

Uporaba matematičnega modela za izdelavo rastlinjaka

Using Mathematical Model to Build Greenhouse

mag. Vesna Parkelj

Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

Izvleček

V članku je prikazan primer dejavnosti modeliranja s kvadratno funkcijo, ki je bil pripravljen in izveden v okviru projekta NA-MA POTI. Smiselnost modeliranja je dodatno podkrepljena s teoretičnimi dejstvi. Primer uporabe modela je predstavljen na realnem problemu postavitve rastlinjaka, za katerega je treba izdelati loke v obliki parabole. Članku je dodan učni list, ki ga lahko učitelji uporabijo, predelajo, dopolnijo in preizkusijo v razredih. Opisana dejavnost je primerna za druge letnike vseh srednješolskih programov.

Ključne besede: matematika, modeliranje, kvadratna funkcija, Geogebra

Abstract

This paper presents a quadratic function modelling activity developed and implemented in the framework of the NA-MA POTI project. Theoretical facts support the rationale behind the modelling. An example of the application of the model is presented on a real greenhouse layout problem for which arcs in the shape of a parabola have to be constructed. A teaching sheet that teachers can use, revise, supplement, and test in the classroom accompanies the article. The activity described is suitable for the second year of all secondary education programmes.

Keywords: mathematics, modelling, quadratic function, GeoGebra

Uvod

Dijaki pri pouku matematike pridobivajo nova znanja o matematičnih vsebinah, pojmi, pridobivajo veščine, se urijo v procesih razmišljanja in bogatijo svoje področje matematične, bralne in finančne pismenosti. Cenjeno in spodbujeno je kritično mišljenje, uporaba znanja v novih življenjskih situacijah, v stroki ... Z uporabo računalniških programov je postalo reševanje realnih nalog dostopnejše, bolj nazorno in izvedljivo pri pouku, saj lahko določeno tematiko nazorneje razložimo. Model je posebna vrsta predstavitve, ko na dejstva v realnem pojavu pogledamo z vidika teorije. V svetu matematike to pomeni, da realni svet preslikamo v konkretno in simbolno ponazoritev matematičnega pojma. Pri tem nam pomagajo računalniški programi, kot so Geogebra, Matlab, Mathematica, Excel, Java ... Dijaki se urijo v uporabi digitalne tehnologije, razvijajo kritično mišljenje, ugotovijo, da

ni enotne ali ene rešitve in se pisno ter ustno izražajo.

Zakaj modeliranje?

Matematično modeliranje je del matematične pismenosti in del matematičnega znanja, zapiše Magajna (2022). Matematično modeliranje je opredeljeno kot »oblika reševanja življenjskega problema z raziskovanjem, ki vključuje poglobljeno razumevanje konteksta in izpeljavo predpostavk, ki so za iskanje rešitve pomembne in vodijo do posplošenih konceptualnih rešitev oz. modela.« (Sirnik idr., 2022, str. 11).

Izkušnje reševanja problemov, ki jih učenci običajno srečajo v šolah, temeljijo na nalogah, kako priti od točke A do B, pri čemer je cilj znan, koraki do rešitve pa jasno določeni. Številni poklici zahtevajo razvit sistem matematičnega mišljenja, ki

ne vključuje le znanj teorij in zakonitosti, temveč predvsem preučevanje odnosov in vzorcev.

Matematično modeliranje je iterativni proces, ki vključuje odprte, realistične, praktične probleme, ki jih učenci razložijo s pomočjo matematike z uporabo predpostavk in aproksimacij. Lahko se uporabijo tudi drugi viri znanja, ne le matematični (Stohlmann & Albarracín, 2016). Matematično modeliranje ponuja učencem bogate možnosti, da razvijejo naslednje bistvene procese: gradnjo, razlago, določanje, napovedovanje, prevzemanje in predstavljanje ter koordiniranje in organiziranje podatkov (English & Watters, 2005).

