Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2024, letnik 30

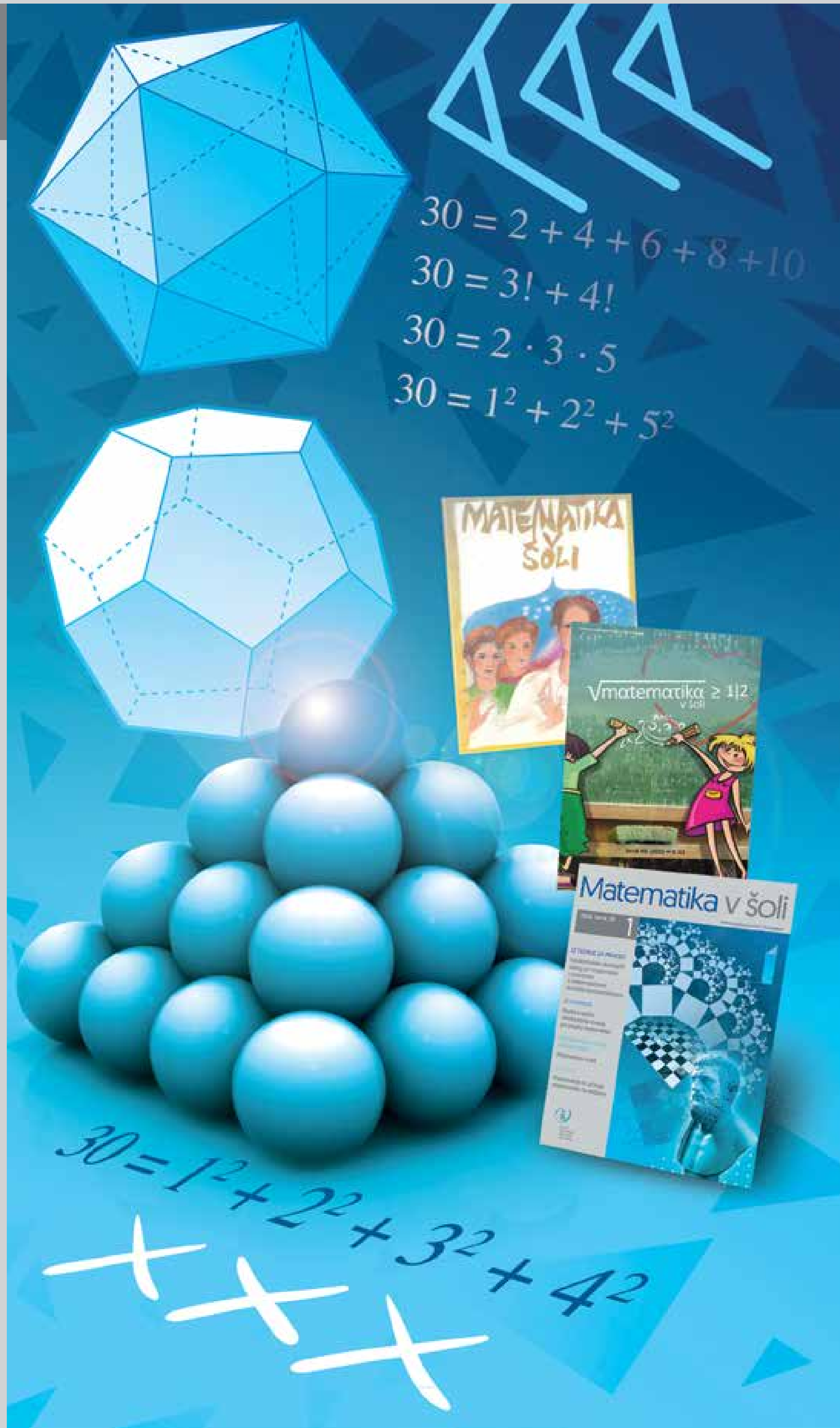
1

OSREDNJA TEMA:

Odnos do učenja matematike

Matematična anksioznost

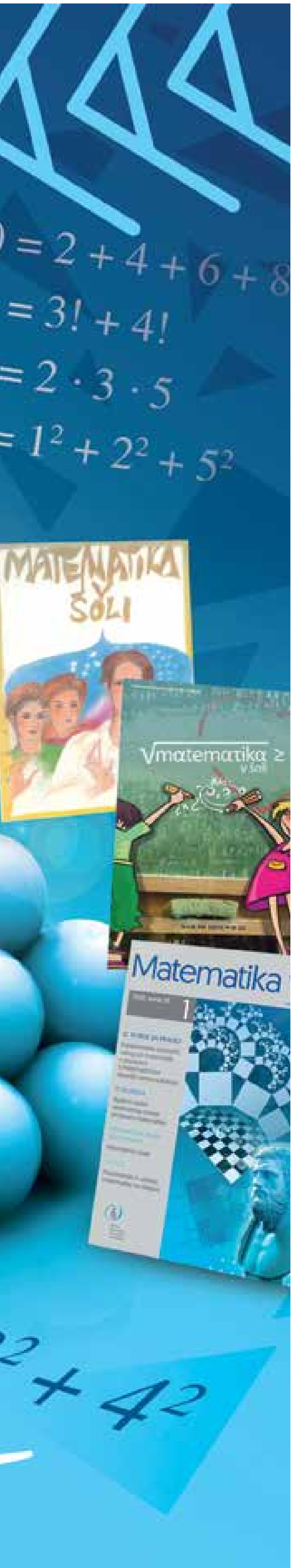
Preiskovanje in raziskovalne naloge iz matematike



ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

Matematika v šoli

2024, letnik 30 1



VSEBINA

Obe skrajnosti odnosa do učenja matematike

V tej številki revije se bomo posvetili odnosu učencev do učenja matematike. Obravnavali bomo obe skrajnosti: nekateri učenci so ekstremno navdušeni nad matematiko in še v prostem času preiskujejo matematične zakonitosti ter izdelujejo raziskovalne naloge, spet drugi pa imajo do nje izrazito odklonilen odnos, jo sovražijo in/ali se je celo bojijo.

Prva članka v reviji vsak po svoje obravnavata matematično anksioznost, ki negativno vpliva na proces učenja in dosežke učencev. Gre za občutek strahu ali tesnobe, ki se pojavi ob reševanju matematičnih problemov ali celo ob sami misli na matematiko.

Raziskava, objavljena v *Journal of Humanistic Mathematics*, je pokazala, da matematična anksioznost negativno vpliva na ustvarjalnost pri matematiki. Raziskava je ugotovila, da izkušnje, ki vključujejo kreativne matematične aktivnosti, kot so reševanje problemov, divergentno razmišljanje in razvijanje različnih strategij, lahko pomagajo zmanjšati matematično anksioznost in hkrati spodbujajo matematično ustvarjalnost. Raziskava je tudi poudarila, da je pomembno ustvariti učna okolja, ki spodbujajo eksperimentiranje in inovativnost, saj to lahko zmanjša občutke tesnobe in poveča zaupanje v lastne matematične sposobnosti (Fetterly, 2020).

Ustvarjalno mišljenje je v raziskavi PISA opredeljeno kot spretnost produktivnega vključevanja v ustvarjanje, vrednotenje in izboljševanje idej, ki lahko privedejo do izvirnih in učinkovitih rešitev (Šterman Ivančič, 2024). Raziskava PISA 2022, ki je poleg matematične, naravoslovne in bralne pismenosti preverjala tudi ustvarjalno mišljenje, je pri slovenskih 15-letnikih zaznala podpovprečne dosežke na področju ustvarjalnega mišljenja, čeprav so poročali o pogostejši udeležbi v aktivnostih s področja ustvarjalnosti na tedenski ravni kot njihovi vrstniki iz držav OECD. Naši 15-letniki izražajo bolj negativna stališča do različnih vidikov ustvarjalnosti kot njihovi vrstniki v državah OECD, poročajo o nižji lastni samoučinkovitosti na področju ustvarjalnosti in domišljije ter odprtosti do pridobivanja novega znanja in novih izkušenj (Pedagoški inštitut, 2024).

Zmanjševanje matematične anksioznosti je ključnega pomena za spodbujanje matematične ustvarjalnosti. V tej reviji so v rubriki »Iz razreda« učitelji opisali, kako se z različnimi pristopi približajo svojim učencem in jim nudijo varno in spodbudno učno okolje, v katerem lahko vsak uresniči svoje potenciale.

Revijo zaključujejo članki s predstavitvijo primerov preiskovanj, ki lahko ob primerni podpori učitelja prerastejo v raziskovalne naloge na srečanju mladih raziskovalcev.

Vabljeni k branju, nabiranju novih idej in soustvarjanju naše revije.

Sonja Rajh, odgovorna urednica

Viri

Fetterly, J. M. (2020). *Fostering Mathematical Creativity While Impacting Beliefs and Anxiety in Mathematics.* Journal of Humanistic Mathematics. https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1667&context=jhm

Pedagoški inštitut. (2024). PISA 2021/PISA 2022. https://www.pei.si/; https://www.pei.si/raziskovalna-dejavnost/mednarodne-raziskave/pisa/pisa-2021-pisa-2022/

Šterman Ivančič, K. (2024). PISA 2022. https://www.pei.si/wp-content/uploads/2024/06/PISA2022_CT_PPT.pdf

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXX, številka 1, 2024

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: dr. Zala Mikeln in Andraž Polončič Ruparčič
Prevod povzetkov v angleščino: Bumblebee, jezikovno svetovanje, Polonca Luznik, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
Tisk: Para, d. o. o.
Naklada: 510 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Murska Sobota (za revijo Matematika v šoli),
Slomškova ulica 33, 9000 Murska Sobota,
e-naslov: revija.matematika@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana,
faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Matematična anksioznost v projektu Spremljanje in izboljšanje individualnih obravnav učencev v covid in post-covid razmerah

Monitoring and Improving Individualised Treatment of Pupils in COVID and Post-COVID Circumstances: Mathematics Anxiety

Mišela Mavrič, PhD, Združeno Kraljestvo Velike Britanije in Severne Irske
in Jerneja Bone, Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje

Izvleček

V razgovoru dobimo vpogled v projekt Spremljanje in izboljšanje individualnih obravnav učencev v covid in post-covid razmerah. Skupina raziskovalcev v okviru tega projekta obravnava matematično anksioznost. V intervjuju raziskovalci pojasnijo, kaj je anksioznost, kaj je matematična anksioznost in kako vpliva na proces učenja. V razgovoru nas seznanijo tudi s programom Cool Kids.

Ključne besede: matematična anksioznost, program Cool Kids, otroci, mladostniki

Abstract

The interview provides insight into the project Monitoring and Improving Individualised Treatment of Pupils in COVID and Post-COVID Circumstances. A group of researchers for the project has been focusing on mathematics anxiety. The interviewees explain anxiety, more specifically mathematics anxiety and how it affects the learning process. The article ends with the presentation of the Cool Kids programme.

Keywords: mathematics anxiety, Cool Kids, children, adolescents

Dr. Andrej Košir, dr. Peter Janjušević in dr. Mateja Hudoklin s skupino raziskovalcev izvajate projekt z naslovom Spremljanje in izboljšanje individualnih obravnav učencev v covid in post-covid razmerah. V okviru tega projekta obravnavate matematično anksioznost. Tematika je aktualna in zanimiva, zato se nam zdi prav, da o njej izvedo več tudi slovenski učitelji matematike na vseh stopnjah izobraževanja.

Anksioznost je poleg depresije najpogostejša težava na področju duševnega zdravja, s katero se srečujejo tudi otroci in mladostniki. Kaj so pokazale raziskave glede anksioznosti med otroki in mladostniki pred covid obdobjem in po njem?

Dr. Mateja Hudoklin: Metaanalize prevalence anksioznosti pri otrocih in mladostnikih pred pandemijo covid-19 in po njej (Racine idr. 2021) kažejo na pomembno povečanje anksioznosti med epidemijo. Pred epidemijo je bila pojavnost anksioznosti med otroki in mladostniki med 11 in 12 %. V prvem letu epidemije so bili klinično pomembni simptomi anksioznosti opazni pri 20 % otrok in mladostnikov. S trajanjem epidemije so ti simptomi naraščali in v primerjavi s predcovidnim obdobjem se je število podvojilo.

Anksioznost vpliva na proces učenja na različne načine. Imate podatke, kako se odraža ta vpliv?

Dr. Peter Janjušević: Negativen vpliv ima na nekatere kognitivne funkcije, npr. pozornost, koncentracijo, delovni spomin in procesiranje informacij (Edwards idr. 2015; Moran 2016). Anksiozni učenci se počutijo neprijetno in takim situacijam se skušajo izogibati. Zato je z anksioznostjo povezano tudi povečano odklanjanje šole (Hansen idr. 1998).

Matematika in matematična anksioznost. Kaj nam lahko poveste o tem? Kako je opredeljena matematična anksioznost?

Dr. Mateja Hudoklin: Matematika sodi v skupino splošnoizobraževalnih predmetov kot drugi najpomembnejši predmet. V naši osnovni šoli je matematiki namenjeno skoraj 17 % vseh ur (slovenščini 20,89 %, tujemu jeziku 11,09 %). Uspeh pri matematiki ima pomembno napovedno vrednost uspeha v srednji šoli (Flere idr. 2009).

Matematična anksioznost (v nadaljevanju MA) je definirana kot »občutenje stiske in strahu, ko se ukvarjamo s števili in rešujemo matematične probleme v vsakdanjem življenju in v šolski situaciji« (Richardson in Suinn 1972) in je multidimenzionalni konstrukt z različnimi reakcijami: čustvenimi (negativne občutki), kognitivnimi (misli vsiljivke), fiziološkimi (naraščanje stresa, neprijetni občutki) in vedenjskimi (izogibanje situacijam, v katerih je vključena matematika, celo opuščanje). MA lahko negativno vpliva na kognitivne funkcije, povezane z zbiranjem in obdelavo informacij, zlasti na pozornost, spomin, odločanje in reševanje problemov (Hembree 1990; Balt idr. 2022). MA pri otrocih je negativno povezana z matematičnimi rezultati (Ramirez idr. 2016). Ob tem je treba poudariti, da je negativna povezava tudi med učenci z dobrim delovnim spominom in MA. Ta je bila ponovno ugotovljena pri srednješolcih v raziskavi PISA 2012. Matematika se pogosto tretira kot najbolj zastrašujoča med vsemi osnovnošolskimi predmeti, in to ne samo v povezavi z oceno, ampak tudi z negativnimi občutki, vezanimi na neprijetne izkušnje pri matematiki (Mammarella idr. 2019).

Neuspeh pri matematiki otroci pogosto pripisujejo sposobnostim, dalj časa trajajoča izkušnja doživljanja neuspeha pri matematiki pa zmanjša željo po učenju matematike in privede do odpora do predmeta in negativnega odnosa do učenja na splošno (Montague 1997). Strah pred matematiko je eden izmed pomembnih okoljskih vzrokov za neuspeh pri matematiki. Strah se pogosto pojavi zaradi časovnega pritiska, posameznikove percepcije, da ne zna, in njegove stalne neuspešnosti ter neposredno vpliva na delovno pomnjenje, ki skrbi za hkratno izvajanje različnih matematičnih aktivnosti (Sousa 2008).

Za našo rešitev je bistveno, da obstaja znaten delež otrok z matematično anksioznostjo, ki imajo dobre ali odlične matematične sposobnosti in tako anksioznost ni enostavno izraz težav s samo matematiko. Zato jim z merjenjem anksioznosti in izboljšanjem obravnav lahko pomagamo.

Prav gotovo ste preučili tudi, kako je z matematično anksioznostjo v Sloveniji in drugod po svetu.

Dr. Mateja Hudoklin: PISA 2012, kjer je bila poudarjena matematična pismenost (Štraus idr. 2013), kaže, da se Slovenija uvršča med države, v kateri dijaki izražajo višjo stopnjo zaskrbljenosti in anksioznosti glede matematike kot v drugih državah OECD, čeprav je matematična pismenost slovenskih dijakinj in dijakov nad povprečjem OECD. V Sloveniji 20 % tretje- oziroma četrtošolcev ne mara matematike in naravoslovnih predmetov, delež takih učencev na predmetni stopnji je celo 65 % (Pucelj in Vidmar 2013). Po zadnji raziskavi TIMSS iz leta 2011 ima le 45 % četrtošolcev in 6 % osmošolcev matematiko za priljubljen predmet in se tako med 50 državami uvrščamo na nizko, 33. mesto (Japelj idr. 2012). Nezanemarljiv pa je tudi vpliv pandemije covida-19. Metaanalize prevalence anksioznosti pri otrocih in mladostnikih pred pandemijo covida-19 in po njej kažejo na pomembno povečanje anksioznosti, ki se je, v primerjavi s predcovidnim obdobjem (11 %), podvojila (Racine idr. 2021).

