferencialnih enačbah, pa so raziskovalci določili krivulje privlačnosti v bližini obal, vzdolž katerih se nabirajo plavajoči objekti. Krivulje so poimenovali TRAP (transient attraction profile). Vzdolž teh krivulj so v poskusnih simulacijah morskih nesreč našli iskane objekte v dveh do treh urah.

Novi pristop združuje tehnike dinamičnih sistemov s podatki v realnem času in ima precej prednosti pred tradicionalnimi metodami. Ker je čas pri reševanju zelo pomemben, je morda najpomembnejše to, da je mogoče krivulje TRAP hitro izračunati na osnovi podatkov bodisi iz modelov bodisi iz podatkov senzorjev. So tudi zelo robustne, zato manjše negotovosti v podatkih, denimo točen kraj nesreče, ne bodo bistveno vplivale na TRAP krivuljo. Prav tako so se v dosedanjih poskusih na morju na območju TRAP krivulj nabrali vsi objekti ne glede na velikost in vrsto. V prihodnosti bodo morda lahko TRAP krivulje uporabili tudi za hitro odkrivanje oljnih madežev. Več o tem najdete v članku *Search and rescue at sea aided by hidden flow structures*, Serra, M., Sathe, P., Rypina, I., v reviji Nature Communications **11** (2020), 2525.

Izvirno besedilo: Locating people lost at sea, Mathematical moments from the AMS. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 5

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2020/2021 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **info@dmfa-zaloznistvo.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Na ljubljanskem Golovcu ob eni od sprehajalnih poti nastaja Gozdni planetarij, ki bo namenjen izvajanju praktičnih astronomskih vaj in prikazov astronomskih vsebin. Območje Gozdnega planetarija je posejano z izkopanimi kraterji, v enem pa že stoji trimetrska armilarna krogla, ki je delujoče javno astronomsko učilo. Armilarna krogla je pogled na nebo »od zunaj« in omogoča prikaz navideznega vrtenja neba. Nebo vidimo kot kroglo, ki ima z Zemljo skupno središče. Zemljina os je tudi os armilarne krogle in gre skozi severni (na vrhu označen s S) in južni nebesni pol. Nagib osi glede na vodoravnico je enak zemljepisni širini Golovca. Znotraj nebesne krogle je Zemlja, na kateri je lega Golovca označena z žebljičkom. Z vrtenjem armilarne krogle je mogoče prikazati dinamiko neba in navidezna gibanja zvezd ter Sonca po nebu.
Zemlja je v armiralni krogli negibna, saj krogla prikazuje navidezno gibanje neba, kot ga vidimo nad Golovcem. Obzorje Golovca pa upodablja rob kraterja, v katerem je armilarna krogla. Glavne krožnice so take krožnice na nebu, ki imajo središče v središču nebesne krogle. Med njimi sta na armilarni krogli prikazana nebesni ekvator in ekliptika. Nebesni ekvator nebo deli na severno in južno nebo. Ekliptika predstavlja navidezno pot Sonca med letom. Lege Sonca so na njej označene kot datumi v letu.
Na armilarni krogli so prikazana tri ozvezdja oz. dve ozvezdij in asterizem. Veliki voz je asterizem in del večjega ozvezdja Veliki medved. Leži na severnem nebu in za opazovalca na Golovcu nikoli ne zaide. Orion je ozvezdje na nebesnem ekvatorju, zato za opazovalca na Golovcu vzhaja in zahaja, ponoči pa je viden pozimi. Škorpijon je ozvezdje na nebesnem ekvatorju, zato za opazovalca na Golovcu vzhaja in zahaja, ponoči pa je viden poleti.
Armilarna krogla je nastala v sodelovanju Mestne občine Ljubljana in zavoda Cosmolab. Fotografija: Andrej Guštin

O reševanju funkcijskih enačb

Jakob Jurij Snoj

V osnovni in srednji šoli pogosto rešujemo enačbe, v katerih neznanke predstavljajo iskana števila in jih moramo z znanimi postopki izraziti, da pridemo do možnih rešitev. Funkcijske enačbe so nekoliko drugačne in za reševanje nimajo enostavnih, ustaljenih postopkov, ampak zahtevajo tudi veliko mero iznajdljivosti. Zato so naloge s funkcijskimi enačbami pogost izziv na zahtevnejših matematičnih tekmovanjih.

V članku bomo najprej spoznali nekaj osnovnih principov reševanja takšnih enačb, nato pa bomo rešili še nekaj novejših nalog z mednarodnih tekmovanj. Za začetek si oglejmo enostaven primer funkcijske enačbe.

Naloga 1.

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$f(x+y) = x + f(y)$$

za vsaka x in $y \in \mathbb{R}$.

Kaj naloga zahteva od nas? Ne iščemo vseh števil, ki bi rešila enačbo, temveč želimo najti vse takšne funkcije. Res je, da v enačbi nastopata tudi spremenljivki x in y, a ne iščemo njunih vrednosti, prav nasprotno: ugotavljamo, kakšne so tiste funkcije, za katere ustrezna enakost velja za vsako veljavno izbiro x in y.

Zgornjo funkcijsko enačbo lahko razumemo kot sistem neskončno mnogo enačb, ki jih dobimo, če namesto x in y vstavljamo konkretne vrednosti. Na nek način bi se dalo tudi reči, da imamo neskončno mnogo neznank: vrednosti $f(x)$ za vsa števila x iz definicijskega območja.

Kako se lotimo reševanja takšnih enačb? Dosedanji razmislek namiguje, da se moramo pri vsaki enačbi znajti malo drugače. Vseeno obstaja nekaj pogostih pristopov. Najenostavnejši je vstavljanje konkretnih vrednosti spremenljivk, denimo 0 ali 1, ali enačenje spremenljivk v enačbi. Poskusimo z vstavljanjem $x = y = 0$ v našo začetno enačbo. Tako ugotovimo, da mora za iskano funkcijo f veljati enakost

$$f(0+0) = 0 + f(0) \quad \text{oziroma} \quad f(0) = f(0).$$

Ta enakost nam očitno ne prinese novih informacij, saj velja za poljubno funkcijo f. Poskusimo s substitucijo samo v eni spremenljivki, recimo $y = 0$, s katero dobimo enakost

$$f(x) = x + f(0).$$

Kaj nam to pove? Vrednost $f(0)$ je neko fiksno realno število, recimo mu c. Dokazali smo torej, da mora za iskano funkcijo f veljati

$$f(x) = x + c$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Zdaj lahko preverimo, ali takšna funkcija sploh ustreza začetni enačbi. Vstavimo predpis v enačbo in dobimo, da mora veljati

$$x + y + c = x + (y + c) \quad \text{za vse } x, y \in \mathbb{R},$$

kar velja ne glede na izbiro konstante c. Funkcije oblike $f(x) = x + c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, so torej vse rešitve začetne funkcijske enačbe.

Povzemimo: vstavili smo $y = 0$ in ugotovili, da mora za vsako rešitev začetne funkcijske enačbe veljati $f(x) = x + c$ za neko konstanto $c \in \mathbb{R}$. Vse možne rešitve so torej take oblike, s preverjanjem pa smo nato dokazali še, da so vse funkcije take oblike zares rešitve.

Naloga 2.

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

- $f(x + f(x) + y) = y + f(2y)$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Če poskusimo z vstavljanjem konkretnih vrednosti, lahko dobimo enačbe, kot so $f(x + f(x)) = f(0)$, $f(f(0)) = f(0)$ ali podobne, ki tokrat niso direktno uporabne. Izkaže se, da bomo do rešitve zelo enostavno prišli na malo drugačen način. Poskusimo enačiti argumenta obeh pojavitev f, da se člena med seboj pokrajšata: vstavimo $y = x + f(x)$. Dobimo

- $f(2x + 2f(x)) = x + f(x) + f(2(x + f(x)))$,

kar je seveda ekvivalentno

- $x + f(x) = 0$.

Ta enačba pove, da mora za vsak $x \in \mathbb{R}$ veljati $f(x) = -x$, torej imamo predpis edine funkcije, ki lahko reši enačbo. Preverimo, da jo res, torej vstavimo predpis v osnovno enačbo in dobimo

- $-x + x - y = y - 2y$,

kar res velja za poljubni realni števili x in y. V tem primeru ima funkcijska enačba eno samo rešitev.

Do pomembnih sklepov pri reševanju funkcijskih enačb nas lahko pripeljejo tudi posebne lastnosti funkcij. Spomnimo se, da je funkcija $f\colon A \to B$ **surjektivna**, če za vsak $b \in B$ obstaja nek $a \in A$, za katerega velja $f(a) = b$. Za dokaz surjektivnosti funkcije, ki je morda eksplicitno ne poznamo, zadošča zapisati enakost, v kateri je na eni strani funkcija f s sestavljenim, a dobro definiranim argumentom, na drugi strani pa nek izraz, za katerega vemo, da zavzame vse možne vrednosti. Oglejmo si dva zahtevnejša primera funkcijskih enačb, v katerih surjektivnost igra pomembno vlogo.

Naloga 3 (Slovenski izbirni test za MMO 2016).

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, za katere velja

- $f\left(\dfrac{x}{f(y)}\right) = \dfrac{(f(x))^2}{y f(f(x))}$

za vse $x, y > 0$.

Tokrat iščemo samo funkcije iz pozitivnih realnih števil v pozitivna realna števila. Lahko bi poskusili s kakšnim vstavljanjem, a se raje lotimo naloge malo drugače. Po premisleku vidimo, da pri fiksnem x izraz na desni strani zavzame vsa pozitivna realna števila, ko y preteče vsa pozitivna realna števila. To lahko utemeljimo tudi tako, da namesto y vstavimo $\frac{(f(x))^2}{y f(f(x))}$ in dobimo

- $f\left(\dfrac{x}{f\left(\frac{(f(x))^2}{y f(f(x))}\right)}\right) = y.$

Argument funkcije f na levi strani je dobro definiran. Ker desna stran zavzame poljubno pozitivno realno število, smo torej ugotovili, da je f surjektivna.

Naslednji smiseln korak bi bil, da v začetni enačbi na levi strani nekako dobimo $f(x)$, da se lahko ta člen z enakim na desni strani pokrajša. Ker je f surjektivna, lahko vstavimo $y = c$, kjer je c poljubno pozitivno realno število z lastnostjo $f(c) = 1$. Po poenostavitvi dobimo

- $\dfrac{f(x)}{c f(f(x))} = 1 \quad \text{oziroma} \quad f(x) = c f(f(x)).$

Z rešitvijo smo že skoraj pri koncu. Naj bo a poljubno pozitivno realno število. V zgornjo enačbo lahko namesto x zaradi surjektivnosti vstavimo takšno število, ki se slika v a. S tem dobimo enačbo

- $c f(a) = a$,

ki velja za vsako pozitivno realno število a in neko pozitivno realno število c. Vse možne funkcije, ki rešijo enačbo, so torej oblike $f(x) = kx$, kjer je $k = \frac{1}{c} \in \mathbb{R}^+$ neka konstanta. Z vstavljanjem v začetno enačbo ugotovimo, da je takšna funkcija rešitev začetne enačbe za vsak $k \in \mathbb{R}^+$.

Naslednja enačba, ki si jo bomo ogledali, je s Srednjeevropske matematične olimpijade 2015, ki je potekala v Kopru v Sloveniji. Za razliko od prejšnjih primerov tokrat iščemo surjektivne funkcije na množici naravnih števil.

Naloga 4 (MEMO 2015).

Poišči vse surjektivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere za vsa naravna števila a in b velja natanko ena izmed naslednjih enačb:

- $f(a) = f(b)$,
- $f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}$.

Nenavadni pogoj pove, da za iskane funkcije iz $f(a) < f(b)$ sledi $f(a+b) = f(a)$. Zaradi surjektivnosti gotovo obstaja naravno število a_1 z lastnostjo $f(a_1) = 1$. Denimo, da je $f(1) > 1$. Potem sledi $f(a_1+1) = 1$, pa tudi $f(a_1+2) = f((a_1+1)+1) = 1$. Induktivno lahko zaključimo, da $f(n) = 1$ za vsak $n \geqslant a_1$.

V čem je težava tega sklepa? Funkcija f v tem primeru doseže le končno mnogo vrednosti, torej ne more biti surjektivna. Prišli smo do protislovja, zato mora veljati $f(1) = 1$.

Če sedaj v začetno enačbo vstavimo $b = 1$, lahko vidimo, da za vsak a, za katerega $f(a) \neq 1$, velja $f(a+1) = 1$. Hkrati lahko z vstavljanjem $a = b = 1$ ugotovimo, da $f(2) \neq 1$, saj velja prva enačba, zato druga ne sme veljati. Sledi $f(3) = 1$, sedaj pa lahko z indukcijo dokažemo, da je $f(a) = 1$ natanko tedaj, ko je a lih, kar prepuščamo bralcu.

Kaj lahko povemo o vrednosti $f(a)$ za soda števila a? Na enak način kot $f(1) = 1$, bi lahko sedaj dokazali, da je $f(2) = 2$. Še več, po analognih sklepih kot prej bi lahko dokazali tudi, da je $f(a) = 2$ natanko tedaj, ko je a deljiv z 2 in ne s 4, podobno, da je $f(a) = 3$ natanko tedaj, ko je a deljiv s 4 in ne z 8. Ker lahko vsako naravno število a zapišemo v obliki $a = 2^r \cdot m$, kjer je m neko liho število in $r \in \mathbb{N}_0$, na podlagi dosedanjih ugotovitev postavimo domnevo, da mora za iskano funkcijo veljati $f(2^r \cdot m) = r + 1$. Za $r = 0$ in $r = 1$ smo to domnevo že dokazali, natančni bralci pa bodo morda sami dodali podrobnosti dokaza z indukcijo za poljuben r in preverili, da ta funkcija ustreza začetni enačbi.

Za konec si oglejmo še funkcijsko enačbo s tekmovanja Romanian Master of Mathematics 2019, ki se je izkazala za izjemno težko.

Naloga 5 (RMM 2019, Jakob Jurij Snoj).

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

- $f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y)$

za vsa $x, y \in \mathbb{R}$.

Tokrat rešujemo funkcijsko enačbo, pri kateri spremenljivke nastopajo le v argumentih funkcije, kar je pogosto znak, da je naloga zahtevnejša. Z vstavljanjem $x = 2019$ se znebimo drugega člena na obeh straneh enačbe. Dobimo

- $f(2019 + yf(2019)) = f(2019)$.

Kaj nam ta enačba pove? Če velja $f(2019) \neq 0$, v argumentu funkcije f na levi strani nastopajo vsa realna števila. V tem primeru je funkcija f konstantna in neničelna. Ni težko preveriti, da vse konstantne funkcije, vključno z ničelno, rešijo enačbo.

Raziščimo še primer $f(2019) = 0$ za nekonstantno funkcijo f. V osnovno enačbo lahko vstavimo $y = 1$ in dobimo

- $f(x + f(x)) = f(2019) = 0$.

Če ima funkcija f le eno ničlo, velja $x + f(x) = 2019$, torej dobimo v tem primeru rešitev $f(x) = 2019 - x$, za katero lahko preverimo, da res reši enačbo. Sicer pa ima f vsaj še eno ničlo $s \neq 2019$. Če vstavimo $x = s$ v osnovno enačbo, dobimo

- $f(sy) = f(2019y)$.

