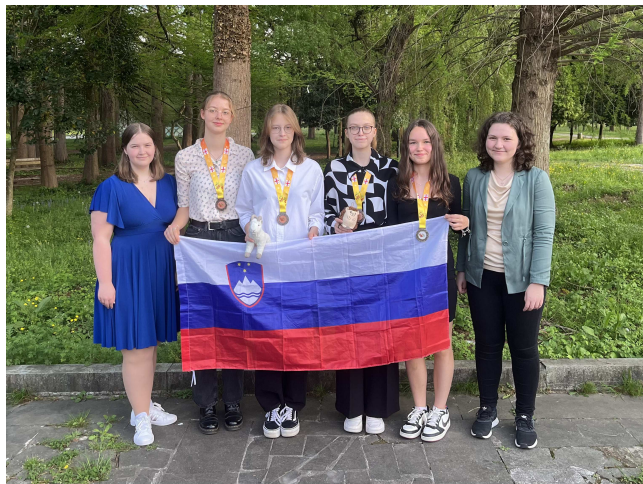


Štiri medalje za Slovenijo na EGMO 2024 v Gruziji



KAJA RAJTER, ANA META DOLINAR

→ S podelitvijo medalj in priznanj najupešnejšim tekmovalkam se je v torek, 16. aprila 2024, zvečer zaključila 13. Evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO - European Girls' Mathematical Olympiad), ki je potekala v mestu Tskaltubo v Gruziji. Največjega mednarodnega tekmovanja za srednješolke, na katerem je tokrat sodelovalo več kot 200 tekmovalk iz 53 držav, se je že dvanaestič zapored udeležila tudi slovenska ekipa. Ta je ekipno dosegla najboljši rezultat doslej, saj so vse štiri tekmovalke osvojile medalje.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa od leve proti desni: vodja Kaja Rajter, tekmovalke Zara Barbarić, Patricia Király, Nives Gošnjak in Ekaterina Chizhova ter pomočnica vodje Katarina Grilj.

S srebrno medaljo se je med našimi tekmovalkami najbolje odrezala najmlajša med njimi, Ekaterina Chizhova (Gimnazija Bežigrad), tudi druge tri slovenske tekmovalke pa so pokazale veliko znanja, saj so Nives Gošnjak (ŠC Velenje, Gimnazija), Patricia Király in Zara Barbarić (obe Gimnazija Bežigrad) osvojile bronaste medalje, pri čemer sta Nives in Patricia srebro zgrešili le za eno točko. Slovenija je skupaj dosegla 82 točk in osvojila 10. mesto med evropskimi ekipami, kar je najbolje doslej. Ekipno prvo mesto je osvojila ekipa ZDA, med evropskimi ekipami pa je bila najboljša Ukrajina. Skupno je bilo tekmovalkam podeljenih 25 zlatih, 38 srebrnih in 52 bronastih medalj ter 28 pohval.

Namen udeležbe na posebni matematični olimpijadi za dekleta je omogočiti dekletom dodatno spodbudo za udejstvovanje na akademskem področju, kjer so bila tradicionalno zapostavljena, in na ta način doseči večjo uravnoteženost spolov tudi na običajni Mednarodni matematični olimpijadi (IMO) in v akademski in raziskovalni sferi na splošno. Samo tekmovanje sicer poteka dva dneva. Tekmovalke

vsak dan 4 ure in pol rešujejo 3 zahtevne problemske naloge iz različnih vej matematike (teorija števil, kombinatorika, geometrija in algebra), ki jih izmed prejetih predlogov različnih držav izbere tekmovalna komisija.

Celoletne priprave in izbor ekip za mednarodna tekmovanja iz matematike za srednješolke in srednješolce tradicionalno potekajo pod okriljem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z bivšimi tekmovalkami in tekmovalci in z različnimi fakultetami. Slovensko ekipo sta letos vodili bivši tekmovalki Katarina Grilj in Kaja Rajter, kot koordinatorji so pri izvedbi olimpijade sodelovali še Neca Camlek, Lenart Dolinar, Hugo Trebše in Ana Meta Dolinar, ki je bila tudi članica odbora za izbiro nalog in članica odbora EGMO.





Sobota, 13. april 2024

Naloga 1. Na tabli sta napisani dve različni celi števili u in v . Izvedemo zaporedje korakov, pri čemer v vsakem koraku naredimo eno izmed naslednjih dveh potez:

- (i) Če sta a in b različni celi števili na tabli, lahko na tablo napišemo $a + b$, če tega števila še ni tam.
- (ii) Če so a, b in c tri različna števila na tabli in če za celo število x velja $ax^2 + bx + c = 0$, lahko na tablo napišemo x , če tega števila še ni tam.

Določi vse začetne pare števil (u, v) , za katere lahko na tabli v končnem številu korakov dobimo poljubno celo število.

Naloga 2. Naj bo ABC trikotnik, pri čemer je $|AC| > |AB|$. Z Ω označimo njegovo očrtano krožnico ter z I središče vrtane krožnice trikotnika. Včrtana krožnica se dotika stranic BC, CA, AB zaporedoma v D, E, F . Naj bosta X in Y zaporedoma dve točki na krajših lokih $\widehat{DF}$ in $\widehat{DE}$ včrtane krožnice, tako da velja $\angle BXD = \angle DYC$. Naj se premici XY in BC sekata v točki K . Naj bo T takšna točka na Ω , da je KT tangentna na Ω in da T leži na isti strani premice BC kot A . Dokaži, da se premici TD in AI sekata na Ω .

Naloga 3. Naravno število n je *svojevrstno*, če za vsak pozitiven delitelj d števila n celo število $d(d+1)$ deli $n(n+1)$. Dokaži, da za poljubna štiri različna svojevrstna naravna števila A, B, C in D velja:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Pri tem je $\gcd(A, B, C, D)$ največje naravno število, ki deli vsakega izmed števil A, B, C in D .

