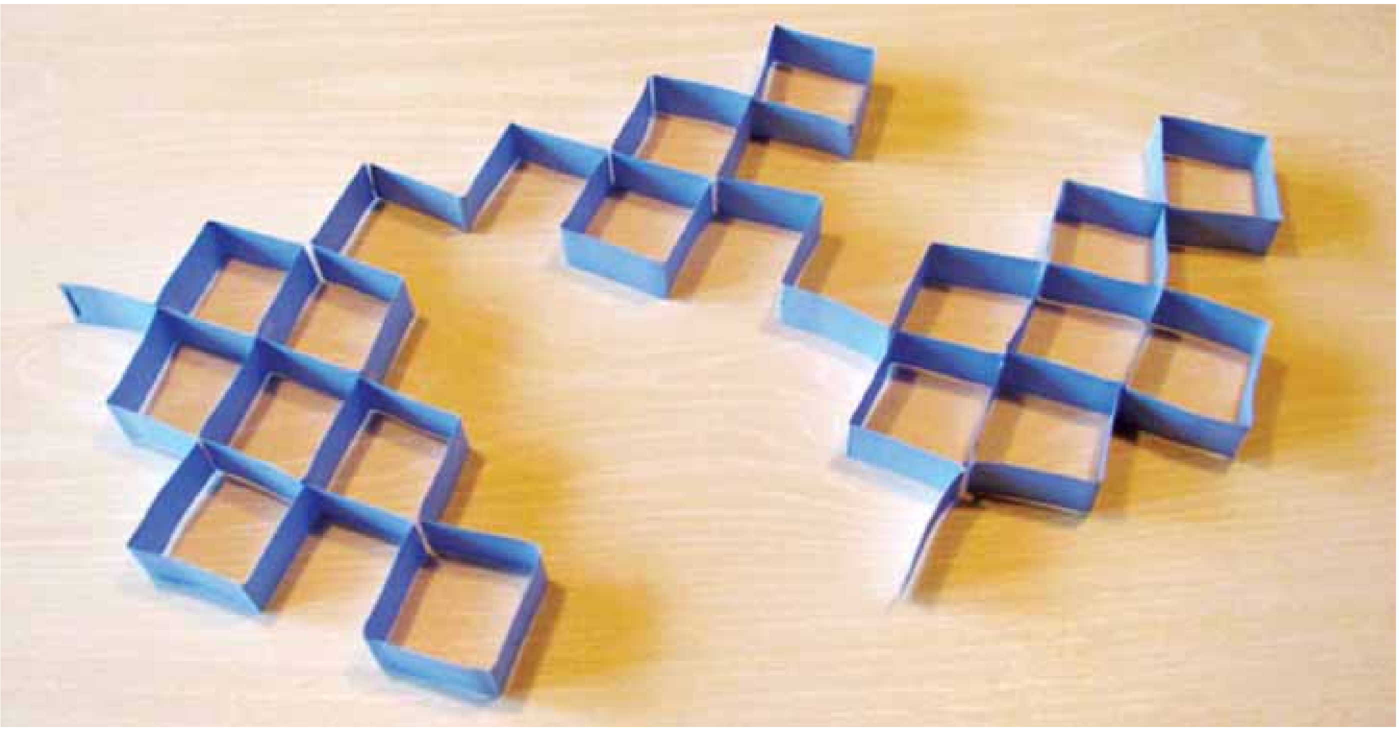


Pregibanje papirja in učenje s preiskovanjem

Dr. Adriaan Herremans
Univerza v Antwerpnu, Belgija

Izvleček

V članku predstavimo, s katerimi matematičnimi vsebinami se lahko srečamo pri pregibanju papirnatih trakov. Obravnavali bomo naloge s štetjem, geometrijo in kompleksnimi števili. Članek vsebuje tudi slike v pomoč vaši matematični intuiciji in nekaj nalog, s katerimi lahko to intuicijo izostrite.

Ključne besede: pregibanje papirja, učenje s preiskovanjem

Paper folding and Inquiry Based Learning

Abstract

In this article we elaborate on the mathematics you can encounter or discover by folding paper strips. We will discuss counting problems (§ 2), geometry (§ 3) and complex numbers (§ 4). We provide figures to help your mathematical intuition and some exercises in order to sharpen this intuition.

Keywords: paper folding, inquiry based learning

Uvod

Učenje s preiskovanjem pridobiva na prepoznavnosti v učnih načrtih po vsem svetu. Na Nizozemskem učni načrti omenjajo raziskovalne kompetence učencev, starih od 17 do 18 let, že več kot dve desetletji pri številnih predmetih. Učenci bi morali biti zmožni:

1. *načrtovati reševanje raziskovalnega problema s pomočjo zbiranja, organiziranja in obdelave informacij,*
2. *pripraviti, izvesti in evalvirati raziskovalni problem z matematično vsebino,*
3. *poročati o svojih rezultatih in jih obravnavati z različnih vidikov.*

Učitelj, ki želi pri pouku matematike razvijati navedene kompetence, ima lahko kar nekaj težav pri iskanju primernega gradiva, ki je za učence hkrati zanimivo in izvedljivo.

Na povezavi http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28177/ boste našli učni list, ki ga lahko uporabite v razredu. Večino odgovorov na naloge na učnem listu lahko najdete v članku oz. jih razberete iz njega. **Glede na to, da je praksa najboljši način učenja matematike, vam svetujemo, da vzamete nekaj papirnatih trakov in sami naredite nekaj pregibov med branjem članka.**

Zahvala

Zahvaljujem se Johanu Deprezu za koristne komentarje, popravke in dovoljenje za uporabo nekaterih fotografij.

1. Pregibanje in razpiranje papirnatih trakov

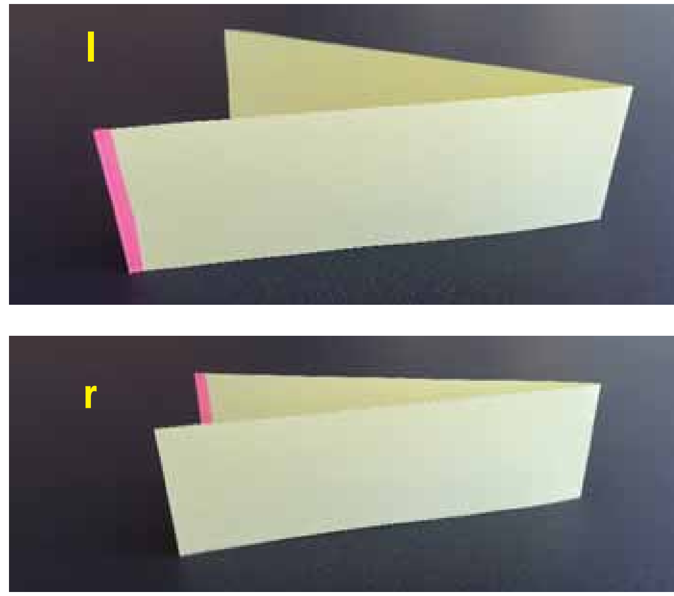
Začeli bomo z nekaterimi osnovnimi definicijami in razlagami.