Poskusimo to lastnost čim lepše izkoristiti. Namesto x v začetno enačbo vstavimo $\frac{s}{2019}x$, da dobimo enačbo

- $$f\left(\frac{s}{2019}x + yf\left(\frac{s}{2019}x\right)\right) + f\left(\frac{s}{2019}xy\right) = f\left(\frac{s}{2019}x\right) + f(2019y).$$

Če prej omenjeno lastnost uporabimo na dobljeni enačbi in jo primerjamo z osnovno enačbo, dobimo

- $$f\left(\frac{s}{2019}x + yf(x)\right) = f(x + yf(x)).$$

Privzeli smo, da funkcija f ni konstantna, torej obstaja neko število c z lastnostjo $f(c) \neq 0$. V zgornji enačbi zamenjamo x s c ter y z $\frac{y - \frac{sc}{2019}}{f(c)}$, pa dobimo

- $$f(y) = f\left(y + c\left(1 - \frac{s}{2019}\right)\right).$$

Za $c \neq 0$ je torej funkcija f periodična z neko periodo $p > 0$. Vstavimo $x = x + p$ v osnovno enačbo in dobljeno enačbo primerjamo z osnovno. Po poenostavitvi dobimo

- $f((x+p)y) = f(xy)$.

V to enačbo lahko sedaj vstavimo $x = 0$, da dobimo $f(py) = f(0)$ za vse y. To pomeni, da je funkcija f konstantna, protislovje.

V primeru, da ima iskana funkcija vsaj dve ničli, mora torej veljati $f(c) = 0$ za vse vrednosti $c \neq 0$. Pri preverjanju pa naletimo še na zadnje presenečenje: izkaže se, da je lahko vrednost $f(0)$ poljubna. Tudi vse funkcije oblike

- $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če } x \neq 0; \\ c, & \text{če } x = 0. \end{cases}$

rešijo enačbo.

Funkcijska enačba ima torej tri tipe rešitev: vse konstantne funkcije $f(x) = c$, linearno funkcijo $f(x) = 2019 - x$ in vse skoraj ničelne funkcije, ki imajo edino neničelno vrednost v točki 0.

SLIKA 1.
Tekmovanja Romanian Master of Mathematics 2019 v Bukarešti so se udeležili Marko Čmrlec, Lovro Drofenik, Luka Horjak in Jaka Vrhovnik v spremstvu Jakoba Jurija Snoja.

Barvni sudoku

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

		5			8		6
3			2		4		
			8			3	
4						1	
				2		8	
							3
		8			7		4
	4		5				

→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

7	1	5	4	3	8	2	6
3	8	6	2	5	4	7	1
5	6	1	8	4	2	3	7
4	2	3	7	6	5	1	8
6	7	4	3	2	1	8	5
8	5	2	1	7	6	4	3
2	3	8	6	1	7	5	4
1	4	7	5	8	3	6	2

Kdo je ustvaril naravna števila?

Maja Jakovac in Marko Jakovac

Naravna števila uporabljamo v vsakdanjem življenju, a se tega pogosto niti ne zavedamo. Dnevno preštevamo denar, ki ga zapravimo v trgovini. Kmet mora prešteti živino na pašniku, da preveri, ali so še vse živali na paši. Nenazadnje že otroci stari nekaj let samoiniciativno preštevajo stvari, s katerimi se igrajo, pa naj bodo to avtomobilčki, kroglice, ali kakšne druge igrače. Pogosto rečemo, da so naravna števila števila s katerimi štejemo. Skoraj bi lahko rekli, da so naravna števila nekaj, kar nam je prirojeno. Zato se je smiselno vprašati, kaj imajo naravna števila pravzaprav opraviti z matematiko in kako so z njo povezana.

Zgodovina naravnih števil

Pričnimo z znamenitim stavkom, ki ga je izrekel *Leopold Kronecker (7. 12. 1823 – 29. 12. 1891)*: »Bog je ustvaril naravna števila; vse ostalo je delo človeka.« [4]. Po stavku sodeč bi lahko rekli, da naravna števila niso zares povezana z matematiko, so prirojena, v njih ne dvomimo in jih privzemamo takšna, kot jih je za nas pripravila narava. Dejansko to niti ni tako daleč od resnice, saj jih bomo tudi mi opisali z izjavami, v katere praviloma ne dvomimo in jih privzemamo. Govorimo seveda o *aksiomih* oz. temeljnih resnicah [1].

Danes vemo, da so naravna števila temelj *aritmetike* [2, 3] in kot taka potrebujejo vso našo pozornost in previdnost. Iz naravnih števil nastanejo cela števila, iz celih števil racionalna števila itd. A kljub temu nas tudi strokovno razmišljanje privede do istega vprašanja, ki smo ga postavili na začetku: »Kdo je ustvaril naravna števila?«.

Naravna števila so zanimala že starodavne civilizacije. Tako jih lahko v takšni ali drugačni obliki najdemo pri Starih Egipčanih, Babiloncih, Rimljanih, Kitajcih in nenazadnje tudi pri Indijancih v Ameriki (npr. Majevska civilizacija). Daleč najbolj pomembna pa je Antična Grčija. Starim Grkom pripisujemo prvo sistematično obravnavo naravnih števil. Tukaj so izstopali predvsem *Arhimed (okoli 287 pr. n. št. – okoli 212 pr. n. št.)*, *Pitagora (okoli 570 pr. n. št. – okoli 495 pr. n. št.)* in *Evklid (okoli 365 pr. n. št. – okoli 275 pr. n. št.)*.

Ne glede na zgodovino in večtisočletno uporabo naravnih števil raziskovalci niso čutili nuje po matematični pojasnitvi izvora naravnih števil, dokler leta 1860 *Hermann Günther Grassmann* ni pokazal, da lahko večino zapletenih dejstev v aritmetiki pojasnimo z osnovnimi pojmi. S tem je večina tedanjih matematikov spoznala, da aritmetika, in s tem tudi naravna števila potrebujejo formalno vpeljavo. Na podlagi teh idej je *Charles Sanders Peirce* leta 1881 predstavil prve aksiome za naravna števila. Že leta 1888 je *Richard Dedekind* predstavil alternativen nabor aksiomov, ki danes predstavljajo temelj matematičnega razumevanja naravnih števil. A zgodba tukaj še ni bila zaključena, saj je le leto kasneje, leta 1889, *Giuseppe Peano* objavil poenostavljeno različico Dedekindovih aksiomov, ki jih danes imenujemo *Peanovi aksiomi* [5, 6, 7]. Peanovih aksiomov je v osnovi pet in danes matematikom predstavljajo odgovor na vprašanje, kdo je ustvaril naravna števila.

Peanovi aksiomi

Preden navedemo vseh pet Peanovih aksiomov, je potrebno poudariti, da so to strukturni aksiomi in zato v smislu teh aksiomov označitev naravnih števil ni pomembna. Naravna števila običajno označujemo z arabskimi števkami $(0, 1, 2, \dots, 9)$ in jih praviloma uporabljamo v desetiškem sistemu, saj so v takšnem sistemu najbolj primerna za zapis in nadaljnje računanje. Znano je, da so se matematiki svoj čas prepirali, ali bi prvo naravno število označili z 0 ali z 1. Danes vemo, da je to prerekanje brezpredmetno in označitev za samo strukturo naravnih števil ni pomembna. Bistvo tega pojasnila je, da bi lahko naravna števila pri uporabi Peanovih aksiomov označevali tudi z drugimi objekti. Recimo, število 1 bi lahko bilo tudi jabolko, število 2 hruška, število 3 avtomobil itd. Da ne bomo preveč otežili razumevanje tega članka, bomo tudi v Peanovih aksiomih uporabljali arabske števke, prvo naravno število pa bomo označili z 1.

Peanovi aksiomi so dejansko lastnosti, ki jih dodelimo množici naravnih števil. Kot rečeno, jih poznamo pet in jih običajno zapišemo v naslednjem vrstnem redu:

(1) Število 1 je naravno število.
(2) Vsako naravno število ima natančno enega naslednika.
(3) Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
(4) Če imata dve naravni števili istega naslednika, potem ti števili predstavljata isto naravno število.
(5) Vsaka množica, ki vsebuje število 1 in naslednike vseh svojih števil, je enaka množici naravnih števil.

Navedeni aksiomi so relativno preprosti in danes predstavljajo temeljno strukturo, ki jo poznamo pod imenom *množica naravnih števil*; označimo jo z $\mathbb{N}$. Čeprav so aksiomi preprosti, jih poskusimo še dodatno pojasniti.

Aksiom (1) pove, da množica naravnih števil ni prazna, zato lahko v njej določimo vsaj en element. Kot rečeno, bomo uporabljali arabske števke, zato se odločimo ta element označiti z 1.

Aksiom (2) zagotavlja, da je struktura naravnih števil nerazvejana, tako da lahko hitro določimo naslednika vsakega števila, ki je le eden za vsako naravno število.

Aksiom (3) zagotavlja, da pred številom 1 ni nobenega naravnega števila oz. da se naravna števila pričnejo pri številu 1.

Aksiom (4) imenujemo tudi injektivnost funkcije naslednikov. Funkcija je namreč predpis, ki vsakemu elementu neke množice priredi natančno en element druge množice. Injektivnost funkcije pa pomeni, da se poljubna različna elementa prve množice nujno preslikata v različna elementa druge množice.

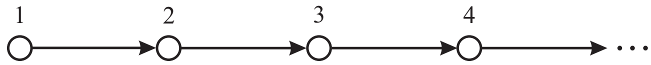
Najbolj prepoznan in verjetno najbolj opevan aksiom med matematiki je zagotovo aksiom (5). Poznamo ga namreč tudi pod imenom *matematična indukcija*. Poenostavljeno povedano, gre za močno matematično orodje, s katerim lahko dokazujemo trditve tako na naravnih številih kot tudi na strukturah, ki so v bijekciji z naravnimi števili. Npr. tudi cela števila so v bijekciji z naravnimi števili, zato lahko princip matematične indukcije uporabljamo tudi na njih.

Sistem oz. seznam Peanovih aksiomov v celoti opisuje množico naravnih števil, hkrati pa noben izmed navedenih aksiomov ni odveč in je nujno potreben, da imajo naravna števila strukturo, kot jo poznamo. Če bi lahko kakšen aksiom izpeljali iz preostalih, potem ne bi bil potreben in bi ga lahko črtali iz seznama. V nadaljevanju se bomo osredotočili na vsak aksiom posebej in pokazali, da je nujno potreben. Formalnih dokazov sicer ne bomo delali, si bomo pa pomagali s slikami struktur, ki jih lahko dobimo v primeru, da vsi aksiomi niso izpolnjeni. Čeprav ne gre za formalni dokaz, lahko takšna intuitivna ilustracija učiteljem v osnovnih in srednjih šolah pomaga na enostaven način učencem in dijakom pojasniti aksiome, ki gradijo naravna števila.

Manjkajoči Peanovi aksiomi

Naravna števila si danes vsi predstavljamo kot enostransko linearen diagram pikic, ki so med seboj povezane z daljicami, na katerih z ustrezno smerjo puščice označimo naslednike (slika 1). V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko dobimo tudi drugačne diagrame, v kolikor niso izpolnjeni vsi aksiomi iz nabora petih Peanovih aksiomov.

Za začetek predpostavimo, da imamo samo aksiom (1). To pomeni, da imamo v množici vsaj eno naravno število. Na diagramu to pomeni eno pikico →

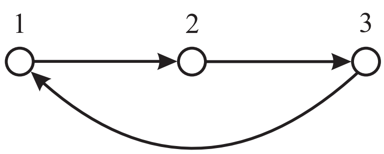


SLIKA 1.
Digram množice naravnih števil

(slika 2). Pikic bi lahko bilo tudi več, vendar o njih ničesar ne vemo, dokler uporabljamo le en aksiom. Ne glede na opisano je jasno, da na sliki 2 ne dobimo diagrama naravnih števil.

SLIKA 2.
Upoštevanje aksioma (1)

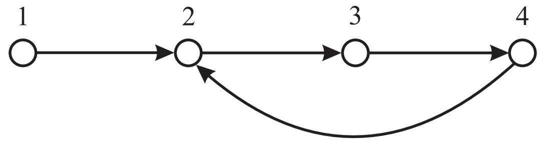
Dodajmo sedaj še drugi aksiom, da bomo imeli dva aksioma, tj. aksioma (1) in (2). Ker je cilj pokazati, da lahko dobimo tudi drugačne strukture, kot je struktura naravnih števil, predstavimo diagram na sliki 3. Hitro preverimo, da diagram zadošča obema aksiomoma, saj imamo na seznamu tako število 1 kot tudi upoštevamo lastnost, da ima vsako število na seznamu natančno enega naslednika. Očitno diagram na sliki 3 spet ni enak diagramu na sliki 1.



SLIKA 3.
Upoštevanje aksiomov (1) in (2)

Če aksiomoma (1) in (2) dodamo še aksiom (3), potem diagram na sliki 3 ni več ustrezen, saj število 1 ne sme biti naslednik nobenega števila. Zato narišemo nov diagram, ki je prikazan na sliki 4. Ideja je zelo podobna kot na sliki 3, le da smo cikel naredili tako, da se več ne sklene pri številu 1. Tako ima še vedno vsako število natančno enega naslednika, saj iz vsakega števila sledi le ena puščica, prav tako pa število 1 ni naslednik nobenega števila.

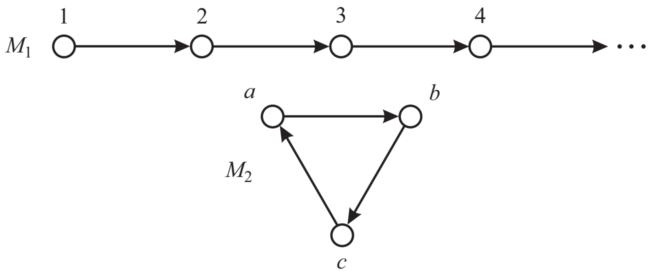
Do sedaj smo pokazali, da prvi trije aksiomi vsekakor niso dovolj, da bi dobili nam dobro znano strukturo naravnih števil. Dodajmo sedaj še aksiom (4).



SLIKA 4.
Upoštevanje aksiomov (1), (2) in (3)

Hitro opazimo, da imata na diagramu slike 4 števili 1 in 4 istega naslednika, kar aksiom (4) prepoveduje. Glede na zapisano torej ne smemo narediti cikla v strukturi, saj bi tako kršili aksiom (4). Zato najprej pomislimo na enostransko linearno strukturo diagrama na sliki 1, ki prikazuje naravna števila. Hitro dobimo občutek, da so prvi štirje Peanovi aksiomi dovolj, da opišemo naravna števila. Toda ta občutek imamo le zato, ker morda nismo razmišljali »izven škatle«. Čeprav je razmišljanje izven škatle fraza, pa nam v tem primeru lahko reši problem, na katerega smo naleteli. Izven škatle lahko namreč razumemo tudi kot »izven diagrama«, kar pomeni, da nas ne sme zavesti intuitivna slika, kjer vnaprej narišemo nekaj, v kar želimo verjeti. Če na diagram na sliki 1 dodamo še eno strukturo, ki je ločena od prve strukture, kjer se nahaja število 1, potem s tem zadostimo prvim štirim Peanovim aksiomom, diagram pa niti približno ne spominja na naravna števila. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da dodatno strukturo sestavljajo trije elementi, a, b, c, tako da je element b naslednik elementa a, element c naslednik elementa b in element a naslednik elementa c. Potem dobimo diagram prikazan na sliki 5, ki iz istih razlogov kot prej še vedno zadošča prvim štirim Peanovim aksiomom. Označimo sedaj obe množici oz. povezani komponenti diagrama na sliki 5 z M_1 in M_2 in preverimo, da ne zadošča aksiomu (5). Če vzamemo poljubno množico, ki vsebuje število 1 in vse svoje naslednike, potem glede na diagram opišemo le množico M_1, ki seveda ni enaka celotni narisani množici $M_1 \cup M_2$, saj množica M_2 ni prazna.

