

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 19 (1991/1992)

Številka 1

Strani 50–53

Borut Zalar:

KOMPLEKSNA CELA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, algebra, teorija števil, kompleksno celo število, kompleksno praštevilo.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/19/1075-Zalar.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

KOMPLEKSNA CELA ŠTEVILA

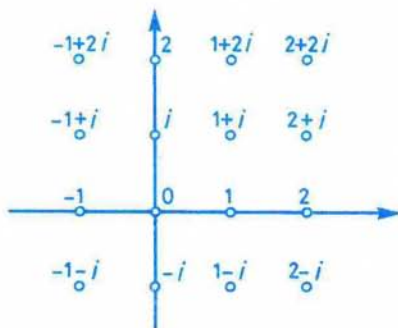
Ogledali si bomo eno od možnosti posplošitve pojma celega števila. Z imenom cela števila mislimo množico $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Cela števila si lahko predstavljamo kot ogrlico na številski osi.



Osnovo za uvedbo pojma kompleksnega števila predstavlja enačba $x^2 = -1$. Ta enačba nima rešitve v celih številih, pa tudi v realnih številih ne. Da bi to in podobne enačbe lahko reševali, so matematiki uvedli pojem imaginarne enote. To je število i , ki reši zgornjo enačbo, torej $i^2 = -1$. Besedo imaginaren navadno slovenimo kot izmišljen ali navidezen. Število i naj bi torej ne obstajal v resnici, ampak naj bi bilo izmišljotina matematikov. Toda razvoj matematike in tehnike v zadnjem stoletju je pokazal, da je število i zelo uporabno pri čisto praktičnih problemih in torej ni tako za lase privlečeno, kot bi se komu zdelo.

Zdaj definirajmo kompleksna cela števila. Vzemimo dve celi števili a, b , zapišimo $z = a + bi$ in ta formalni zapis imenujmo kompleksno celo število. Zapiša $a_1 + b_1i$ in $a_2 + b_2i$ predstavljata isto kompleksno število natanko takrat, kadar je $a_1 = a_2$ in $b_1 = b_2$.

Seštevanje in množenje kompleksnih celih števil definiramo takole: naj bodo a, b, c, d cela števila. Potem je



$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Zgled:

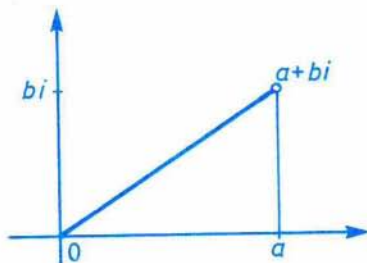
$$(1 + 2i) + (3 - 5i) = (1 + 3) + (2 - 5)i = 4 - 3i$$

$$(1 + 2i)(3 - 5i) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot i - 1 \cdot 5 \cdot i - 2 \cdot 5 \cdot i^2 =$$

$$= 3 + 6i - 5i - 10 \cdot (-1) = 13 + i$$

Zaradi poenostavitve, zapišemo število $a + 0i$ kar a , število $0 + ai$ pa ai .

Vsakemu kompleksnemu celému številu $z = a + bi$ bomo priredili še pozitivno število $N(z) = a^2 + b^2$, ki ga imenujemo *norma* števila z . Če kompleksna cela števila predstavimo kot mrežo, potem je zaradi Pitagorovega izreka $N(z)$ ravno kvadrat dolžine hipotenuze v spodnjem trikotniku.



Najpomembnejša lastnost norme je izražena v naslednji trditvi:

Trditev 1. Naj bosta $z_1 = a + bi$ ter $z_2 = c + di$ dve kompleksni celi števili. Potem velja $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$.

Dokaz nam da naslednji račun:

$$\begin{aligned} N(z_1 z_2) &= N((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2acbd + a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2adbc = \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 = \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = N(z_1) N(z_2) \end{aligned}$$

Poglejmo si nekoliko поблиže deljivost kompleksnih celih števil. Definiramo jo enako kot pri celih številih, torej z_1 *deli* z_2 , če obstaja tako kompleksno celo število w , da je $wz_1 = z_2$.