Za boljšo predstavljivost vam svetujemo, da označite konec traku na eni strani, npr. z roza črto, nato pa trak položite na mizo tako, da je ta črta spredaj levo (glejte Sliko 1). Vedno bomo prepognili desno stran (prepognjenega) traku proti levi strani. Obstajata dva načina:

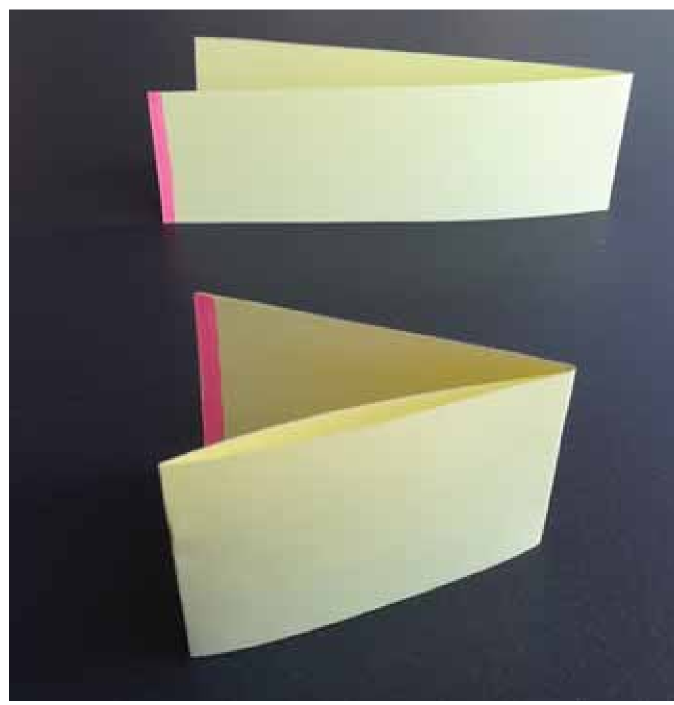
- Pregibanje stran od sebe. Desna stran traku bo pristala *za* levo stranjo (Slika 1). To označujemo z malo črko **l.**
- Po analogiji definiramo tudi pregibanje proti desni. V tem primeru bo desna stran traku pristala *pred* levo stranjo (Slika 1). To označujemo z malo črko **r**.

Bodite pozorni, da v obeh primerih črka pove tudi, katera polovica traku bo po prepogibanju spredaj.

To pregibanje lahko ponovite. Najprej lahko izvedete **l** in nato **r**. Za izvedbo drugega pregiba si zamislite, da je prepognjeni trak papirnati trak polovične dolžine. Ta trak lahko prepognete tako, da desna stran pristane spredaj (glejte Sliko 2). Tako lahko na enoličen način definiramo **zaporedje pregibov** kot zaporedje **l**-jev in **r**-jev, brano z leve proti desni. Slika 2 prikazuje dva koraka pregibanja, s katerima izvedemo pregibanje **l r**.

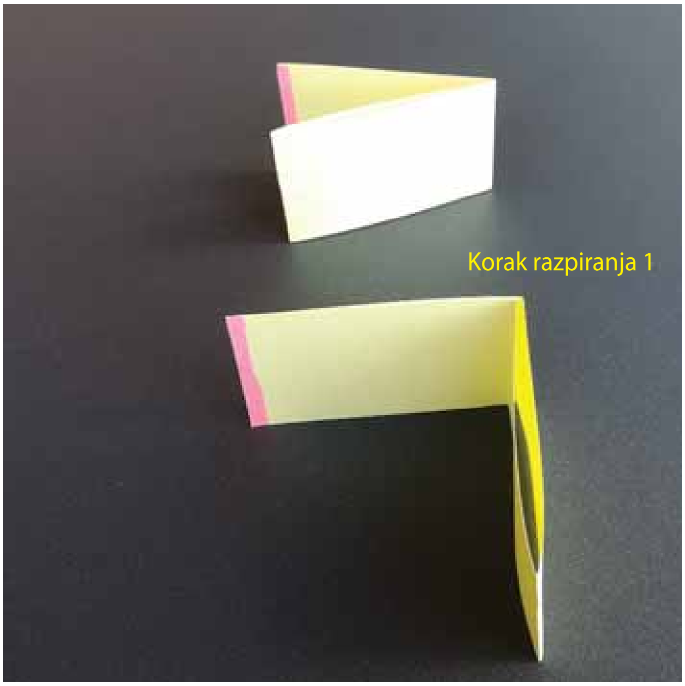


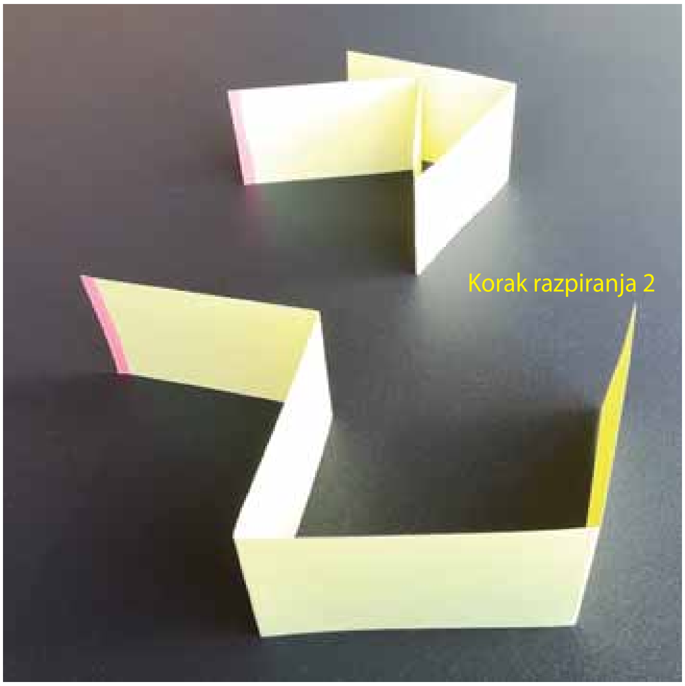
Slika 1: Pregibanje papirnatega traku.