Dodajmo še aksiom (5) in tako uporabimo vseh pet Peanovih aksiomov. Zaradi istega argumenta kot v zgornjem odstavku, diagram na sliki 5 ni več ustrezen. Izkaže se, da je teh pet aksiomov dovolj, da si ne moremo več izmisliti novega diagrama, ki bi te aksiome upošteval in bi hkrati bil različen od diagrama na sliki 1.



SLIKA 5.
Upoštevanje aksiomov (1), (2), (3) in (4)

Operaciji seštevanja in množenja

Čeprav pet Peanovih aksiomov prestavlja preproste strukturne lastnosti množice naravnih števil, lahko iz njih izpeljemo mnogo več. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo *funkcijo naslednikov*, ki jo bomo označili s $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pri čemer funkcijska vrednost $S(n)$ predstavlja naslednika naravnega števila $n \in \mathbb{N}$ v strukturi naravnih števil. Da je S res funkcija, nam zagotavlja aksiom (2), ki pove, da ima vsako naravno število natančno enega naslednika. Če naravna števila v strukturi po vrsti označimo z arabskimi števkami, tako kot smo se dogovorili, potem je $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 4$ itd. Ker je S funkcija, ki slika iz množice naravnih števil nase, jo lahko tudi komponiramo. Tako bi lahko npr. zapisali tudi $S(S(S(1))) = 4$. Slednje pomeni, da če se od števila 1 premaknemo za tri naslednike, dobimo v strukturi naravno število, za katerega smo se dogovorili, da ga označimo s 4. Omenimo še, da aksiom (4) zagotavlja, da je funkcija S injektivna, saj poljubni različni naravni števili preslika v različni naravni števili. Zaradi aksioma (3) pa ni surjektivna, ker v zalogi vrednosti ne dobimo vseh naravnih števil. Namreč, v število 1 se ne preslika nobeno naravno število, ker število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

Ko imamo definirano funkcija S, lahko definiramo še operaciji seštevanja in množenja. *Operacija seštevanja* je binarna operacija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki jo praviloma definiramo rekurzivno za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$:

- $$m + 1 = S(m),$$
  $$S(m + n) = m + S(n).$$

Rekurziven zapis je morda nekoliko težje razumeti, zato napravimo nekaj primerov. Izračunajmo $5 + 1$. Po definiciji operacije seštevanja je

- $5 + 1 = S(5)$.

Ker smo se dogovorili, da $S(5)$ označimo s 6, dobimo $5 + 1 = 6$. Nadalje, izračunajmo $5 + 2$. Po definiciji je

- $5 + 2 = 5 + S(1) = S(5 + 1) = S(6)$.

Ponovno upoštevamo dogovor, da smo $S(6)$ označili s 7. Zato je $5 + 2 = 7$. Za konec izračunajmo še $5 + 3$. Spet po definiciji dobimo

- $5 + 3 = 5 + S(2) = S(5 + 2) = S(7)$.

Upoštevajmo, da smo $S(7)$ označili z 8. Dobimo $5 + 3 = 8$. Iz teh treh izračunov hitro opazimo, kako lahko s pridom uporabljamo rekurzijo, saj smo vsak naslednji korak izračunali s pomočjo prejšnjega.

Operacija množenja je prav tako binarna operacija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki jo definiramo rekurzivno za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ na naslednji način:

- $$m \cdot 1 = m,$$
  $$m \cdot S(n) = m + (m \cdot n).$$

Pokažimo izračun množenja še na primeru. Najprej izračunajmo $5 \cdot 1$. Po definiciji operacije takoj sledi $5 \cdot 1 = 5$. Sedaj izračunajmo še $5 \cdot 2$. Po definiciji operacije množenja je

- $5 \cdot 2 = 5 \cdot S(1) = 5 + (5 \cdot 1) = 5 + 5 = 10$.

Bodimo pozorni, da smo v zadnjem koraku izračuna uporabili definicijo operacije seštevanja, ki nam zagotavlja, da je $5 + 5 = 10$. Izračunajmo še $5 \cdot 3$. Po definiciji operacije množenja dobimo

- $5 \cdot 3 = 5 \cdot S(2) = 5 + (5 \cdot 2) = 5 + 10 = 15$.

Ponovno smo v zadnjem koraku uporabili znanje, ki smo ga pridobili pri operaciji seštevanja, v predzadnjem koraku pa smo uporabili znanje, ki smo ga pridobili s predhodnim izračunom, kjer smo dokazali, da je $5 \cdot 2 = 10$. Torej smo spet s pridom uporabili rekurzivno definicijo operacije.

→

Ko imamo definirani obe operaciji, lahko pokažemo, da sta *komutativni*, *asociativni* in da ju povezuje *distributivni* zakon. Operaciji $+$ in $\cdot$ sta komutativni, če za poljubni naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$ velja

- $m + n = n + m,$
  $m \cdot n = n \cdot m.$

Operaciji $+$ in $\cdot$ sta asociativni, če za poljubna naravna števila $m, n, \ell \in \mathbb{N}$ velja

- $m + (n + \ell) = (m + n) + \ell,$
  $m \cdot (n \cdot \ell) = (m \cdot n) \cdot \ell.$

Operaciji $+$ in $\cdot$ povezuje distributivni zakon, če za poljubna naravna števila $m, n, \ell \in \mathbb{N}$ velja

- $m \cdot (n + \ell) = m \cdot n + m \cdot \ell,$
  $(m + n) \cdot \ell = m \cdot \ell + n \cdot \ell.$

Oba pogoja distributivnosti imenujemo levi in desni distributivni zakon, a ker vemo, da je operacija množenja komutativna, lahko enega izpustimo. Lastnosti komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti dokažemo s pomočjo matematične indukcije, ki jo omogoča aksiom (5), in rekurzivnih definicij seštevanja in množenja. Ker je dokaz vseh treh lastnosti dolgotrajen, pokažimo eno izmed lastnosti, npr. komutativnost seštevanja, na primeru.

Za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$ dokažimo trditev $n + 1 = 1 + n$. Po definiciji operacije seštevanja takoj sledi $n + 1 = S(n)$. Preverimo sedaj, da je tudi $1 + n = S(n)$. To trditev najprej preverimo za prvo naravno število, tj. 1. Tudi tale trditev sledi takoj iz definicije operacije seštevanja, saj je $1 + 1 = S(1)$. Predpostavimo sedaj, da trditev $1 + n = S(n)$ velja za neko izbrano naravno število n in pokažimo, da velja tudi za njegovega naslednika $S(n)$. Torej moramo dokazati trditev $1 + S(n) = S(S(n))$. Po definiciji operacije seštevanja sledi $1 + S(n) = S(1 + n)$. Če uporabimo še predpostavko $1 + n = S(n)$, dobimo $1 + S(n) = S(S(n))$, kar smo tudi želeli. Aksiom (5) zagotavlja, da smo trditev $1 + n = S(n)$ dokazali za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$. Ker je $n + 1 = S(n)$ in hkrati tudi $1 + n = S(n)$, sledi $n + 1 = 1 + n$. S pomočjo rekurzije lahko nato dobimo tudi splošen rezultat $m + n = n + m$, kjer sta m in n poljubni naravni števili.

Literatura

[1] *Aksiomi*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Axiom`, ogled 16. 9. 2020.

[2] *Arithemtic*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic`, ogled 16. 9. 2020.

[3] G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, 2. izdaja, Northwestern University Press, Evanston, ZDA, 1981.

[4] *Leopold Kronecker*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Leopold\_Kronecker`, ogled 16. 9. 2020.

[5] G. Lolli, *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, Proceeding of the International Conference in honour of Giuseppe Peano on the 150th anniversary of his birth, 2008, 47–67.

[6] *Peanovi aksiomi*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Peano\_axioms`, ogled 16. 9. 2020.

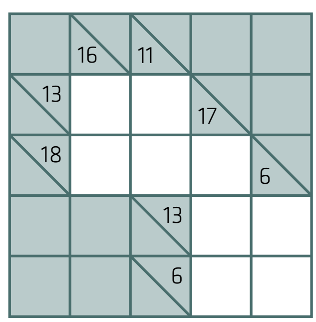
[7] M. Vencelj, 100 *let Peanovih aksiomov*, Presek **19** (1991/1992), 108–110.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



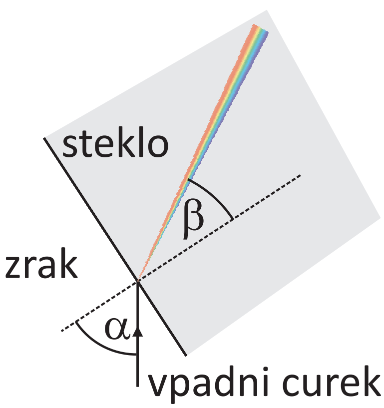
× × ×

Razklon na stekleni prizmi

Aleš Mohorič

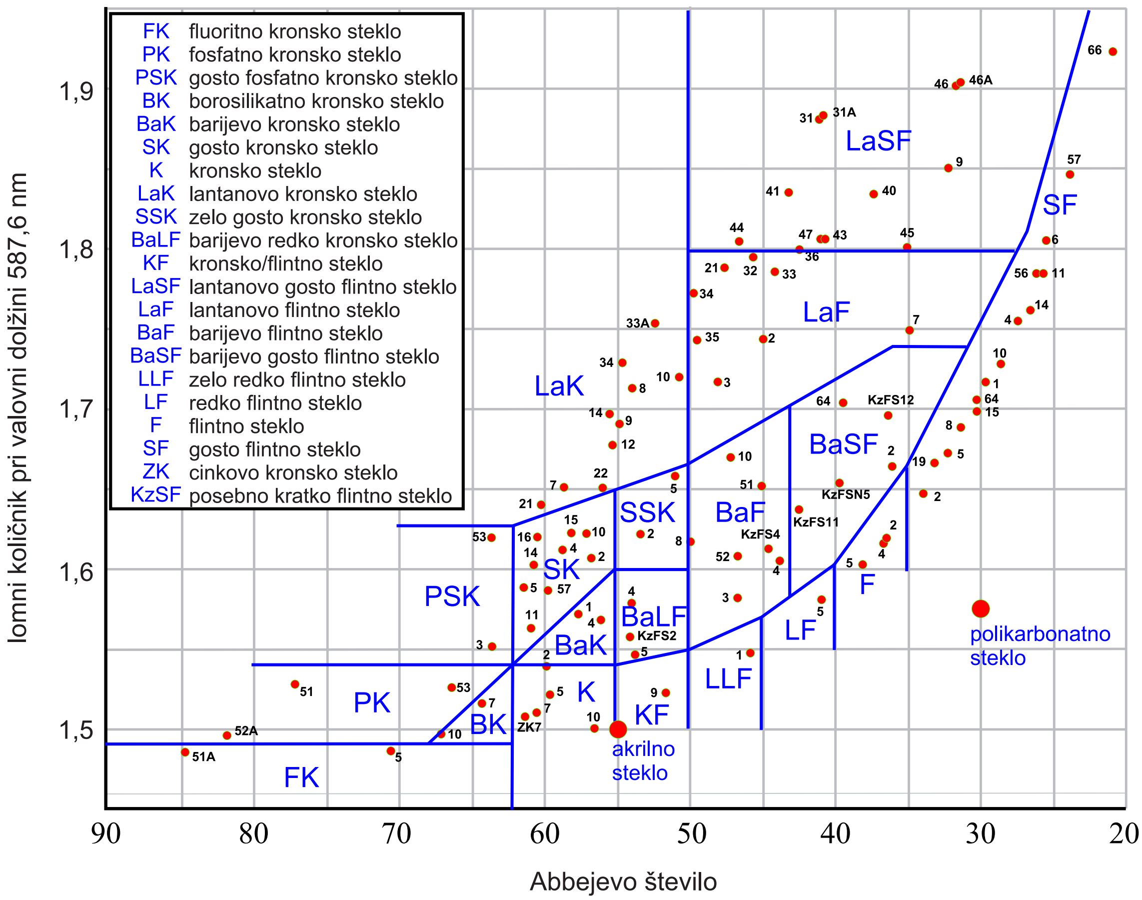
V Preseku je bil nedavno objavljen članek o sivi mreni [1], ki opisuje poskus, v katerem je bil mavrični trak za meritve obsega vidne svetlobe narejen z razklonom na prizmi. Valovne dolžine mavričnih barv lahko določimo s spektrometrom, vendar ima ta omejen obseg merjenja in z njim ne moremo meriti v območju ultravijolične svetlobe. Kako smo vseeno lahko izmerili valovno dolžino meje vidne svetlobe v tem območju? To izvemo, če se malo bolj poglobimo v pojav razklona na stekleni prizmi.

Steklo je prozorna snov, skozi katero svetloba potuje z manjšo hitrostjo kot skozi zrak. Količnik hitrosti svetlobe v praznem prostoru c_0 in hitrosti v steklu c je lomni količnik $n = \frac{c_0}{c}$. Svetloba se zaradi spremembe hitrosti lomi na prehodu meje med zrakom in steklom, tako da velja lomni zakon $\sin\alpha = n\sin\beta$. Za lomni količnik zraka smo vzeli kar 1, α je kot med vpadnim žarkom in vpadno pravokotnico, β pa kot med lomljenim žarkom in vpadno pravokotnico. Steklo ima lomni količnik nekoliko večji od 1,5. Lomni količnik lahko natančno izračunamo, če natančno izmerimo kota α in β. Prvega lahko natančno izmerimo, če naredimo vpadni curek bele svetlobe primerno ozek in vzporeden. Kota β pa ne moremo izmeriti natančno, saj se snop vzporednih vpadnih žarkov v steklu razširi v šop žarkov, ki se širijo kot pahljača. Ta pojav imenujemo razklon. Podrobnejši pogled pokaže, da je svetloba v šopu obarvana, na eni strani rdeče, vmes rumeno in zeleno in na drugi strani modro, kot kaže slika 1. Steklo razkloni svetlobo zato, ker je lomni količnik odvisen od barve, torej od valovne dolžine svetlobe. Poleg lomnega količnika pri izbrani valovni dolžini steklo opiše še enostavna mera za razklon, Abbejevo število V_D. Število izračunamo z izrazom $V_D = \frac{n_D-1}{n_F-n_C}$. V izrazu nastopajo lomni količniki pri valovnih dolžinah $\lambda_C = 656{,}3$ nm, $\lambda_D = 589{,}3$ nm in $\lambda_F = 486{,}1$ nm. Manjše Abbejevo število pomeni močnejši razklon.



SLIKA 1.
Svetloba se po lomu v steklo razkloni.