Ugibamo lahko, da ima matematična anksioznost negativne vplive na različna področja otrokovega življenja. Kasneje se to odraža tudi v življenju posameznika. Nam lahko poveste kaj več o tem.

Dr. Peter Janjušević: Dosedanje raziskave so pokazale, da ima matematična anksioznost negativen vpliv na vrsto kognitivnih funkcij, povezanih z učenjem, kakor tudi na vrsto negativnih čustvenih, fizioloških in vedenjskih reakcij (npr. Moran 2016; Abbott idr. 2017; Avancini in Szűcs 2019; Pizzie idr. 2021; Balt idr. 2022). Eden izmed ključnih vzrokov MA je strah pred matematiko, ki se pogosto pojavi zaradi časovnega pritiska, posameznikove percepcije, da ne zna, in njegove stalne neuspešnosti, kar ima lahko tudi širše negativne učinke na razvoj otroka in njegovo samopodobo (Sousa 2008).

Neuspešnost pri matematiki ima lahko večje posledice za življenje človeka kot slabša bralna pismenost (Butterworth in Yeo 2004; Flere idr. 2009; Butterworth idr. 2011). Ashcraft (2002) poudarja, da se učenci z izraženo (intenzivno) matematično anksioznostjo izogibajo matematiki in nalogam, kjer bi se lahko naučili in izkazovali svoje znanje. Izogibanje reševanju in matematičnim vajam rezultira v vedno slabšem uspehu, kar pa povzroča, da so učenci še bolj anksiozni. Neuspeh pri matematiki učenci pogosto pripisujejo slabšim kognitivnim sposobnostim (Montague 1997; Sousa 2008; Balt idr. 2022). Posledično je izrednega pomena, da se z MA spoprimemo karseda kmalu in s posamezniku prilagojenimi intervencijami.

Ob vsem povedanem se zastavlja vprašanje, ali zmoremo in znamo zmeriti matematično anksioznost, ali obstajajo kakšni instrumentariji, orodja? Je kdo že poskušal z merjenjem matematične anksioznosti?

Dr. Andrej Košir in dr. Peter Janjušević: Večina ukrepov za ocenjevanje matematične anksioznosti vključuje psihometrična orodja, kot so vprašalniki in ocenjevalne lestvice. Prvi tak vprašalnik, ki ga poznamo, je vprašalnik Dregerja in Aikena (1957), poznejši znani primeri pa vključujejo lestvico za raziskovanje matematične anksioznosti oz. Mathematics Anxiety Research Scale (Richardson in Suinn 1972) ter lestvico Mathematics Attitude Scales (Fennema in Sherman 1976).

Nekateri vprašalniki so bili posebej razviti za uporabo pri osnovnošolcih in temeljijo na slikovnih ocenjevalnih lestvicah, npr. vprašalnik o odnosu do matematike in anksioznosti oz. Mathematics Attitude and Anxiety Questionnaire (Dowker idr. 2012) in lestvica odnosa otrok do matematike oz. Children's Attitude to Math Scale (James 2013).

Kljub razširjeni uporabi zgoraj omenjenih psihometričnih orodij za merjenje MA, imajo ti dve ključni pomanjkljivosti. Predvsem je težava ta, da lahko nanje, tako kot na vse meritve s samoporočanjem, vplivata tako samopodoba anketirancev kot tudi njihova iskrenost pri poročanju (Abbott idr. 2017; Balt idr. 2022). Tako je eno od izhodišč tega projekta vzpostavitev objektivnega merjenja in ocena zanesljivosti takega merjenja.

Druga ključna pomanjkljivost ocenjevanja simptomov oz. subjektivnega doživljanja anksioznosti je obsežnost ocenjevalnih lestvic in vprašalnikov, ki so v realnem času za klinično rabo lahko nepraktični (Spence, 2018), saj zahtevajo prekinitev poteka intervencije. Ob tem je časovni okvir, ki ga takšno ocenjevanje pokriva, običajno definiran v preteklih dneh ali tednih, ne pa v realnem času – tu in zdaj. V okviru tega projekta uporabljamo psihometrična orodja, ki jih že sicer uporabljamo v okviru programa Cool Kids, kjer izvajamo testna merjenja matematične anksioznosti. Sodobne senzorske tehnologije omogočajo dovolj malo moteče merjenje indikatorjev matematične anksioznosti v realnem času in posledično modeliranje na podlagi strojnega učenja.

Ključni korak pri objektivnem merjenju v realnem času je tudi dovolj uspešno modeliranje s postopki strojnega učenja in multivariantne statistike. S tem fiziološke meritve senzorjev prevedemo v indikatorje matematične anksioznosti. Na to področje vstopajo tudi generativni modeli globokega učenja, kjer je izziv modeliranje z izrazito majhnimi podatkovnimi množicami.

Vodite projekt z naslovom Spremljanje in izboljšanje individualnih obravnav učencev v covid in post-covid razmerah. Katerim ciljem sledite v projektu?

Dr. Andrej Košir: Cilj projekta je razviti podporne tehnologije (v nadaljevanju PT) za psihofiziološko merjenje MA in jih integrirati v obstoječe intervencije MA.

Rešitev je sestavljena iz dveh delov:
1) intervencija (individualna obravnava), ki je prilagojena posameznikovi MA, in
2) senzorska PT, ki MA meri psihofiziološko in na podlagi strojnega učenja strokovnjaku v realnem času daje povratne informacije o otrokovi stopnji MA ter mu tako pomaga prilagajati intervencijo ter uravnavati anksioznost. Intervencija, podprta s PT, hkrati otroke uči, kako nadzorovati svojo MA.

Pričakuje se, da bo predlagana rešitev učinkoviteje zmanjšala MA kot zgolj uporaba obstoječih intervencij brez PT. Nadalje, ker predlagana rešitev temelji na meritvah psihofizioloških signalov (na katere merjeni učenec nima vpliva) v realnem času in okolju, takšna PT omogoča objektivnejšo in bolj standardizirano oceno MA.

Specifični cilji projekta s pomočjo PT so:
- objektivno merjenje MA v realnem času na podlagi psihofizioloških signalov ter ovrednotenje izvedljivosti takega merjenja;
- učinkovitejše prepoznavanje in obvladovanje intenzivnosti simptomov MA in s tem
- izboljšan vpogled svetovalcev in pedagogov v mehanizme proženja MA;
- učinkovitejše prilagajanje intervencij za zmanjšanje MA; učenec hitreje in bolje prepoznava naraščanje lastne anksioznosti, izvajalec pomoči pravočasno intervenira in prilagodi učni proces; s tem učenec pridobiva pozitivne izkušnje obvladovanja anksioznosti, izboljša se učenčeva učna uspešnost in samopodoba;
- integracija PT v ustaljen psihometrični instrumentarij individualnih obravnav MA v okviru programa Cool Kids.

Širši cilji so:
- institucionalno izboljšanje postopkov dodeljevanja pomoči učencem z MA;
- razvoj PT kot podpora učenju in poučevanju v normalnih in posebnih razmerah;
- možnost razširitve projektnih rešitev na druga področja s situacijsko anksioznostjo, kot so učenje jezikov, govorni nastopi, ocenjevanje znanja ipd.

V nekaterih državah poteka program Cool Kids. Nam lahko poveste kaj več o tem?

Dr. Peter Janjušević in dr. Mateja Hudoklin: Cool Kids® program za premagovanje anksioznosti je bil v začetku devetdesetih let prejšnjega stoletja zasnovan na avstralski univerzi Macquarie v Sydneyju (Rapee, 2008) in temelji na vedenjsko-kognitivni terapiji. Razširjen je po vsem svetu in se izvaja v 24 državah (v Evropi med drugim na Danskem, Norveškem, Finskem, Švedskem, Nizozemskem, Islandiji, v Italiji …), od leta 2020 s sofinanciranjem Ministrstva za zdravje tudi v Sloveniji. Gre za strukturiran program, kjer je jasno določeno število, zaporedje, vsebina in potek srečanj. Sestavljen je iz najmanj desetih srečanj, namenjen pa je otrokom in mladostnikom od sedmega do sedemnajstega leta ter njihovim staršem. Izvaja se v skupini ali individualno ter se usmerja v učenje praktičnih spretnosti za obvladovanje anksioznosti. V program so starši vključeni bolj ali manj aktivno, glede na starost otroka. Izvajalci programa so strokovnjaki, educirani v kognitivno-vedenjski terapiji, ki opravijo usposabljanje in akreditacijo za program Cool Kids.

Spletna stran: https://coolkids.si/

Ugotovitve vašega projekta bodo nakazale tudi možnosti prenosa znanj v prakso. Nam lahko opišete možnosti in načine.

Dr. Andrej Košir in dr. Mateja Hudoklin: Rezultati študije bodo omogočili prenos navodil in principov dela v šolski prostor, predvsem za učitelje dodatne strokovne pomoči, ki to izvajajo z učenci s posebnimi potrebami v okviru individualnih ali skupinskih ur dodatne strokovne pomoči, pa tudi za razredne oz. predmetne učitelje pri urah matematike v razredu. V projektu bomo na podlagi ugotovitev izdelali smernice za reagiranje učiteljev, ko bodo otroci pri sebi med učenjem ali pisnimi in ustnimi preizkusi/ocenjevanji znanja zaznali povišano stopnjo anksioznosti, ki lahko vpliva na učinkovitost reševanja naloge. Nabor »intervencij«, kot na primer spodbuda, odmor, aplikacija tehnike sproščanja, uporaba kartice za soočanje ali pa prilagoditev načina postavljanja vprašanj oz. pomoč pri reševanju v pravem trenutku, bo učiteljem pomagal pri pomoči učencu v smeri zmanjšanja anksioznosti in posledično učinkovitejšega reševanja matematičnega problema.

Navodila za šole bodo neposredno v prakso šol, specifično učiteljev matematike in učiteljev dodatne strokovne pomoči, vnesle več občutljivosti za komaj opazne simptome anksioznosti, še preden ta pri učencu naraste do te mere, da ga prične pri reševanju nalog ovirati.

Glede na tehnološki razvoj in cenovno vse dostopnejše naprave za merjenje psihofizioloških parametrov, kot na primer srčnega utripa, bo v prihodnosti mogoč tudi prenos merjenja v šolo (na primer s pomočjo pametne ure ipd.). V širšem smislu je prenos tako znanja kot elementov tehnoloških rešitev v prakso pričakovan v vseh podpornih tehnologijah, predvsem na področju učenja in poučevanja, tehnološke podpore starejših in industrije 4.0. Pri obeh primerih je namreč avtomatsko ocenjevanje socialnih signalov v realnem času, kot so anksioznost, stres, pozornost ipd., ključni tehnološki element, ki omogoča celotno storitev. Danes je to pomembno ozko grlo v kolaborativnih okoljih človeka in pametnih sistemov (npr. pametnih robotov za oskrbo).

Vsem trem se zahvaljujeva za odgovore. Upamo, da boste lahko ugotovitve ob zaključku projekta predstavili tudi slovenskim učiteljem matematike v reviji *Matematika v šoli*.

Viri in literatura

Abbott, D., Shirali, Y., Haws, J. K. in Lack, C. W. (2017). Biobehavioral assessment of the anxiety disorders: Current progress and future directions. World journal of psychiatry, 7 (3): 133–147 [PMID: 29043151 DOI: 10.5498/wjp.v7.i3.133].

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current directions in psychological science, 11* (5), 181–185.

Avancini, C. in Szűcs, D. (2019). Psychophysiological correlates of mathematics anxiety. V: I. C. Mammarella, S. Caviola in A. Dowker (ur.), *Mathematics Anxiety* (42–62). Routledge. https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780429199981.

Balt, M., Börnert-Ringleb, M. in Orbach, L. (2022). Reducing Math Anxiety in School Children: A Systematic Review of Intervention Research. *Frontiers in Education*, 7, 11. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.798516.

Butterworth, B. in Yeo, D. (2004). Dyscalculia guidance. London: nferNelson.

Butterworth, B., Varma, S. in Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332* (6033), 1049–1053.

Dowker, A., Sarkar, A. in Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7,* 164557. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508.

Dreger, R. M. in Aiken Jr, L. R. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational psychology, 48* (6), 344. https://doi.org/10.1037/h0045894.

Edwards, E. J., Edwards, M. S. in Lyvers, M. (2015). Cognitive Trait Enxiety, SItuation Stress, and Mental Effort Predict Shifting Efficiency: Implications for Attention Control Theory. *Emotions, 15* (3), 350–359.

Fennema, E. in Sherman, J. (1976). Mathematics attitudes scales: instrument designed to measure attitudes toward mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 7*, 324–326. https://doi.org/10.2307/748467.

Flere, S., Klanjšek, R., Musil, B., Tavčar Krajnc, M. in Kirbiš, A. (2009). Kdo je uspešen v slovenski šoli? [elektronski vir]: poročilo o rezultatih raziskave v okviru projekta Perspektive evalvacije in razvoja sistema vzgoje in izobraževanja, Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Hansen, C., Sanders, S. L., Massaro, S. in Last, C. G. (1998). Predictors of severity of absenteeism in children with anxiety-based school refusal. *Journal of Clinical Child Psychology, 27* (3), 246–254. https://doi.org/10.1207/s15374424jccp2703_2.

Hembree, R. (1990). The Nature, Effects, and Relief of Mathematics Anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (1), 33. https://doi.org/10.2307/749455.

Japelj Pavešič, B., Svetlik, K. in Kozina, A. (2012). Znanje matematike in naravoslovja med osnovnošolci v Sloveniji in po svetu: izsledki raziskave TIMSS. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

James, A. C., James, G., Cowdrey, F. A., Soler, A. in Choke, A. (2013). Cognitive behavioural therapy for anxiety disorders in children and adolescents. Cochrane Database Syst Rev(6), Cd004690. doi: 10.1002/14651858.CD004690.pub3.

Mammarella, I. C., Caviola, S. in Dowker, A. (2019). Mathematics anxiety: what is known and what is still to be understood. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429199981.

Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities, 30* (2), 164–177.

Moran, T. P. (2016). Anxiety and working memory capacity: A meta-analysis and narrative review. *Psychological bulletin, 142* (8), 831.

OECD PISA 2012: matematični, bralni in naravoslovni dosežki slovenskih učencev: program mednarodne primerjave dosežkov učencev 2012: nacionalno poročilo. (2013). Pedagoški inštitut. http://www.pei.si/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/PISA/PISA2012/PISA_2012_Povzetek_rezultatov_za_Slovenijo.pdf

Pizzie, R. G. in Kraemer, D. J. M. (2021). The Association Between Emotion Regulation, Physiological Arousal, and Performance in Math Anxiety. *Frontiers in Psychology, 12*, 1465. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.639448.

Pucelj, V. in Vidmar, M. (2013). Trendi v odnosu do šole. V: H. Jeriček Klanšček idr., *Spremembe v vedenjih, povezanih z zdravjem mladostnikov v Sloveniji v obdobju 2002–2010*. Ljubljana: NIJZ.

Racine, N., McArthur, B. A., Cooke, J. E., Eirich, R., Zhu, J. in Madigan, S. (2021). Global Prevalence of Depressive and Anxiety Symptoms in Children and Adolescents During COVID-19: A Meta-analysis. [Meta-Analysis]. *JAMA Pediatrics 175*(11), 1142–1150.

Ramirez, G., Shaw, S. T. in Maloney, E. A. (2018). Math Anxiety: Past Research, Promising Interventions, and a New Interpreta tion Framework. *Educational Psychologist, 53* (3), 145–164. https://doi.org/10.1080/00461520.2018.1447384.

Rapee, R. M., Wignall, A., Spence, S. H., Cobham, V. in Lyneham, H. (2008). Helping your anxious child. Oakland, CA: New Harbinger Publications.

Richardson, F. C. in Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. *Journal of counseling Psychology, 19* (6), 551. https://doi.org/10.1037/h0033456.

Sousa, D. A. (2008). Facilitator's *Guide, How the Brain Learns Mathematics*. Corwin Press.