Ne glede na to, katero definicijo matematičnega modeliranja privzamemo za svojo, ima večina enake poudarke. Ciklično modeliranje so v različni literaturi različno predstavljeni, do leta 2012 jih lepo povzemata avtorja članka The Many Fa-

ces of the Mathematical Modeling Cycle (Perrenet & Zwaneveld, 2012). Vsem je skupno, da je opisani problem treba pretvoriti v matematični jezik in ga nato rešiti s pomočjo kalkulacije ter to rešitev interpretirati nazaj v prvoten problem. Temu avtorja rečeta osnovni cikel modeliranja in ga prikazuje Slika 1: Osnovni cikel modeliranja (povzeto po (Perrenet & Zwaneveld, 2012)).

V prvi fazi je problem opisan z ustreznimi nematematičnimi izrazi. V tej fazi je treba izbrati (poenostaviti) predpostavke. Rezultat prve faze je konceptualni model. Ta konceptualni model nato prevedemo v matematični model, ki ga lahko matematično analiziramo. Matematično rešitev prevedemo nazaj v jezik prvotne problematike, kar se imenuje interpretacija. Nazadnje potrjujemo rešitev. Po potrebi bomo spet začeli krog modeliranja s prilagajanjem enega ali več korakov.

Modeliranje moramo upajati v matematično izobraževanje, saj nam omogoča uporabo matematike pri nadaljnjem izobraževanju, karieri in vsakdanjem življenju. Dani problemi za razliko od šolskega sveta nimajo ene same rešitve, pot do nje je večkrat timsko delo, kar pomeni, da spodbuja socialni razvoj učencev.

Modeliranje običajno izvedemo s pomočjo digitalne tehnologije, s katero lažje izvedemo izračune, ki sicer ne bi bili obvladljivi. V ta namen uporabljamo različne računalniške programe za delo s preglednicami, dinamično geometrijo, programe za delo s statistiko, risanje grafov funkcij ... Dostop do množice podatkov na spletu je neomejen. Matematične

funkcije omogočajo modeliranje bodisi po obliki krivulje (odvisnosti količin), ki jo dobimo z nanašanjem točk po zaslonu, po obliki krivulje, ki jo lahko narišemo po sliki (npr. curek vode iz cevi) ali po enačbi, ki jo dobimo (npr. povezava z geometrijo).

Modeliranje glede na taksonomske stopnje po Bloomu lahko uvrščamo med 3. in 6. stopnjo. To pomeni, da gre za uporabo znanja, analizo, ki zahteva diagnosticiranje dane situacije, razstavljanje na posamezne dele, razlago odnosov med njimi. Na koncu zahteva sintezo, ki celotno razmišljanje postavi v celoto in sklepanje ter vrednotenje, da se ugotovi, zakaj in kaj smo ugotovili ter na podlagi katerih kriterijev.

Uporaba matematičnega modela za izdelavo rastlinjaka

S primerom dejavnosti, opisanim in predstavljenim v nadaljevanju, dijaki razvijajo zmožnosti reševanja problemov v različnih kontekstih (osebni, družbeni, strokovni, znanstveni), ki omogočajo matematično obravnavo (2. gradnik matematične pismenosti). Dijake smo želeli seznaniti z obravnavo situacije z matematičnim modeliranjem (podgradnik 2.2), prednostno smo se posvetili oblikovanju matematičnih modelov (podgradnik 2.2.2) (Sirnik idr., 2022).

Z dejavnostjo smo pri dijakih spodbujali, da pri načrtovanju modela opredelijo spremenljivke, formulirajo predpostavke