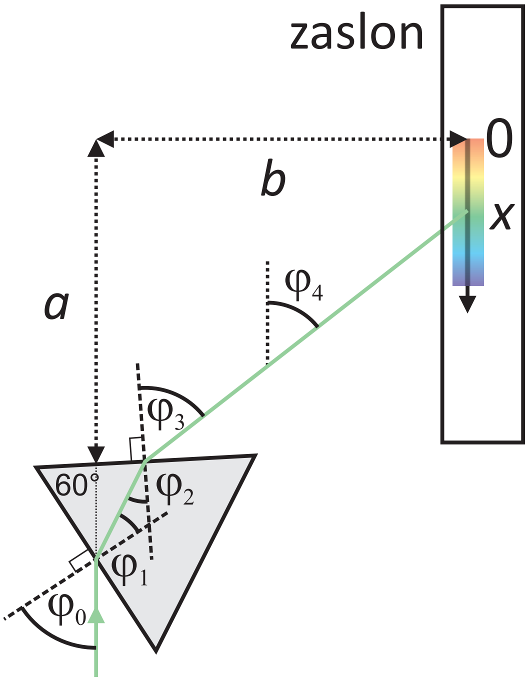
Različna stekla se razlikujejo med seboj po lomnem količniku in Abbejevem številu. Te pare podatkov za množico komercialnih stekel kaže diagram na sliki 2. Voda ima Abbejevo število 56, a je ni na diagramu, ker njen lomni količnik 1,33 leži izven intervala na ordinatni osi. Zrak ima pri standardnih pogojih lomni količnik 1,000277 in Abbejevo število 89. Stekla v grobem ločimo na flintna in kronska stekla. Flintna imajo manjši V_D in večji n kot kronska stekla. Obstaja še nekaj drugačnih vrst stekel, omenimo akrilno steklo, ki ga uporabljajo za umetne leče.



SLIKA 2.
Abbejev diagram, v katerem posamezna točka predstavlja določeno vrsto stekla. Abscisa je Abbejevo število, ordinata pa lomni količnik stekla pri valovni dolžini 587,6 nm [2].

Za naše potrebe pa tako preprost opis loma v steklu ne zadošča. Lomni količnik lahko izmerimo na intervalu valovnih dolžin in primer za našo prizmo kaže graf na sliki 5. Graf na diagramu ni premica, za katero bi zadoščala dva podatka, temveč monotono padajoča krivulja. Krivuljo dobro opišemo z empirično Sellmeierjevo enačbo [3]: $n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}$. B_i in C_i so za dano snov konstante, ki jih imenujemo Sellmeierjevi koeficienti. Za opis komercialnih stekel običajno zadoščajo trije pari koeficientov, ki jih lahko poiščemo na spletu [4].

Pri poskusu, opisanem v [1], smo svetlobo razklonili na njene spektralne komponente s stekleno prizmo tako, da smo ozek curek bele svetlobe usmerili na eno stranico prizme. Curek se je ob dveh lomih pahljačasto razklonil in na zaslonu naredil mavrični trak. Valovno dolžino meje vidne svetlobe očesa smo želeli določiti iz lege vidnega roba na mavričnem traku. Kako je koordinata v mavričnem traku povezana z valovno dolžino svetlobe, ki to točko osvetljuje? Na to vprašanje odgovorijo lomni zakon in geometrija poskusa. Tloris poskusa kaže slika 3. Skica ni v pravem merilu, saj sta zaradi preglednosti a in b narisana dvajsetkrat manjša, kot sta bila pri poskusu, razklon pa je narisan ustrezno večji. Zaslon je stal vzporedno z vpadnim curkom svetlobe na razdalji b od curka. Os x, vzdolž katere želimo meriti valovno dolžino, teče po zaslonu tako, da je izhodišče pri svetlobi rdeče barve z valovno dolžino 700 nm, usmerjena pa je proti krajšim valovnim dolžinam.



SLIKA 3.
Skica tlorisa poskusa, curek bele svetlobe vstopa v prizmo spodaj pod kotom $\varphi_0 = 56{,}4^\circ$ glede na pravokotnico stranske ploskve prizme. Žarek svetlobe z valovno dolžino λ se med prehodom prizme dvakrat lomi in doseže zaslon v točki s koordinato x.

Pri poskusu smo uporabili halogensko žarnico. Mavrični trak, ki je nastal pri poskusu, kaže slika 4. S pisalom so označene valovne dolžine, ki smo jih izmerili s spektrometrom. Koordinate valovnih dolžin C, D in F določimo z linearno interpolacijo med izmerjenimi točkami. Lomni količnik izračunamo za dano koordinato x s sledečim premislekom. Curek bele svetlobe vpada na prizmo pod vpadnim kotom φ_0 in se lomi v prizmo pod kotom φ_1, za katerega velja lomni zakon $\sin\varphi_0 = n\sin\varphi_1$. Lomljeni žarek vpada na nasprotno stranico prizme pod kotom $\varphi_2 = 60^\circ - \varphi_1$ in se lomi ven iz prizme pod kotom φ_3, za katerega velja $\sin\varphi_3 = n\sin\varphi_2$. Žarek se med prehodom skozi prizmo odkloni od prvotne smeri za kot $\varphi_4 = \varphi_3 + \varphi_0 - 60^\circ$. Zaslon je vzporeden z vpadnim curkom in oddaljen za $b = 250$ cm. Žarek vpade na zaslon na razdalji $a - x$ naprej od prizme ($a = 210$ cm). Dimenzije prizme lahko v primerjavi s temi razdaljami zanemarimo in kot φ_4 je potem podan tudi s $\operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{b}{a-x}$. S temi preprostimi zvezami lahko povežemo koordinato x na mavričnem traku z lomnim količnikom stekla z izrazom

$$n(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\sin\left(\arctan\left(\frac{b}{x-a}\right) - \varphi_0 + 60^\circ\right)\right)^2 + \sin\left(\arctan\left(\frac{b}{x-a}\right) - \varphi_0 + 60^\circ\right)\sin\varphi_0 + \sin^2\varphi_0}.$$

Z znanimi koordinatami valovnih dolžin C, D in F iz gornjega izraza izračunamo ustrezne lomne količnike: $n_D = 1{,}678$, $n_F = 1{,}693$ in $n_C = 1{,}672$. Iz teh vrednosti izračunamo Abbejevo število 32. Vidimo, da podatkoma $n \approx 1{,}7$ in $V_D \approx 32$, v diagramu na sliki 2 ustreza gosto flintno steklo številka 5 (SF 5). Sellmeierjeva enačba stekla SF 5 je:

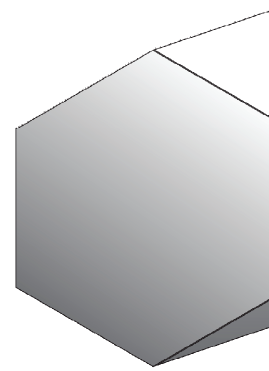
$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{1{,}52481889\lambda^2}{\lambda^2 - 0{,}011254756\ \mu\mathrm{m}^2} + \frac{0{,}187085527\lambda^2}{\lambda^2 - 0{,}0588995392\ \mu\mathrm{m}^2} + \frac{1{,}42729015\lambda^2}{\lambda^2 - 129{,}141675\ \mu\mathrm{m}^2}}.$$

Graf enačbe je na sliki 5.

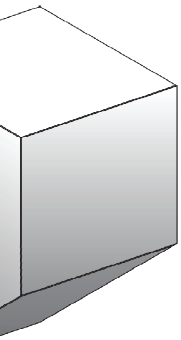
18 nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka

ČASTNI NASLOV MUSLIMANA, KI ZNA KORAN NA PAMET
GLAVNO MESTO KRETE
DRUGI RIMSKI PAPEŽ
AM. ANTROPOLOG NEMŠKEGA RODU (FRANZ)
ITALIJAN. KNEŽJA RODBINA IZ ISTOIM. MESTA
TIK OB IT. MEJI SE NA OBALI NAHAJA DEBELI ?
ŽENSKO POKRIVALO, V MODI MED OBEMA VOJNAMA
POMEMBEN NEMŠKI MATEMATIK (DAVID)
5
ITALIJAN. KOMEDIOGRAF (LUDOVICO)
ZAGRIZENEC, PRENAPETEŽ
SOSEDI ČRKE J
KRAJ PRI PORTOROŽU
OZNAČBA
NASPROTJE DOBREGA
REKA V SZ. BOSNI, NAJVEČJI PRITOK UNE
ODPORNOST MATERIALA PROTI DEFORMACIJI
ANTIČNO POSLOPJE ZA GLASBENE PRIREDITVE
BIVANJE V HOTELU Z ZAJTRKOM IN VEČERJO
NAŠ NEKDANJI BIATLONEC (BOŠTJAN)
IZHOD
STAROGR. MATEMATIK IN ASTRONOM



ITALIJAN. MATEMATIK, KI JE POSTAVIL AKSIOME MNOŽICE NARAVNIH ŠTEVIL (GIUSEPPE)
ZAPOREDNI ČRKI
VISOK ANGLEŠKI PLEMIČ
POLOTOK V JUGOVZHODNI AZIJI, KOPENSKI DEL MALEZIJE
HRANILNIK ELEKTRIČ. ENERGIJE V VOZILU
SPLETNA DOMENA TURČIJE
FRANCOSKI FILMSKI KOMIK
TRUŠČ, HRUP
MESTO NAJVEČJE KONCENTRACIJE SILNIC
MATEMAT. STRUKTURA IZ VRSTIC IN STOLPCEV
SVETLA ZVEZDA JUŽ. NEBA
TEŽKA HOJA
SINTETIČNA SUROVINA ZA LAKE
UGLAJEN MOŠKI
IZVAJALKA ZAHTEVNIH GIMNASTIČNIH PRVIN
9
ONE
NEMŠKA KONCEPT. UMETNICA (HANNE)
ŠVICARSKI HOTELIR (CESAR)
MEDOVITA ŽITARICA
4
LUTECIJ
KRAŠKI POŽIRALNIK
OVČJE MESO, OVČETINA
DANILO SLIVNIK
NOBELIJ
SKLADATELJ IN DIRIGENT FIRŠT
VZVIŠEN CERKVENI PROSTOR, PREDHODNIK PRIŽNICE
ZGORNJI DOM AMERIŠKEGA KONGRESA
6
TELESNI IZLOČEK SKOZI KOŽO
PRIJAVNINA ZA NASTOP NA TEKMI
REKA V PRAGI
KUPOLAST ŠOTOR SREDNJEAZIJSKIH NOMADOV
TUR
NAJVEČJE NASELJE V LOŠKEM POTOKU
ITALIJAN. ZNAMKA GOSPODARSKIH VOZIL
SPLETNA DOMENA ITALIJE
SLOVENSKI ANSAMBEL
RAZKOŠNO BIVALIŠČE VLADARJA
RUSKO-IZRAELSKA ŠAHISTKA KUŠNIR
KVARNERSKI OTOK
HRVAŠKO MESTECE OB DONAVI
NAŠ PROIZVAJALEC FOTOVOLTAIČNIH MODULOV
ARKTIČNA AMERIŠKA DRŽAVA
SREDNJEV. BOLEZEN
SREDNJEVEŠKI PREZIJSKI UČENJAK, POMEMBEN ZA MEDICINO
SREBLJAJ PIJAČE
8
CESTNI ZAVOJ
FILM VLADA ŠKAFARJA
LADJA ZA PREVOZ NAFTE
GR. MITOL. PODZEMLJE
ZGODNJEKRŠČANSKI ASKET, ŽIVEČ NA STEBRU
KOVANEC
IGRALEC PACINO
MERILNA IZBOKLINA NA STRELNI CEVI
NEKDANJI KENIJSKI TEKAČ (HENRY)
ŽENSKA SPOLNA CELICA
RASTLINA TOPLIH KRAJEV, KI CVETI LE ENKRAT
POLTRAK, KI OMEJUJE KOT
AMERIŠKA BORKA ZA ČLOVEKOVE PRAVICE ROOSEVELT
ŠPANSKI TENISAČ (RAFAEL)



KRIVULJA, KI JO NARIŠE OBOD KOTALEČEGA KROGA PO KROŽNICI (OBLIKA PISAVE)

ŽENSKA Z MOČNO POVEČANO ŽLEZO ŠČITNICO

PRIPADNIK SEVERNO-AMERIŠK. INDIJAN. PLEMENA

PLAZILCI BREZ OKONČIN

MADŽARSKI PESNIK EPOV IN BALAD (JANOS)

USTANO-VITELJ SIKHIZMA, VEČNI GURU

7

VERSKI POGLAVAR IZMAE-LITOV

VISOKA VLAŽNOST ZRAKA POLETI

FEVDALNI PODLOŽNIK

MEDIJSKA ODMEVNOST

LANTAN

TUJA IN NAŠA ČRKA

MATEMATIK SUHADOLC

REKA V SEVERO-ZAHODNI NEMČIJI

TEŽKA SVILENA TKANINA Z VTKANIM VZORCEM

IME TRI-NAJSTIH PAPEŽEV

CESTNO KRIŽIŠČE NAD VIPAVSKO DOLINO

MATEMATIK VIDAV

JANEZ ERŽEN

GLAVNO MESTO GANE (IZVIRNI ZAPIS)

OSVEŽILNA PIJAČA IZ SADJA IN VINA

ŽIDINJA

LINEARNA, KVADRATNA, DIFEREN-CIALNA, PLINSKA ?

GOSPO-DARSKA DEJAVNOST ZA PREVOZ BLAGA

GOSPO-DINJSKO OPRAVILO

VRH NAD SOVODNJEM

OZIRALNI ZAIMEK

2

IGRALKA KRAVANJA (ITA RINA)

RIMSKA LJUBLJANA

VELIKA MORSKA RIBA

SRBSKA PEVKA

IZGINOTJE VODE ZA-RADI SUŠE

BESEDA POTRDITVE PRI MOLITVI

SLAVNOST-NA PESEM

DELITEV TOČKE PRI ŠAHU

AKTINIJ

IRIDIJ

FIN. TEKAČ (PAAVO)

AMERIŠKI BOKSAR (SONNY)

NAŠ SKLA-DATELJ (BLAŽ)

NEKD. UMET. SKUPINA

POMEN

ŠIROKO UPORABNA STROČNICA

OTOK V GVINEJ. ZALIVU

NADLEŽEN GODRNJAČ

NIELS BOHR

ZAPOREDNI ČRKI

PERZIJSKI UPRAVITELJ JUDEJE ZA ČASA ARTA-KSERKSA

3

LOGIČNI ZAKLJUČEK

PESNIK SLOVENSKE MODERNE (DRAGOTIN)

MADŽARSKI PLAVALEC (LASZLO)

PROSTOR V CIRKUSU

BOLE-ZENSKA OHLAPNOST MIŠIC

AVTOR: MARKO BOKALIČ

BODIČAST RASTLINSKI IZRASTEK

MATEMATIK PRIJATELJ

OZNAKA ZA DELO

KROŽNIK ELIPSASTE OBLIKE

JAPONSKI GINEKOLOG (KJUSAKU)