Spence, S. H. (2018). Assessing anxiety disorders in children and adolescents. *Child and Adolescent Mental Health, 23* (3), 266–282. doi: https://doi.org/10.1111/camh.12251.

Opombi: Razgovor je bil opravljen jeseni 2023.
Opisi intervjuvancev so povzeti po spletni strani scoms-lj.si in prijavnici projekta.

Dr. Mateja Hudoklin
(mateja.hudoklin@scoms-lj.si) je specialistka klinične psihologije. Od leta 2020 vodi Svetovalni center za otroke, mladostnike in starše Ljubljana, sicer je v Svetovalnem centru zaposlena od leta 2005. Je strokovnjakinja na področju kliničnopsihološke diagnostike in svetovanja, izvaja tudi kognitivno-vedenjsko terapijo.

Diplomirala je na Oddelku za psihologijo Filozofske fakultete Univerze v Ljubljani, kjer je zaključila tudi magistrski in doktorski študij psihologije. Specialistični študij iz klinične psihologije je opravila v okviru Medicinske fakultete v Ljubljani. Dodatno se je usposabljala doma in v tujini na področju učnih težav otrok, izvršilnega funkcioniranja, čustvenih in vedenjskih težav otrok in mladostnikov, v zadnjem času predvsem na področju obravnave travmatiziranih in zlorabljenih otrok.

Je članica strokovne skupine za pripravo in nato za implementacijo Nacionalnega programa duševnega zdravja 2018–2028 za področje duševnega zdravja otrok in mladostnikov. Prav tako je članica strokovne skupine pri Ministrstvu za pravosodje za ustanovitev Hiše za otroke v Sloveniji. Je ekspert Evropske komisije za področje dela z otroki – žrtvami spolnih zlorab. Je članica Komisije za usmerjanje otrok, delovala je kot sodna izvedenka na področju klinične psihologije otrok in mladostnikov ter družine in skrbništva. Raziskovalno se ukvarja s področjem specifičnih učnih težav in komorbidnih motenj na področju duševnega zdravja otrok in mladostnikov.

Dr. Andrej Košir
(Andrej.Kosir@fe.uni-lj.si), univerzitetni diplomirani matematik, je redni profesor na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani, vodja Laboratorija za uporabniku prilagojene komunikacije in ambientno inteligenco ter starejši član IEEE. Njegovo raziskovalno delo obsega uporabniško modeliranje in personalizacijo (modeli uporabnikov, priporočilni sistemi, zajem podatkov o uporabnikih), socialno inteligentne komunikacijske aplikacije (osebnost in čustva umetnih sistemov), uporabniške vmesnike (načrtovanje metod strojnega učenja za modeliranje uporabnikov, statistične analize), procesiranje socialnih signalov v telekomunikacijah, optimizacijo (kombinatorična optimizacija, genetski algoritem in ohlajanje), operacijske raziskave v telekomunikacijah (optimizacija gradnikov TK sistemov), procesiranje signalov (statistično modeliranje signalov), procesiranje slik in videa (razpoznava objektov digitalne slike in videa) ter načrtovanje poskusov. Sodeluje pri razvoju etičnih standardov na področju uporabnikov in pametnih sistemov ter je namestnik predsednice Komisije univerze v Ljubljani za etiko v raziskavah, ki vključuje delo z ljudmi (KERL UL). Je član uredniškega odbora več mednarodnih konferenc in pridružen urednik dveh mednarodnih znanstvenih revij.

Dr. Peter Janjušević
(peter.janjusevic@scoms-lj.si) je univerzitetni diplomirani psiholog in specialist klinične psihologije. V Svetovalnem centru Ljubljana je zaposlen od leta 2003, pred tem pa se je strokovno ukvarjal s populacijo otrok in mladostnikov s posebnimi potrebami v šolstvu. Ukvarja se s kliničnopsihološko obravnavo (ocenjevanje, svetovanje, psihoterapija) otrok, mladostnikov, ob tem pa tudi njihovih staršev.

Diplomiral je na Oddelku za psihologijo Filozofske fakultete Univerze v Ljubljani, kjer je tudi doktoriral. Specializacijo iz klinične psihologije je opravil v okviru Medicinske fakultete v Ljubljani. Dodatno se stalno usposablja doma in v tujini na področju klinične psihologije, čustvenih in vedenjskih motenj otrok in mladostnikov, kognitivno-vedenjske terapije in supervizije. Je akreditirani kognitivno-vedenjski terapevt, ob tem pa tudi učitelj in supervizor kognitivno-vedenjske terapije.

V Svetovalnem centru poleg kliničnega dela opravlja tudi razvojno-raziskovalno dejavnost, bil je vodja projekta, sofinanciranega s strani Ministrstva za zdravje, v katerem so bila s sodelovanjem treh svetovalnih centrov in posvetovalnice razvita orodja za prepoznavanje in preprečevanje odklanjanja šole ter pomoč otrokom, ki odklanjajo šolo. V zadnjih letih se intenzivneje ukvarja z vodenjem uvajanja programa za obvladovanje anksioznosti Cool Kids v slovenski prostor, projektom, ki ga sofinancira Ministrstvo za zdravje.

Redno predava za različne strokovne publike, predvsem specializante in študente, strokovnjake v usposabljanju iz vedenjskih in kognitivnih terapij ter druge. Je član Društva za vedenjsko in kognitivno terapijo Slovenije in Zbornice kliničnih psihologov, v okviru katere je podpredsednik sekcije za otroško in mladostniško klinično psihologijo.

Je vodja programa Cool Kids.

Obvladovanje matematične anksioznosti

Managing Mathematics Anxiety

Mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Matematična anksioznost je resen problem, ki lahko vpliva na učni uspeh in splošno dobro počutje učencev. S pravilnimi ukrepi, izobraževanjem učiteljev in staršev ter z ustvarjanjem spodbudnega učnega okolja lahko zmanjšamo anksioznost in pomagamo učencu doseči boljše rezultate pri matematiki. V članku je predstavljenih nekaj ustreznih podpornih pristopov za obvladovanje matematične anksioznosti: pozitivne zgodnje izkušnje z matematiko, alternativne oblike poučevanja, izražanje čustev, razvojna miselna naravnanost, spreminjanje negativnih stališč, večanje motivacije za učenje, tehnike za razbremenitev delovnega spomina in premik v območje rasti.

Ključne besede: matematična anksioznost, napake, čustva, prepričanja, miselna naravnanost

Abstract

Mathematics anxiety is a serious issue that can affect students' academic performance and overall well-being. Proper intervention, teacher and parent training, and a supportive learning environment can minimise anxiety and help students achieve better results in mathematics. This article discusses some appropriate supportive approaches to managing mathematics anxiety, including positive early experiences with mathematics, alternative teaching methods, expressing emotions, developmental mindset, changing negative attitudes, increasing motivation to learn, techniques for decompressing working memory and moving into a growth zone

Keywords: mathematics anxiety, errors, emotions, beliefs, mindset

Uvod

V naši družbi bolj cenimo dosežke, pridobljene brez napora, kot tiste, za katere je bilo vloženega veliko truda (Gladwell, 2002, v Dweck, 2016). Ne želimo ali pa ne upamo priznati, da nečesa ne vemo, da je težko, da nam v prvem poskusu ni uspelo in da smo delali napake. Še posebej najstniki se radi pohvalijo, da so dobili dobro oceno, čeprav se sploh niso učili, saj menijo, da bodo ob takih izjavah izpadli pametni in da bodo vzbudili zavidanje pri sošolcih, ki so se dosti učili, a kljub temu dobili slabšo oceno. Ob tem radi zamolčijo, da so se zelo trudili in da jim je pri tem marsikdo pomagal, da so se sproti učili in da so v fazi dolgotrajnega učenja naredili mnogo napak. Kot da bi bilo učenje sramotno.

»Uspeh pri matematiki zahteva več kot le sposobnost; imeti morate tudi pravi odnos« (Maloney, 2016). Žal tudi pri nas velja podobno, kot ugotavlja Erin A. Maloney za Severno Ameriko – odnos do matematike je precej slab. Ljudje odkrito razpravljajo, da ne marajo matematike, da je ne razumejo, ker jim pač ne leži. Družbeno sprejemljivo je, če je nekdo slab pri matematiki, kar pa ne velja za branje (Maloney, 2016). Veliko staršev otrokom pogosto bere in se z njimi pogovarja o prebranem ter jih spodbuja pri branju, a manj staršev otrokom približa lepoto in uporabnost matematike (Rajh, 2022). Branje se zdi ljudem lažje in pomembnejše za življenje kot matematika. Menijo, da bodo njihovi otroci brez matematike lažje shajali kot brez branja, saj si bodo izbrali poklic, pri katerem ne bodo potrebovali matematike. Ne zavedajo pa se dejstva, da je matematika povsod okoli nas in ima pomembno vlogo v našem življenju. Matematika je temeljni jezik znanosti, tehnologije in inženirstva (STEM), zato so dobre matematične spretnosti v današnji visokotehnološki družbi vedno pomembnejše, tako za akademski kot profesionalni razvoj (National Mathematics Advisory Panel, 2008, v Kalan, 2022). Ljudje menijo, da se lahko izognejo matematiki in računanju. Zanimivo je dejstvo, da človek procesira numerične informacije približno tisočkrat na uro (Catronovo, 2015, v Kalan, 2022).

Nekateri menijo, da je trud samo za tiste, ki jim ne more uspeti z nadarjenostjo. Že samo dejstvo, da se morajo truditi, vrže senco dvoma na njihove sposobnosti. Poleg tega jim trud lahko odvzame izgovore. Brez truda lahko še zmeraj rečejo: »Lahko bi, če bi želel …«. Toda ko enkrat poskusijo nekaj narediti in doživijo neuspeh, tega več ne morejo reči. Posamezniki, ki menijo, da nimajo sposobnosti, se sploh ne učijo več in se ne trudijo, ampak razmišljajo celo o goljufanju (Dweck, 2016).

V Ameriki je kulturni odpor do matematike postal tako prevladujoč, da se je infiltriral celo v izdelke, ki jih dajejo otrokom, npr. na oblačilu lutke Barbi je napis »Matematika je zahtevna«, »Moj fant dela matematično domačo nalogo namesto mene«. Te kulturno potrjene napačne predstave o matematiki gredo z roko v roki z visokimi stopnjami strahu in zaskrbljenosti glede matematike, imenovane matematična anksioznost (Maloney, 2016).

Matematična anksioznost

Matematična anksioznost je čezmeren strah pred matematiko, ki lahko ovira učenje in akademsko napredovanje. Pojavlja se zaradi slabih izkušenj pri izobraževanju, zaradi neobčutljivosti ali celo anksioznosti učiteljev, učenčevih neustreznih prepričanj in pričakovanj ter družbenih pritiskov in stereotipov o matematiki. Ta anksioznost lahko prizadene tako manj uspešne kot nadarjene učence in vpliva na delovanje delovnega spomina ter sposobnost reševanja matematičnih nalog

Matematična anksioznost vpliva na veliko stvari, ki so zelo pomembne v procesu učenja: na pozornost, hitrost obdelave informacij, načrtovanje in odločanje pa tudi na mentalno procesiranje pri reševanju matematičnih nalog, saj matematična anksioznost ovira delovanje delovnega spomina, zato težje dostopamo do tega, kar sicer vemo in znamo. Vsiljive in destruktivne misli ter skrbi (npr. »Samo 17 minut časa še imam. Ne bo mi uspelo rešiti naloge. Tega ne zmorem. Saj sem vedel/vedela, da sem v matematiki slab/slaba.«) zavzamejo del pozornosti, ki jo posameznik potrebuje za reševanje matematične naloge. Tako mora matematično anksiozni posameznik v istem času poleg primarne (matematične) naloge rešiti še sekundarno nalogo, ki jo zahtevajo vsiljive destruktivne misli in skrbi, saj odvračajo pozornost od reševanja naloge. Te vsiljive misli so povezane z lastnim negativnim odnosom do matematike, z nizkim samozaupanjem ter z neprestanim preračunavanjem, koliko časa je še na razpolago, v primeru časovne omejitve za reševanje naloge. Ker je delovni spomin preobremenjen s trenutnim strahom, to izčrpava kognitivne vire. Zato se matematično anksiozni posameznik muči z najosnovnejšimi matematičnimi veščinami, ki jih sicer obvlada (Rajh, 2022).

Psihologi ugotavljajo, da negativne oznake škodujejo doseganju uspehov. Stereotipi in negativne oznake učiteljev o sposobnostih učencev lahko zapolnijo njihov razum z motečimi mislimi – s skritimi skrbmi, da bodo potrdili stereotip – in tako postanejo neuspešni pri matematiki. Carol Dweck (2016) opisuje dijakinjo, ki je v gimnaziji pri ocenjevanju matematike dosegala 99 odstotkov ter s fanti sodelovala na testu vojnega letalstva iz vizualno-prostorskih sposobnosti, dokler ni dobila učitelja, ki je menil, da dekleta ne morejo biti dobra pri matematiki. Najprej mu je verjela, da druga dekleta niso sposobna za matematiko, a ker je učitelj menil, da to velja tudi zanjo, so se tudi njej postopoma znižali dosežki pri matematiki in nikoli več se je ni zares lotila.

Hugo Duminil-Copin, francoski matematik, ki je leta 2022 prejel Fieldsovo medaljo (eno najelitnejših nagrad v matematiki, enakovredno Nobelovi nagradi za matematiko), ugotavlja: »Ljudje ne sovražijo matematike, temveč svojo izkušnjo z matematiko« (Duminil-Copin, v Udovč, 2024).

Ker matematična anksioznost zbuja nelagodje in strah pri učenju matematike in med reševanjem matematičnih nalog, ima popolnoma nasproten učinek od želje, motivacije in učinkovitosti. (Kalan, 2022) To povzroči izogibanje matematiki in z njo povezanih dejavnosti.

Anksioznost zaradi matematike ne vzbuja skrbi samo zato, ker je povezana z množico negativnih čustev do matematike, ampak tudi zato, ker je povezana z nižjimi dosežki v šoli in z manjšo zaposlenostjo v poklicih, povezanih z matematiko. Nobenega dvoma ni, da matematične sposobnosti ljudi močno vplivajo na njihovo zaposljivost, produktivnost in zaslužek. Pravzaprav ima matematična kompetenca celo močnejši vpliv na potencial zaslužka kot stopnja bralne pismenosti, število let šolanja in inteligenca (Bishop, 1989; Bossiere, Knight in Sabot, 1985; Riviera-Batiz, 1992, v Maloney, 2016).

Raziskava PISA 2022 je ponovno imela poudarek na preverjanju matematične pismenosti. Podobno kot leta 2012 je izmerila veliko zaskrbljenost naših učencev povezano z matematiko. Slovenija se ponovno uvršča med države, kjer 15-letniki poročajo o višji stopnji zaskrbljenosti in anksioznosti glede matematike kot na povprečni ravni držav OECD. Stanje na tem področju se v Sloveniji celo poslabšuje, saj so bili naši 15-letniki leta 2022 še bolj zaskrbljeni glede matematike, kot je leta 2012 PISA ugotovila za takratne 15-letnike. To je razvidno iz preglednice 1, v kateri so zapisani deleži učencev iz Slovenije, ki so poročali, da se z navedeno trditvijo strinjajo ali zelo strinjajo.

Preglednica 1: Zaznavanje zaskrbljenosti, povezane z matematiko, v raziskavah PISA 2012 in PISA 2022. Vir: Pedagoški inštitut.

V kolikšni meri se strinjaš ali ne strinjaš z naslednjimi trditvami?	PISA 2012	PISA 2022
Pogosto me skrbi, da mi bo pri pouku matematike težko.	61 %	62,4 %
Ko moram narediti domačo nalogo iz matematike, postanem zelo napet.	33 %	39,5 %
Ko rešujem matematične probleme, postanem zelo živčen.	38 %	41,6 %
Ko rešujem matematični problem, se počutim nemočno.	30 %	37,7 %

Že v članku »Strah pred matematiko ali matematična anksioznost« (Rajh, 2022) smo pisali o indeksu zaskrbljenosti glede matematike, ki ima povprečje 0 in standardni odklon 1. Pozitivne/negativne vrednosti indeksa za neko državo pomenijo, da njihovi 15-letniki v povprečju doživljajo višjo/nižjo anksioznost, kot jo v povprečju doživljajo preostali 15-letniki iz držav OECD, vključenih v raziskavo.

