PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 1
Strani 25–28

Marija Vencelj:

KAKO RAZPOLOVIMO DALJICO SAMO S ŠESTILOM

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

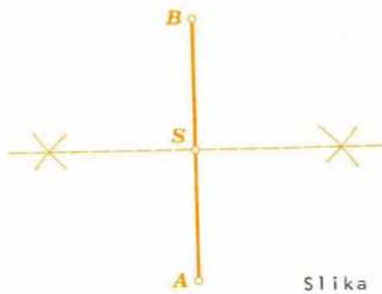
Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/9-1-Vencelj.pdf

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

KAKO RAZPOLOVIMO DALJICO SAMO S ŠESTILOM

Nalogo, poiskati razpolovišče dane daljice z uporabo šestila in ravnila, zna rešiti vsak. V šestilo vzamemo poljuben dovolj velik polmer in okrog krajišč daljice kot središč narišemo dva velika kroga. Nato z ravnilom narišemo premico skozi njuni presečišči. Točka v kateri ta premica seka dano daljico, je razpolovišče daljice. Pri konstrukciji moramo paziti le na to, da šestilo dovolj razpremo, da se kroga res tudi sekata. Navada je še, da oba kroga rišemo le delno v bližini njunih presečišč (slika 1).

Vendar moremo rešiti nalogo tudi v primeru, če imamo samo šestilo. Ta trditev je samo drobec naslednje veliko splošnejše resnice: *Vsako konstrukcijo, ki jo lahko izvedemo s šestilom in ravnilom, je moč izpeljati že samo s šestilom.*



Slika 1

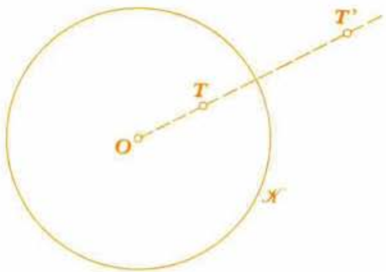
S splošno trditvijo se to pot ne bomo ukvarjali - morda kdaj drugič. Povrnimo se k zastavljeni nalogi v naslovu. Ker konstrukcije ne bomo samo navedli, ampak tudi utemeljili, potrebujemo nekaj priprave.

Zrcaljenje na krog. Naj bo v ravnini dan krog K s središčem O in polmerom r. Nadalje naj bo T poljubna točka te ravnine. Točki O in T določata poltrak, ki ima izhodišče v O in gre skozi

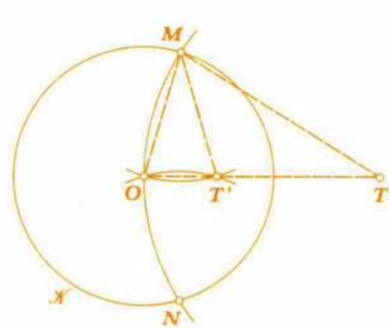
T. Na tem poltraku izberimo točko T' tako, da bo za oddaljenosti točk T in T' od središča kroga veljala zveza

(1) $$OT.OT'= r^2$$

Tako izbrano točko T' imenujemo zrcalna slika točke T glede na krog K. Takoj vidimo, da je tudi obratno točka T zrcalna slika točke T' glede na K. Zrcalnost je torej vzajemna relacija (slika 2).



Slika 2



Slika 3

Če leži točka T zunaj kroga K, je $OT > r$ in iz $OT.OT' = r^2$ sledi $OT' < r$, torej leži T' znotraj kroga K. To pomeni, da preslika zrcaljenje točke zunaj kroga K v notranje točke in obratno, notranje v zunanje. Takoj se tudi vidi, da je $T = T'$, če T izberemo na krožnici.

Središče O kroga K je edina točka, katere zrcalna slika ni določena. Tedaj namreč O in T sovpadata in ta edina točka ni dovolj za določitev poltraka, na katerem naj bi ležala zrcalna slika. Očitno pa je, da se zrcalna slika T' točke T tem bolj oddaljuje od O, čim bolj se T središču O približuje. Zato včasih pravimo, da se središče kroga, na katerega zrcalimo, preslika v neskončnost.