Slika 2: Dva koraka pregibanja **l r.**

Začnite s prepognjenim papirnatim trakom, ki ga razprete. V vsakem **koraku razpiranja** trak razprete na desnem koncu tako, da polovico traku zasukate za 90°. Na ta način podvojite vidno dolžino traku. Ko izvedete toliko korakov razpiranja, kot je pregibov, ustvarite vzorec, ki spominja na labirint. Med vsakim zasukom nastanejo enako oddaljeni odseki. Če se dogovorimo, da je začetek pri roza črti horizontalno proti desni, potem dobimo enolično postavljen labirint. Slika 3 prikazuje dva koraka razpiranja v primeru **lr**. Na levi strani razpremo trak tako, da sprednjo polovico zasukamo, da dobimo pot v obliki črke L, sestavljeno iz dveh odsekov. Na desni strani razpremo to obliko črke L, s čimer dobimo pot, ki je sestavljena iz štirih odsekov.





Sliki 3a in b: Koraka razpiranja **lr.**

Če se sprehodite od začetka do konca labirinta, lahko zapišete vzorec s pomočjo zaporedja ovinkov, ki jih morate prehoditi. Ker so vsi ovinki pod kotom 90°, lahko preprosto zapišete veliki tiskani črki L ali R, odvisno od tega, ali ste zavili levo ali desno. Zaporedji črk L in R ter labirint imenujemo **zaporedje sprehodov**, ki je povezano z zaporedjem pregibov. Na Sliki 3b lahko vidite, da je rezultat razpiranja **lr zaporedje sprehodov** RLL.

V tem članku bomo raziskovali nekatere lastnosti takšnih **zaporedij sprehodov**. Zato je pomembno, da tudi sami ustvarite nekaj zaporedij pregibov in sprehodov. V preglednici 1 smo navedli vsa možna zaporedja pregibanja z enim, dvema in tremi pregibi.

Naloga 1

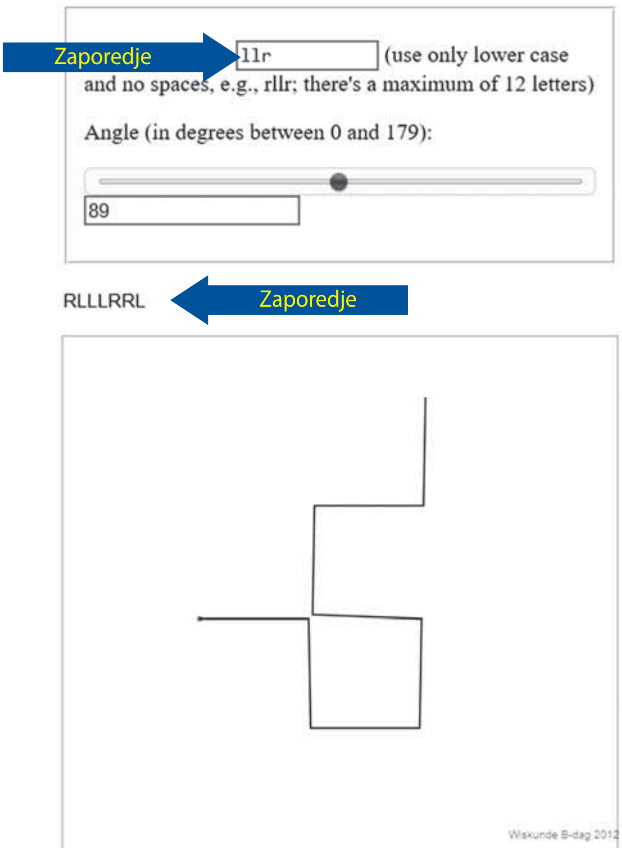
Preizkusite nekaj zaporedij iz preglednice 1 s pregibanjem in razpiranjem papirnatih trakov. Ustvarite podobno preglednico, sestavljeno iz šestnajstih (16) različnih zaporedij pregibov, ki jih dobimo s štirimi pregibi.

Aplet [1] lahko uporabite kot digitalno kontrolo. Ta pripomoček je priročen, če želite preizkusiti zaporedja z večjim številom pregibov (do 12). Preprosto natipkajte zaporedje pregibov in dobili boste zaporedje sprehodov, tako zaporedje črk kot sliko. Na Sliki 4 smo preizkusili zaporedje pregibanja **llr**. Uporabili smo kot 89° pri vsakem ovinku, saj lahko tako natančneje spremljamo zaporedje sprehodov, še posebej pri stičnih točkah.

Preglednica 1: Zaporedja pregibov in pripadajoča zaporedja sprehodov.

Zaporedje pregibov	Zaporedje sprehodov (ovinki)
l	L
l l	L L R
l r	R L L
l l l	L L R L L R R
l l r	R L L L R R L
l r l	L R R L L L R
l r r	R R L L R L L

Zaporedje pregibov	Zaporedje sprehodov (ovinki)
r	R
r r	R R L
r l	L R R
r r r	R R L R R L L
r r l	L R R R L L R
r l r	R L L R R R L
r l l	L L R R L R R



Slika 4: Posnetek zaslona na spleti strani [1].

2. Naloge s štetjem

Ko boste razprli papirnati trak po tem, ko ste izvedli zaporedje pregibov, boste videli, da so na traku številne pregibne črte. Ko boste iz tega naredili zaporedje sprehodov, bodo vsi povezovalni odseki ležali bodisi horizontalno bodisi vertikalno.

Če si ogledate preglednico 1, boste morda opazili enakomerno porazdelitev števila pregibnih črt.

> ***Trditev 1***
>
> Razprt trak po vsakem zaporedju pregiba (ali pripadajočem zaporedju sprehodov) z n pregibi vsebuje natančno 2^n-1 pregibnih črt (oz. ovinkov).

To lahko preverite v preglednici 1 za $n = 2$ in 3 ter v svoji preglednici pri nalogi 1 za $n = 4$.

> *Naloga 2*
>
> Dokažite trditev 1 z uporabo popolne indukcije.