Primerjalno s povprečjem držav članic OECD so slovenski učenci leta 2022 poročali o precej višji zaskrbljenosti, povezani z matematiko, saj je povprečna vrednost indeksa za Slovenijo znašala 0,20 in 0,00 za države članice OECD. Povprečna vrednost indeksa je za Slovenijo še višja kot leta 2012, ko je bila 0,07 (Šterman Ivančič, 2023).

V raziskavi PISA merijo tudi zaznano samoučinkovitost pri matematiki, ki se navezuje na učenčeva lastna prepričanja o tem, kako uspešno je sposoben reševati matematične naloge na različnih ravneh zahtevnosti. Medtem ko višji dosežki na področju matematike vodijo k višji zaznani samoučinkovitosti pri matematiki, pa imajo lahko učenci, ki same sebe zaznavajo kot slabše učinkovite, kljub svojim dejanskim sposobnostim pri matematiki nižje dosežke, saj če učenec ne verjame, da lahko določeno nalogo opravi, vanjo tudi ne bo vložil truda, ki je za to potreben (OECD, 2013, v Šterman Ivančič, 2023). Primerjalno s povprečjem držav članic OECD so slovenski učenci v raziskavi PISA 2022 poročali o precej nižji zaznani samoučinkovitosti pri matematiki, saj je povprečna vrednost indeksa za Slovenijo −0,38, medtem ko povprečje za države članice OECD znaša 0,00 (OECD, 2023a, v Šterman Ivančič, 2023).

Preventiva

Lutovac meni, da je matematična anksioznost naučena in ni prirojena (Lutovac, 2014), kar pomeni, da jo je mogoče z ustrezno podporo in pristopom preprečiti, preden se razvije, in zmanjšati ali celo odpraviti, ko je že prisotna.

Preventiva mora vsekakor vključevati prijetno zgodnjo izkušnjo z matematiko. Dobro je, če se preventiva začne že v predšolskem obdobju, ko starši otroku ustvarijo spodbudno domače okolje (v smislu matematičnih idej, aplikacij in diskusij) in ga seznanijo z matematiko v vsakdanjem življenju.

Otroci se učijo s posnemanjem, saj radi opazujejo odrasle in jim pomagajo pri delu. Tako naj sodelujejo pri pospravljanju, kjer preštevajo, primerjajo ter razvrščajo igrače in druge predmete po različnih kriterijih. Več enakih predmetov ali celoto naj razdelijo med več otrok tako, da vsak dobi enako. Sodelujejo naj pri pripravi hrane, tako da tehtajo sestavine za pripravo obroka, se pogovarjajo o deležih in spoznajo dvojno ali prepolovljeno maso sestavine v receptu. Otroke zadolžimo, da pogrnejo mizo, saj se ob tem na praktičen način učijo prirejanja (vsakemu družinskemu članu priredijo stol, krožnik, kozarec, prtiček in jedilni pribor v pogrinjek), štetja, spoznajo transformacijo, simetrijo in vzorce. Naj prelivajo vodo v različno oblikovane posode, ob čemer primerjajo in merijo njeno prostornino. Sodelujejo naj pri nakupovanju hrane in pri tem spoznavajo denar.

Starši in vzgojitelji naj se pogovarjajo z otroki in razvijajo njihove matematične ideje, ob igri naj razvijajo njihovo matematično izražanje, mišljenje in spretnosti.

Ob matematičnih dejavnostih se mora otrok dobro počutiti, ob svojih rešitvah mora doživeti uspeh. Zato je pomembno, da odrasli sprejemajo otrokove napake kot priložnost za napredovanje otroka. Naj sam spozna, da je rešitev ali premislek napačen in ustvari situacijo, v kateri pride do pravilne rešitve. Odrasli naj otroka seznanjajo s postopki preverjanja rešitve in s kriteriji, ki odločajo o njeni smiselnosti. (Kurikulum za vrtce, 1999).

V priročniku ***Razvijamo matematično pismenost*** (Sirnik idr., 2022), ki smo ga razvili pri projektu NA-MA POTI, je opisanih nekaj preizkušenih primerov dejavnosti tudi za predšolsko obdobje, npr. razvrščanje po eni ali dveh lastnostih (Markežič in Zadel, v Sirnik idr., 2022), preiskovanje različno dolgih poti od starta do cilja (Miklavc, v Sirnik idr., 2022) in reševanje matematičnega problema na pikniku s preveč gosti in premalo hrane (Vrabič, v Sirnik idr., 2022).

Še več preizkušenih primerov dejavnosti pa je v tem priročniku opisanih za šolsko okolje in jih priporočamo za uporabo.

Tudi v šolskem okolju naj se učenci srečajo s prijetnimi platmi matematike. Približajmo jim uporabnost, zanimivost in lepoto matematike. V mednarodnem projektu MERIA[1] (**M**athematics **E**ducation – **R**elevant, **I**nteresting and **A**pplicable) smo matematiko prikazali kot pomembno in koristno, predvsem pa smo spodbujali pozitiven odnos do nje.

Matematično anksioznost lahko preprečimo ali omejimo z alternativnimi oblikami poučevanja, s pristopom, ki vključuje akcijsko učenje ter poudarja razumevanje, kot povzema Lutovec (2008) različne avtorje. Treba je vzpostaviti pozitivno, spodbudno vzdušje, v katerem učenci z lahkoto sprašujejo in tvegajo brez strahu pred kritiko (Wright in Miller, 1981, v Lutovac, 2008).

Nekateri avtorji predlagajo tudi oblikovanje posebnih programov za preprečevanje matematične anksioznosti na razredni stopnji, torej še preden se ta oblika anksioznosti sploh razvije (Wigfield in Meece, 1988, v Lutovac, 2008). Ti programi naj vključujejo pogovor o čustvih, povezanih z matematiko, in njihovo zapisovanje (Lutovac, 2008).

Izražanje čustev

Zanimivo je, da omenjeni avtorji predlagajo, da morajo programi za preprečevanje matematične anksioznosti pri učencih vključevati tudi pogovor o čustvih.

V delovnem timu za odnos do naravoslovja in matematike (ONM) pri projektu NA-MA POTI smo v *2. gradniku učne motivacije – odnos do učenja naravoslovja in matematike* to tudi opredelili. Učenec ta gradnik izkazuje tako, da ga »**uravnavanje čustev (prijetnih in neprijetnih), pozornosti in volje spodbuja k učinkovitemu doseganju ciljev**«.

Podgradnik 2.1 tega gradnika, »**Ima dobro razvito čustveno samozavedanje**«, učenec izkaže, če zmore začutiti in z besedo opisati telesne spremembe, ki spremljajo doživljanje čustev v konkretnih okoliščinah, ter da zmore razumeti in sprejeti svoja čustva.

V podgradniku 2.3 je navedeno: »**Čustva z negativno valenco (strah, jeza, frustracija ob ovirah in neuspehu, sram …) zmore uravnavati tako, da ga/jo usmerjajo v konstruktivno reševanje problemov in premagovanje ovir**« (Bizjak idr., 2021).

1 Gradiva so objavljena na povezavi https://www.zrss.si/projekti/zakljuceni-projekti/matematicno-izobrazevanje-pomembno-zanimivo-in-uporabno-meria/

Da bodo učenci sposobni prepoznati in obvladovati svoja čustva, je treba razvijati njihovo čustveno inteligenco. Učitelj naj se ob primernih priložnostih pri pouku z učenci tudi pogovarja o čustvih, da jih bodo sposobni ubesediti. Izvajajo naj kratke vaje čuječnosti, sproščanja, dihalnih vaj, da umirijo svoj um takrat, ko jih je strah (Bizjak, 2022).

V raziskavi, ki sta jo izvedla Ramirez in Beilock (2011) s 106 učenci v starosti 14–15 let, so raziskovalci preizkusili konkretno strategijo za zmanjševanje anksioznih čustev.

Učenci so najprej ocenili svojo stopnjo anksioznosti, nato so jih naključno razdelili v dve skupini. Obe skupini sta pred pisnim preizkusom znanja iz matematike najprej opravili desetminutno aktivnost: ena skupina je pisala o vsebini, povezani s tesnobo pri matematiki, druga skupina pa o nepovezani vsebini. Raziskava je pokazala:

1. pri učencih, ki so sami sebe ocenili kot bolj anksiozni, so tisti, ki so pred pisnim preizkusom znanja iz matematike imeli možnost pisati o svojih tesnobah, v dosežkih na preizkusu znanja prekašali matematično anksiozne učence v drugi skupini;
2. tudi pri učencih, ki so sami sebe ocenili kot manj matematično anksiozne, se je izkazalo, da jim je pisanje o svojih tesnobah pomagalo obvladovati s tem povezana čustva (Ramirez in Beilock, 2011, v Churches idr., 2017).

Psihologinja Beilock je s svojo raziskovalno ekipo ugotovila podobno. Kadar tik pred preizkusom znanja pišemo o svojih mislih in občutkih ob prihajajočem preizkusu znanja, lahko to zmanjša negativen vpliv pritiska na to, kako se bomo odrezali. Pisanje pomaga, da se sprostijo negativne misli, zato je manj verjetno, da se bodo pojavile in nas zmotile, ko bo najmanj primerno (Beilock, v Oakley, 2022).

Opisani rezultati raziskav kažejo, da tudi nevroznanost ugotavlja, kako pomembno vlogo ima izražanje neprijetnih čustev pri njihovem uravnavanju. Učinki se pokažejo že, ko jih učenec zapiše. Če pa ima priložnost, da se o svojih stiskah z učiteljem tudi iskreno pogovori, je rezultat še boljši.

Prepričanja

Ljudje se med seboj razlikujemo (različno mislimo, ravnamo …) in strokovnjaki so v različnih obdobjih različno utemeljevali te razlike med nami. Nekateri menijo, da razlike temeljijo na telesni podlagi (nekoč so zato merili velikost in obliko lobanje, danes raziskujejo gene), spet drugi pa jih povezujejo z razlikami v družbenem okolju (izkušnje, vzgoja, način šolanja). Med zagovorniki stališča, da so razlike med ljudmi odvisne od njihovega družbenega okolja, je bil tudi Alfred Binet, ki je v Franciji v zgodnjem 20. stoletju zasnoval test inteligenčnega količnika (IQ). S testom je želel odkriti otroke, ki jim javne pariške šole niso prinašale koristi, zato da bi zanje lahko zasnovali nove izobraževalne programe in jim omogočili napredek. Čeprav dandanes marsikdo uporablja njegov test kot dokaz nespremenjene inteligence otrok, je prav Binet verjel in dokazoval, da je mogoče z izobraževanjem in vajo temeljito izboljšati inteligenco. Zapisal je:

»Nekateri […] trdijo, da je posameznikova inteligenca nespremenljiva in je ni mogoče povečati. Takšni surovi črnogledosti moramo odločno nasprotovati in se ji upreti. […] Z vajo, učenjem in predvsem s primerno metodo lahko povečamo svojo pozornost, spomin, presojo in dobesedno postanemo inteligentnejši, kot smo bili prej.« (Binet, v Dweck, 2016)

Danes strokovnjaki soglašajo, da od spočetja poteka nenehna izmenjava med naravo in vzgojo ter med geni in okoljem (Dweck, 2016).

Svetovno znana psihologinja Carol Dweck (2016) meni, da prepričanje, ki ga oblikujete o sebi, globoko vpliva na način, kako ravnate v življenju. Pot do uspeha niso le naše sposobnosti in talent, temveč je treba spremeniti način razmišljanja in uporabiti moč naše miselnosti. Pri učenju (česarkoli) se ljudje razlikujemo po svoji miselnosti:

- Posamezniki, ki imajo **togo miselnost** oziroma **miselno naravnanost določenosti** (angl. *fixet mindset*), verjamejo, da uspeh temelji na prirojenih sposobnostih, ki jih imajo ali pa nimajo. Njihove lastnosti so »vklesane v kamen«, zato sploh nima smisla, da se trudijo. Zelo hitro obupajo in bežijo pred težavami. Neuspeh dojemajo kot dokaz, da ne morejo uspeti, saj za to nimajo sposobnosti.
- Posamezniki s **prožno miselnostjo** oziroma z **razvojno miselno naravnanostjo** ali **miselno naravnanost rasti** (angl. *growth mindset*) pa menijo, da je inteligentnost mogoče razvijati z učenjem. Poudarjajo pomen truda, trdega dela in vztrajnosti. Menijo, da se z marljivostjo in izkušnjami vsak lahko spremeni in »zraste«, saj so možgani podobni mišici, ki se spreminja in postaja močnejša, ko jo uporabljamo. Neuspeh si razlagajo kot začasno oviro, ki jih spodbudi k spremembi načina razmišljanja ali povečanju truda.

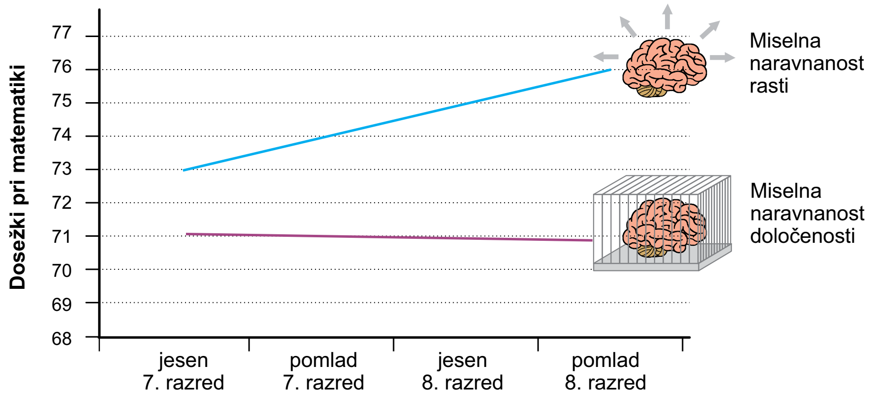
Posamezniki s togo miselnostjo pretiravajo s tekmovanjem in primerjanjem z drugimi ter z dokazovanjem, da so »pametni«. Čutijo, da se morajo vedno znova dokazovati, da prekrijejo svojo nesposobnost. V puberteti marsikaterega učenca s togo miselnostjo zajame panika, ko ugotovi, da ni tako pameten, kot je mislil, da je. Strokovnjaki priporočajo, da učencem razložimo, kako delujejo možgani, kaj je inteligenca in kako deluje.

Po izvedeni delavnici o razvijanju prožne miselnosti so se učencem najbolj izboljšale ravno ocene iz matematike. »Delavnica o miselnosti je učencem dala nadzor nad možgani« (Dweck, 2016).

V eni od raziskav (Blackwell idr., 2007, v Boaler, 2016) so dve leti spremljali učence in njihove dosežke pri matematiki. Na začetku raziskave, ko so bili učenci v 7. razredu, so s pomočjo anketnega vprašalnika opredelili njihovo miselno naravnanost. Rezultati raziskave so pokazali, da so pri učencih z miselno naravnanostjo določenosti (*fixet mindset*) dosežki ostajali konstantni (na sliki 1 ponazorjeni z vijoličasto barvo), pri učencih z miselno naravnanostjo rasti (*growth mindset*) pa so se povečali (na sliki 1 ponazorjeni z modro barvo).

Druga raziskava pa je pokazala, da lahko učenci (in odrasli) spremenijo svojo miselno naravnanost. Če miselno naravnanost določenosti (*fixet mindset*) spremenijo v miselno naravnanost rasti (*growth mindset*), postane njihov pristop k učenju bistveno spodbudnejši in uspešnejši (Blackwell idr., 2007, v Boaler, 2016).