SLIKA 2.

Naloge prvega tekmovalnega dne.

Letos so se slovenske tekmovalke na olimpijado nekaj dni pripravljale v Plemljevi vili na Bledu in ob tem spoznale tudi delček slovenske matematične dediščine. K izjemnemu uspehu in dodatni motivaciji slovenskih tekmovalk za delo pa je gotovo prispevala tudi odlična organizacija lanske olimpijade EGMO 2023 v Portorožu. Vse štiri slovenske tekmovalke so se olimpijade namreč udeležile že lani in tako pridobile pomembne izkušnje za letošnji uspeh. Prihodnje leto bo olimpijada potekala v Prištini na Kosovu.

Udeležbo slovenskih tekmovalk na EGMO 2024 v Gruziji sofinancira Javni štipendijski, razvojni, inva-

lidski in preživninski sklad Republike Slovenije (JŠRIPS). Diamantni sponzor aktivnosti DMFA Slovenije v letu 2024 je podjetje Zavarovalna skupina Sava.

Za bralke in bralce Preseka povejmo še nekaj o letošnjih nalogah. Kot običajno se je za najtežjo na tekmovalju izkazala 6. naloga, ki je v celoti ni uspela rešiti nobena izmed 212 tekmovalk. Slovenske tekmovalke pa so bile zelo uspešne pri 4. nalogi, ki so jo vse štiri rešile popolnoma pravilno. S tem je bila Slovenija ena izmed le treh evropskih držav z vsemi točkami pri 4. nalogi. Besedilo in rešitev te naloge objavljamo v nadaljevanju.



SLIKA 3.

Razširjena slovenska odprava.

Naloga 4: Za zaporedje celih števil $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ je par (a_i, a_j) , pri čemer je $1 \leq i < j \leq n$, *zanimiv*, če obstaja par celih števil (a_k, a_l) , pri čemer je $1 \leq k < l \leq n$, da velja

$$\frac{a_l - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Za vsak $n \geq 3$ poišči največje možno število zanimivih parov v zaporedju dolžine n .

Rešitev: Najprej opazimo, da je število vseh parov z indeksi $1 \leq i < j \leq n$ enako

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

saj je za $i = 1$ ustreznih indeksov j natanko $(n-1)$, za $i = 2$ natanko $(n-2)$ in tako dalje.

Z nekaj intuicije bomo zdaj našli zaporedje, ki ima veliko zanimivih parov, nato pa dokazali, da večje število zanimivih parov ni možno. Oglejmo si zaporedje $a_i = 2^i$ za $2 \leq i \leq n$ in $a_1 = 0$. Izberimo katerikoli par (a_i, a_j) , kjer velja $1 \leq i < j \leq n$. Če je $i = 1$, je par (a_1, a_j) zanimiv za vse $2 \leq j \leq n-1$, ker velja

$$\frac{a_{j+1} - a_1}{a_j - a_1} = \frac{2^{j+1}}{2^j} = 2.$$

Če je $i \geq 2$, je par (a_i, a_j) zanimiv za vse j , kjer je $i+1 \leq j \leq n-1$, saj je

$$\frac{a_{j+1} - a_{i+1}}{a_j - a_i} = \frac{2^{j+1} - 2^{i+1}}{2^j - 2^i} = 2.$$

Poleg tega je zanimiv tudi par (a_{n-1}, a_n) , saj velja

$$\frac{a_n - a_1}{a_n - a_{n-1}} = \frac{2^n - 0}{2^n - 2^{n-1}} = 2.$$

Torej smo pokazali, da so v tem zaporedju zanimivi vsi pari z indeksi $1 \leq i < j \leq n-1$ in še par (a_{n-1}, a_n) . Nezanimivi so le pari (a_i, a_n) za $i = 1, \dots, n-2$, ki jih je skupaj $n-2$. Vseh zanimivih parov v tem zaporedju je torej natanko

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-2) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}.$$

Zdaj dokažimo, da nobeno zaporedje nima več kot toliko zanimivih parov. Pokazali bomo, da vsaj $n-2$ parov ni zanimivih. Par (a_1, a_n) ni zanimiv, saj bi za to potrebovali $a_l - a_k = 2(a_n - a_1)$, vendar pa je razlika $(a_n - a_1)$ največja od vseh razlik med pari, zato ne moremo najti a_l in a_k s še enkrat večjo razliko.

Opazimo naslednje: če je par (a_i, a_j) zanimiv in ni enak (a_1, a_n) , potem razlika $a_j - a_i$ ne more biti večja od $(a_n - a_1)/2$. Če je namreč par (a_i, a_j) zanimiv, potem velja $a_l - a_k = 2(a_j - a_i)$ za neki par (a_k, a_l) , zato bi iz $2(a_j - a_i) > a_n - a_1$ sledilo $a_l - a_k > a_n - a_1$, kar pa ni mogoče.

Zdaj si za vsak $2 \leq i \leq n-1$ oglejmo para (a_1, a_i) in (a_i, a_n) . Če bi bila oba zanimiva, potem (upoštevajoč opažanje iz prejšnjega odstavka) je edina možnost $a_i - a_1 = a_n - a_i = (a_n - a_1)/2$. To je mogoče za največ en i , za vseh ostalih $n-3$ možnih vrednosti za i pa vsaj eden od parov (a_1, a_i) in (a_i, a_n) ni zanimiv. Skupaj s parom (a_1, a_n) dobimo vsaj $n-2$ nezanimivih parov, kar je točno to, kar smo želeli dokazati.

Največje možno število zanimivih parov je torej

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{2}.$$

× × ×