Po trditvi 1 sta prvi in zadnji odsek zaporedja sprehodov vedno pravokotna. Dejansko imamo *liho* število ovinkov in pri vsakem ovinku pod kotom 90° spremenimo položaj iz horizontalnega v vertikalni ali obratno.

Zanimiva naloga štetja je, da si pogledamo verjetnost, da je zaporedje črk L in R zaporedje sprehodov, ki ga lahko izvedemo s pregibanjem papirnatega traku. Ko razmišljate o možnem številu zaporedij pregibov s točno določenim številom n pregibov in to primerjate s teoretičnim številom zaporedij z L in R dolžine 2^n-1, ugotovite, da je precej izjemno.

Npr. verjetnost, da lahko s pregibanjem izvedete naključno zaporedje sedmih črk L in R, je enaka $\frac{1}{16}$. Iz preglednice 1 vidimo, da obstaja točno 8 zaporedij sprehodov od možnih $2^7 = 128$ zaporedij. Potemtakem lahko sklepamo, da je verjetnost izvedbe zaporedja enaintridesetih (31) črk L in R s pregibanjem enaka $\frac{1}{67\,108\,864}$. Iz tega lahko izpeljemo splošno formulo. Naj spomnimo, da je smiselno opazovati samo zaporedja dolžine *2^n-1*, saj je v nasprotnem primeru nemogoče ustvariti zaporedje sprehodov (glejte trditev 1). Velja naslednja trditev:

> ***Trditev 2***
>
> Predpostavimo, da lahko q zapišemo kot 2^n-1 za $n \in \mathbb{N}$. Verjetnost, da je naključno zaporedje q črk R in L zaporedje sprehodov po ovinkih, ki je izvedljivo, je enaka $\frac{2^n}{2^q} = \frac{1}{2^{q-n}}$, v nasprotnem primeru pa je enaka nič.

Če si ogledamo preglednici 1 in nalogo 1, lahko opazimo še eno lastnost. Če preštejete število L-jev in R-jev, boste opazili, da se v *vsakem* zaporedju sprehodov razlikuje samo za eno črko. Še več, natanko polovica zaporedij sprehodov dolžine q ima $\frac{q+1}{2} = 2^{n-1}$ L-jev in $\frac{q-1}{2}$ R-jev. Druga polovica je sestavljena iz $\frac{q+1}{2}$ R-jev. Ko enkrat ugotovimo pravilo za ustvarjanje zaporedij sprehodov, si lahko znova pogledamo, kolikšna je verjetnost, da je naključno zaporedje res zaporedje sprehodov? Dobimo spodnjo trditev.

> ***Trditev 3***
>
> Predpostavimo, da lahko q zapišemo kot $2^n - 1$ za $n \in \mathbb{N}$ in da je $p = \frac{q+1}{2} = 2^{n-1}$. Imamo dano zaporedje črk L in R dolžine q, pri čemer je natančno $\frac{q+1}{2}$ L-jev oz. R-jev. Verjetnost, da je dano zaporedje sprehodov, je enaka $\frac{2^{n-1}}{\binom{q}{p}} = \frac{p}{\binom{q}{p}}$, pri čemer je $\binom{q}{p}$ binomski koeficient.

Torej je verjetnost, da je zaporedje sedmih črk s tremi (3) ali štirimi (4) L-ji zaporedje sprehodov, je enaka $\frac{4}{35}$. V primeru zaporedja enaintridesetih (31) črk s petnajstimi (15) ali šestnajstimi (16) L-ji, je ta verjetnost enaka $\frac{16}{300\,540\,195}$.

3. Zveza med zaporedjem pregibov in zaporedjem sprehodov

Da bi odkrili razmerje med zaporedjem pregibov in sprehodov, si bomo ogledali primer, tj. zaporedje pregibov **llr**. Natančneje, ogledali si bomo postopek razpiranja papirnatega traku.

Prvo razpiranje je podobno koraku razpiranja 1 na Sliki 3 na levi. Opazimo več stvari:

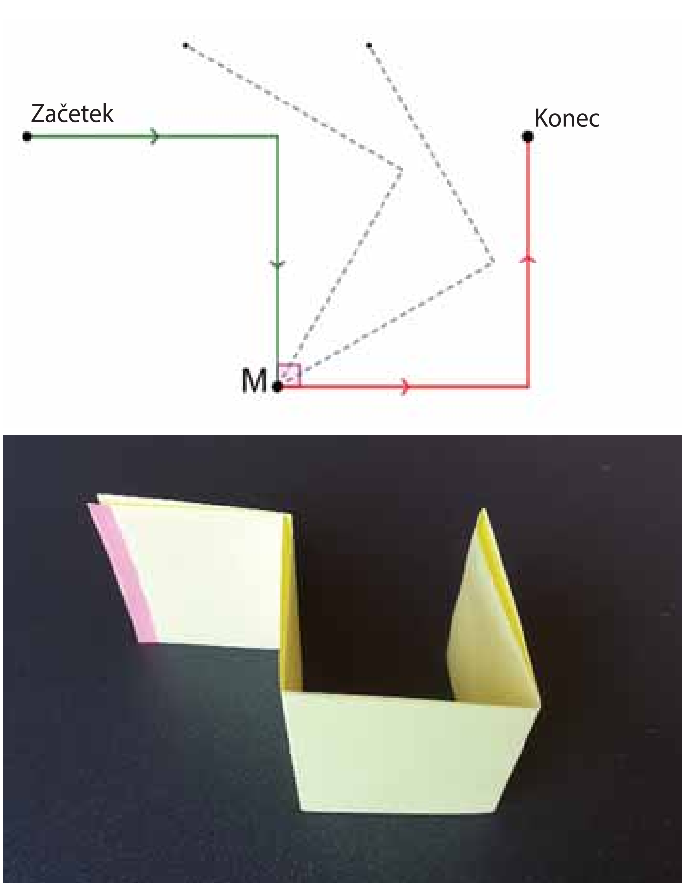
- izvedli smo zasuk za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca okoli končne točke prepognjenega traku na desni strani,

- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehoda R,
- to zaporedje sprehoda se ujema z zaporedjem pregiba **r.**

Drugo razpiranje lahko vidite na Sliki 5, ki poleg diagrama vsebuje tudi fotografijo. Na začetku koraka razpiranja 2 smo imeli samo zeleni del Slike 5, po koncu drugega razpiranja pa smo imeli zeleni in rdeči del. Zaradi jasnosti smo na vsakem odseku označili smer sprehoda in dodali prekinjeno črto, ki prikazuje premikanje dejanskega razpiranja.