V mednarodni raziskavi PISA razpolagajo z naborom podatkov 13 milijonov učencev po vsem svetu. Ti poleg reševanja

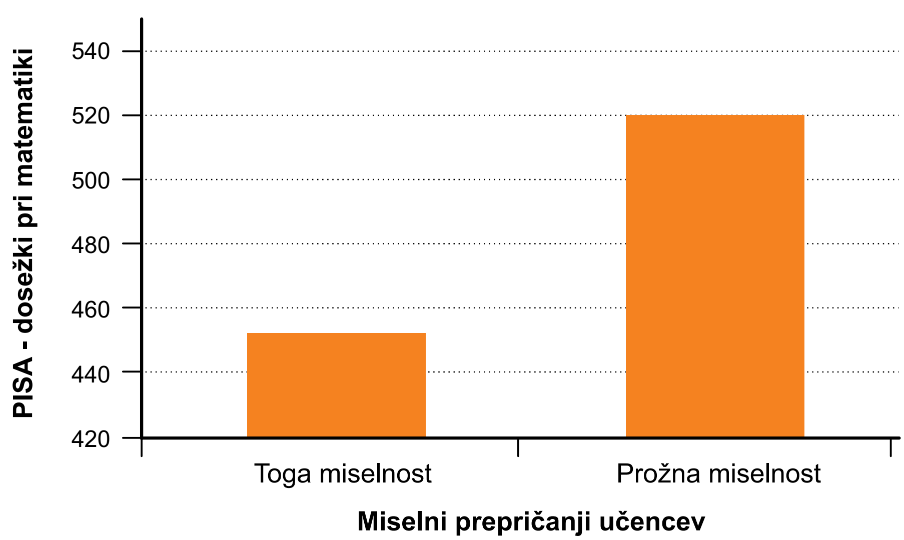


Slika 1: Matematični dosežki učencev z miselno naravnanostjo določenosti in rasti v obdobju dveh let, (od jeseni do pomladi v 7. razredu in jeseni do pomladi v 8. razredu). Vir slike: Blackwell idr., 2007, v Boaler, 2016, stran 6.

matematičnih nalog izpolnjujejo obsežen vprašalnik o svojih idejah in prepričanjih o matematiki ter o svojem načinu razmišljanja. Ugotovili so, da imajo najvišje dosežke na svetu tisti učenci, ki imajo miselno naravnanost rasti, in da prehitijo druge učence za več kot eno leto učenja matematike, kar je prikazano na sliki 2 (Boaler, 2016).

Prof. dr. Andreas Schleicher je primerjal dosežke učencev iz različnih držav v mednarodni raziskavi PISA 2015 z njihovo miselno naravnanostjo. Na sliki 3 lahko primerjamo visoke dosežke učencev iz Estonije, pri katerih prevladuje miselna naravnanost rasti (*growth mindset*), in nizke dosežke učencev v Indoneziji, kjer prevladuje miselnost, da je za uspeh zaslužna prirojena inteligenca. Ker učenci v Indoneziji menijo, da ne morejo ničesar storiti, postane to samoizpolnjujoča se prerokba. V Sloveniji imajo učenci precej dobre dosežke, a kar se tiče miselne naravnanosti, mnogo mladih v Sloveniji še vedno verjame, da na tok življenja nimajo vpliva. Da ničesar ne morejo storiti, saj da je uspeh posledica inteligence, s katero smo se rodili. Takšno miselnost ustvarja okolje. Prof. Schleicher meni, da je pomembno, da takšno miselnost spremenimo (Schleicher, 2022).

Učenci z miselno naravnanostjo rasti so bolj motivirani za reševanje težkih nalog, imajo okrepljen čut za samoučinkovitost, manj se bojijo neuspeha. Če želimo, da so mladi domiselni in ustvarjalni, jim moramo nuditi naloge, kjer lahko eksperimentirajo. Če eksperimentirajo, morajo tvegati. In če tvegajo, bodo delali napake. Če učencem ne pomagamo, da se učijo iz napak, potem morda ne bodo tako ustvarjalni (Schleicher, 2022).



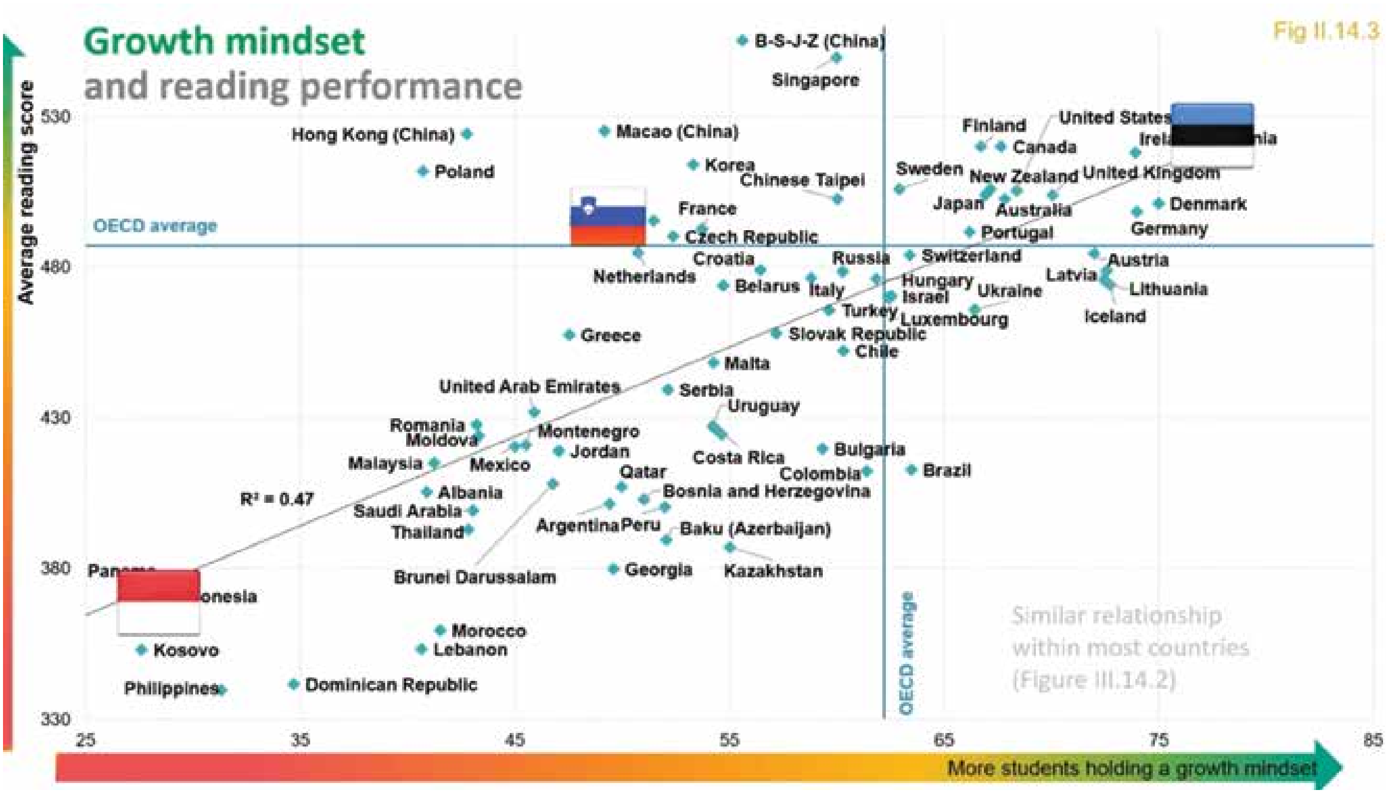
Slika 2: Miselnost in matematični dosežki.
Vir slike: Raziskava PISA 2012.

Napake

»Športa se učimo tako, da delamo napake, da vadimo in se izboljšujemo. Delanje napak tekom učenja je pri športu ali učenju instrumenta nekaj popolnoma samoumevnega,« ugotavlja dobitnik Fieldsove medalje leta 2022, ki se je z matematiko začel aktivno ukvarjati šele, ko ni naredil izpita za matematiko. Rekel si je: »Dobro, tega ne razumem, torej rabim več časa,« in tako se je posvetil matematiki. Poudarja, da je učenje matematike proces, ki ne bo uspel v prvem poskusu. Sprva ne bo šlo, potrebno je ogromno vaje in za to je potreben čas. »In eden najlepših občutkov je, ko ti uspe, ko razumeš. […] Proces, ki vključuje delanje napak, spreminjanje svojega pogleda na nek problem, razumevanje, da se lahko tudi motimo, je nekaj, kar bi morali spodbujati med mladimi« (Duminil-Copin, v Udovč, 2024)

Raziskave potrjujejo, da so možgani kot mišica – spreminjajo se in postajajo močnejši, če jih uporabljamo. Carol Dweck (2016) predlaga, da učencem razložimo, kako možgani ob učenju »rastejo in oblikujejo nove povezave«. Pokažimo jim slike, kako se v prvem letu življenja spremeni gostota možganskih povezav, ko postajajo dojenčki pozorni, opazujejo svoj svet in se učijo delati različne stvari. Nihče se ne norčuje iz dojenčkov in jih nima za neumne, ker ne znajo hoditi in govoriti. Samo naučili se še niso (Dweck, 2016). Pri učenju delajo mnogo napak, a so vztrajni in ne obupajo, nenehno padajo, a se vedno znova poberejo in poskusijo znova.

Da bi zmanjšali pojavnost tesnobe, povezane s šolo, Cvetka Bizjak (2022) predlaga, da spremenimo razumevanje napak, neuspehov in neznanja, tako da v razredu ustvarimo kulturo, v kateri neznanje ni ogrožajoče, napake pa niso dokaz nesposobnosti, temveč dragoceno izhodišče za poglabljanje znanja. Namesto pretiranega poudarjanja pomena šolskih ocen namenimo večji poudarek spremljanju napredka vsakega posameznika. Tako učenci ne bodo tekmovali drug z drugim in se primerjali med seboj, ampak bodo tek-



Slika 3: Dosežki učencev v raziskavi PISA po različnih državah glede na miselno naravnanost učencev. Vir: Predavanje prof. dr. Andreasa Schleicher-ja, OECD, dostopno na povezavi https://www.youtube.com/watch?v=t88XlTPd3Dk.

movali sami s seboj ter izboljševali lastno znanje in spretnosti.

Ljudje, ki jih imamo za naravne talente (genije), poročajo o trdem delu in o mnogih napakah, ki so jih naredili na poti do uspeha. Albert Einstein je imel disleksijo, zato se je šele devetleten naučil brati, a je bil zelo vztrajen, zelo se je trudil, in če je naredil napako, se je trudil še bolj. Njegov pristop k delu in življenju je imel miselno naravnanost rasti. Razlike med tistimi, ki so v življenju uspeli, in tistimi, ki niso, po navedbah strokovnjakov niso odvisne od pri rojstvu danih sposobnostih, temveč od njihovega življenjskega in delovnega pristopa (Boaler, 2016).

Kot meni Barbara Oakley, so napake neizogibne. Posebej pri matematiki in naravoslovju se veliko naučimo iz lastnih napak. Thomas Alva Edison naj bi o delanju napak dejal: »Ni mi spodletelo. Samo našel sem 10 000 načinov, ki ne delujejo.« Največ se naučimo iz neuspehov. Najboljši učenci so tisti, ki se najbolje spopadajo z neuspehom in se učijo na napakah (Oakley, 2022).

Carol Dweck (Dweck, 2016) razlaga, da se vsakokrat, ko učenec naredi napako pri matematiki, v njegovih možganih vzpostavi sinapsa. Pomembno je, da se te velike moči in vrednosti napak zavedamo učitelji in da za to izvedo tudi učenci, saj zmotno menijo, da niso sposobni za matematiko, če delajo napake, ali še huje, da sploh niso pametni.

Psiholog Jason Moser je raziskoval nevronske mehanizme, ki potekajo v človeških možganih, medtem ko delamo napake.

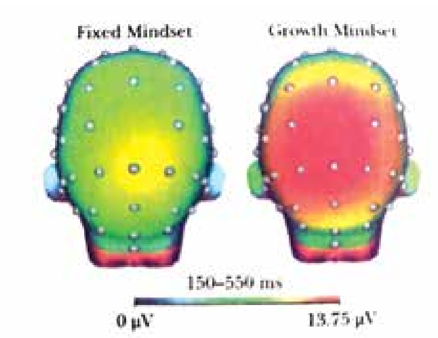
Ko naredimo napako, se lahko možgani odzovejo na dva načina:

- Po prvem odzivu, ki se imenuje ERN, se poveča električna aktivnost, ko možgani zaznajo konflikt med pravilnim odgovorom in napako. Zanimivo je, da se možganska aktivnost pojavi neodvisno od posameznikovega zavedanja napake.
- Po drugem odzivu, imenovanem Pe, pa možganski signal odraža zavestno pozornost do napak. To se zgodi, ko se zavedamo, da je bila storjena napaka, in se napaki zavestno posvetimo (Moser idr., 2011, v Boaler, 2016).

Zaradi napak so naši možgani aktivni in rastejo. To se dogaja tudi, kadar se sploh ne zavedamo, da delamo napake. Možgani se namreč »borijo«, saj so izzvani s konfliktno situacijo, in tedaj najbolj rastejo/napredujejo.

Moser je s sodelavci raziskal povezavo med posameznikovo miselno naravnanostjo in njegovim odzivom ERN oziroma Pe, medtem ko naredi napako.

Zaznali so, da so učenčevi možgani reagirali z večjim odzivom ERN in Pe – električno aktivnostjo – ko je naredil napako, kot takrat, ko so bili njegovi odgovori pravilni. Ugotovili so tudi, da je pri učencih z miselno naravnanostjo rasti več pozitivnih možganskih aktivnosti, ko naredijo napako, v primerjavi s posamezniki, ki imajo miselno naravnanost določenosti. Glejte sliko 4, ki prikazuje možgansko aktivnost posameznikov z miselno naravnanostjo določenosti (*fixet mindset*) in miselno naravnanostjo rasti (*growth mindset*). Na sliki je razvidno, da so pri posameznikih z miselno naravnanostjo rasti možgani aktivnejši, ko delajo napake.



Slika 4: Možganska aktivnost posameznikov z miselno naravnanostjo določenosti in rasti. Vir slike: Moser idr., 2011, v Boaler, 2016, stran 12.

Raziskava je pokazala tudi, da imajo posamezniki z miselno naravnanostjo rasti večje zavedanje napak kot posamezniki z miselno naravnanostjo določenosti, zato se bo prva skupina verjetneje vrnila k problemom in popravila napake.

Ne glede na področje je pomembno zaupati vase in verjeti, da lahko dosežemo karkoli. Taka osebna nastavitev spodbuja k miselni naravnanosti rasti.

Dejstvo, da se možgani na napake odzovejo s povečano aktivnostjo, je izrednega pomena za poučevanje matematike in razumevaje učenja, saj nam razkriva koristnost napak. Prepogosto smo tako odrasli/učitelji kot učenci ujeti v vzgojne vzorce, kjer so napake nekaj slabega, nezaželenega, motnje v storilnostni kulturi (Boaler, 2016).

V laboratoriju za merjenje možganskih valov na Univerzi Columbia so pri posameznikih s togo in prožno miselnostjo primerjali možgansko valovanje, medtem ko so prejemali povratno informacijo o svojem reševanju zelo težkih nalog. Ugotovili so, da so posamezniki s togo miselnostjo pokazali zanimanje samo, kadar je povratna informacija odražala njihovo sposobnost. Niso pa pokazali zanimanja, če jim je povratna informacija sporočala novo znanje. Samo posamezniki s prožno miselnostjo so bili pozorni na povratne informacije, ki bi lahko razširile njihovo znanje, saj je bilo zanje učenje prednostna naloga (Dweck, 2016).

Nekateri učenci se tako bojijo narediti napako, da rajši sploh ne poskusijo. Treba jih je prepričati, da so napake del učenja in da je šola prostor, kjer so napake dovoljene. Tudi to, da (še) vsega ne vemo, ni nobena tragedija. Tudi odrasli (starši in učitelji) moram otrokom priznati, da kdaj česa ne vemo.

Zmorem

Še preden se posamezniki srečajo s situacijami, ki bi lahko vodile v izkušnjo tesnobe, imajo dva nasprotujoča motivacijska stila, ki vplivata na to, kako bodo interpretirali grožnjo in se odzvali nanjo. Ta stila sta pristop ali izogibanje (Roth in Cohen, 1986, v Maloney, 2016). Posamezniki z motivacijskim slogom izogibanja se po navadi izogibajo vpletanju v situacije, ki povzročajo tesnobo, medtem ko posamezniki z motivacijskim slogom pristopa na matematične situacije gledajo kot na izzive in ne na grožnje (Maloney, 2016).

Kot piše Sara Tepeš, je treba spremeniti otrokov odnos do matematike. Če otroci verjamejo, da matematika ni zanje, sploh ne bodo imeli upanja, volje in motivacije za učenje (Tepeš, b. d.).

Posamezniki si različno razlagamo vzroke za uspeh in neuspeh. Dejavnike lahko razvrstimo po dveh značilnostih:

- izhajajo iz posameznika ali njegovega okolja,
- posameznik nanje lahko vpliva ali ne.