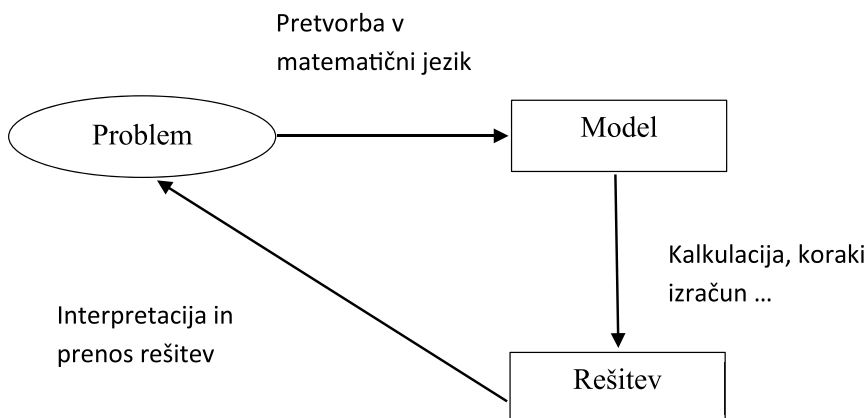
in navedejo omejitve modela, odločajo o zvrsti modela in izberejo ustreznega, prepoznajo in zapišejo odnose med izbranimi spremenljivkami oziroma predlagajo matematično strukturo za dano situacijo in da pri izdelavi modela uporabljajo ustrezna matematična in tehnološka orodja (Sirnik idr., 2022). Sledili smo opiskom pri omenjenem podgradniku.

Cilji naloge so, da dijaki:

- v okviru učnega sklopa modeliranje s kvadratno funkcijo v drugem letniku srednješolskega izobraževanja oblikujejo in vrednotijo matematični model za dano učno situacijo,
- spretno uporabljajo digitalno tehnologijo,
- utemeljujejo ugotovitve in jih povežejo z matematičnimi koncepti.

Opisani primer dejavnosti je bil izveden v času trajanja projekta NA-MA POTI, del katerega je potekal v času epidemije in zaprtja šol. V času šolanja na daljavo se je celoten proces preselil iz šolskih učilnic v domove, kjer učitelji nismo mogli sproti spremljati procesa reševanja, bili pa smo z dijaki v stikih preko videokonferenc, spletnih učilnic in elektronske pošte. Pri pouku na daljavo je še posebej pomembno, da so navodila nazorno sestavljena, dijakom je treba predhodno razložiti in pokazati nekaj primerov modeliranja.

Opisani primer dejavnosti je potekal preko MS Teamsov, v katerem je imel vsak učenec svoj zvezek za predavanje, kamor je nalagal zapisane rešitve in rešene naloge. Navodila na učnem listu so bila strukturirana, učenci so imeli zapisane korake. Nalogo sem naložila v učilnico z učnim listom in datoteko, učenci so sledili navodilom, izvedli nalogo in rešitev oddali. V primeru, da bi nalogo izvajali v razredu, bi bila navodila lahko manj nazorna. Na ta način bi učitelj ugotovil, koliko učenec zna pretvoriti nalogo v matematični kontekst in koliko jih reši nalogo povsem samostojno. Geogebro je moč naložiti na osebne telefone dijakov, saj je brezplačna. Prednost uporabe pametnih telefonov je, da sliko poiščejo na spletu, Geogebra pa je vedno dosegljiva, velika slabost le je majhna velikost zaslona. V teh primerih je bolj priporočljiva uporaba tablice ali računalnika. Učitelj lahko predhodno poišče sliko lokov za pripravo rastlinjaka ali pa dijake spodbudi, da tako sliko sami poiščejo na spletu.



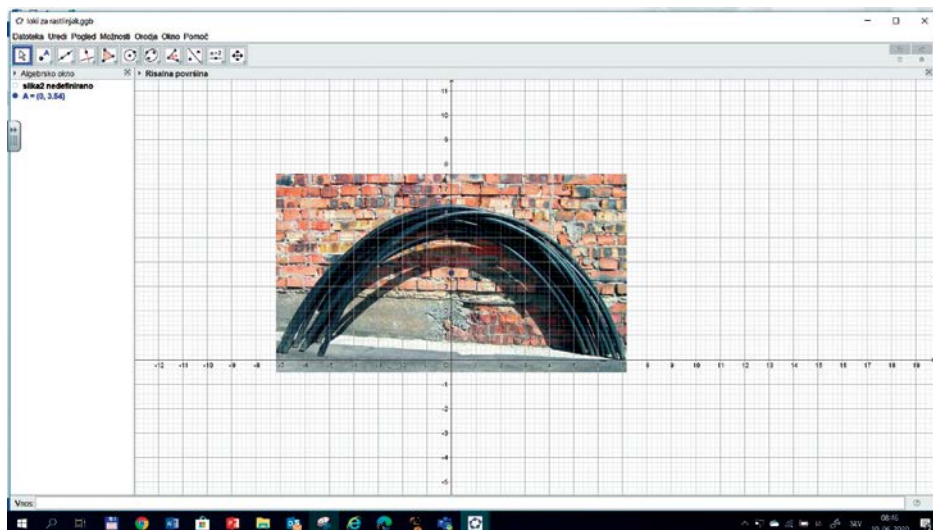
Slika 1: Osnovni cikel modeliranja (povzeto po (Perrenet & Zwaneveld, 2012))

