

On the number of non-isomorphic (simple) k -gonal biembeddings of complete multipartite graphs*

Simone Costa[†] , Anita Pasotti 

DICATAM, Università degli Studi di Brescia, Via Branze 43, 25123 Brescia, Italy

Received 21 June 2022, accepted 16 October 2023, published online 23 September 2024

Abstract

This article aims to provide exponential lower bounds on the number of non-isomorphic k -gonal face-2-colourable embeddings (sometimes called, with abuse of notation, biembeddings) of the complete multipartite graph into orientable surfaces.

For this purpose, we use the concept, introduced by Archdeacon in 2015, of Heffter array and its relations with graph embeddings. In particular we show that, under certain hypotheses, from a single Heffter array, we can obtain an exponential number of distinct graph embeddings. Exploiting this idea starting from the arrays constructed by Cavenagh, Donovan and Yazıcı in 2020, we obtain that, for infinitely many values of k and v , there are at least $k^{\frac{k}{2}+o(k)} \cdot 2^{v \cdot \frac{H(1/4)}{(2k)^2} + o(v)}$ non-isomorphic k -gonal face-2-colourable embeddings of K_v , where $H(\cdot)$ is the binary entropy. Moreover about the embeddings of $K_{\frac{v}{t} \times t}$, for $t \in \{1, 2, k\}$, we provide a construction of $2^{v \cdot \frac{H(1/4)}{2k(k-1)} + o(v,k)}$ non-isomorphic k -gonal face-2-colourable embeddings whenever k is odd and v belongs to a wide infinite family of values.

Keywords: Topological embedding, non-isomorphic embedding, Heffter array.

Math. Subj. Class. (2020): 05C10, 05C15, 05B20, 54C25

*The authors were partially supported by INdAM–GNSAGA.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), anita.pasotti@unibs.it (Anita Pasotti)

O številu neizomorfnih (enostavnih) k -gonskih bivložitvev polnih večdelnih grafov*

Simone Costa [†] , Anita Pasotti 

DICATAM, Università degli Studi di Brescia, Via Branze 43, 25123 Brescia, Italy

Prejeto 21. junija 2022, sprejeto 16. oktobra 2023, objavljeno na spletu 23. septembra 2024

Povzetek

Namen tega članka je podati eksponentne spodnje meje za število neizomorfnih k -gonskih vložitvev z 2-barvnimi lici (te vložitve včasih, ne najbolj posrečeno, imenujejo bivložitve) polnega večdelnega grafa na orientabilne ploskve.

V ta namen uporabimo koncept, ki ga je leta 2015 predstavil Archdeacon, in sicer Heffterjevo matriko in njene povezave z vložitvami grafov. Pokažemo, da – ob določenih predpostavkah – iz ene same Heffterjeve matrike dobimo eksponentno število različnih vložitvev grafov. Če izkoristimo to idejo, lahko – izhajajoč iz tabel, ki so jih konstruirali Cavenagh, Donovan in Yazıcı leta 2020 – pokažemo, da za neskončno mnogo vrednosti k in v obstaja najmanj $k^{\frac{k}{2} + o(k)} \cdot 2^{v \cdot \frac{H(1/4)}{(2k)^2} + o(v)}$ neizomorfnih k -gonskih vložitvev polnega grafa K_v z 2-barvnimi lici, kjer je $H(\cdot)$ binarna entropija. Poleg tega za vložitve $K_{\frac{v}{t}} \times t$, za $t \in \{1, 2, k\}$, predstavimo konstrukcijo $2^{v \cdot \frac{H(1/4)}{2k(k-1)} + o(v, k)}$ neizomorfnih k -gonskih vložitvev z 2-barvnimi lici, kadarkoli je k lih, v pa pripada široki neskončni družini vrednosti.

Ključne besede: Topološka vložitve, neizomorfna vložitve, Heffterjeva matrika.

Math. Subj. Class. (2020): 05C10, 05C15, 05B20, 54C25

* Avtorji so bili delno podprti s strani INdAM–GNSAGA.

[†] Kontaktni avtor.

E-poštna naslova: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), anita.pasotti@unibs.it (Anita Pasotti)