»Če posameznik vzroke za svoj uspeh ali neuspeh pripisuje dejavnikom, na katere lahko vpliva, pravimo, da ima oblikovano notranje središče nadzora. Počuti se kot gospodar svoje usode. Kadar doživi neuspeh, razmisli, kaj mora v prihodnje spremeniti, da bo uspešen. Neuspeh nanj deluje motivacijsko. Posameznik z zunanjim središčem nadzora vzroke za uspeh oz. neuspeh pripisuje dejavnikom, na katere ne more vplivati« (Bizjak, 2022). Če verjame, da ne more ničesar spremeniti, je pasiven in se niti ne trudi, da bi uspel.

V delovnem timu za odnos do naravoslovja in matematike (ONM) pri projektu NA-MA POTI smo te ugotovitve zajeli v 3. *gradniku učne motivacije – odnos do učenja naravoslovja in matematike*: »**Razmišljanje o sebi na način, ki mu/ji v konkretni učni situaciji omogoča usmerjenost v doseganje učnih ciljev in ne v obrambo občutka lastne vrednosti.**« V podgradniku 3.3 je podrobneje opredeljeno: »**Verjame, da je napredovanje proti načrtovanim učnim ciljem predvsem rezultat kakovosti njegovih/njenih odločitev o učenju**« (Bizjak idr., 2021).

Sara Tepeš meni, da je spreminjanje negativnih stališč o sebi in svojih sposobnostih zahtevno, saj gre za trdovratne vzorce čustvovanja in mišljenja. Zato je tako pomembno, da že zelo zgodaj uravnavamo otrokovo miselnost – zgodnejši smo, uspešnejši bomo. Pomembno je, da otroci verjamejo, da bodo zmogli premagovati ovire, in da to verjame tudi njihova okolica. Starši morajo verjeti v sposobnosti svojega otroka in ga spodbujati, naj se bolj potrudi, namesto da ga tolažijo: »Ne skrbi, pač nisi za matematiko,« ali: »Tudi meni matematika ni šla. To imaš podedovano.« S tem otroku sporočajo, da je nemočen in da v matematiki ne more napredovati. Matematično mišljenje je kot vsaka druga veščina, zahteva veliko trdega dela in redne vaje, za kar sta potrebna čas in potrpežljivost. Otrok mora vedeti, da se je treba potruditi po najboljših močeh, če želi kaj doseči, in da se lahko obrne na odraslega, če potrebuje pomoč (Tepeš, b. d.).

Starši naj bodo previdni tudi pri pohvali. Če otroka pohvalijo, češ, kako si ti pameten, ga usmerjajo na fiksno oziroma togo miselnost, in ko mu bo enkrat spodletelo, se bo prestrašil, češ, morda pa nisem pameten, in bo obupal. Starši naj pohvalijo dobro opravljeno delo in s tem otroka usmerjajo v razvojno miselnost.

Monique Boekaerts v knjigi *O naravi učenja* poudarja, da imajo motivacija in čustva ključno vlogo pri učenju in da se ta vloga pri načrtovanju učnih priložnosti in profesionalnem razvoju učiteljev resno zanemarja. Meni, da se motivacija za učenje izboljša, ko se učenci počutijo kompetentne za izvedbo tega, kar se od njih pričakuje, ko čutijo usklajenost med dejanji in dosežki, ko predmet cenijo in jim je jasen namen, ko so glede didaktičnih dejavnosti njihova čustva prijetna in se lahko odvrnejo od tistih dejavnosti, ki jim vzbujajo neprijetna čustva, ter ko zaznavajo, da je okolje naklonjeno njihovemu učenju. Učenci lahko sprostijo svoj kognitivni potencial, ko jim je omogočen nadzor nad čustvi, pri učenju pa so vztrajnejši, če ga lahko sami nadzorujejo in se učinkovito spopadajo z ovirami (Boekaerts, v Dumont, 2013).

Učitelji moramo prilagajati svoje načrtovanje in poučevanje, tako da pripravimo zanimive didaktične dejavnosti, ki učence pritegnejo. Pomembna so tudi motivacijska prepričanja, s katerimi učenci osmišljajo svoje naloge. Motivacijska prepričanja so spoznanja o sebi na nekem področju (npr. pri učenju matematike). Prav je, da učitelji poznamo in upoštevamo ključna načela, na katerih temeljijo motivacijska prepričanja. Pa jih naštejmo:

1. Motivacija se izboljša, ko se učenci počutijo zmožne narediti tisto, kar se od njih pričakuje (zato naj učitelji svoja pričakovanja sproti prilagajajo temu, kar so njihovi učenci zmožni doseči).
2. Učenci so bolj motivirani za učenje, ko zaznajo dosledno usklajenost med določenimi dejanji in dosežki (učenci morajo verjeti, da je nadzor nad učnimi izidi v njihovih rokah, saj jim to vliva voljo, da še naprej vlagajo trud v učenje in delo).
3. Učenci so bolj motivirani za učenje, ko predmet cenijo in ko jim je jasen namen učenja (nekateri učenci se učijo, ker si za cilj zadajo mojstrstvo (želijo razumeti vsebino in razviti svojo kompetenco), drugi pa le izkazovanje znanja (dobiti dobro oceno, prehiteti sošolce); želijo izkazati svoje sposobnosti ali prekriti svojo nezmožnost).
4. Učenci so bolj motivirani za učenje, ko doživljajo pozitivna čustva v zvezi z didaktičnimi dejavnostmi (pozitivna čustva omogočajo, da se informacije vtisnejo v dolgoročni spomin),
5. Učence negativna čustva odvrnejo od učenja (»tega nisem sposoben narediti«).
6. Učenci sprostijo svoje kognitivne potenciale za učenje takrat, ko imajo možnost vplivati na intenziteto, trajanje in izražanje svojih čustev (šele ko učenci čustva izrazijo ali umirijo, se lahko usmerijo na nalogo).
7. Učenci so vztrajnejši pri učenju, ko lahko sami uravnavajo svoje potenciale in se znajo učinkovito spopadati z ovirami (konkretni in jasni cilji učencem omogočajo, da izberejo ustrezne strategije in presodijo, koliko časa in napora bo treba vložiti).
8. Učenci so bolj motivirani za učenje in za uporabo strategij za uravnavanje motivacije, ko čutijo, da je okolje naklonjeno njihovemu učenju (učitelji nudijo učencem na izbiro različne didaktične dejavnosti ter jim zagotavljajo povratne informacije, ko jih potrebujejo) (Boekaerts, v Dumont, 2013).

Zmanjšanje anksioznosti

Če želimo preprečiti ali zmanjšati anksioznost, učence naučimo strategij učenja učenja in spoprijemanja s problemi.

Če pouk izvajamo po načelih formativnega spremljanja, bodo učenci vedeli, kaj se morajo naučiti, zakaj, kaj bodo morali storiti, da bodo uspešni, in kako bodo vedeli, da so učni cilj dosegli. Ob pridobivanju povratnih informacij bodo vedeli, kje na poti do cilja trenutno so, in tako bo njihovo učenje kakovostnejše in osmišljeno. V razredu vzpostavimo delovno vzdušje, ki bo miselno spodbudno, psihološko varno, zaupno in sproščeno, da bodo učenci samozavestno izražali svoje misli, čustva, potrebe, domišljijo in ustvarjalnost. Če se učenci čutijo varne in sprejete, si bodo upali tvegati in delati napake na poti do kakovostnega in trdnega znanja (Holcar Brunauer, v Suban, Gorše Pihler idr., 2018). Učenci naj se počutijo vredne in spoštovane, videne in slišane tudi, kadar niso uspešni (Bizjak, 2022).

Učitelj lahko ponudi učencem model območja rasti (slika 5), s pomočjo katerega v treh barvah spoznajo, poimenujejo in učitelju sporočajo svoja čustva ob učenju matematike, kar jim pomaga zmanjšati tesnobo in zgraditi odpornost.

Iz cone udobja moramo učence pripeljati v cono rasti, kjer bodo gradili novo znanje. Paziti pa moramo, da jih ne pahnemo v cono anksioznosti, za katero ima vsak posameznik svoj prag, nekateri nižjega, drugi spet višjega.

Izražanje neprijetnih čustev lahko pomaga pri obvladovanju anksioznosti, saj učencem omogoča, da se soočijo s svojimi strahovi ter jih premagajo.

V poglavju o čustvih smo omenili raziskavo, v kateri so učenci pred pisnim preizkusom znanja iz matematike opravili vajo izraznega pisanja, v kateri so odkrito pisali o svojih občutkih glede matematike. Namen te vaje je zmanjšati število vsiljivih misli. Po eni sami vaji izraznega pisanja se je matematična uspešnost posameznikov z visoko matematično anksioznostjo povečala, kar je zmanjšalo njihov zaostanek za dosežki posameznikov z nizko matematično anksioznostjo.

Mlajši otroci lahko narišejo, kako se počutijo, in potem naj sledi pogovor o čustvih.

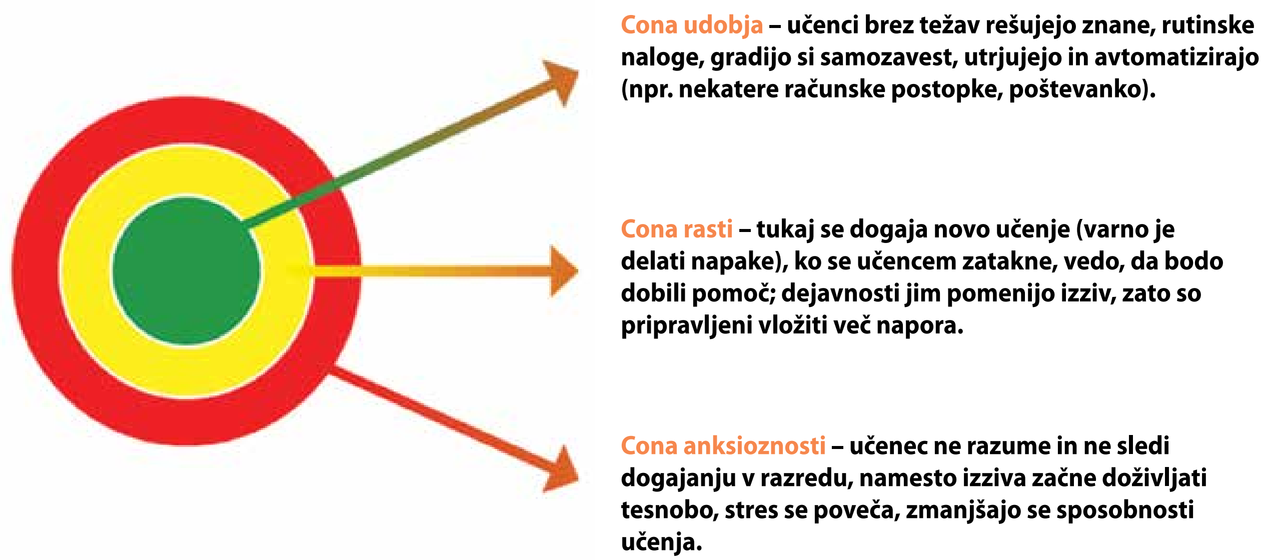
Odlične možnosti za zmanjšanje negativnih posledic tesnobe imajo dihalne tehnike. Z raziskavo so potrdili, da so matematično anksiozni posamezniki po izvajanju osredotočene dihalne vaje pred dokončanjem matematičnega preizkusa v večji meri izboljšali svoj dosežek kot matematično anksiozni posamezniki, ki so izvajali nestrukturirano dihalno vajo ali celo vajo, ki je povečala njihove skrbi (Brunye idr., 2013, v Maloney, 2016).

Kot smo zapisali že v prejšnjih poglavjih, naj izvajajo kratke vaje čuječnosti, sproščanja, dihanja, da umirijo svoj um takrat, ko jih je strah (Bizjak, 2022). Naj vizualizirajo varen prostor, da se umirijo in sprostijo.

Sara Tepeš predlaga nekaj tehnik za razbremenitev delovnega spomina matematično anksioznih učencev pred preizkusom znanja: zapisovanje pomembnih informacij, verbalno razmišljanje, ustvarjanje mnemonik.

- Matematično anksiozni posameznik naj takoj, ko prejme pisni preizkus znanja, zapiše pomembne informacije (npr. enačbe in izreke, ki so potrebni za reševanje naloge), še preden se loti reševanja nalog. Na te zapise se lahko vrne med reševanjem, ko se počuti zmedeno in potrebuje potrditev. Tako razbremeni delovni spomin, potreben za reševanje naloge, in s tem zmanjša matematično anksioznost.

- Učenci, ki imajo razvitejše verbalne sposobnosti, naj najprej ubesedijo svojo strategijo reševanja in pojasnijo, kako se nameravajo lotiti reševanja naloge. Tako lahko prejmejo ustrezne povratne informacije, ki jim pomagajo pri reševanju. Prehod na bolj verbalen pristop reševanja matematične naloge jim pomaga razmišljati jasneje (Tepeš, b. d.).



Slika 5: Model območja rasti (Rajh, v Bizjak idr., 2021).

- Mnemoniko šteje za pomnilniški pripomoček, ki je lahko stavek, kratica, število ali slika. Primer: Pravilo si lahko zapomnimo kot dejstvo: »Če imaš v glavi nič, dobiš (oceno) ena.« Eksponent v tem primeru predstavlja glavo potence. Toda pretiravanje z mnemoniki lahko preveč poenostavi nekatere matematične resnice in odvrne učence od logičnega razmišljanja.

Najpomembnejše pa se nam zdi, da učence seznanimo s tem, da obstajata dve vrsti miselnosti ter katere lastnosti in posledice ima vsaka od njih. Pomagajmo jih spremeniti miselnost iz toge v prožno. Da jih ne bo zanimalo le, kako priti na vrh in dokazati vsem, da so najboljši, kot delajo posamezniki s togo miselnostjo, temveč da bodo imeli radi to, kar delajo, in bo (morebitni) prihod na vrh (le) stranski produkt njihove navdušenosti nad tem, kar delajo, kot velja za posameznike s prožno miselnostjo (Dweck, 2016).

Zaključek

Matematična anksioznost je kompleksen pojav, ki lahko negativno vpliva na uspešnost pri matematiki in na splošno izobraževalno ter karierno pot posameznika. Prepoznavanje in obravnavanje matematične anksioznosti je ključno za izboljšanje uspešnosti pri matematiki in za pozitivne izobraževalne ter karierne odločitve. Učitelji in starši imajo pomembno vlogo pri ustvarjanju spodbudnega učnega okolja ter pri pomoči učencem pri premagovanju strahov in morebitne anksioznosti.

Viri in literatura

Bizjak, C., Bačnik, A., Buzeti, M., Capl, M., Mozetič Černe, V., Hajdinjak, M., Hrastnik, J., Majer Kovačič, J., Nedeljko, N., Pirc, M., Predovnik, S., Rajh, S., Rajšp, M., Rotovnik, D., Stanič, T. in Usar, K. (2021). *Gradniki učne motivacije – odnos do učenja naravoslovja in matematike*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/odnos_do_ucenja_gradniki.pdf

Bizjak, C., Rajh, S., Bačnik, A., Hajdinjak, M., Majer Kovačič, J. in Vrabič, N. (2022). *Spodbujanje motiviranosti za globinsko učenje – Odnos do učenja naravoslovja in matematike*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/Odnos_do_ucenja_prirocnik.pdf

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints

Churches, R., Dommett, E., in Devonshire, I. (2017). *Neuroscience for teachers: applying research evidence from brain science*. Crown House Publishing.

Dumont, H., Istance, D. in Benavides, F. (2013). *O naravi učenja*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo http://www.zrss.si/pdf/o-naravi-ucenja.pdf

Dweck, C. S. (2016). *Moč miselnosti: kako uresničiti svoje zmožnosti*. Učila International.

Kalan, M. (2022). Matematična anksioznost – spregledan fenomen? V Milena Košak Babuder idr. (ur.), *Specifične učne težave in izzivi današnjega časa: zbornik prispevkov* (str. 174–181). Društvo Bravo.

Kurikulum za vrtce (1999). Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. https://www.gov.si/assets/ministrstva/MVI/Dokumenti/Sektor-za-predsolsko-vzgojo/Programi/Kurikulum-za-vrtce.pdf

Lutovac, S. (2014). Matematična anksioznost. *Revija za elementarno izobraževanje = Journal of elementary education 1* (1/2), 105–112.

Maloney, E. A. (2016). Math anxiety: Couses, consequences, and remediation. V Kathryn R. Wentzel in David B. Miele (ur.), *Handbook of motivation at school* (str. 408–423).