Opazimo številne podobnosti s prvim korakom razpiranja:
- izvedli smo zasuk za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke M,
- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehodov RLL,
- to zaporedje sprehodov se ujema z zaporedjem pregibov **lr.**

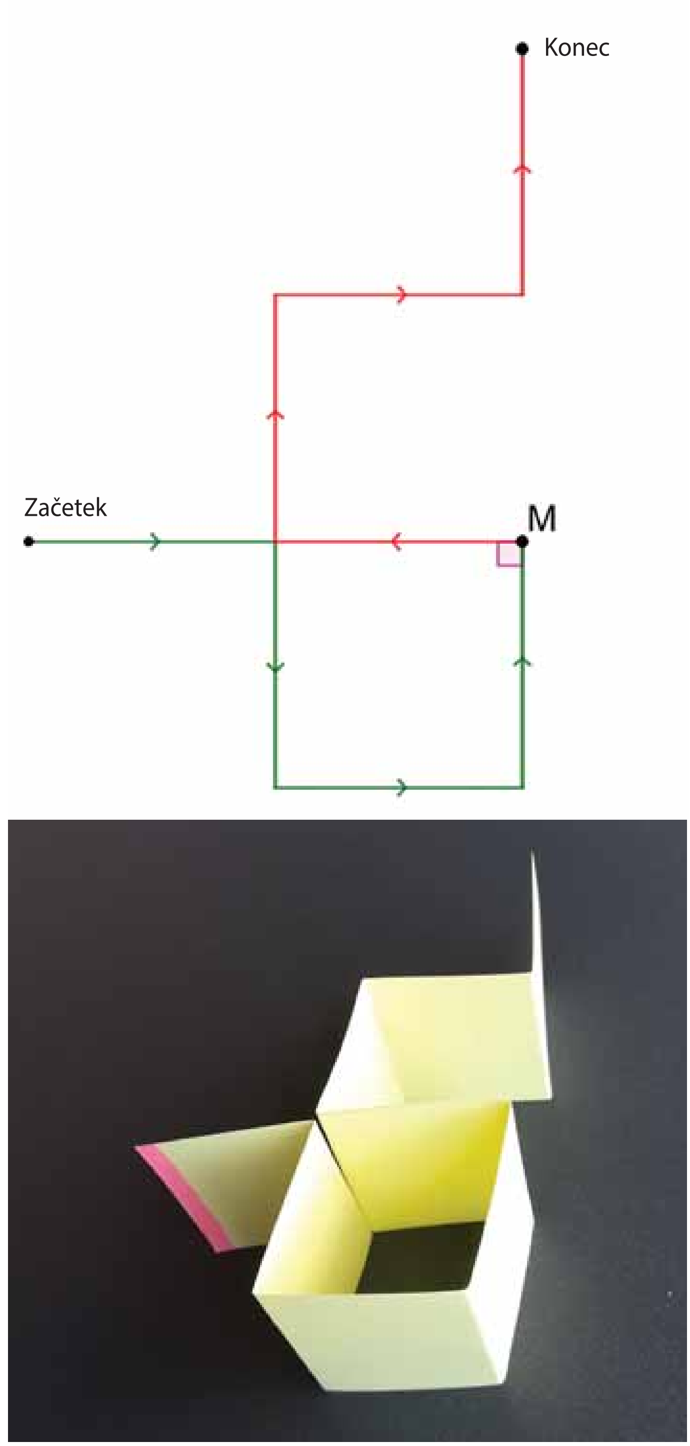
S pomočjo smeri zasuka okoli točke M lahko izpeljemo jasno zvezo med zaporedjem sprehodov pred razpiranjem in po njem. Odkrijemo neke vrste asimetrijo: sprehod po rdeči poti od točke M do končne točke je enako (oz. ima enake črke) kot sprehod po zeleni poti od točke M do začetne točke (glejte Sliko 5). Ta ugotovitev je ključnega pomena za razumevanje razmerja med zaporedjema pregibov in sprehodov.



Slika 5: Korak razpiranja 2 **llr.**

Zadnji korak v postopku razpiranja je prikazan na Sliki 6 in nam je znan. Zopet vidimo neke vrste asimetrijo med zeleno in rdečo potjo okoli osrednje točke razpiranja, imenovane M: sprehod po zeleni poti od točke M do začetne točke se ujema s sprehodom po rdeči poti od točke M do končne točke.

Poleg tega opazimo naslednje:
- izvedli smo zasuk za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke M,
- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehodov RLLLRRL,
- to zaporedje sprehodov se ujema z zaporedjem pregibov **llr.**



Slika 6: Korak razpiranja 3 **llr.**

V trditvah 4-6 bomo opisali nekatere splošne lastnosti, ki smo jih razbrali iz tega dejanja razpiranja. Predlagamo vam, da tudi sami naredite nekaj pregibov papirja, da boste bolje razumeli te ugotovitve. V preglednici 2 bomo poiskali konkreten primer povezave med zaporedjem pregibov in sprehodov in kako z nekaterimi podatki zapišemo zaporedji.

Trditev 4

V vsakem zaporedju sprehodov je okoli središčne črke prisotna asimetrija. Če preberemo črke z leve proti desni, pri čemer začnemo desno od središčne črke, dobimo nasprotne črke kot v zaporedju, prebranem z desne proti levi z začetkom levo od središčne črke.

V našem primeru zaporedja pregibanja **llr** dobimo pripadajoče zaporedje sprehodov RLLLRRL (preglednica 1). Če začnemo desno od središčne (podčrtane) črke L in beremo z leve proti desni, dobimo zaporedje RRL. Če to primerjate z zaporedjem, ki ga dobite z desne proti levi z začetkom levo od središčne črke L, dobite nasprotno zaporedje LLR. Ta asimetrija je opazna v vseh zaporedjih sprehodov (glejte nalogo 3).

Dokaz ugotovitve 4 najdemo v opisu korakov razpiranja. Dokaz temelji na dejstvu, da je vsako zaporedje sprehodov rezultat zasuka okoli končne točke, pri čemer se dolžina traku podvoji, prvi del pa ostane nespremenjen.

Naloga 3

Preverite trditev 4 v preglednici 1 in v svoji preglednici pri nalogi 1.

