Matematika v šoli, št. 1., letnik 28, 2022

Vitruvijev človek

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

1 Uvod

Kakšno je razmerje med premerom krožnice in stranico kvadrata na sloviti skici Leonarda da Vincija Vitruvijev človek? Odgovor na to vprašanje bomo poiskali v okoliščinah, v katerih je skica nastala. Da bi bolje razumeli okoliščine nastanka skice, si bomo med drugim pogledali njeno zgodovinsko ozadje.

2 Igralci v naši zgodbi

1. Pitagora se je rodil med letoma 580 in 569 in umrl 500 pred našim štetjem.

   Ustanovil je sekto, preko katere je širil svoje ideje. Zelo malo je znanega o njem neposredno, večinoma izvemo posredno preko njegovih naslednikov.

   Njegovi nasledniki (pitagorejci) so povsod videli naravna števila. Razmerja naravnih števil naj bi določala notranjo strukturo vesolja.

   Pitagora je že vedel, da je glasbeni ton posledica nihanja, na primer nihanja strune. Dolžina strune določa višino (frekvenco) tona. Vedel je, da so glasbeni toni, ki zvenijo hkrati in je razmerje njihovih frekvenc razmerje malih naravnih števil, ušesom prijetni.

   Pitagorejci so verjeli, da nebesna telesa zvenijo. Predstavljali so si, da ta zvenijo v tonih, katerih razmerje frekvenc so majhna naravna števila.

   Ta zven so imenovali harmonija sfer. Verjeli so, da se skrivnost sveta skriva v teh razmerjih.

2. Vitruvij se je rodil med letoma 80 in 70 in umrl pred letom 15 pred našim štetjem. Bil je rimski arhitekt in je poskušal prenesti razmerja, ki jih najdemo v naravi, v načrte za gradnjo. Posebej se je zanimal za razmerja, ki se skrivajo v dimenzijah človeškega telesa.

3. Luca Bartolomeo Pacioli se je rodil leta 1447 in umrl leta 1517. Bil je italijanski matematik in frančiškanski duhovnik. Prijateljeval je z Leonardom da Vincijem.

   Nas bo posebej zanimala njegova knjiga Divina proportione (napisana v Milanu v letih 1496–1498 in izdana v Benetkah leta 1509).

   Govori o božanskih razmerjih v geometriji in aritmetiki. Med drugim se ukvarja z razmerji, ki jih najdemo v pravilnih večkotnikih in platonskih poliedrih. Posebej ga je zanimal pravilni petkotnik, ki je bil zanj prava zakladnica. V pravilnem petkotniku je našel razmerje zlatega reza. Vendar mu ni nadel imena božansko razmerje, niti se ni spuščal v njegovo estetiko. Videti je, da so ga bolj zanimala razmerja pitagorejcev. Naslov knjige je treba razumeti bolj v smislu pitagorejcev, to je kot svet božanskih razmerij na splošno, ne pa da je knjigo posvetil enemu samemu razmerju.

3 Razmerje zlatega reza

Ker ima razmerje zlatega reza med umetniki in arhitekti močan mističen naboj, se vedno najdejo ljubitelji, ki povsod vidijo to razmerje.

V tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev pod okriljem Zveze za tehnično kulturo, je bilo mnogo nalog na temo zlatega reza. Ni treba posebej poudarjati, da so mrzlično iskali razmerje povsod, kjer je in kjer ga ni.

Najbolj opiše ta odnos umetnikov in arhitektov do zlatega reza naslednji zapis:

Zlato razmerje pomeni vrata za razumevanje življenja. To razmerje imenujemo tudi božansko razmerje, ker predstavlja vrata v globlje razumevanje lepote, čudežnosti in duhovnosti življenja. Je skoraj neverjetno, da ima eno samo število *tolikšen vpliv v naravi,* človeški *zgodovini, znanosti, umetnosti in vsemirju v celoti.*

Ta zapis je, kot da bi ga prepisali od pitagorejcev, le da so oni govorili o racionalnih razmerjih, medtem ko je razmerje zlatega reza iracionalno število.

Ne samo to, razmerje zlatega reza je v nekem smislu celo najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. V kakšnem smislu je to število najbolj iracionalno, bomo zvedeli v nadaljevanju. Še več, pitagorejci so bili tako zaverovani v svoja racionalna razmerja, da je bila prava blasfemija, ko je eden od pripadnikov skupine, Hipas, povedal svetu, da je dokazal, da diagonala kvadrata ni v racionalnem razmerju s stranico tega kvadrata. To je povzročilo tako jezo med pitagorejci, da so Hipasa vrgli s čolna in je utonil.

Te zgodbe ne omenjajo sodobniki Hipasa, tako da je njena verodostojnost vprašljiva, vendar pa kaže na strogo disciplino znotraj skupine pitagorejcev, ki pa ni vprašljiva.