Mama bi rada izdelala rastlinjak za gojenje zelenjave, ki je sestavljen iz lokov in zaščitne folije. Loke ji bodo izdelali v delavnici s pomočjo CNC stroja, ki vsebuje krmilnik, v katerega je treba vnesti, kaj naj stroj izdela. Loke bodo podobni lokom na spodnji sliki. Pomagajte si s programom Geogebra in poiščite model, ki ga bodo vnesli v CNC stroj.



Slika 2: Loke za oporo rastlinjaku [Vir: <https://sl.toolboxprodhouse.com/80640>]

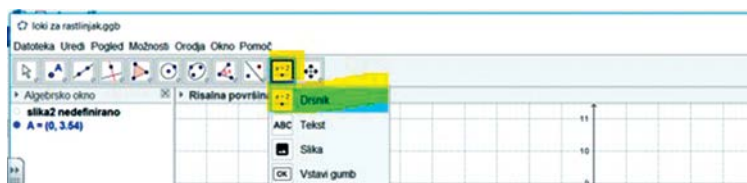
1. Za delo potrebujemo program Geogebra (če programa še nimate nameščenega, je dostopen na <https://geogebra.en.softonic.com/>)
2. V programu Geogebra odprite datoteko *loki za rastlinjak.ggb*, ki je priložena učnemu listu.
3. Po odprtju datoteke boste videli spodnjo sliko:



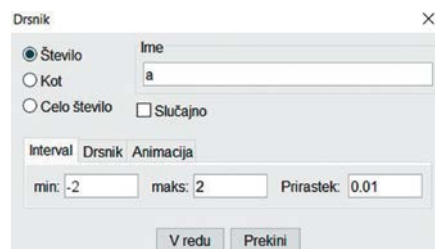
Slika 3: Zaslonska slika fotografije lokov

4. V koordinatnem sistemu običajno narišemo graf funkcije. Dopolni spodnje povedi.
 Loke predstavljajo graf _____ funkcije, njen graf imenujemo _____.
 Splošna enačba te funkcije je _____.
5. V program Geogebra zapiši namišljeno krivuljo, ki bo potekala po sredini lokov rastlinjaka in preberi vrednosti ter jih zapiši:
 Začetna vrednost take krivulje je: _____
 Teme te krivulje je: _____
 Ničli te krivulje sta: _____
 Če je enota v koordinatnem sistemu 1 m, potem je višina lokov _____ m, razpon med koncema lokov pa _____ m.

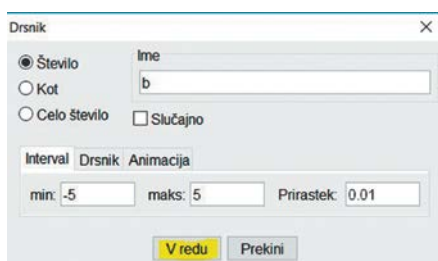
6. V programu Geogebra poiščite model, ki najbolj opisuje namišljeno krivuljo. To storimo tako, da izberemo drsnike a , b , in c , jim določimo razpon in prirastek.