ZODIAKALNO OZVEZDJE

PRIPADNIK IZUMRLE VEJE VZHODNIH SLOVANOV

DRUGA MOŽNOST PRI IZBIRI

ALUMINIJ

1

NAJVIŠJA GORA NA SICILIJI

VELIK PRAŠIČJI PODOČNIK

GORSKI VRH V ANG. IMENIH

GRAFIČNO OBLIKO-VANJE MATEVŽ BOKALIČ

ENOTA ZA ELEKTRIČNO NAPETOST

NAGRADNI RAZPIS

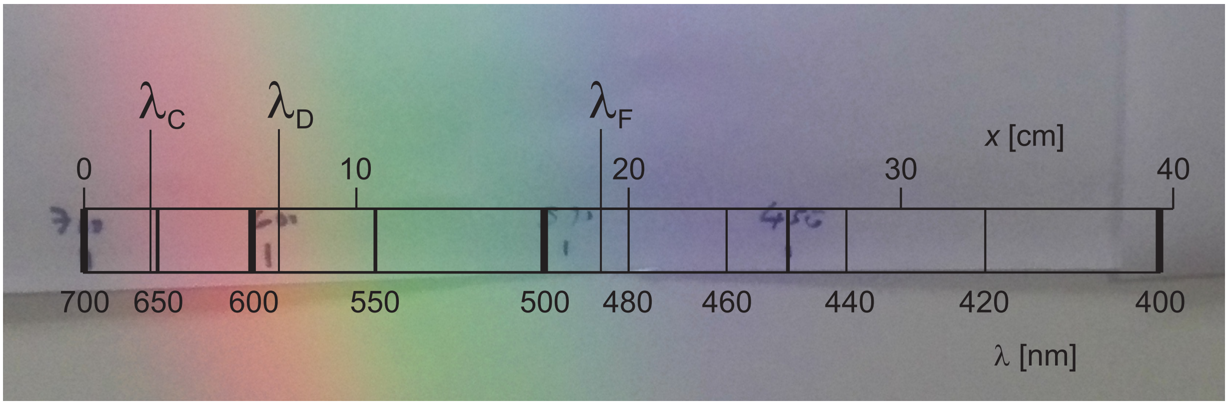
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

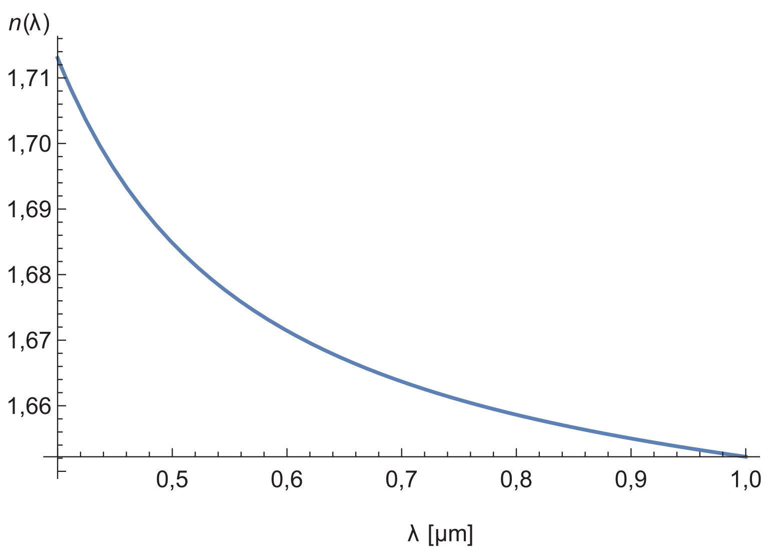
ter ga oddajte do **1. maja 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

15 nadaljevanje s strani



SLIKA 4.
Mavrični trak, ki je nastal pri razklonu svetlobe halogenske žarnice s trikotno stekleno prizmo pri poskusu, ki ga kaže slika 3. Označena je os x, razdalje na njej so v centimetrih. Pod njo je izračunana os valovnih dolžin. S pisalom so označene valovne dolžine, ki smo jih določili s spektrometrom, koordinate valovnih dolžin C, D in F pa smo določili z linearno interpolacijo.

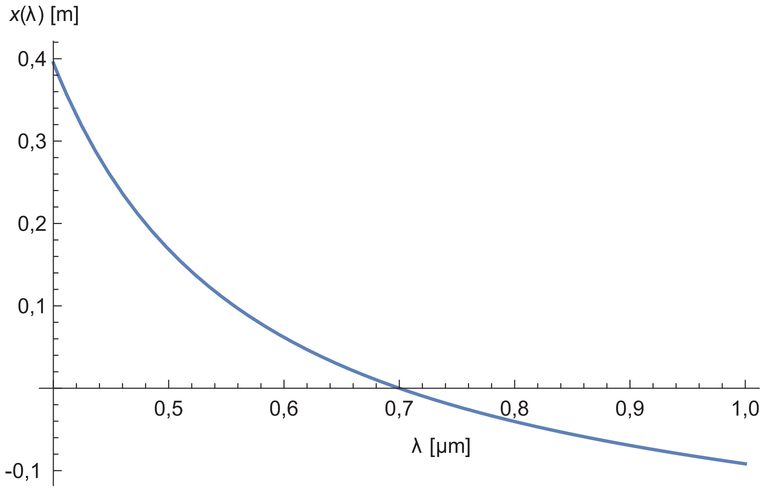


SLIKA 5.
Lomni količnik flintnega stekla 5 (SF 5) v intervalu valovnih dolžin okoli vidne svetlobe. Lomni količnik je manjši za večje valovne dolžine (za rdečo je manjši kot za modro), odvisnost pa ni izrazita. Na prikazanem intervalu se lomni količnik spremeni le za slabe 4 odstotke (kar poglejte interval na ordinatni osi).

Koordinato točke na mavričnem traku izračunamo za izbrano valovno dolžino z izrazom

$$x = a - \frac{b}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(n(\lambda)\sin\left(60^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin\varphi_0}{n(\lambda)}\right)\right)\right) + \varphi_0 - 60^\circ\right)}.$$

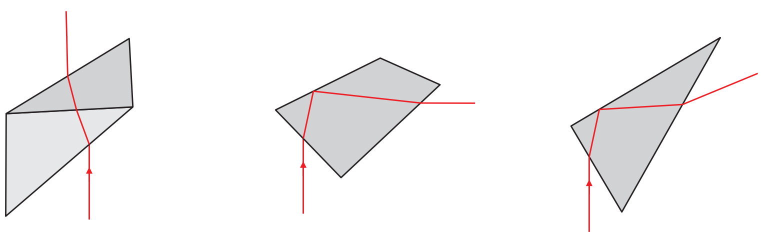
Odvisnost koordinate na zaslonu od valovne dolžine se skriva v odvisnosti lomnega količnika od valovne dolžine (Sellmeierjeva enačba). Na videz zapletena enačba vsebuje le osnovne matematične operacije in funkcije, ki jih za nas brez težav izračuna in izriše (slika 6) računalnik. Izraza, s katerim bi izračunali valovno dolžino za izbrano koordinato, ne moremo enostavno zapisati. Zato valovno dolžino raje kar odčitamo z grafa na sliki 6. Vidimo, da koordinata $x = 0$ ustreza rdeči svetlobi z valovno dolžino 700 nm, tako kot smo izbrali izhodišče koordinatnega sistema. Ker smo uspeli določiti lastnosti stekla v intervalu, ki je dosegljiv spektrometru, lahko uporabljamo graf tudi izven tega območja.



SLIKA 6.
Koordinata točke v odvisnosti od valovne dolžine svetlobe, ki osvetljuje to točko. Krivulja omogoča, da za poljubno koordinato x najdemo ustrezno valovno dolžino λ in obratno. Tako umerimo skalo valovnih dolžin po koordinatni skali x.

Mavrični trak lahko opremimo s skalo valovne dolžine (kakor na sliki 4), iz katere neposredno odčitamo valovno dolžino. Skala ni linearna, saj koordinata ni sorazmerna valovni dolžini. V tehniki pogosto uporabljamo tabele ali grafe, kadar nas zanima sovisnost dveh količin. Z njimi se izognemo zahtevnim analitičnim izrazom.

Razklon v steklu ni izrazit in belo svetlobo razgrne v dokaj ozko pahljačo. V spektrometru želimo pahljačo čim bolj razgrniti, da bo spektralna ločljivost boljša. Pomagamo si z več zaporedno postavljenimi prizmami, kot je Amicijeva prizma, ali pa s prizmami, v katerih s popolnim odbojem ali zrcaljenjem dosežemo večkratni razklon, npr. Pellin–Brocova prizmi ali Abbejeva prizma.



SLIKA 7.
Različne spektrometrske prizme, kjer večjo kotno razpršenost dosežemo s kombiniranimi prizmami ali pa odbojem na eni od stranic: A Amicijeva prizma, B Pellin-Brocova prizma, C Abbejeva prizma.

Ugotovili smo, da lahko z razklonom na stekleni prizmi tudi merimo valovne dolžine svetlobe. Je pa zveza med kotom, pod katerim se lomi žarek, in valovno dolžino precej bolj zapletena kot pri uklonski mrežici, kjer velja enostavna zveza $d \sin \Theta = N\lambda$. Pri uklonski mrežici je d razdalja med sosednjima režama, N red ojačitve in Θ kot med smerjo vpadnega ter smerjo uklonjenega žarka.

Literatura

[1] A. Mohorič in J. Rakovec, *Siva mrena*, Presek **48** (2020/2021) 4, 13–15, 18.

[2] *Interactive Abbe Diagram*, dostopno na `www.schott.com/advanced_optics/english/knowledge-center/technical-articles-and-tools/abbe-diagramm.html`, ogled 12. 10. 2020.

[3] W. Sellmeier, *Annalen der Physik und Chemie*, 223 (11): (1872), 386–403.

[4] `refractiveindex.info/?shelf=glass&book=SF5&page=SCHOTT`, ogled 28. 8. 2020.

× × ×

Gibanje Zemlje in merjenje časa

Jure Japelj

→ **Spremenljivo nočno nebo in letni časi sta le dve izmed mnogih posledic gibanja Zemlje. Kljub temu, da se o gibanju Zemlje učimo že od malih nog, pa je vseeno tako neintuitivno in v nasprotju z vsakodnevnim izkustvom, da moramo za njeno razumevanje napraviti kar nekaj miselnih akrobacij. V tem prispevku si poglejmo, kako se Zemlja giblje v Osončju in kakšne posledice ima gibanje na naš vsakdan.**

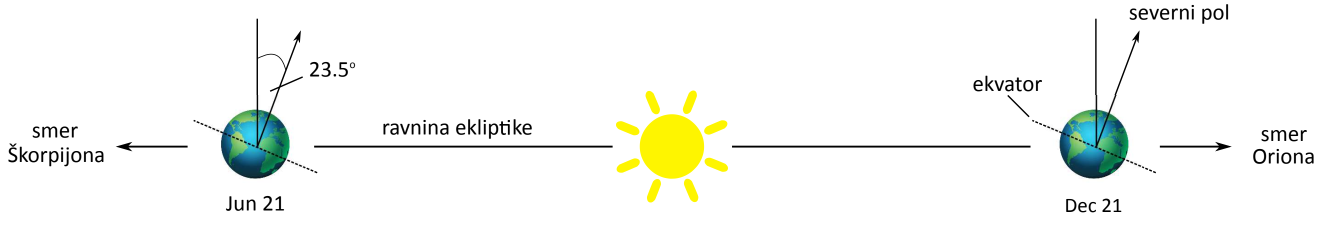
Starodavne civilizacije so že davno tega spoznale, da so nebesni pojavi ciklične narave. Opazovali so Lunine mene, navidezno pot Sonca po nebu ter spreminjanje položaja ozvezdij na nočnem nebu. Poznavanje nebesnega gibanja je vodilo do prvih koledarjev, s katerimi so si ljudje pomagali pri načrtovanju sajenja in pobiranja pridelkov. Starodavni astronomi so v tisočletjih podrobnih sistematičnih opazovanj neba prepoznali številne vzorce in uspeli dokaj natančno napovedati gibanje nebesnih teles, med drugim tudi Sončeve in Lunine mrke.

Pravo razumevanje naravnih pojavov je prišlo z zavedanjem, da Zemlja ni statična, temveč se giblje. Potreben je kar precejšen miselni preskok, da sebe kot opazovalca postavimo v gibajoč sistem. Kljub posameznim brilijantnim dognanjem antičnih matematikov in astronomov je do širšega soglasja o medsebojnem gibanju Zemlje, Sonca in planetov prišlo šele proti koncu šestnajstega stoletja. Danes vemo, da se Zemlja vrti okoli svoje osi ter kroži okoli Sonca. Naša najbližja zvezda se giblje okoli centra Galaksije, ta pa je prav tako del širšega kozmičnega plesa galaksij. A za nas najpomembnejše je gibanje Zemlje v Osončju, na kar se osredotočamo v tem prispevku.

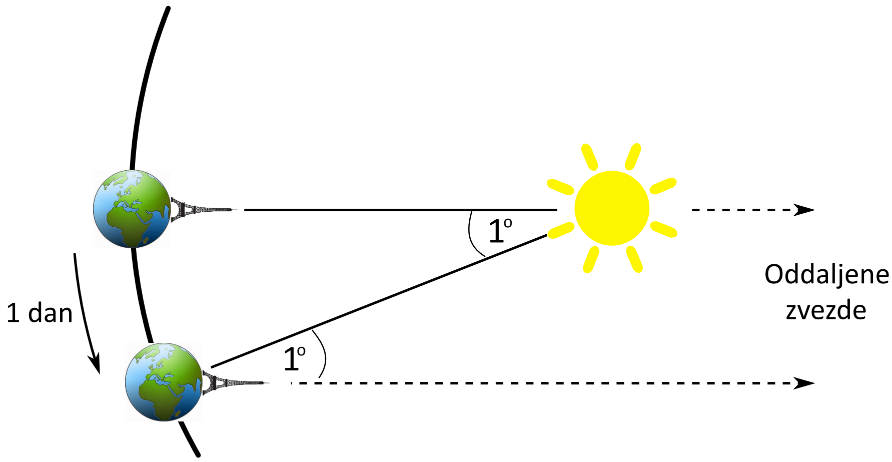
V nadaljevanju predpostavljamo, da se opazovalec nahaja na severni zemeljski polobli.

Sončev in zvezdni čas

Zemlja se giblje okoli Sonca v *ekliptični* ravnini (slika 1). Obenem se vrti tudi okoli svoje osi. Le tisti del Zemlje, ki je v danem trenutku obrnjen proti Soncu, je osvetljen. Prva posledica tega gibanja je torej izmenjavanje dneva in noči. Zemlja se vrti od zahoda proti vzhodu. Za opazovalca na Zemlji torej Sonce



SLIKA 1.
Stranski pogled na ekliptično ravnino. Zemlja se vrti okoli svoje osi, ki je za 23,5° nagnjena glede na ekliptično ravnino.



SLIKA 2.
Zemlja se mora vsak dan zavrteti skoraj za 361°, da z enako stranjo zopet gleda na Sonce.

vzide na vzhodu, doseže najvišjo točko ter nato zaide. Opisana ciklična gibanja so se izkazala za naraven način merjenja časa. Eno leto je čas, v katerem Zemlja enkrat obide Sonce. Dan pa je definiran kot povprečen čas med dvema zaporednima prehodoma Sonca, najvišje točke na nebu. Taki definiciji dneva pravimo *Sončev* dan, ki traja 24 ur[1].

Za potrebe orientacije na nebu si je uporabno predstavljati, da Zemljo obdaja ogromna nebesna sfera, na katero so pritrjene zvezde. Ker stojimo na vrteči Zemlji, se nam med nočnim opazovanjem neba zdi, da se nebesna sfera vrti. Zvezde krožijo okoli navidezno nepremične točke v bližini zvezde Severnice. To je točka, kamor kaže os vrtenja Zemlje ali severni pol. Če bi natančno opazovali položaje zvezd, bi izmerili, da Zemlja za en obhod okoli svoje osi potrebuje dobrih 23 ur in 56 minut, kar imenujemo zvezdni ali *siderski* dan. Siderski dan, merjen relativno na oddaljene zvezde, se torej razlikuje od Sončevega dneva. Zakaj takšna razlika?