Najprej si oglejmo zgled:

$$\begin{aligned} 1 \cdot i &= i \\ i \cdot (-i) &= -i^2 = -(-1) = 1 \end{aligned}$$

Torej 1 deli i in tudi i deli 1. Pri naravnih številih je takšno medsebojno deljenje nemogoče, zato si moramo ta fenomen поблиže ogledati.

Trditev 2. Naj bosta z_1 in z_2 dve neničelni kompleksni celi števili in naj z_1 deli z_2 ter z_2 deli z_1 . Tedaj imamo štiri možnosti:

$$z_1 = z_2, \quad z_1 = -z_2, \quad z_1 = iz_2, \quad \text{ali} \quad z_1 = -iz_2$$

Dokaz: Iz danih pogojev za števili z_1 ter z_2 sledi, da obstajata dve taki

kompleksni celi števili x, y da velja:

$$z_1 = xz_2 \quad \text{in} \quad z_2 = yz_1$$

Z uporabo trditve 1 dobimo

$$\begin{aligned} N(z_1) &= N(x)N(z_2) \\ N(z_2) &= N(y)N(z_1) = N(y)N(x)N(z_2) \end{aligned}$$

Ker je $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, so norme pozitivne in zato mora biti $N(x) = N(y) = 1$. Pišemo $x = a + bi$ in dobimo $a^2 + b^2 = 1$. Od tod očitno sledi, da je $a = 0$ in $b^2 = 1$ ali pa $a^2 = 1$ in $b = 0$, torej je x eno od števil $1, -1, i$ in $-i$.

To pomeni, da ima vsako kompleksno celo število z vsaj osem deliteljev. To so $1, -1, i, -i, z, -z, iz, -iz$. Število, ki ima samo teh osem deliteljev, bomo imenovali kompleksno praštevilo. Naj bo p naravno število. Kdaj je p kompleksno praštevilo? Očitno je, da mora biti p praštevilo v običajnem smislu. Da to še ne zadošča, kaže naslednji zgled:

$$(1+i)(1-i) = 1+i-i-i^2 = 2$$

število $1+i$ deli 2, zato 2 ni kompleksno praštevilo. Delni odgovor na naše vprašanje daje:

Trditev 3. Naj bo p praštevilo, ki ima pri deljenju s 4 ostanek 3. Tedaj je p tudi kompleksno praštevilo.

Dokaz: Denimo, da je p mogoče zapisati kot produkt

$$p = (a+bi)(c+di)$$

in da sta števili $a+bi, c+di$ različni od števil $1, -1, i, -i, p, -p, ip, -ip$. Tedaj dobimo $N(p) = p^2 = N(a+bi)N(c+di)$.

Ker število p^2 nima drugih naravnih deliteljev kot 1, p in p^2 in ker $N(a+bi), N(c+di) \neq 1$, dobimo $N(a+bi) = p = a^2 + b^2$. Število p je liho, zato mora biti eno izmed števil a, b sodo, eno pa liho. Kvadrat sodega števila je deljiv s 4, kvadrat lihega števila pa pri deljenju s 4 da ostanek 1 (Dokaži!). Zato vsota $p = a^2 + b^2$ pri deljenju s 4 da ostanek 1, kar pa po predpostavki ni res. Torej je p kompleksno praštevilo.

Pripomnimo še, da tista praštevila, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 1, niso kompleksna praštevila, vendar to ni tako enostavno dokazati.

Za konec pa nekaj nalog:

1. Dokaži, da enačba $N(z) = 3$ nima rešitev v kompleksnih celih številih.
2. Poišči vse rešitve enačbe $N(z) = 5$ v kompleksnih celih številih.
(Rešitve: $2+i$, $2-i$, $-2+i$, $-2-i$)
3. Dokaži, da je število $1+i$ kompleksno praštevilo.
4. Dokaži, da števili 5 in 13 nista kompleksni praštevili. (Nasvet: razcepi obe števili na produkt dveh kompleksnih celih števil.)
5. Reši enačbo $x + y + z = xyz = 1$ v kompleksnih celih številih.
(Rešitev: $1, i, -i$)
6. Razcepi število $19 + 17i$ na produkt kompleksnih praštevil. (Rešitev: $(1+i)(2+i)^2(2-3i)$)
7. Dokaži, da je vsako kompleksno število, čigar norma je praštevilo, kompleksno praštevilo.

Borut Zalar