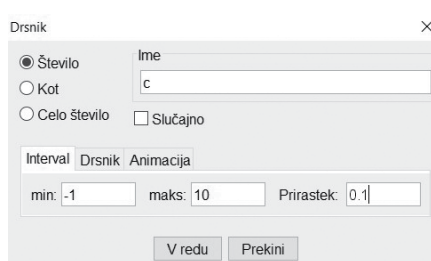
Slika 4: Izbira drsnikov



Slika 5: Izbira drsnika a

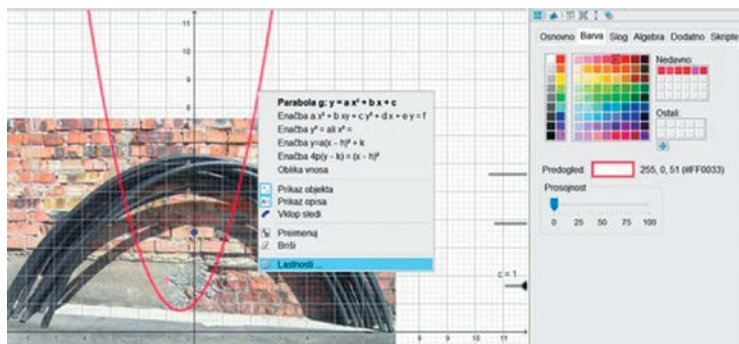


Slika 6: Izbira drsnika b



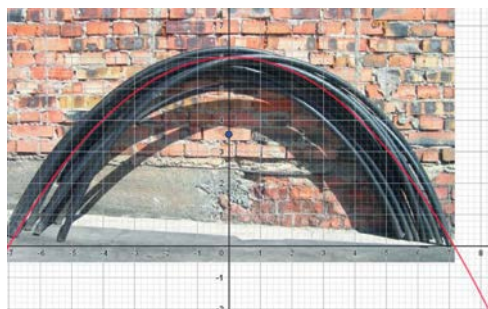
Slika 7: Izbira drsnika c

7. V okno za vnos vpišite splošno obliko enačbe funkcije: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (opomba: kvadrat napišete tako, da pritisnete *alt gr* in *strešico*).
8. Z miško premikajte drsnike in poskušajte najti najbolj prilegajočo se funkcijo. Naredite posnetek zaslona (prt sc) in ga prilepite v učni list ter izpišite enačbo funkcije. Nasvet: če kliknete na krivuljo z desnim klikom in odprete lastnosti, lahko določite barvo krivulje, ki bo bolj vidna (npr. rdeča).



Slika 8: Izbira barve krivulje

S premiki drsnikov pridete do slike, ki bo podobna spodnji.



Slika 9: Določena krivulja

Sliko grafa funkcije in funkcijske enačbe prilepite v učni list in ga oddajte v spletno učilnico.

Dejavnosti v korakih od 1 do 8 so vodene, saj dijaka ves čas usmerjajo, zato je še posebej primerna za tiste, ki modeliranja in uporabe tehnologije še niso tako vešči. Začetne dejavnosti dijake usmerijo v matematični jezik, na podlagi katerega iz življenjskega izziva sestavijo matematični model. Od lokov za rastlinjak preidejo h kvadratni funkciji. Korak 6 jih usmeri v uporabo tehnologije in uporabo programa Geogebra. Zaslonske slike jih vodijo k postavitvi drsnikov, od oznak do velikosti

in koraka – prirastka. Z njihovim premiki se spreminja krivulja in dijaki poiščejo tisto, ki se najbolj prilega. Tako pridejo do rešitve in sklenejo proces modeliranja.

Po oddaji naloge oziroma ko dijaki končajo, je treba izpeljati učno uro, na kateri pogledamo rešitve in jih umestimo v matematični in realni kontekst. Dijaki so morali s svojimi ugotovitvami dopolniti zapise na učnem listu (Slika 10) in na koncu ugotoviti predpis funkcije (Slika 11).