Trditev 1 pravi, da v primeru n pregibov na papirnatem traku nastane $2^n - 1$ pregibnih črt. Pri tem se poraja vprašanje: kateri pregib je ustvaril kateri ovinek (ovinke) ali pregibno črto (črte)? Če ovinke oštevilčimo z leve proti desni glede na pripadajočo črko v zaporedju sprehodov, lahko trdimo, da se prva črka zaporedja pregibov vedno ujema z ovinkom (ali pregibno črto) na položaju 2^{n-1} (v našem primeru **llr**, $n = 3$).

Z uporabo popolne indukcije lahko ugotovite, da se drugi pregib ujema z dvema pregibnima črtama na položajema 2^{n-2} in $3 \cdot 2^{n-2}$: prva črta ima enako črko kot druga črka v zaporedju pregibanja, druga črta pa ima nasprotno črko (glejte drugo pregibanje v preglednici 2).

Preostale pregibne črte v našem primeru je ustvaril zadnji pregib, pravzaprav je v našem primeru vse lihe ovinke ustvaril tretji pregib. Ti ovinki zopet ustvarijo izmenični vzorec, ki se začne z enako črko kot tretji pregib, tj. s črko R (glejte tretje prepogibanje v preglednici 2).

Preglednica 2: Razmerje med zaporedjem pregibov in sprehodov.

številka (položaj) ovinka	1	2	3	4	5	6	7
1. pregibanje (l)				L			
2. pregibanje (l)		L				R	
3. pregibanje (r)	R		L		R		L
zaporedje sprehodov	R	L	L	L	R	R	L

Ugotovitev lahko posplošimo. Nakazuje, da lahko rekonstruiramo celotno zaporedje sprehodov (in zaporedje pregibov), če poznamo le n od $2^n–1$ črk, pod pogojem, da poznamo črko ovinka za vsak večkratnik števila dve (ali lihi večkratnik). Torej, če poznate črko na položaju 2^{n-1}, eno črko pri lihem večkratniku števila 2^{n-2}, eno črko pri lihem večkratniku števila 2^{n-3},… in eno črko števila na lihem položaju, potem lahko rekonstruirate celotno zaporedje pregibov in sprehodov. Zgornjo razlago lahko povzamemo v naslednji ugotovitvi.

Trditev 5

Predpostavimo, da papirnati trak prepognete n-krat. Ovinke (ali črke v zaporedju sprehodov) na položajih, ki so lihi večkratniki števila 2^{n-r}, je ustvaril r-ti pregib traku ($1 \leq r \leq n$).

Potemtakem je v zaporedju sprehodov nemogoče imeti štiri L-je ali štiri R-je v vrsti, saj vse liho oštevilčene črke prihajajo iz zadnjega pregiba in se izmenjujejo.

To nakazuje, da z razpiranjem in z oblikovanjem zaporedja sprehajanja nikoli ne naletimo na težave: nemogoče je, da bi se odseki prekrivali. Nasprotno, odseki v zaporedju sprehodov se pogosto stikajo (v ovinku). To se zgodi, kadar imamo v zaporedju sprehodov tri L-je ali tri R-je v vrsti.

Naloga 4

Ustvarite nekaj preglednic, podobnih preglednici 2, npr. za zaporedja pregibov **lll**, **lrl** in **lllr**.

Zadnja ugotovitev opisuje vse korake razpiranja.

Trditev 6

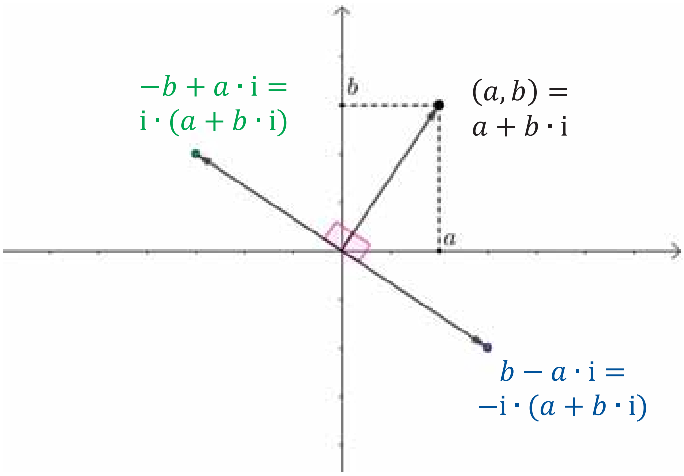
Predpostavimo, da smo papirnati trak prepognili v skladu z zaporedjem pregibanja dolžine n. Po r korakih razpiranja traku dobimo zaporedje sprehodov, ki se ujema z zaporedjem pregibov, sestavljenih iz zadnjih r črk prvotnega zaporedja ($1 \leq r \leq n$).

To smo opazili v našem primeru, vendar vas spodbujamo, da to preverite še z drugim primerom. Ko smo razprli papirnati trak, ki je bil prepognjen v skladu z **lllr**, smo naleteli na zaporedja sprehodov, ki so skladna z zaporedjem pregibov **r** po enem koraku razpiranja, **lr** po dveh korakih razpiranja in **llr** po treh korakih razpiranja.

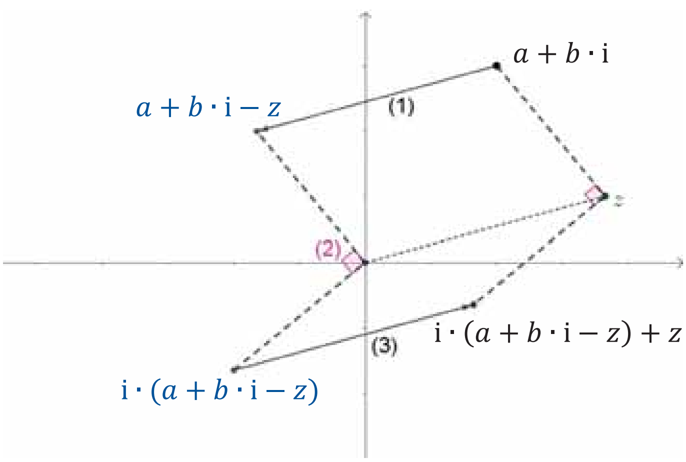
Dejstvo, da se v vsaki vrstici preglednice 2 prva velika tiskana črka ujema z malo črko pregiba, izhaja iz tega, da se okoli končne točke trak razpira v smeri urnega kazalca (oz. v nasprotni smeri urnega kazalca), če je pripadajoč pregib **l** (oz. **r**). Posledično lahko sklepamo, da je prva črka zaporedja pregibanja enaka središčni črki zaporedja sprehodov (glejte preglednico 1).