Oakley, B. (2022). *Odprta glava za številke: kako blesteti pri matematiki in naravoslovju (tudi če si imel kdaj cvek).* Vida založba.

Rajh, S. (2022). Strah pred matematiko ali matematična anksioznost. *Matematika v šoli, 28* (2), 2–10.

Rutar Ilc, Z. (2017). *Vodenje razreda za dobro klimo in vključenost*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Schleicher, A. (2021, 26. avgust). *Edcation students for their future, not our past* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=t88XlTPd3Dk

Sirnik, M., Vršič, V., Žakelj, A., Klančar, A., Magajna, Z., Markežič, D., Zadel, V., Angelov Troha, K., Jeromen, V., Gorše Pihler, M., Hebar, L., Vreš, S., Horvat, N., Ternar Horvat, V., Miklavc, S., Vrabič, N., Pustavrh, S., Kretič Mamič, A., Klavs Voštić, A., Miklavčič Jenič, A. in Stopar, N. (2022). *Razvijamo matematično pismenost: opredelitev matematične pismenosti s primeri dejavnosti.* Zavod Republike Slovenije za šolstvo. http://www.zrss.si/pdf/Razvijamo_matematicno_pismenost.pdf

Suban. M., Gorše Pihler, M., Bone, J., Debenjak, K., Hebar, L., Jenko, Š., Kerin, T., Kmetič, S., Lipnik, R., Novoselec, M., Peršolja, M., Rajh, S., Sambolić Beganović, A., Sirnik, M., Škafar, K., Sturm, J. in Verbinc, A. (2018). *Formativno spremljanje pri matematiki: Priročnik za učitelje*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Svetlik, K. (2023). Učni dosežki pri matematiki in motivacija za učenje. *Matematika v šoli, 29* (1), 13–19.

Šterman Ivančič, K., in Mlekuž, A. (ur.). (2023). *PISA 2022: program mednarodne primerjave dosežkov učencev in učenk: nacionalno poročilo s primeri nalog iz matematike.* Pedagoški inštitut. https://www.pei.si/wp-content/uploads/2024/04/Porocilo22_final_26032024.pdf

Tepeš, S. (b. d.). Velik strah pred matematiko: Matematična anksioznost. *psihoterapevtska-ambulanta.si.* dosegljivo 1.10.2022 na https://psihoterapevtska-ambulanta.si/zakladnica-zapisov/matematicna-anksioznost/

Udovč, L. (2024, 14. marec). Priznani matematik Hugo Duminil-Copin za STA: Ljudje ne sovražijo matematike, temveč svojo izkušnjo z matematiko. *Sta.si.* https://znanost.sta.si/3278591/priznani-matematik-hugo-duminil-copin-za-sta-ljudje-ne-sovrazijo-matematike-temvec-svojo-izkusnjo-z-matematiko

Diferenciacija z uporabo barvnih kartic

"Dynamic differentiation": a colorful example of good practice in the classroom

dr. Adriaan Herremans
Univerza v Antwerpnu, Pedagoška fakulteta v Antwerpnu, Belgija

Izvleček

Članek predstavlja primer organizacije pouka, ki omogoča diferenciacijo s pomočjo barvnih kartic. Učenci na proaktiven način diferencirajo težavnosti pri učnih urah utrjevanja na način, ki je preprost za izvedbo, prilagodljiv in se lahko uporablja v osnovnih ter srednjih šolah. Ker ni treba poznati posameznikovih sposobnosti, je uporaben tudi v visokošolskem izobraževanju. Sistem učencem omogoča vpogled v lastno raven kompetenc, učitelj pa ga lahko uporabi za podajanje prilagojenih povratnih informacij.

Ključne besede: matematika, diferenciacija, barvne kartice

Abstract

In this article, we report on an example of organizing a classroom to facilitate differentiation with a set of colored cards. It is a proactive student-driven way of differentiation in difficulty in exercise lessons that is easy to implement, easy to adapt and can be used in primary and secondary schools. Since one does not need to know the strength of the pupils, it is also applicable in higher education. The system provides pupils an insight in their own level of competencies and can be used by the teacher to give personalized feedback.

Keywords: mathematics, differentiation, colored cards

1 Uvod

V izobraževanju bodočih učiteljev študenti pogosto slišijo, da »morajo vsakega učenca obravnavati v skladu z njegovimi zmožnostmi, potrebami in predznanjem«, torej da morajo diferencirati pouk glede na zahtevnost in interese. To je lažje reči kot uresničiti.

Ko sem začel delati kot predavatelj na pedagoški fakulteti v Belgiji, sem vprašal kolege, kako študente razdelijo pri svojih urah. Številni odgovori so bili precej nezadovoljivi, na primer:

- To je pomembno le v osnovnih in srednjih šolah, ne pa tudi v visokošolskem izobraževanju.
- Pri pedagoškem izobraževanju začnejo na isti ravni.
- Imam heterogene skupine, v katerih lahko boljši študenti pomagajo šibkejšim.
- Pred izpiti ne poznam znanja svojih študentov.

Celo kolegi, ki so imeli heterogene skupine, niso natančno vedeli, na podlagi katerih meril so se odločali, kdo je nadarjen oziroma kdo potrebuje dodatno pomoč.

Tako sem začel razmišljati o uporabnih načinih, kako bi lahko diferenciacijo vključil v svoje poučevanje matematike (v okviru izobraževanj bodočih osnovnošolskih učiteljev), namesto da o tem samo predavam ([5]). Nekoč mi je sorodnik dal namig in odpravil sem se na obisk v osnovno šolo v majhnem mestu z 10 000 prebivalci. Tam sem spoznal učitelja Willyja, ki je uporabljal niz barvnih kartic za aktiviranje učencev glede na njihovo raven znanja. Ta preprosta zamisel me je navdihnila, da sem preprost, a zelo dinamičen in učinkovit način uporabil pri svojem pouku (glej 3. del članka).

Po kratki predstavitvi načinov diferenciacije v novejših šolskih učbenikih (glej 2. del) bom razložil sistem »dinamične diferenciacije«[1] po barvah, ki ga uporabljam v visokošolskem izobraževanju na pedagoški fakulteti (glej 3. del), uporaben pa je tudi v številnih drugih okoljih. Uporabljajo (in odobravajo) ga mnogi moji nekdanji študenti, ki poučujejo v osnovnih in srednjih šolah. V 4. delu bom obravnaval povratne informacije, ki so mi jih posredovali tako študenti pedagoške fakultete (pri mojih predmetih) kot tudi učenci 5. razreda osnovne šole.

V 5. delu obravnavam prednosti take diferenciacije za učitelje in predavatelje ter vlogo, ki jo lahko odigra digitalizacija v »dinamični diferenciaciji«.

1 V članku bomo uporabljali zapis »dinamična diferenciacija«, čeprav to ni uveljavljen pojem, ampak ga je avtor opisal in definiral za lastne potrebe.

2 Diferenciacija v šolskih učbenikih

V številnih matematičnih učbenikih za osnovne in srednje šole je prisotna oblika diferenciacije, še zlasti v zbirki nalog. Najpogosteje gre za naloge s tremi različnimi oznakami, imenujmo jih A, B in C. Na splošno bi lahko težavnost posameznih oznak opredelili tako: osnovne naloge (oznaka A), naloge za utrjevanje z manjšimi izzivi (oznaka B) in bolj odprte problemske naloge z bistveno višjo stopnjo težavnosti (oznaka C).

Večina učiteljev v Flandriji (tj. nizozemsko govorečem delu Belgije) se osredotoča na to, da vsi učenci opravijo vse naloge z oznako A, kar po njihovem mnenju staršem in šolski inšpekciji »dokazuje«, da se je učenec pri določenem predmetu učil dovolj. Ko konča z nalogami A in ostane čas, lahko začne z nalogami B, nadarjeni učenci pa lahko (delno) preskočijo naloge B in začnejo neposredno z nalogami C. Ker posamezni učenci potrebujejo dodatno pomoč pri nalogah, označenimi z A, se razred spontano razdeli v tri skupine:

- 1. skupina: Učenci, ki s težavo končajo naloge, označene z A.
- 2. skupina: Učenci, ki potrebujejo le malo pomoči in samostojno rešujejo naloge, označene z B.
- 3. skupina: Učenci, ki vsebino usvojijo zelo hitro (ali že predhodno).

V učbenikih se običajno vsako poglavje začne z nizom osnovnih začetnih nalog (oznaka A), sledijo naloge z oznako B oziroma C. Opazimo, da se pogosto uporabljajo nevtralne oznake, npr. luna, sonce, zvezda (slika 1). Tudi skupine učencev dobijo prijetno ime, npr. flamingi, papige in tukani. Jasno je, da te oznake ne kažejo zaporednega značaja A, B, C, čeprav se ga učenci v resnici zelo dobro zavedajo.

Slika 1: Sonce, luna, zvezda [11], ki označujejo različno težavnost nalog.

Razporeditev učencev v skupine opravi učitelj na začetku šolskega leta in običajno ostane nespremenjena skozi vse leto.

3 Primer »dinamične diferenciacije« v razredu

Vrnimo se v šolo učitelja Willyja, ki je v 5. razredu ravno začel učno uro, posvečeno reševanju matematičnih problemov. Pri tem ni uporabljal učbenika, ampak škatlo z barvnimi karticami (slika 2). Na vsaki kartici je zapisan matematični problem. Učencem je razdelil na videz naključne kartice in začeli so delati. Ko so našli rešitev, so jo zapisali in pokazali učitelju Willyju, ki je svoje učence opazoval izza katedra.

Učitelj Willy je pogledal rešitev in podal povratno informacijo. Nato je učencu izročil novo kartico, včasih enake, včasih druge barve.

Presenetilo me je razgibano/dinamično delovno vzdušje v razredu. Čeprav so učenci izkusili uspehe in težave (pa tudi neuspehe), je bilo videti, da vsi delajo.

Slika 2: Škatla z barvnimi karticami

Tako sem bil priča pouku reševanja matematičnih problemov, med katerim vsi učenci intenzivno delajo vseh 45 minut.

Učitelja Willyja sem vprašal o uspešnosti njegovega pristopa, kar me pripelje do primera, ki ga bom podrobneje opisal v nadaljevanju. Omenjeno metodo uporabljam pri izobraževanju bodočih učiteljev za utrjevanje (ali osvežitev znanja) pri različnih vsebinah, npr. ulomki, geometrija, reševanje problemov ... Naloge na sliki 3 so uporabne tako za izobraževanje bodočih učiteljev kot tudi v 5. in 6. razredu osnovne šole pri obravnavi ulomkov in odstotkov.

Priprava

Celoten sklop razdelite na manjše dele, na naloge, ki jih rešimo v petih minutah. Zapišite jih na barvni list papirja glede na stopnjo težavnosti (slika 3). Barve so namreč predvsem pokazatelj težavnosti. Na sliki 2 je prikazan primer škatle s karticami, razvrščenimi po barvah: bela – rumena – zelena – roza – modra. Vsako nalogo označite s številko, da lahko spremljate, katere naloge je posameznik reševal. V škatlo lahko vstavite tudi dvojnike nalog. Jaz to zagotovo storim pri osrednjih barvah. Nič ni namreč narobe, če več učencev hkrati rešuje enako nalogo.

Med poukom

Navodila za delo so kratka in pravila preprosta:

- Težavnostna stopnja nalog je razvidna iz zaporedja barv kartic v škatli (glej sliko 2). V našem primeru se težavnost stopnjuje od bele → rumene → zelene → roza → do modre barve.
- Učenec lahko na začetku naključno izbere kartico poljubne barve.
- Ko nalogo reši, jo učitelj pregleda, učenec pa lahko potegne novo kartico, pri čemer upošteva:
  - Če je zaporedoma uspešno rešil nalogi na dveh karticah enake barve, lahko napreduje na kartico naslednje barve z višjo težavnostno stopnjo.
  - Če naloge izbrane barve ni znal rešiti, si izbere kartico z nalogo, ki je za eno (barvo) težavnostno stopnjo nižje.
  - V vseh drugih primerih vzame kartico enake barve.

V razredu s 30 do 50 učenci preprosto vzamem škatlo in vsakemu dovolim, da izbere eno kartico. Še zmeraj opravljam obhode po učilnici, da preverim rešitve ali malo pomagam, če je potrebno.

Učenci si morajo v zvezek ob številki naloge zapisati le reševanje, saj vse naloge pozneje prejmejo v digitalni obliki. Pozoren sem na to, da zapišejo postopek reševanja in končni odgovor. Ob koncu ure učenci oddajo seznam številk nalog po vrstnem redu, kot so jih reševali. Prav tako jih pozovem, naj ob številkah nalog napišejo plus (+) ali minus (–) za pravilne oz. napačne odgovore.

Naloga 7

Izračunaj.

$$\frac{2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=$$

$$\frac{5}{4}-\frac{7}{8}=$$

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=$$

Naloga 21

Simon, Jure in Miha imajo skupaj 60 frnikol. Simon ima $\frac{1}{3}$ celotnega števila frnikol. Jure ima $\frac{2}{4}$ preostalih frnikol. Preostanek frnikol ima Miha.
Koliko frnikol ima vsak od njih?

Naloga 32

Brigita je kupila CD in DVD pevke Olivie Rodrigo. CD stane $\frac{2}{3}$ cene DVD. Za CD in DVD je skupaj plačala 43,50 €. Koliko stane CD?

Naloga 33

V Marjanovem razredu je 50 % učencev navdušenih nad nogometom. Med temi navdušenci je štirikrat toliko fantov kot deklet. Dve dekleti imata radi nogomet.
Koliko učencev je v Marjanovem razredu?

Naloga 83

Reko, široko 152 metrov, prečka most. $\frac{1}{5}$ mostu leži na levem bregu in $\frac{1}{6}$ mostu na desnem bregu reke.
Kolikšna je celotna dolžina mostu?

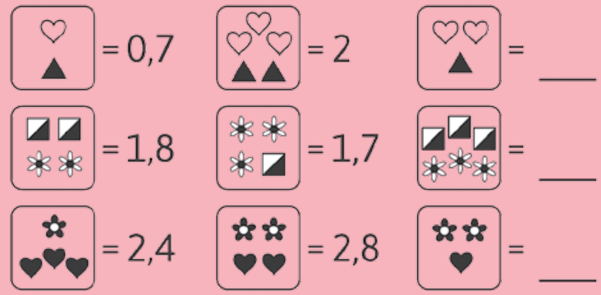
Naloga 97

Kateri od naslednjih ulomkov je najbližji vrednosti $\frac{1}{2}$?

$$\frac{1}{4}\quad \frac{2}{5}\quad \frac{4}{9}\quad \frac{3}{10}\quad \frac{6}{10}\quad \frac{3}{4}$$

Naloga 121

Vpišite pravilno številko:



Naloga 137

V knjižnici je dvakrat toliko romanov kot detektivskih zgodb. Pravljic je $\frac{2}{3}$ toliko kot romanov. Romanov, detektivskih zgodb in pravljic skupaj je 3900.
Koliko knjig posamezne vrste (romanov, detektivskih zgodb, pravljic) je v knjižnici?

Naloga 180

Polna kopalna kad se izprazni v 5 minutah. Prazna kad se napolni v 9 minutah. Jan začne polno kad prazniti, a po pomoti hkrati odpre tudi pipo.
Koliko časa traja, da se kad izprazni?

Naloga 193

Razvrsti od najmanjšega do največjega:

$$0{,}1111 \quad 11\,\% \quad 0{,}012 \quad 0{,}21 \quad \frac{1}{20}$$

Slika 3: Primeri nalog na belih, rumenih, zelenih, roza in modrih karticah

Po pouku

Ker so pravila preprosta, lahko za vsakega učenca ugotovite, kateri ravni težavnosti je posvetil največ časa (saj je iz te ravni izbral največ nalog) in katere naloge je rešil napačno, in po potrebi svetujete, katere pomanjkljivosti mora odpraviti. Ugotovite lahko tudi, kateri učenci so rešili manj nalog.

Preglednica (slika 4) vsebuje veliko informacij, ki jih lahko učitelj uporabi. Omogoča mu posredovanje personaliziranih povratnih informacij.