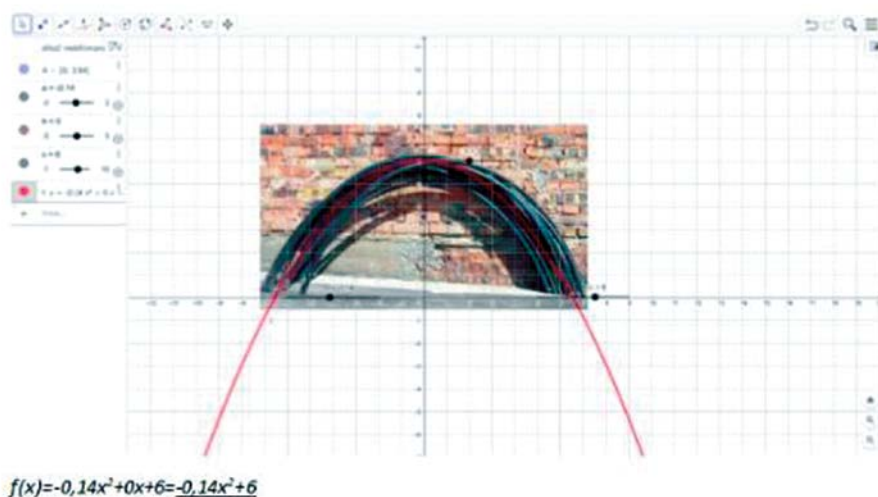
4. V koordinatnem sistemu običajno narišemo graf funkcije. Dopolni spodnje povedi.

Loki predstavljajo graf kvadratne funkcije, njen graf imenujemo parabola.
Splošna enačba te funkcije je $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5. V programu Geogebra si zamisli namišljeno krivulje, ki bo potekala po sredini lokov rastlinjaka in preberi vrednosti ter zapiši:

- začetna vrednost take krivulje je: N(0,6)
- Tema te krivulje je: T(0,6)
- Ničli te krivulje sta: $x_1 = 6,5; x_2 = 6,5$
- Če je enota v koordinatnem sistemu 1 m, potem je višina kotov 6 m, dolžina pa 13 m.

Slika 10: Primer dela rešitve enega od dijakov



Slika 11: Zapis funkcijskega predpisa

Prednost modeliranja je spodbujanje kritičnega mišljenja, saj daje dijakom možnost, da razvijejo veščine utemeljevanja, analiziranja in vrednotenja. Argumentirali so, zakaj so matematični modeli sošolcev nekoliko drugačni, a vseeno pravilni. Pri tem razvijajo tudi druge veščine, kot so poslušanje, sprejemanje, odločanje, kulturo delovanja v skupnosti, postavljati dobra odprta vprašanja ...

Ob navedenem primeru se je pojavila vrsto vprašanj kot npr.:

- zakaj je veliko različnih matematičnih rešitev in kako vplivajo na rešitev problema, katera/katere so optimalne,
- kako bi nalogo nadgradili: spremenili dimenzije lokov, koliko lokov bi potrebovali za izdelavo rastlinjaka določene dolžine (iskanje podatkov na spletu o optimalni razdalji med loki), kako izračunati dimenzije folije, s katero bi pokrili rastlinjak,
- s katerimi šolskimi predmeti se lahko povežemo (oprema rastlinjaka s senzoriko za merjenje temperature, vlage, namakalni sistemi ...) – elektrotehnika, robotika, biologija, fizika, računalništvo ...

Z izvedeno dejavnostjo na daljavo sem bila zadovoljna. Dijakom se je naloga zdelo preprosta, saj so imeli sliko lokov. Dejavnost bi lahko nadgradila s tem, da bi dijake spodbudila v iskanje in fotografiranje predmetov v naravi ali doma, ki imajo obliko parabole. Sledilo bi modeliranje ali priprava naloge za zamenjavo na »matematični tržnici«. Povratno informacijo z dijaki sem z videoklicem izvedla preko aplikacije MS Teams. Ker so aplikacijo Geogebra že imeli naloženo, ni bilo težav. Nekateri niso znali prebrati podatka o višini in dolžini rastlinjaka. Naloga se jim ni zdela težka, ker je bila vodena, strukturirana, to se jim je zdelo boljše. Dejali so, da bi se sami težje znašli.