Naloga 5

Izpeljite zaporedje sprehodov in pregibov modrega lika na začetku članka.



Slika 7a: Zasuk okoli izhodišča za 90° v kompleksni ravnini



Slika 7b: Zasuk s središčem z

4. Kompleksna ravnina

Nazadnje si bomo ogledali izrek, ki pove točno lego končne točke zaporedja sprehodov, kadar je zaporedje pregibov znano. V ta namen bomo uporabili kompleksna števila. Spomnimo se, da lahko množico kompleksnih števil $\mathbb{C} = \{ a + b \cdot \mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$ določimo s točkami $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ v realni ravnini. Če si ogledate zasuk okoli *izhodišča* za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca, vidite, da je slika kompleksne točke $a + b \cdot \mathrm{i}$ enaka množenju kompleksnega števila z i (glejte Sliko 7a). Torej je poljubno kompleksno število $a + b \cdot \mathrm{i}$ s pomočjo rotacije preslikano v kompleksno število $\mathrm{i} \cdot (a + b \cdot \mathrm{i})$. Po analogiji je zasuk okoli izhodišča za 90° v smeri urnega kazalca enak množenju z -i (glejte Sliko 7a). Za lažje razumevanje smo narisali vektorje od izhodišča do kompleksnih števil.

> *Naloga 6*
>
> Izpeljimo, da s formulo $\mathrm{i} \cdot (a + b \cdot i - z) + z$ dobimo zasuk kompleksnega števila $a + b \cdot \mathrm{i}$ za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca okoli kompleksnega števila z. Oglejte si paralelograme na Sliki 7b: zasuk lahko razumemo kot zaporedje treh togih preslikav: (1) preslikava iz središča zasuka z v izhodišče, (2) zasuk v nasprotni smeri urnega kazalca okoli izhodišča in (3) inverz preslikave (1).

Takšni izračuni s kompleksnimi števili za izvedbo rotacij so uporabno orodje za določitev točne lokacije končnih točk zaporedij sprehodov.

Izrek

*Dan imamo trak dolžine 2^n in zaporedje pregibov dolžine n. Če zaporedje sprehodov začnemo pri izhodišču in poteka vodoravno proti desni je lega končne točke enaka kompleksnemu številu $(1 + i)^{\#\mathbf{l}}$, pri čemer sta #**l** in #**r** števili **l**-jev oz. **r**-jev v zaporedju pregibov.*

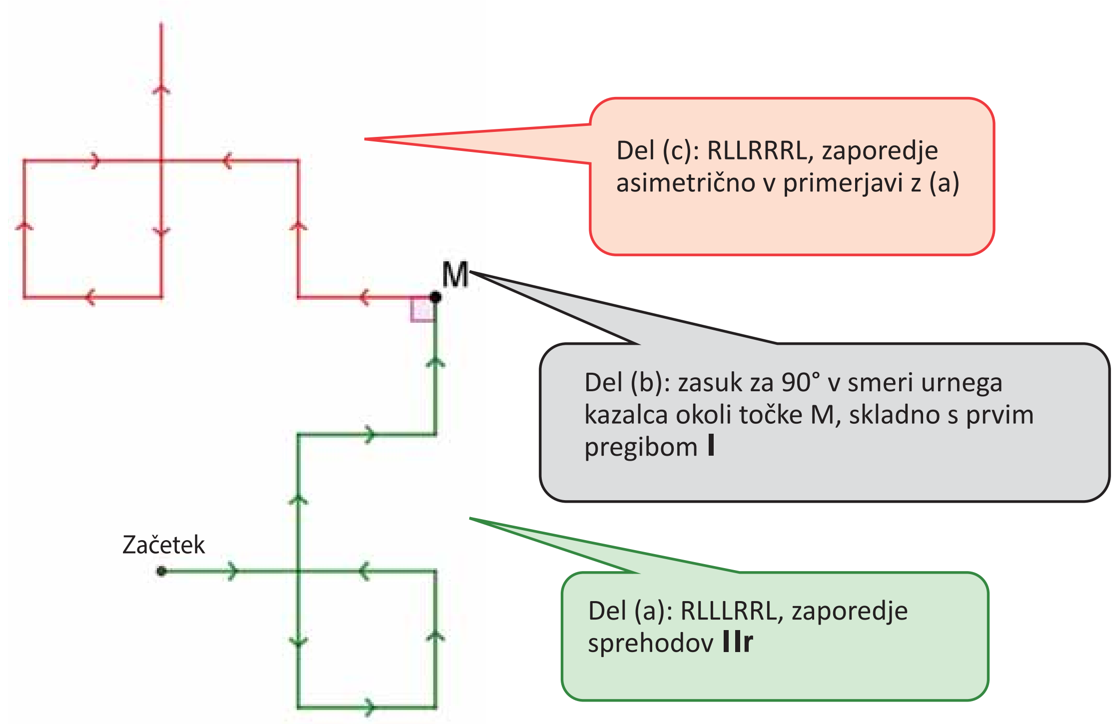
Upoštevajte, da je #**l** + #**r** = n. Nadalje, če izberemo dolžino 2^n, so vsi odseki med sosednjimi ovinki dolžine 1. Izrek dokažemo s pomočjo izpeljave iz n. Za $n = 1$ imamo le dve možni zaporedji pregibov: **l** in **r**. Pripadajoči zaporedji sprehodov imata končni točki 1 + i in 1 – i, torej formula velja za $n = 1$.

Predpostavimo, da formula velja za zaporedja pregibov dolžine k in dokažimo, da formula velja za vsa zaporedja dolžine $k + 1$. Katerokoli zaporedje pregibov dolžine $k + 1$ (temu rečemo pregibanje $k + 1$) lahko obravnavamo kot eno črko (**l** ali **r**), ki ji sledi zaporedje pregibov dolžine k. Zaporedje pregibov dolžine $k + 1$ utemeljimo z #**l** in #**r** kot števili **l**-jev in **r**-jev ter predvidevamo, da se zaporedje pregibov začne s črko **l** (argument je podoben v primeru začetne črke **r**). Ta argument je prikazan še enkrat z zaporedjem pregibov **lllr** na Sliki 8, vendar je zelo podoben opisu zadnjega koraka razpiranja, kot je pojasnjen v 3. poglavju.