Zemlja naredi en obrat ali 360° v siderskem dnevu. A v tem času je Zemlja potovala okoli Sonca, pri čemer se je premaknila za nekaj manj kot stopinjo (slika 2). Zemlja se mora zavrteti za skoraj 361°, če želimo, da Sonce za opazovalca najvišjo točko na nebu doseže ob istem času ob dveh zaporednih dnevih. Planet potrebuje približno štiri minute, da se zavrti za dodatno stopinjo. Opazimo, da ima sidersko leto en dan več od Sončevega. To lahko zapišemo z enačbo

$$\frac{P}{\tau_\star} - \frac{P}{\tau} = 1, \qquad (1)$$

oziroma

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_\star} - \frac{1}{P}, \qquad (2)$$

kjer je P čas obhoda Zemlje okoli Sonca (ali perioda), $\tau_\star$ je trajanje siderskega dne, τ pa Sončevega dne.

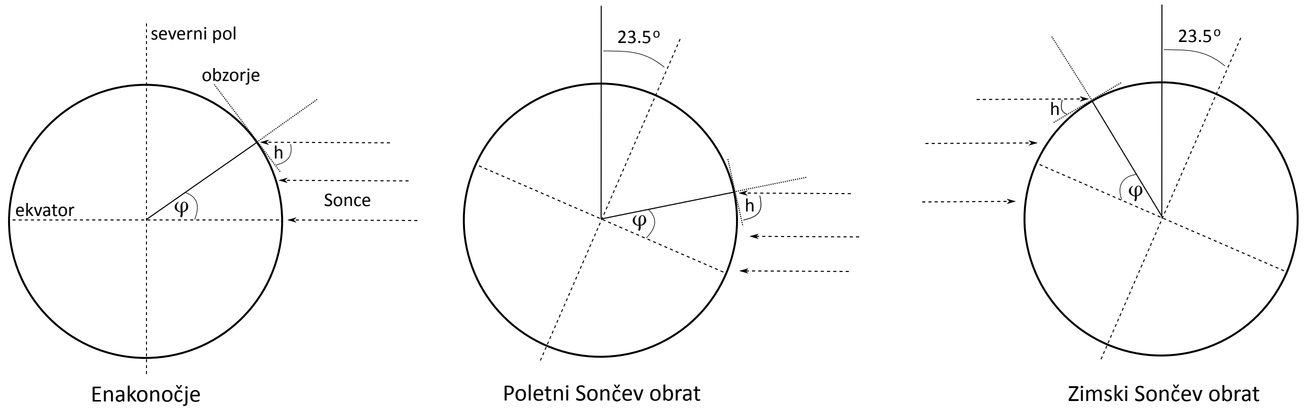
Praktična posledica razlike med siderskim in Sončevim dnevom za zvezdogleda je, da določena zvezda vsako noč vzide štiri minute bolj zgodaj kot prejšnjo noč. Čez leto se zato spreminjajo tudi ozvezdja, ki jih vidimo na nebu. V zimskih mesecih je visoko na nebu ozvezdje Oriona, medtem ko v poletnih nad nami kraljuje ozvezdje Škorpijona.

Nagnjena os vrtenja in letni časi

Zemljina os vrtenja ni pravokotna na ekliptično ravnino, temveč nagnjena za 23,5° od navpičnice (slika 1). Nagnjena os je glavni vzrok za pojav letnih časov na Zemlji, saj v veliki meri določa, kako se Sonce giba po nebu skozi leto.

Če vsak dan ob istem času opazujemo Sonce, opazimo, da se njegov položaj na nebu spreminja. Poleti je Sonce višje na nebu kot pozimi. Višina Sonca je odvisna tudi od geografske širine, na kateri se nahajamo. Odvisnost spreminjanja višine med letom

[1]Egipčani so dan razdelili na 24 ur, kar je delno posledica vzhajanja določenih zvezd na nebu, delno pa njihovega štetja, ki je temeljilo na osnovi 12 namesto 10. Zaradi zapletenega gibanja se je dolžina egipčanske ure spreminjala. Grki so privzeli 24-urni dan ter z natančnimi meritvami določili fiksno dolžino ure.

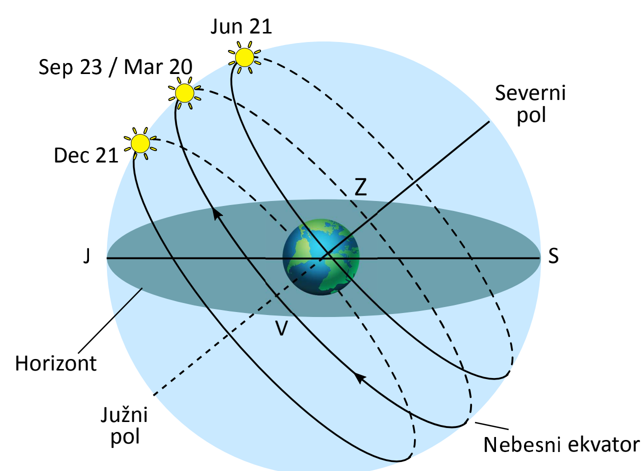


SLIKA 3.
Višina Sonca na nebu h za opazovalca na geografski širini φ ob enakonočju (levo), poletnem solsticiju (sredina) in zimskem solsticiju (desno).

je razložena na sliki 3 ob treh mejnih primerih (za boljšo predstavo se ozrite tudi na sliko 1, sliko 4 in sliko 5). Pot Sonca na nebu skozi leto, imenovana *ekliptika*, se pomika severno in južno od ekvatorja. Ekvator prečka dvakrat, in sicer okoli 20. marca in 23. septembra. Dogodka imenujemo enakonočje ali ekvinokcij. Če Zemljina os vrtenja ne bi bila nagnjena, bi Sonce vedno ostalo nad ekvatorjem. Zaradi nagnjenosti pa Sonce navidezno potuje severno od ekvatorja in okoli 21. junija, ob poletnem Sončevem obratu ali solsticiju, doseže najvišjo točko. Nato se začne njegova pot proti jugu, ob jesenskem enakonočju prečka ekvator in okoli 21. decembra, ob zimskem Sončevem obratu, doseže najnižjo točko.

Sedaj je jasno, zakaj imamo na Zemlji letne čase. Sonce je precej višje na nebu med poletnim kot zimskim Sončevim obratom. To pomeni, da je Sonce dalj časa na nebu–poleti je dan veliko daljši kot pozimi– in je severna polobla osvetljena dalj časa. Še več, snop svetlobe s Sonca poleti na Zemljo pada pod večjim kotom kot pozimi, zato je prejeta količina svetlobe na enoto površine večja (glej nalogo 4).

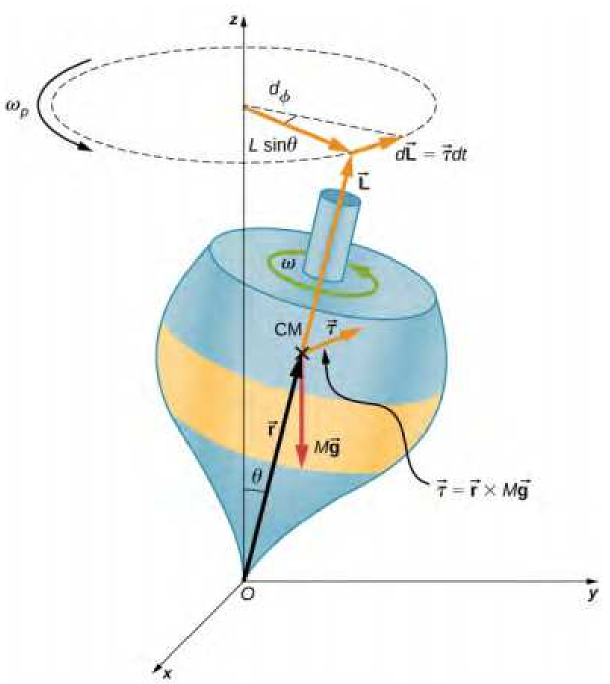
Velja omeniti, da se Zemlja okoli Sonca giblje po eliptični orbiti, zato se tako njena hitrost kot oddaljenost od Sonca skozi leto spreminjata. Zmotno je naivno prepričanje, da so letni časi posledica eliptične orbite. Pravzaprav je Zemlja Soncu najbližje januarja, najdlje pa julija. Je pa pri razumevanju poti Sonca po nebu vseeno potrebno upoštevati učinek eliptične orbite, ki vsekakor ni zanemarljiv. Pot Sonca po nebu moramo razumeti za učinkovito uporabo sončnih elektraren, arhitekturo in za modeliranje klimatskih sprememb.



SLIKA 4.
Spreminjanje položaja Sonca na nebu kot posledica nagnjenosti Zemljine osi vrtenja. Nebesni ekvator je ravnina, v kateri leži Zemeljski ekvator (glej tudi sliko 6).

Zemlja kot vrtavka in gibanje pomladišča

Zaradi vrtenja Zemlja nima popolne sferične oblike temveč je na ekvatorju izbočena. Luna in Sonce s svojim gravitacijskim privlakom poskušata poravnati Zemljin ekvator z ekliptično ravnino: vsota sil kaže pravokotno na ekliptično ravnino. A Zemlja se ne da. Posledično je njeno gibanje dokaj zapleteno. Lahko si ga ponazorimo z gibanjem vrtavke (slika 5[2]). Če nevrtečo vrtavko postavimo pod kotom na ravno površino, bo navor sile gravitacije vrtavko prekucnil. Vrteča vrtavka pa ima vrtilno količino, ki kaže v smeri osi vrtenja. V tem primeru se začne vrtavka vrteti okoli navpičnice, ker je navor vzporeden s površino in pravokoten na smer vrtilne količine. Takemu gibanju pravimo precesija.



SLIKA 5.
Ilustracija precesije vrtavke. Sila gravitacije, delujoč na masno središče, ustvari navor $\vec{\tau}$ v smeri pravokotno na vrtilno količino $\vec{L}$. Velikost vrtilne količine se ne spremeni, se pa spremeni njena smer. (Vir: OpenStax)

Ravno tako kot vrtavka tudi Zemlja precesira (slika 6) s periodo okoli 26000 let. Praktično to pomeni, da os vrtenja ne kaže ves čas v isto smer, temveč počasi, s kotno hitrostjo $\sim 1^\circ$ na 72 let opisuje krog z radijem 23,5°. Trenutno se nebesni severni pol nahaja 0,7° od zvezde Severnice.

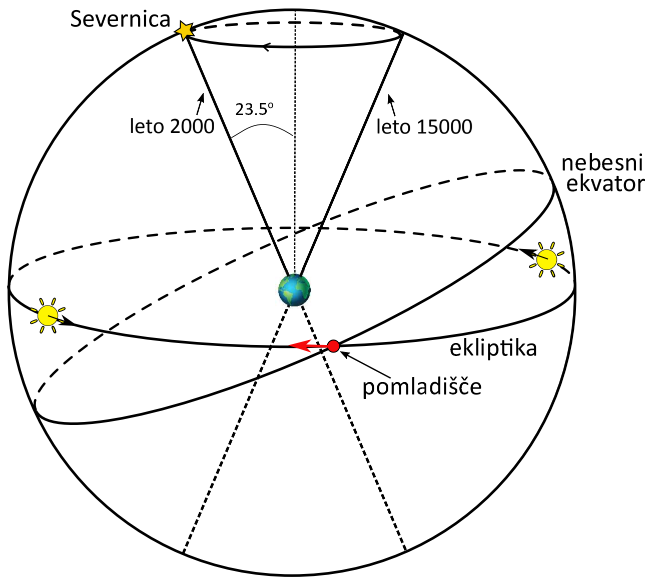
Skupaj z Zemljino osjo se vrti tudi nebesni ekvator (slika 6). To pomeni, da se pomladišče–pomladansko enakonočje oz. točka, kjer se sekata ravnini nebesnega ekvatorja in ekliptike–premika s časom. Vsako leto se pomladišče premakne za približno 50″ glede na zvezde. Sonce tako vsako leto prispe do pomladišča preden naredi celoten krog glede na zvezde. Prvi dan pomladi vsako leto nastopi na zgodnejši datum. Čas med dvema zaporednima obiskoma Sonca v pomladišču imenujemo *tropsko leto*, ki traja 365,2422 dni. *Sidersko leto* po drugi strani traja 365,2564 dni. Kako torej definirati dan? Omenimo, da poleg precesije definicijo dneva onemogoča tudi nestalna hitrost potovanja Zemlje okoli Sonca zaradi eliptične orbite. Ker želimo, da dan v vsakodnevnem življenju vsak dan traja enako dolgo, moramo pri merjenju časa narediti določene popravke. Iz zagate se rešimo tako, da si zamislimo *povprečno sonce*, ki se s konstantno hitrostjo giblje po nebesnem ekvatorju in naredi en obhod v tropskem letu. Ta definicija pomeni, da se letni časi glede na naš koledar ne bodo spreminili: poletje bo vedno nastopilo junija in zima decembra. Spreminja pa se položaj Zemlje v orbiti okoli Sonca, ko nastopi določen letni čas.

Žal gibanje Zemlje vsebuje še dodatne komponente. Luna se giblje okoli Zemlje glede na Sonce, zato se njen vpliv na Zemljino gibanje s časom spreminja. Najmočnejši učinek je *nutacija*, pri kateri Zemljina os koleba s periodo 18,6 let. Spreminja se tudi naklon Zemeljske osi od navpičnice: s periodo 41000 let se naklon spreminja med 22,1° in 24,5°. Obenem se vrtenje Zemlje okoli svoje osi počasi ustavlja zaradi plimske interakcije z Luno.

Osnova merjenja časa je siderski čas, saj ga lahko natančno izmerimo z opazovanjem vzhajanja in zahajanja nebesnih teles. A zaradi zapletenega gibanja Zemlje natančni čas, ki ga uporabljamo v praksi, vsebuje številne popravke.

Ker število dni v letu ni celo število, se tudi koledar sooča s težavami. Ker leto traja približno 365,25 dni, v koledarju pa imamo samo 365 dni, moramo vsake štiri leta imeti prestopno leto. A ker je prava številka →

[2] phys.libretexts.org/



SLIKA 6.
Zemljina os vrtenja v $\sim$ 26000 letih opiše en krog okoli svoje osi. Posledica precesije je premikanje pomladišča.

malenkost drugačna od 365,25, moramo upoštevati še nekaj dodatnih pravil. Prestopno leto imamo vsake štiri leta, razen če je leto deljivo s 100. Edina izjema so leta deljiva s 400; leto 1900 npr. ni bilo, leto 2000 pa je bilo prestopno. Koledar je današnjo podobo dobil leta 1582 (reforme papeža Gregorja XIII). Tudi gregorijanski koledar ni popoln: čez približno 3300 let bo razlika s tropskim letom štela en dan.

Zaključek

Dobro se je zavedati, da je dinamika nebesnih teles zapletena. Zemlja tu ni nobena izjema; podobna gibanja lahko pripišemo tudi drugim telesom v Osončju. Vse skupaj se zdi še bolj zapleteno, kot je v resnici, zaradi naše potrebe po natančnem merjenju časa. Zanimivo je, kako tesno je človeštvo povezano z gibanjem Zemlje. Ciklične spremembe so v ljudeh vzbudile željo po natančnem opazovanju in napovedovanju naravnih pojavov. Bi se človeški kulturni in tehnološki razvoj odvil drugače, če Zemljina os vrtenja ne bi bila nagnjena in bi bil en dan precej bolj podoben drugemu?