Zaključek

Modeliranje nam ponuja pravo uporabo matematike v stroki in vsakdanjem življenju, nenazadnje je to cilj vsakega izobraževanja. S tem procesom ustvarimo zaupanje med dijaki in učiteljem ter v razredu samem. In nenazadnje kot pravi Dennis Waitley (ameriški motivacijski govornik, terapevt, rojen leta 1933): »Prihodnost pripada tistim, ki se naučijo, kar se morajo naučiti, zato da lahko storijo tisto, kar morajo storiti.«

Viri

English, L. in Watters, J. (2005). *Mathematical modelling with 9-year-olds*. In *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (297–3 04). University of Melbourne. <https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2EnglishWatters.pdf>

Magajna, Z. (2022). *Matematično modeliranje kot del matematične pismenosti in matematičnega znanja*. V Sirnik, M. idr. *Razvijamo matematično pismenost, Opredelitev matematične pismenosti s primeri dejavnosti*. Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/Razvijamo_matematicno_pismenost.pdf

Perrenet, J. in Zwaneveld, B. (2012). *The many faces of the mathematical modelling cycle*. *Journal of Mathematical modelling and Application*, 1(6), 3–21. <https://pure.tue.nl/ws/files/3584468/397091290505369.pdf>

Sirnik, M. idr. (2022). *Matematična pismenost, Opredelitev in gradniki*. Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/Matematicna_pismenost_gradniki.pdf

Stohlmann, M. S. in Albarracín, L. (2016). *What is known about elementary grades mathematical modelling*. *Education Research International*. https://pdfs.semanticscholar.org/3c88/4cc30ace31bf09fb064235202e34c9280239.pdf?_gl=1*17vav70*_ga*MTA0OTkwMjM0LjE2NzcyMjQxNjA.*_ga_H7P4ZT52H5*MTY3NzIyNDE1OS4xLjEuMTY3NzIyNDE3OC4wLjAuMA

UČNI LIST

Primeri nalog za matematično modeliranje od 6. razreda osnovne šole naprej

1. Peka palačink

Osnovne sestavine za palačinke za 3 lačne osebe:

- 6 dl mleka
- 4 drobna jajca
- 30 dag moke
- sol

Pripravi sestavine za tvojo družino/za tvoj razred/za prijatelje na rojstnem dnevu. Koliko časa boš/boste pekli palačinke?

2. Načrtovanje šolskega ali domačega vrta

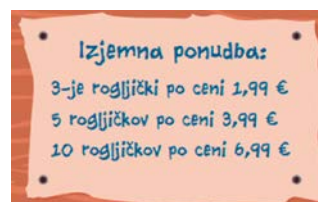
V okolici šole ali doma (na izbrani lokaciji) bomo postavili zelenjavni vrt. Izdelajte načrt šolskega ali domačega vrta, ki ga bomo spomladi postavili in zasadili. Načrt naj bo narejen v izbranem merilu z izbranimi posevki.

Vir: Razvijamo matematično pismenost, str. 76

3. Objava ponudbe za rogljičke

Luka je na počitnicah v znani lokalni slaščičarni večkrat kupil rogljičke. Cena enega rogljička je 0,80 €. Pred prodajalno stoji reklamni pano z napisano ponudbo. Če bi bil slaščičar, bi tudi objavil tako ponudbo? Utemelji. Predlagaj slaščičarju svojo ponudbo in razloži, zakaj je primernejša.

Vir: Razvijamo matematično pismenost, str. 78



4. Potovalni načrt

Naredite načrt prenočevanja za kolesarski izlet po vzhodni Sloveniji. Lena je narisala pot, ki bi jo s sošolci rada prekolesarila. Prenočevanje je možno v označenih krajih. Načrtujte čas kolesarjenja, prenočišča, prehrano, pijačo in možne ogled znamenitosti krajev za sprejemljivo ceno kolesarskega izleta.

Opomba: Za učence, ki že imajo nekaj izkušenj z dejavnostmi matematičnega modeliranja, lahko podatek o možnih krajih prenočevanja izpustimo ali pa to vključimo v naše skupne predpostavke – dogovore na začetku reševanja naloge.

Vir: Razvijamo matematično pismenost (ideja <https://eucbeniki.sio.si/mat5/index.html>)



5. Pi-merilni trak (trak premera)

Različica 1:

Za gozdarje izdelajmo Pi-merilni trak, na katerem lahko odčitamo po izmerjenem obsegu premer izmerjenega drevesa.