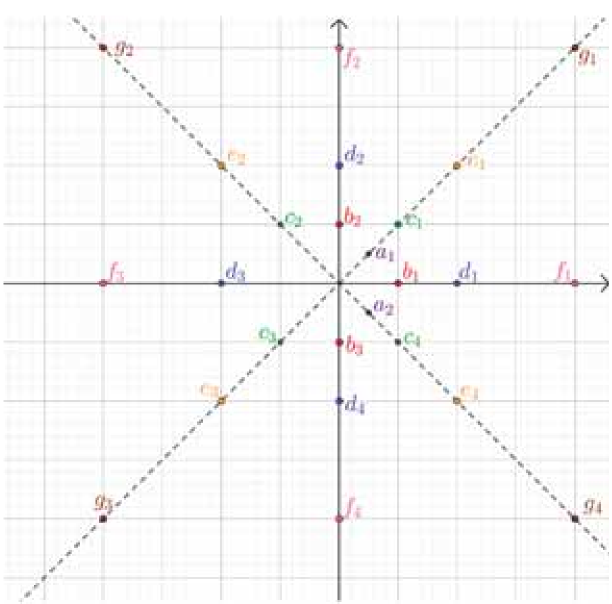
Glede na ugotovitve 4, 5 in 6 lahko zaporedje sprehodov razdelimo na tri dele: (a) zaporedje sprehodov za pregibanje k, ki ga dobimo z izpustitvijo prve črke **l** (ugotovitev 6), (b) središčne črke L (ugotovitev 5), (c) čemur sledi natančna kopija zaporedja sprehodov v (a) po zasuku za 90° *v nasprotni smeri urnega kazalca* okoli končne točke zaporedja sprehoda k (to je asimetrija iz trditve 4). V primeru Slike 8 je končna točka **lllr** ustvarjena iz zasuka izhodišča v smeri urnega kazalca okoli končne točke **llr**. S pomočjo induktivno oblikovane hipoteze vemo, da je končna točka poti k (dela (a)) enaka $z_k = (1 + \mathrm{i})^{\#\mathbf{l}-1} \cdot (1 - \mathrm{i})^{\#\mathbf{r}}$. Končna točka pregiba $k + 1$ je torej zasuk izhodišča za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke z_k. S pomočjo naloge 6 ugotovimo, da je ta končna točka enaka $-\mathrm{i} \cdot (0 - z_k) + z_k = (1 + \mathrm{i})\, z_k = (1 + \mathrm{i})^{\#\mathbf{l}} \cdot (1 - \mathrm{i})^{\#\mathbf{r}}$. ■

Ko kompleksna števila v formuli izreka zapišemo v polarni obliki, dobimo $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\#\mathbf{l}} \cdot \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{\#\mathbf{r}}$. Z uporabo Moivrove formule lahko poenostavimo ta izraz in dobimo $\sqrt{2}^n(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, pri čemer je $\theta = (\#\mathbf{l} - \#\mathbf{r})\frac{\pi}{4}$. Torej, če je papirnati trak dolg 2^n in si ogledate zaporedje sprehodov po n pregibih, končna točka *vedno* leži na razdalji $2^{n/2}$ od začetne točke. Nadalje, če vzamemo izhodišče kot začetek, obstajajo samo štiri možnosti za končno točko pregibanja n (za $n > 2$):

- če je n sodo število, potem je tudi $\#\mathbf{l} - \#\mathbf{r}$ sodo in $(\#\mathbf{l} - \#\mathbf{r})\frac{\pi}{4}$ je večkratnik $\frac{\pi}{2}$. Štiri možne končne točke za $n > 2$ so štiri točke na oseh v kompleksni ravnini na razdalji $2^{n/2}$;
- če je n liho število, potem je tudi #**l** - #**r** liho. Za $n > 2$ dobimo štiri možnosti v kompleksni ravnini, tj. štiri točke na simetralah kvadrantov na razdalji $2^{n/2}$.



Slika 8: Zaporedje sprehodov **IIIr** (kot v dokazu izreka).



Slika 9: Možne končne točke za $1 \leq n \leq 7$.

Na Sliki 9 smo narisali možne končne točke za $1 \leq n \leq 7$. Točke z oznako a se ujemajo z $n = 1$, točke z oznako b z $n = 2$, …, točke z oznako g z $n = 7$. Ker sta za $n = 1$ možna le dva pregiba, obstajata samo dve možni končni točki. Za $n = 2$ obstajajo samo tri možnosti.

Naloga 7

Dokažite, da je razdalja med končno točko in začetno točko enaka $2^{n/2}$, brez uporabe kompleksnih števil. Pomagate si lahko s popolno z indukcijo in z razlago zadnjega koraka razpiranja. Podate lahko tudi geometrijski dokaz vseh možnih končnih točk.

Zaključek

Glede na to, da pregibanje in razpiranje papirnatih trakov ni del učnega načrta, pričujoče gradivo omogoča razvoj raziskovalnih dejavnosti z učenci. Gradivo lahko zlahka preučijo in si zapišejo osnovne ugotovitve (kot v preglednici 1). Od te točke dalje lahko izpeljete številne ugotovitve s pomočjo matematičnih vsebin, ki so v učnem načrtu. Imejte v mislih, da je v večini primerov mogoče dokazati ugotovitve na različne načine. Pokazali smo, da lahko podamo ugotovitve na intuitivni ravni (3. poglavje) ali pa priskrbimo formalne dokaze (4. poglavje). Izberite ustrezno možnost glede na raven znanja vaših učencev in ko jim boste priskrbeli papirnate trakove, bo kmalu nastal vrvež v učilnici (Slika 10).

Slika 10: Učenci skupaj raziskujejo matematiko prepogibanja papirnatih trakov.

Preučite lahko številne druge primere učenja matematike s prepogibanjem, ki niso navedeni v tem članku. Učence lahko npr. vprašate po formuli za točno število stičnih točk v zaporedju sprehodov po tem, ko ste odkrili zaporedje pregibov (še ena naloga s štetjem) ali pa po formuli, ki določa največjo razdaljo od izhodišča v zaporedju sprehodov (mi smo izračunali le končno točko). Če želite več geometrijskih vsebin, lahko preučite ovinke pod kotom 120° namesto 90°. V tem primeru bo zaporedje sprehodov sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov (uporabite [1] za raziskovanje) z zanimivimi lastnostmi, ki jih lahko preučite.

Viri in literatura

http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/sliderappletEN/eenvouwdigEN.html
Programček za ustvarjanje zaporedij sprehodov (ogled, maj 2021)

http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28177/ (ogled, maj 2021)
Učni list (v angleščini)