Vprašanja

Naloga 1

Luna se okoli Zemlje giblje v nasprotni smeri urinega kazalca. Njen sončni mesec, obhod okoli Zemlje glede na Sonce, traja 29,5 dni, siderski mesec pa 27,3 dni. Kako dolg bi bil Sončev mesec, če bi se Luna okoli Zemlje gibala v obratni smeri? Predpostavite, da se siderski mesec ne spremeni.

Naloga 2

Hitrost vrtenja Zemlje se ustavlja. Pred 600 milijoni let je za en obrat potrebovala 21 ur. Ob predpostavki, da je hitrost ustavljanja konstanta, izračunajte, kdaj je sidersko leto trajalo točno 365,25 dni.

Naloga 3

Neke noči opazujete zvezdo Betelgezo. Ko jo opazujete naslednjič, se je zvezda okoli Severnega pola zavrtela za 15°. Koliko dni je minilo med prvim in drugim opazovanjem, če je ura v obeh primerih kazala enako?

Naloga 4

Luka želi izmeriti geografsko širino, na kateri se nahaja. 21. junija se odpravi iz mesta na odprto polje kjer izmeri, da je Sonce opoldne 67° nad obzorjem.

- Na kateri geografski širini se nahaja Luka? Pomagajte si s sliko 3.
- Kako visoko bo Sonce opoldne ob jesenskem enakonočju?
- Oceni razmerje osvetljenosti tal 21. junija in 21. decembra. Pri oceni zanemari vpliv atmosfere.
- Kako visoko nad obzorjem lahko Luka ponoči pričakuje Severnico?

× × ×

Dinamično programiranje in problem nahrbtnika

Ines Meršak

→ **Dinamično programiranje je metoda reševanja določenih problemov, ko iščemo najboljši rezultat, npr. najkrajšo pot ali največjo nagrado. Problemi, ki jih lahko rešimo tako, da jih razbijemo na manjše, poiščemo najboljšo rešitev le-teh in te rešitve združimo v rešitev večjega problema, so zelo primerni za dinamično programiranje. Če se nekateri podproblemi prekrivajo, potem uporaba dinamičnega programiranja močno pospeši algoritem za reševanje.**

Zgodovina in poimenovanje

Izvor imena *dinamično programiranje* je nenavaden in zanimiv. Kot bomo videli, ni pri dinamičnem programiranju nič preveč dinamičnega, metoda pa tudi ni neposredno povezana s programiranjem, saj gre pravzaprav za matematično tehniko. Dinamično programiranje je v petdesetih letih prejšnjega stoletja razvil ameriški matematik Richard Bellman in v svoji avtobiografiji [1] opisal razlog za čudno poimenovanje. Petdeseta leta niso bila najboljša za financiranje matematičnih raziskav. Da bi Bellman pridobil financiranje ministrstva za obrambo, je moral s primerno izbranim imenom zakriti, kaj bo v resnici počel. S svojo tehniko je želel reševati probleme optimalnega načrtovanja. A besedo načrtovanje je zamenjal z besedo programiranje. Ker je želel opisati, da se metoda dogaja v več korakih, je izbral še besedo dinamično, delno zato, ker že ima močan fizikalen pomen, in delno zato, ker jo je težko uporabiti v zaničevalnem smislu. Z besedno zvezo dinamično programiranje je bil zadovoljen, saj je bila dovolj generična, da poslanci in ministri niso ugovarjali; financiranje raziskav je bilo tako zagotovljeno.

Ilustrativni primer

Osnovni primer dinamičnega programiranja, ki kaže strukturo ponavljajočih podproblemov, je izračun n-tega Fibonaccijevega števila. Spomnimo se, da so Fibonaccijeva števila definirana z zvezo

- $F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,

torej je vsako naslednje število vsota prejšnjih dveh, pri čemer začnemo z 1, 1. Če bi funkcijo za izračun n-tega števila napisali kot

```
def fib(n):
    if n <= 1: return 1
    else: return fib(n-1) + fib(n-2)
```

in izračunali `fib(5)`, bi dobili zaporedne klice:

- $$\begin{aligned}\mathtt{fib}(5) &= \mathtt{fib}(4) + \mathtt{fib}(3)\\ &= (\mathtt{fib}(3) + \mathtt{fib}(2)) + (\mathtt{fib}(2) + \mathtt{fib}(1))\\ &= ((\mathtt{fib}(2) + \mathtt{fib}(1)) + (\mathtt{fib}(1) +\\ &\quad + \mathtt{fib}(0))) + ((\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0)) + \mathtt{fib}(1))\\ &= (((\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0)) + \mathtt{fib}(1)) +\\ &\quad + (\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0))) + ((\mathtt{fib}(1) +\\ &\quad + \mathtt{fib}(0)) + \mathtt{fib}(1))\end{aligned}$$

V zadnjem izračunu, vidimo, da se kar trikrat ponovi izračun `fib(2)`, kot označeno z zvezdico:

- $$(((\underbrace{\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0)}_{*}) + \mathtt{fib}(1)) + (\underbrace{\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0)}_{*})) + \\ + ((\underbrace{\mathtt{fib}(1) + \mathtt{fib}(0)}_{*}) + \mathtt{fib}(1)).$$

To je primer manjšega podproblema enake oblike. Zato, da bi izračunali `fib(5)`, moramo izračunati `fib(3)` in `fib(4)`, za ta dva pa potrebujemo `fib(3)`, `fib(2)` (dvakrat) in `fib(1)`. Vidimo, da bi `fib(3)` in tudi `fib(2)` pri različnih podproblemih računali večkrat; to je druga lastnost, ki omogoča uporabo dinamičnega programiranja (manjši podproblemi se prekrivajo). Popolnoma nepotrebno in računsko potratno je vsakič znova ponavljati enak izračun za `fib(2)`. Dovolj je le, da ga izračunamo samo enkrat in si zapomnimo rezultat. Ko za `fib(5)` potrebujemo `fib(4)` in `fib(3)`, najprej računamo `fib(4)`. Za to potrebujemo `fib(3)` in `fib(2)` in najprej izračunamo `fib(3)`. Za to potrebujemo `fib(2)` in `fib(1)`. Zopet najprej izračunamo `fib(2)`, za kar potrebujemo `fib(1)` in `fib(0)`, ki ju oba že poznamo, ju seštejemo in dobimo `fib(2) = 2`. S tem smo izračunali prvi del izračuna za `fib(3)`, drugi del, `fib(1)`, pa poznamo po definiciji in tako dobimo `fib(3) = 3`. S tem smo dobili prvi del izračuna za `fib(4)`. Lotimo se računanja drugega dela `fib(2)`. To smo že izračunali: rezultat je enak 2, tako dobimo `fib(4) = 5`. S tem smo izračunali prvi del za izračun `fib(4)`, drugi del pa zahteva izračun `fib(3)`. Vemo, da je rezultat 3 in dobimo `fib(5) = 8`.

Alternativni način računanja, ki je morda v tem primeru lažji, je, da računamo od »spodaj«. Ker vemo, da bomo potrebovali vrednosti `fib` od 0 do 5, jih lahko računamo kar po vrsti, tako da jih imamo vedno na voljo, ko bo potrebno. Če računamo tako, dobimo

- $\texttt{fib}(0) = 1$
  $\texttt{fib}(1) = 1$
  $\texttt{fib}(2) = \texttt{fib}(1) + \texttt{fib}(0) = 1 + 1 = 2$
  $\texttt{fib}(3) = \texttt{fib}(2) + \texttt{fib}(1) = 2 + 1 = 3$
  $\texttt{fib}(4) = \texttt{fib}(3) + \texttt{fib}(2) = 3 + 2 = 5$
  $\texttt{fib}(5) = \texttt{fib}(4) + \texttt{fib}(3) = 5 + 3 = 8.$

V obeh primerih se izognemo dodatnim izračunom. Za izračun `fib(100)` bi potrebovali več ur, za izračun s pomočjo dinamičnega programiranja pa potrebujemo le nekaj milisekund.

Problem nahrbtnika

Oglejmo si še en problem, pri reševanju katerega nam uporaba dinamičnega programiranja da optimalno rešitev. Predstavljajmo si, da smo v vlogi roparja, ki ima s sabo samo en nahrbtnik z omejeno prostornino, iz zlatarne pa želi odnesti čim več predmetov. Kako izbrati predmete?

Podajmo problem malo natančneje in bolj rigorozno: dan imamo nahrbtnik, v katerega lahko damo največ W kilogramov, in n predmetov s celoštevilskimi masami $w_1, \dots w_n$, ki so vredni $p_1, \dots, p_n$. Naš cilj je zložiti predmete v nahrbtnik tako, da bomo v njem imeli največjo vrednost predmetov, seveda upoštevajoč, da je skupna masa predmetov v nahrbtniku manjša ali enaka W. Pri tem predmetov ne smemo deliti: za vsak predmet se odločimo, ali ga vzamemo ali ne. Tak problem nahrbtnika se imenuje tudi 0-1 nahrbtnik.

Morda najprej pomislimo, da bi predmete razvrstiti glede na razmerje vrednosti in mase $\frac{p_i}{w_i}$ tako, da so na začetku tisti, ki imajo največ »vrednosti na kilogram«. Taki rešitvi rečemo *požrešna*, nas pa ne pripelje vedno do optimalne odločitve. Oglejmo si primer.

Recimo, da imamo nahrbtnik, v katerega lahko zložimo $W = 5$ kilogramov, na voljo pa imamo tri predmete, katerih masa in vrednost sta prikazana v tabeli 1.

	vrednost	masa	razmerje
predmet 1	10	4	2,5
predmet 2	7	3	2,33…
predmet 3	4	2	2

TABELA 1.
Prikazan je primer 0-1 nahrbtnika z omejitvijo $W = 5$, kjer požrešna strategija ne deluje.

Če predmete razvrstimo padajoče po razmerju med vrednostjo in maso, ima prvi predmet najboljše razmerje $10/4 = 2{,}5$, nato drugi predmet z razmerjem $7/3 \approx 2{,}33$, najmanjše razmerje pa ima tretji predmet $4/2 = 2$. Če torej vzemamo predmete po vrsti, v nahrbtnik pospravimo prvi predmet, masa našega nahrbtnika je zdaj 4 kilograme, vrednost pa 10. Drugega predmeta ne moremo več vzeti, saj bi skupna masa bila $4 + 3 = 7$, kar je več kot 5 kilogramov, kar je naša omejitev.

Vendar pa to ni najboljša rešitev, ki jo lahko dosežemo s temi predmeti. Če namreč vzamemo drugi in tretji predmet, bo skupna masa našega nahrbtnika še ravno dovoljenih 5 kilogramov, vrednost pa bo 11. Požrešen pristop nas v tem primeru ni pripeljal do prave rešitve.

Ali se lahko problema lotimo z dinamičnim programiranjem? Poskusimo najti rešitev s pomočjo rešitve manjših podproblemov. Lahko se omejimo na manjše število predmetov, namesto da upoštevamo vse predmete naenkrat, in se vprašamo, kakšna bi bila optimalna vrednost, če bi imeli na voljo le en predmet, dva predmeta ipd. Poleg tega lahko kot na podproblem gledamo tudi, če je volumen nahrbtnika, ki ga imamo na voljo, manjši.

Označimo optimalno vrednost problema nahrbtnika z omejitvijo w kilogramov in upoštevajoč predmete $1, \ldots, i$ s $k(w, i)$. Za naš primer si zamislimo najbolj enostaven podproblem: recimo, da imamo na voljo le 1 kilogram prostora v našem nahrbtniku, torej $w = 1$. Vsi trije naši predmeti imajo maso večjo od 1, torej v nahrbtnik ne moremo spraviti nobenega izmed njih. Optimalne vrednosti so torej enake 0 ne glede na to, koliko predmetov upoštevamo (samo prvega, prvega in drugega, vse tri):

- $k(1,1) = k(1,2) = k(1,3) = 0.$

Povečajmo prostornino našega nahrbtnika za 1, torej $w = 2$. Če upoštevamo prvi predmet, ali pa prvi in drugi predmet, bo optimalna vrednost nahrbtnika enaka 0, saj sta oba predmeta pretežka. Če pa upoštevamo vse tri predmete, lahko v nahrbtnik spravimo le tretji predmet. Optimalna vrednost bo v tem primeru torej $p_3 = 4$:

- $k(2,1) = k(2,2) = 0, \quad k(2,3) = 4.$

Za omejitev $w = 3$ je prvi predmet še vedno prevelik. Če upoštevamo prva dva predmeta, je optimalna vrednost ravno vrednost drugega predmeta:

- $k(3,1) = 0, \quad k(3,2) = p_2 = 7.$

Kaj pa, če upoštevamo vse tri predmete? Sedaj imamo dva predmeta, ki bi šla v naš nahrbtnik (drugi predmet in tretji predmet). Vzamemo največjega, torej drugi predmet. Poglejmo še drugače: rešitev, ki upošteva vse tri predmete, lahko sestavimo iz rešitve, ki upošteva prva dva. Torej se pravzaprav odločamo, ali želimo tretji predmet dati v nahrbtnik ali ne. Če ga damo, potem je preostala prostornina nahrbtnika še 1, torej je vrednost nahrbtnika v tem primeru seštevek vrednosti tretjega predmeta in optimalne vrednosti za podproblem z omejitvijo nahrbtnika 1, upoštevajoč prvi in drugi predmet. Če pa ga ne dodamo v nahrbtnik, imamo na voljo še vse 3 kilograme, vrednost našega nahrbtnika je kar optimalna vrednost podproblema za $w = 3$, upoštevajoč prvi in drugi predmet. Optimalna vrednost bo seveda maksimum obeh dveh vrednosti:

- $$\begin{aligned} k(3,3) &= \max\{\underbrace{k(1,2) + p_3}_{\text{vzamemo predmet 3}}, \overbrace{k(3,2)}^{\text{ne vzamemo predmeta 3}}\} \\ &= \max\{0 + 4,\ 7\} = 7. \end{aligned}$$

Na hitro si poglejmo še optimalne vrednosti za $w = 4$. Ko upoštevamo le prvi predmet, ga seveda vzamemo, v nahrbtnik pa potem ne moremo spraviti ničesar več. Če upoštevamo prvi in drugi predmet, ugotovimo, da lahko v nahrbtnik spravimo le enega od teh dveh, torej je bolje vzeti vrednejšega, to je prvi predmet. Podobno ugotovimo, ko upoštevamo vse tri, torej

- $k(4,1) = k(4,2) = k(4,3) = p_1 = 10.$

Sedaj lahko rešimo naš primer za omejitev, ki nas res zanima, $w = 5$. Če upoštevamo le prvi predmet, ga vzamemo; vrednost našega nahrbtnika je 10. Če upoštevamo prva dva predmeta, se torej odločamo, ali bi vzeli drugega, pri čemer bi v nahrbtniku ostala 2 kilograma prostora, kar ne bi bilo dovolj za prvega, ali drugega predmeta ne bi vzeli, v tem primeru bi torej vzeli optimalno rešitev podproblema za $w = 5$, ki smo ga ravnokar izračunali. Ker ima prvi predmet precej boljšo vrednost, je maksimum dosežen pri drugi opciji. Sedaj poglejmo še, kako je, če upoštevamo vse tri predmete. Odločamo se, ali izbrati tretji predmet ali ne. Če ga izberemo, potem imamo na voljo še 3 kilograme, vrednost našega nahrbtnika je torej seštevek vrednosti tretjega predmeta p_3 in optimalne rešitve podproblema nahrbtnika z omeji- →

tvijo $w = 3$, upoštevajoč prva dva predmeta:

- $k(5,1) = p_1 = 10,$
  $k(5,2) = \max\{k(2,1) + p_2, k(5,1)\}$
  $= \max\{0 + 7, 10\} = 10,$
  $k(5,3) = \max\{k(3,2) + p_3, k(5,2)\}$
  $= \max\{7 + 4, 10\} = 11.$

Optimalne rešitve vseh podproblemov lahko tabeliramo, kar je prikazano v tabeli 2. Odgovor na naše vprašanje se skriva desno spodaj, kjer je vrednost nahrbtnika upoštevajoč vse predmete in začetno podano omejitev mase.

w\i	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	4
3	0	7	7
4	10	10	10
5	10	10	11

TABELA 2.
Tabela optimalnih rešitev podproblemov (vrednosti $k(w, i)$) za izbrani primer 0-1 nahrbtnika.