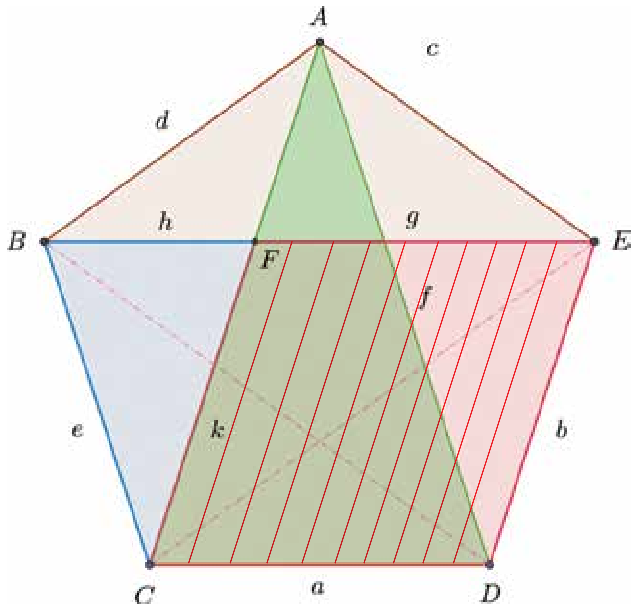
Dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 je $\sqrt{2}$. Dokaz, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število, je preprost. Je lep primer matematičnega dokaza tipa *Reductio ad absurdum*.

Predpostavimo, da obstajata dve tuji (brez skupnih deliteljev) naravni števili m in n, da je

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \to 2 = \frac{m^2}{n^2}, \to m^2 = 2n^2, \to m = 2k, \to 4k^2 = 2n^2, \to 2k^2 = n^2.$$

Nujno mora biti m sodo število in od tod sledi, da je n liho število. Kvadrat lihega števila je vedno liho število. Vendar, če je m sodo število, je m^2 gotovo deljivo s 4, zato lahko enačbo delimo z 2. Na levi imamo še vedno sodo število, medtem ko je število na desni liho. To pa pripelje v protislovje. Torej $\sqrt{2}$ ni mogoče zapisati v obliki ulomka.

3.1 Zlati rez in pravilni petkotnik



Ker je v zvezi z Vitruvijem in ob da Vincijevi skici toliko govora o zlatem rezu, si bomo od blizu pogledali, kaj je Paciolija toliko privlačilo v razmerjih, ki jih najdemo v petkotniku. Na sliki je pravilni petkotnik, v katerem so vrisane diagonale in označeni trije liki znotraj petkotnika, ki nas bodo zanimali. Najprej poglejmo dva trikotnika, modri trikotnik (*B, C, F*) in zeleni trikotnik (*A, C, D*). Trikotnika sta podobna in enakokraka. Naslednji lik je rdeč romb (*C, D, E, F*). Stranice romba *(a, b, g, k)* so enako dolge kot stranice petkotnika. Daljica *g* je vzporedna s stranico petkotnika *a*, stranica petkotnika *b* je vzporedna z daljico *k*. Kraka modrega trikotnika sta enako dolga kot stranica petkotnika. Dolžina osnovnice modrega trikotnika je enaka dolžini diagonale minus dolžini stranice petkotnika. Tako imamo pripravljeno vse, kar potrebujemo za zadnje dejanje.

Izrek 1. *Točka F razdeli diagonalo na dve daljici h in g. Razmerje dolžine diagonale proti dolžini daljice g je enako razmerju dolžine daljice g proti dolžini daljice h. Tega ni težko razbrati iz vsega povedanega, zato prepustimo bralcu, da postavi piko na i.*

Če označimo dolžine kar z oznakami daljic, potem lahko zapišemo:

$$f : g = g : h, \rightarrow f = g + h.$$

Od tod je:

$$\frac{g+h}{g} = \frac{g}{h}.$$

Vzemimo, da je dolžina stranice enaka 1, torej $g = 1$, označimo dolžino diagonale *f* z *x*, potem dobimo naslednjo enačbo

$$x = \frac{1}{x-1}, \rightarrow x - 1 = \frac{1}{x}, \rightarrow x = 1 + \frac{1}{x}.$$

3.2 Verižni ulomki

Če zaporedno vstavljamo
$x = 1 + 1/x, \rightarrow x = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \ldots)))$,

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}},$$

dobimo neskončni verižni ulomek za razmerje zlatega reza. Vsi koeficienti so enaki 1.

Če ulomek prekinemo na nekem mestu, dobimo racionalno število, ki ga imenujemo konvergent. Povejmo brez dokaza:

Izrek 2. *Konvergent je najboljši racionalni približek danemu iracionalnemu številu z imenovalcem, enakim ali manjšim od imenovalca konvergenta.*

Velik člen v verižnem ulomku pomeni, da se je konvergent, ki vsebuje člene do vključno velikega člena, močno približal končni vrednosti.

Če so vsi koeficienti enaki 1, pa pomeni, da se dano število z najboljšimi racionalnimi približki izogiba kot je le mogoče samemu številu, konvergenca konvergentov je najslabša možna, to pa je razlog, da je razmerje zlatega reza najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. Ta lastnost zlatega reza je ključna, da se ta pojavlja v naravi.

3.3 Fibonaccijevo zaporedje

Fibonaccijevo zaporedje je definirano kot:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Prvih nekaj členov zaporedja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Rešimo enačbo za zlati rez iterativno. Izberemo začetni približek $x_0 = 1$,

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\
x_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\
x_3 &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}.
\end{aligned}$$

V posameznih iteracijah dobimo zaporedje kvocientov dveh zaporednih Fibonaccijevih števil. Z drugimi besedami, konvergenti