Geometrijska konstrukcija zrcalne točke. Dani točki T lahko konstruiramo zrcalno točko T' glede na krog K samo s šestilom, brez uporabe ravnila. Trditev velja povsem splošno, če le T ni središče kroga K. Vendar bomo tu pokazali konstrukcijo le za primer, če leži točka T zunaj kroga K, ker bo to zadoščalo za naše nadaljnje potrebe.

Naj bo dan krog K s središčem O in polmerom r in točka T zunaj kroga (slika 3).

S šestilom narišimo krog s središčem v točki T in s polmerom OT. Ta krog poteka skozi središče O kroga K in očitno seka krog v dveh točkah, ki ju označimo recimo z M in N. Narišimo nato še dva kroga, enega s središčem v M, drugega s središčem v N, in oba s polmerom r, torej oba skozi točko O. Razen v točki O, se ta dva kroga sekata še v eni točki, za katero bomo videli, da je ravno zrcalna slika točke T glede na krog K, zato to presečišče že vnaprej označimo s T'.

Konstrukcijo smo res izvedli samo s šestilom. Dokazati moramo le še trditev, da sta T in T' zrcalni točki. Pa poglejmo!

Če še enkrat sledimo konstrukciji, hitro ugotovimo, da imajo točke O, T in T' neko skupno lastnost. Za vsako izmed njih namreč velja, da sta njeni razdalji od točk M in N med seboj enaki. Vemo, da je geometrijsko mesto točk, ki so enako oddaljene od dveh fiksnih točk, premica (natančneje simetrala daljice, ki ima ti točki za krajišči). To pa ne pomeni nič drugega kot to, da leže točke O, T, T' na isti premici. Iz konstrukcije je tudi jasno, da ležita T in T' na tej premici na isti strani točke O, torej na istem poltraku z izhodiščem O.

Dokazati moramo še veljavnost zveze (1). Trikotnika OMT in OMT' sta oba enakokraka in imata skupen kot z vrhom v O. Ker je ta kot v obeh trikotnikih kot od osnovnici, sta trikotnika podobna. Potem velja za razmerji njunih krakov in osnovnic sorazmerje

$$\frac{OT}{OM} = \frac{OM}{OT'}$$

in zaradi $OM = r$ dobimo $OT.OT' = r^2$. S tem je pravilnost konstrukcije potrjena.

Razpolovimo daljico samo s šestilom. Naj bo dana daljica s krajiščema A in B (slika 4). Narišimo krog s središčem v B in s polmerom AB. Po krožnici nato trikrat zapored nanesimo polmer AB začenši v točki A. Končna točka C, ki jo dobimo pri nanašanju, leži na premici skozi točki A in B in zanjo velja $AB = BC$ oziroma $AC = 2AB$.

Narišimo še en krog - to pot s središčem v A in spet s polmerom AB - ter prezrcalimo točko C glede na ta krog. Za zarcalno sliko C' velja

$$AC \,. AC = AB^2$$

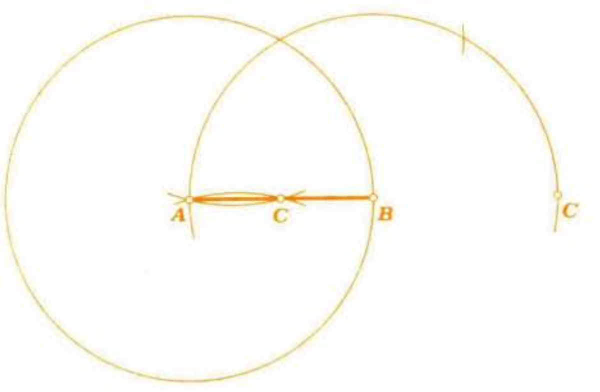
kar da

$$AC' . 2AB = AB^2$$

in

$$2AC' = AB$$

Torej je C' točka, ki razpolavlja daljico AB.



Slika 4

Vse smo res opravili brez uporabe ravnila. Opozorim naj še, da na sliki 4 zaradi preglednosti nismo narisali vsega postopka zrcaljenja točke C, ampak samo C', kot njegov rezultat. S pomočjo slike 3 lahko dopolni risbo bralec sam.

Marija Vencelj