Sedaj razmislimo o problemu v splošnem in poskusimo ugotoviti, kako se manjši problemi uporabijo za reševanje večjega ter poskusimo zapisati splošno rekurzivno formulo. Spomnimo se, da s $k(w, i)$ označimo optimalno vrednost problema nahrbtnika z omejitvijo w kilogramov in upoštevajoč predmete $1, \ldots, i$, pri čemer imamo skupaj N predmetov. Vrednost $k(w, i)$ želimo izračunati s pomočjo rešitve *podproblemov* za različne omejitve nahrbtnikov, kjer upoštevamo samo predmete do $i - 1$. Predstavljajmo si torej, da že imamo rešitve vse podproblemov, kjer upoštevamo samo predmete do $i-1$, za različne omejitve nahrbtnikov od 1 do w.

Na tej točki se želimo odločiti, ali vzeti predmet i ali ne. Če se odločimo, da predmeta ne vzamemo, potem je naša vrednost nahrbtnika enaka vrednosti nahrbtnika $k(w, i - 1)$ z omejitvijo w, upoštevajoč predmete do $i - 1$. Če predmet vzamemo, potem imamo v nahrbtniku le še $w - w_i$ prostora, torej je vrednost našega nahrbtnika enaka seštevku vrednosti predmeta p_i in vrednosti nahrbtnika $k(w - w_i, i - 1)$. Izberemo tisto izmed možnosti, ki da večjo vrednost nahrbtnika. Pri tem moramo upoštevati, da je možnost, da predmet vzamemo, na voljo le, če nam omejitve nahrbtnika to dopuščajo: veljati mora namreč $w \geqslant w_i$, sicer je edina možnost, da ga pustimo. Formula za izračun optimalne vrednosti je tako enaka

- $$k(w,i) = \begin{cases} \max\{k(w,i-1),\ k(w-w_i,i-1)+p_i\}, & \\ \quad \text{če } w \geqslant w_i & \\ k(w,i-1), & \\ \quad \text{sicer} & \end{cases} \tag{1}$$

Za popolno rešitev moramo razmisliti še o končnih pogojih. Podobno kot v primeru, ki smo ga obravnavali prej, je vrednost nahrbtnika z omejitvijo teže 0 enaka 0, saj ne moremo vanj shraniti nobenega predmeta. Prav tako je vrednost nahrbtnika enaka 0, če nimamo na voljo nobenega predmeta ne glede na kapaciteto, ki je na voljo. Zapisano s formulami so robni pogoji enaki

- $$\begin{aligned} k(w,0) &= 0 \quad \text{za vse } w \text{ od } 0 \text{ do } W \\ k(0,i) &= 0 \quad \text{za vse } i \text{ od } 0 \text{ do } N \end{aligned} \tag{2}$$

Rešitev lahko zapišemo tudi s pomočjo programske kode, ki tesno sledi zgornji razlagi. Funkcija `knapsack` spodaj sprejme omejitev W, seznam tež predmetov `weights`, ki hrani $w_1, \ldots, w_N$, ter seznam vrednosti predmetov `prices`, ki hrani vrednosti $p_1, \ldots, p_N$. Vrednosti $k(w, i)$ izračunamo za vse $w = 0, \ldots, W$ in $i = 0, \ldots, W$. Za začetek si pripravimo prazno tabelo, v katere bomo vpisovali vrednosti $k(w, i)$. Nato v dveh zankah nastavimo robne pogoje pri $i = 0$ in $w = 0$, kot smo opisali v enačbi (2). Na koncu po vrsti izračunamo še vse ostale vrednosti $k(w, i)$, pri čemer jih računamo s pomočjo formule (1). Pri tem vrednosti računamo v pravem vrstnem redu, tako da sta pri računanju `k[w][i]` manjša podproblema `k[w][i-1]` in `k[w-w_i][i-1]` že izračunana.

```
def knapsack(W, weights, prices):
    N = len(weights)
    k = [[None for _ in range(N+1)] for _
    in range(W+1)]
    for i in range(N+1):
```

```
    k[0][i] = 0
for w in range(W+1):
    k[w][0] = 0

for w in range(1, W+1):
    for i in range(1, N+1):
        w_i, p_i = weights[i-1],
       prices[i-1]
        if w_i > w:
            k[w][i] = k[w][i-1]
        else:
            k[w][i] = max(k[w][i-1],
      k[w-w_i][i-1] + p_i)

return k[W][N]
```

Ta tehnika računanja reši problem v približno $W \cdot N$ korakih, kar je precej bolj učinkovito, kot če bi preverili vse možnosti. Bralci ste tudi spodbujeni, da preverite, ali podana programska koda izračuna enake številke, kot so dane v tabeli 2. Lahko pa poskusite rešiti primer z npr. petimi ali več predmeti in se prepričate o pravilnosti in enostavnosti postopka.

Literatura

[1] R. Bellman, *Eye of the Hurricane: An Autobiography*, World Scientific, 1984.

× × ×

Rešitev nagradne uganke

Boštjan Kuzman

Bralcem smo v članku 21 aritmetičnih vprašanj o številu 2021 v prejšnji številki zastavili naslednjo uganko: *Za katera naravna števila n se število $n!$ v običajnem desetiškem zapisu konča z natanko 2021 ničlami?* Do 14. marca 2021 smo v uredništvu prejeli dve rešitvi, obe pravilni: iskano število sploh ne obstaja. Uspešna reševalca Ivan Lisac iz Kopra in Andrej Jakobčič iz Novega mesta bosta za nagrado prejela knjigo o teoriji števil iz ponudbe DMFA – založništva. Rešitev, do katere lahko pridemo tudi brez računalnika, je zapisana v nadaljevanju.

Označimo število končnih ničel števila $n!$ z oznako $t(n)$. Kot je bilo opisano že v članku, je število $t(n)$ enako eksponentu prafaktorja 5 v prafaktorizaciji števila $n!$, saj vsaka končna ničla nastane z množenjem para prafaktorjev 2 in 5. Ker je med 1 in n natanko $[\frac{n}{5}]$ večkratnikov števila 5, natanko $[\frac{n}{5^2}]$ večkratnikov števila 25 in tako dalje, lahko za dani n vrednost $t(n)$ izračunamo po De Polignacovi (oziroma Legendrovi) formuli $t(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^k}\right]$.

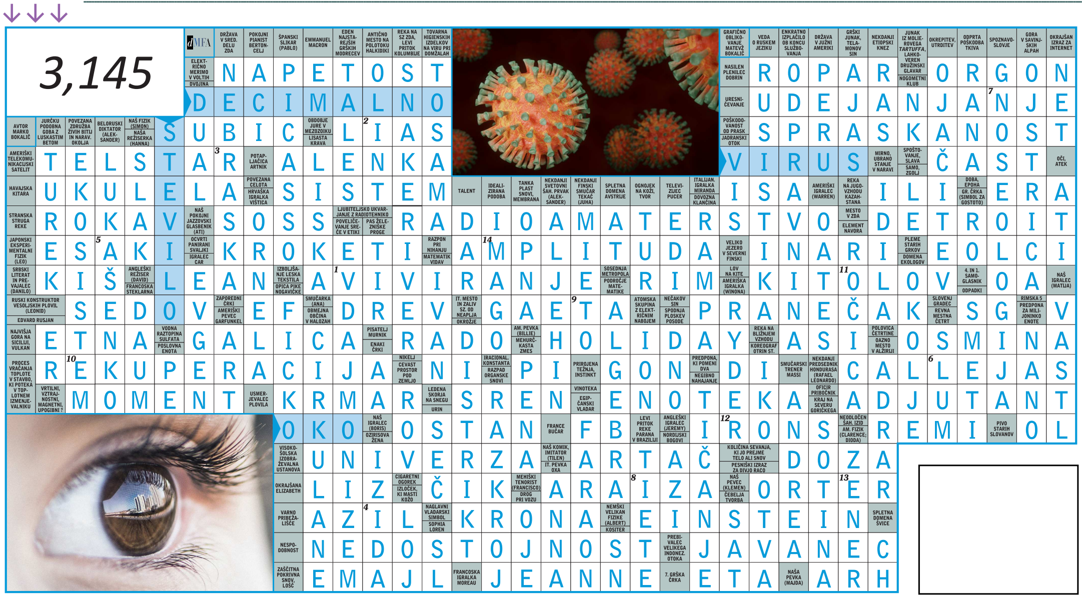
Da bi določili število n z lastnostjo $t(n) = 2021$, je potrebno razmišljati v obratno smer. Števila n seveda ni mogoče direktno izraziti iz enačbe. Ker pa za funkcijo celi del velja $[x] \leqslant x$, lahko z uporabo formule za vsoto geometrijske vrste dobimo oceno

$$t(n) = 2021 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{5^k} = \frac{n}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{n}{4}$$

oziroma $n > 8084$. Za $n = 8085$ zdaj z uporabo De Polignacove formule dobimo $t(8085) = 2018$, torej je treba n nekoliko povečati. Opazimo lahko, da zaradi preštevanja večkratnikov števila 5 velja, da je $t(n) > t(n-1)$, če je n večkratnik števila 5, sicer pa je $t(n) = t(n-1)$. Zato hitro ugotovimo, da je $t(8090) = \ldots = t(8094) = 2019$ in $t(8095) = \ldots = t(8099) = 2020$, toda $t(8100) = 2022$, saj je 8100 deljivo s 25. Dokazali smo, da iskano število n ne obstaja.

Omenimo še, da lahko ročno računanje z De Polignacovo formulo precej pohitrimo z uporabo znane zveze $[n/(ab)] = [[n/a]/b]$, po kateri lahko rekurzivno izračunamo izraze oblike $[n/p^k]$. Za števili $n = 8085$ in $p = 5$ dobimo denimo $[8085/5] = 1617$, $[8085/5^2] = [1617/5] = 323$, $[8085/5^3] = [323/5] = 64$, $[8085/5^4] = [64/5] = 12$, $[8085/5^5] = [12/5] = 2$ in $[8085/5^6] = [2/5] = 0$, od koder sledi $t(8085) = 1617 + 323 + 64 + 12 + 2 + 0 = 2018$.

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 48/4

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz četrte številke Preseka je **Viralni teorem.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Stanko Gajšek iz Ljubljane, Anja Tratnik iz Solkana in Alen Đudarić iz Celja, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Vzorci v ledu

Vesna Pirc Jevšenak

→ Če ste se že kdaj na mrzel dan po sneženju sprehajali ob ribniku ali jezeru, ste morda v ledu na površju opazili čudne vzorce, ki spominjajo na zvezde ali rastlinske cvetove. Take vzorce je bilo moč videti tudi po prvem sneženju letošnje zime. Zakaj pa ti vzorci nastanejo?

Da pride to tega pojava, mora biti zrak nekaj dni pred sneženjem precej mrzel, torej se morajo temperature gibati okoli 0 °C. Pri temperaturi zraka pod to temperaturo se namreč na površju mirujočih voda začne delati led. Če so temperature dolgo časa tako nizke, se tudi voda pod ledom močno ohladi in se naredi debela plast ledu. Ko se čez dan za nekaj ur temperatura dvigne nad ledišče, se nastajanje ledu ustavi, voda pod ledom pa ostane pri nekaj stopinjah nad 0 °C. Ko na tako, nekaj milimetrov debelo plast ledu v kratkem času zapade nekaj centimetrov snega, se ustvarijo idealni pogoji za nastanek zanimivih vzorcev.

Ko se debela plast snega usede na tanko plast ledu, se ta pod težo snežne odeje rahlo potopi v vodo. Pri tem led izpodrine nekaj vode, ki se razlije po snegu. Namočen sneg hitro zamrzne, če je le ozračje dovolj mrzlo. Tak led je na videz bel, saj vsebuje veliko zračnih mehurčkov, na katerih se siplje svetloba. Če pa je temperatura vode pod ledom višja kot 0 °C, ponekod, kjer je led malo tanjši, le-tega stali in zaradi pritiska, ki ga ustvarja snežna odeja, pronica na zamrzujoči sneg. Ker je ta voda topla, še naprej tali sneg in led; luknja se začne širiti. Nekaj časa se širi v obliki kroga, nato pa se začnejo delati kraki in luknja začne dobivati podobo nekakšne zvezde. Sčasoma se voda dovolj ohladi, da ne more več nadaljevati svojega talilnega pohoda, zvezda se neha širiti.

Zdaj so v ledu sicer luknje, vendar tudi te na mrzlem zraku kmalu zamrznejo. Ker pa tu led nastane na drugačen način, torej ne iz snega temveč kar iz vode, je v njem mnogo manj zračnih mehurčkov in

SLIKA 1.
Zanimiva vodna gladina

posledično izgleda temnejši. Tako dobimo izrazite zvezdaste vzorce, ki so na prvi pogled videti skoraj nenaravni. Na fotografiji morda opazite tudi, da so okoli zvezd še nekakšni krogi. Ti so posledica tega, da v vodi poteka konvekcija oz. mešanje. V t. i. konvekcijskih celicah se na sredini voda z dna zaradi manjše gostote dviga proti gladini, na robu konvekcijske celice pa se voda z gladine spušča proti tlom. Na sredini take celice je led malo tanjši, torej temnejši, proti robu pa postaja debelejši in svetlejši. Nad središčem konvekcijske celice se v ledu naredi zvezda, na meji med celicami pa nastanejo črte. Velikost zvezd in krogov okoli njih je torej odvisna od velikosti konvekcijskih celic, ki pa so v globlji vodi po navadi večje kot v plitvi. Zato v globlji vodi, npr. na sredini ribnika ali jezera, nastanejo večje zvezde, v plitvini pa manjše ali celo samo krogi.

Naslednjič, ko bo zapadel svež sneg in bodo vremenski pogoji primerni, se odpravite do bližnjega ribnika ali jezera in si oglejte ta čudoviti pojav. Ne bo vam žal.

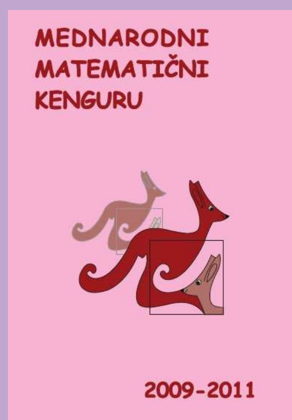
× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

v pripravi

Pri DMFA – založništvo je izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

V pripravi na tisk pa je že šesta knjiga Matematičnega kenguruja. Izšla bo v aprilu.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!