Naloge iz ulomkov, odstotki

Učenec	Številka naloge																					
	1	2	3	4	5	6	…	31	32	33	34	35	36	…	81	82	83	…	121	122	123	124
Karl					+	+			+	-	+						+		-	-		
Mohamed			+			-			+													
Erkan	+		+							-			+		+				+	+	+	
Lisa		+																				
Anna								+	-	+	-	+				+	-					
Cleo											+		+			-	+		+	+		?
Tamara		?	-	-		+			+			-			-							

Slika 4: Učiteljeva preglednica

Slika 4 prikazuje del preglednice za nekatere učence. Učitelj ve, katera specifična znanja so pomembna pri posamezni nalogi. Lahko razberemo, da Lisa tega dne ni bila zelo dejavna. Iz naloge št. 33 lahko ugotovimo, da Karl in Erkan potrebujeta dodatno pomoč pri odstotkih. Videti je, da Anna odstotke razume, vendar potrebuje nekaj dodatne razlage o rabi ulomkov pri deljenju na neenake dele (slika 3), saj je vsebina naloge št. 32 enaka kot pri tistih rumenih karticah, ki jih je Anna znala rešiti.

Pravila za delo smo pojasnili v prejšnjem delu, a možne so tudi različice. Vprašaj (? za Cleo in Tamaro), na sliki 4 izhaja iz tiste različice, ki jo uporabljam sam: vsak učenec ima enega »jokerja« na uro. Lahko ga uporabi, da nalogo zavrne takoj, ko jo prebere, in jo zamenja za drugo nalogo na kartici enake barve. V preglednico to vnesemo kot vprašaj. Zgodi se namreč lahko, da se poskuša učenec izogniti določeni vrsti nalog, kar je za učitelja pomembna in uporabna informacija. To možnost v praksi uporabljam zato, da bi se izognil prevelikemu številu minusov (–), še posebej v začetni fazi.

4 Nekaj podatkov in povratnih informacij učencev in študentov

»Dinamično diferenciacijo« sam pogosto izvajam. Tudi moji študenti so jo uporabljali med poučevanjem na osnovnih šolah. Da bi dobili boljši vpogled, smo jih prosili, naj izpolnijo kratek vprašalnik. Izpolnilo ga je 87 študentov pedagoškega izobraževanja (2 BA)[2] in dva oddelka 5. razreda[3] osnovne šole s 27 oziroma 21 učenci. Vsi so se ob različnih priložnostih vsaj tri šolske ure soočali z »dinamično diferenciacijo«. Štiri študente in štiri učence smo nato povabili na pogovor, da bi si ustvarili boljšo predstavo.

Ob koncu opazovane 50-minutne učne ure je približno 80 % udeležencev (70 od 87 študentov in 39 od 48 učencev) preizkusilo naloge pri treh različnih barvah ali več.

Večina študentov (79 od 87) in učencev (39 od 48) je izrazila pozitiven odnos do »dinamične diferenciacije« s pomočjo barv. Barvna diferenciacija je osredotočena na učenca oziroma študenta, ki tako dobi vtis, da je sam odgovoren za barvo (zahtevnost naloge), ki jo dobi.

Poleg tega lahko v eni učni uri okusi različne ravni zahtevnosti, kar vodi k boljšemu razumevanju lastnih zmožnosti in omogoča vpogled v to, kaj je potrebno za dosego višje ravni.

Kathleen, 5. razred: »*Mislila sem, da sem precej uspešna pri ulomkih, a po določenem času sem ugotovila, da je bila večina nalog v roza barvi prezahtevna. Ko sem se spet znašla na rumeni, sem bila zelo motivirana, da se ponovno povzpnem. Zdaj se torej zavedam, da je zelena raven v tem trenutku prava zame.*«

Dodatni prednosti sta prilagodljivost in objektivnost. Zdi se, da so učenci večino časa porabili za naloge njim primerne zahtevnosti. Opaziti je tudi, da imajo učenci in študenti na začetku radi svobodo izbire (nihče temu ni nasprotoval, približno 25 odstotkom pa je bilo vseeno) in da zaradi nje celo pridobijo samozavest.

Karen (bodoča osnovnošolska učiteljica): »*V matematiki sem običajno zelo dobra, vendar sem imela včasih težave z ulomki. Bilo mi je v olajšanje, da sem lahko začela z lažjimi nalogami in ne kar avtomatično z nalogami za nadarjene. Zdaj imam občutek, da sem se naučila več. Resnično sem vesela, da mi je uspelo z rumene barve preiti na zeleno in za konec na modro.*«

Jan (bodoči osnovnošolski učitelj): »*Običajno moram biti pri matematičnih predmetih še posebej pozoren. Vendar je bilo dobrodošlo, da sem se lahko svobodno odločil za višjo raven, če sem tako želel. Tako sem začel z roza, vendar sem nato največkrat pristal na rumeni. Kljub temu se mi zdi sistem pravičen. Ta način mi je veliko bližje kot to, da učitelj odloča o zahtevnosti nalog, ki jih moram opraviti. V roza in zeleni sem se lahko vsaj preizkusil, čeprav sem potem ugotovil, da so te naloge zame prezahtevne.*«

Kot sem že omenil, se med poukom dogaja veliko pozitivnega. Ni čisto jasno, ali zaradi dinamike menjavanja barvnih kartic ali zato ker imajo učenci/študenti v rokah svojo usodo ali preprosto zato ker vidijo sošolce pri delu. Vsekakor učencem in študentom čas opazno hitro teče.

Anna (bodoča osnovnošolska učiteljica): »*Nikoli nisem rada delala nalog z ulomki, zato sprva nisem bila preveč navdušena. Toda 50 minut je kar naenkrat minilo in ugotovila sem, da sem naredila 7 nalog, ne da bi sploh čutila odpor.*«

Jens (5. razred): »*Všeč mi je presenečenje, ko izbereš novo kartico. Še zlasti takrat ko se premakneš za eno barvo navzgor ali navzdol, občutiš majhno napetost. Ali bom lahko rešil to nalogo? Prava pustolovščina.*«

»Dinamična diferenciacija« je učence razbremenila tega, da bi bili vse leto zaznamovani z določeno »etiketo«. Tako kot imamo odrasli dober ali slab dan v službi, to velja tudi zanje. Slab dan se kaže pri barvah, vendar nima posledic za naslednje ure. In nasprotno, če je učenec na začetku leta dober, a ne dela do-

2 2. letnik visokošolskega študija. To so študenti na izobraževanju za učitelje, stari 19 do 20 let.

3 Učenci 5. razreda so v Belgiji stari 10 do 11 let.

volj oz. izgubi motivacijo, bo to jasno obema, učitelju in učencu. Količina in barve nalog, s katerimi se je učenec spopadel, bodo poskrbeli, da bo njegov vzpon ali padec opaznejši.

Jules (5. razred): »*Običajno naredim veliko zelenih in rožnatih kartic, danes pa je bilo težko [op. a. večinoma je delal z rumenimi]. Mislim, da zaradi seštevanja in odštevanja (ulomkov) ali pa morda tudi zato ker ponoči nisem dobro spal. Res si želim, da bi naslednjič dobil več zelenih kartic.*«

5 Razprava

Carol Ann Tomlinson [6] je pionirka na področju preučevanja diferenciacije. V svojem modelu opredeljuje diferenciacijo kot proaktiven odziv učitelja na potrebe učencev, te pa oblikuje njihova miselna naravnanost. Nedvomno pristop z barvnimi karticami ustreza tej opredelitvi. Vsebuje tudi večino elementov, ki jih Tomlinsonova opisuje [7]: proaktivnost, kvaliteta pred kvantiteto (dobri učenci ne dobijo le več nalog), osredotočenost na vrednotenje, v središču je učenec, preprostost in dinamičnost.

Čeprav je bila diferenciacija v glavnem v domeni osnovnih in srednjih šol, današnje okoliščine narekujejo prilagoditev in vključitev diferenciacije tudi v visokem šolstvu, da bi tako zadostili potrebam večplastne družbe [2]. Trditev, da je diferenciacija nujna, je morda premočna, vendar bi lahko rekli, da je zagotavljanje diferenciacije, kot jo razumejo različni avtorji [5, 6], boljša stvar v mnogih situacijah.

Za učinkovito izvajanje diferenciacije Cheryll Adams in Rebecca Pierce [1] učiteljem predlagata naslednja merila:
(1) da jo bo preprosto izvajati,
(2) da jo bo preprosto prilagajati,
(3) da spodbuja sodelovanje učencev,
(4) da bo primerna za uporabo pri različnih starostnih skupinah.

Vsa štiri merila so v primeru barvnih kartic izpolnjena.

Iz povratnih informacij učencev in študentov (glej 4. del) je že razvidno njihovo navdušenje in potencialne koristi. V tem delu pa bomo razpravljali o nekaterih prednostih za učitelje in predavatelje ter razmislili, čemu je treba posvetiti pozornost in kakšna je vloga digitalizacije.

Kakšne so prednosti za predavatelje

V prvi vrsti so odpravljeni številni zadržki, češ da je diferenciacija v visokošolskem izobraževanju neizvedljiva (glej Uvod), npr. da študentu zaradi nepoznavanja njegove ravni znanja ne moremo dodeliti ustreznih nalog. Po drugi strani pa učitelj ali predavatelj v zelo kratkem času (in še pred izpiti) dobi dober vpogled v močne in šibke točke matematičnih sposobnosti študentov. Zato lahko zagotovi prilagojene povratne informacije in opozori na teme, ki jim morajo nameniti več pozornosti. Moji kolegi so pogosto presenečeni, kako »zelo dobro poznam svoje študente,« tako njihovo raven znanja kot njihov odnos.

Nadalje, s tem načinom izvajanja nalog študenti v času svojega pedagoškega izobraževanja sami izkusijo, kako pomembno je reševati probleme, ki ustrezajo njihovim sposobnostim. To pomeni, da mi ni treba porabiti veliko časa za predavanja o diferenciaciji v učilnicah za matematiko – samo demonstriram in bodoči učitelji jo izkusijo na lastni koži. Po kratki razpravi jo lahko pozneje izvajajo pri svojem pouku. S tem ko sam organiziram diferenciacijo v oddelku z do 50 študenti, kot učitelj pridobim verodostojnost v primerjavi s kolegi, ki o njej le predavajo, je pa ne prakticirajo.

Kakšne so prednosti za učitelje

Pozitivna dinamika med poukom je za učitelja v osnovni (ali srednji) šoli gotovo dobrodošla. Kot je nekoč dejal A. Einstein (v [3] in [8]): »Nikdar *ne poučujem študentov,* poskušam le zagotoviti pogoje, v katerih se bodo lahko učili.« Če na začetku vsi izvajajo isto nalogo, je za učenca/študenta s težavami ali pomanjkanjem motivacije zelo mikavno pogledati sosedovo rešitev. Ker pa so naloge različne, morajo delati sami. Vendar se ne vmešavam, če si med seboj pomagajo, zlasti kadar me čakajo, da bi preveril rešitev. Medsebojna pomoč je torej še vedno dovoljena.

Pri statični diferenciaciji, ki jo vodi učitelj (glej 2. del), mora ta vsakega učenca razporediti v nivojsko skupino. Ker je to razporeditev za daljše časovno obdobje, gre za pomembno odločitev. Pri dinamičnem pristopu ta stresna odločitev ni potrebna, kar za učitelju pomeni dodano vrednost.

Ker učenci res večino časa delajo na pravi ravni zahtevnosti, menijo, da je bil čas učinkovito porabljen (npr. odziv Anne v prejšnjem poglavju). To koristi tako učitelju kot učencu.

Ali je mogoče z digitalnimi orodji zagotoviti tovrstno diferenciacijo

Digitalna orodja za urjenje (matematičnih) spretnosti so v šolah vse pogostejša. Učitelju omogočajo dober vpogled v to, katere naloge so bile za posameznika težke, in s tem nudijo podobne informacije, kot jih prikazuje preglednica na sliki 4. Uporaba digitalnih orodij omogoča, da vsak učenec sam uravnava svojo hitrost, igrifikacija pa zagotavlja določene spodbude za učence, ko jim gre dobro.

Diferenciacija ni tako razširjena, kot bi morda pričakovali. Obstajajo orodja, npr. Quizlet [10], ki dejansko spremljajo težavnost nalog in vprašanja prilagodijo učencu. Obstajajo tudi uporabnikom prijazna orodja, npr. BookWidgets [9], s pomočjo katerih lahko učitelj oblikuje svoje preizkuse znanja, jih diferencira in učencem poda personalizirane povratne informacije.

Kaže, da diferenciacija s pomočjo barv zelo ustreza digitalnim orodjem. Lahko torej pričakujemo, da bodo v bodoče prihodnja digitalna orodja uporabljala več načinov »dinamične diferenciacije«. Kakorkoli že, pa imajo trenutno še vedno prednost analogne situacije, v katerih ima učitelj nadzor nad dogajanjem. V tem primeru lahko učitelj določi naloge, ki jih bo ta dan uvrstil v škatlo. Prav tako lahko zamenja naloge, ki jih učenci niso dobro sprejeli, ali pa učencu po potrebi dodeli točno določeno nalogo. Drugi razlog je način komunikacije: pri digitalnem orodju učenci večinoma dobijo točke s pravilnim rezultatom, medtem ko se primer iz 3. dela 3 bolj osredotoča na postopek. Učitelj lahko učencu ponudi še eno priložnost, npr. kadar slednji utemeljitve ni zapisal dovolj natančno. Glede na to, da je pri poučevanju matematike sklepanje zelo pomembno, menim, da v tem smislu digitalna orodja še ne zmorejo tega, kar zmore učitelj.

Na kaj je treba biti pozoren pri barvnih karticah

Če smo tovrstno diferenciacijo pripravljeni vključiti v pouk, bodimo pozorni na nekaj stvari. Ključno je, da je težavnostna stopnja nalog ustrezna oz. da so naloge primerno »obarvane«. Oziroma naj bodo »bolj ali manj« prave barve. Če se odločate med rumeno in zeleno, se ne obremenjujte preveč, saj med njima ni bistvene razlike.

Najbolje je, da sodelujete s skupino kolegov. Vsak naj določi barvo za nalogo in verjetno boste tako dobili boljši občutek, katero barvo izbrati. Moji nekdanji študentki so se ulomki zdeli precej lahki, imela pa je težave z odstotki, zaradi česar je celo zelo osnovne naloge o odstotkih, npr. 80 % od 25 = … ali 70 % od … = 49, označila z roza barvo.

Svojim študentom obljubim, da jim bom vse naloge posredoval naknadno. Tako jih dobijo cel kup, če želijo vaditi, jaz pa jim lahko na podlagi preglednice (slika 4) dam konkretne predloge, katere naloge so primerne zanje. Kadar študent ali učenec nima dostopa do (veliko) več nalog, kot jih je naredil v okviru pouka, ali ne more preveriti predhodnih nalog (npr. kot na večini digitalnih platform), lahko spregleda naloge iz določenih kompetenc. Zato je nadzor učitelja, kot je prikazan na sliki 4, še vedno pomemben. Skoraj 60 % (48 od 87) študentov se strinja, da so njihova prizadevanja za matematiko bolj osredotočena zaradi povratnih informacij in napotkov predavatelja (v smislu Johna Hattieja in Helen Timperley [4]), ki temeljijo na pouku z barvnimi karticami.

6 Zaključek

S porazdelitvijo nalog v manjše skupine in uporabo sistema barv lahko ustvarimo »dinamično diferenciacijo«, ki je osredotočena na učenca ter je uporabna v osnovnem, srednjem in celo v visokem šolstvu. Ne potrebujemo informacij o kompetencah svojih učencev, da bi jim lahko pripravili nabor nalog, ki ustrezajo njihovim potrebam. S pomočjo preprostih pravil bodo učenci kar hitro delali na svoji ravni znanja in sposobnosti.

Zdi se, da so zaradi tega ure utrjevanja za učence učinkovitejše: učenci cenijo dinamiko in pridobijo samozavedanje o svoji ravni usposobljenosti; učiteljem ni treba vnaprej »etiketirati« učencev; učitelji pridobijo uporabne informacije, da svojim učencem podajo njim prilagojene povratne informacije.

V okviru pedagoškega izobraževanja je potrebno le malo predavanj, da bi študente pedagoške smeri prepričali o moči učinkovite diferenciacije. S tem ko jo izkusijo, so motivirani in sposobni razmisliti o njenih prednostih ter o tem, na kaj morajo biti pozorni, da jo bodo lahko prilagodili svojemu pouku.

Poleg tega vzpon digitalizacije omogoča možnosti za vpeljavo tovrstne »dinamične diferenciacije« v izobraževanju pa tudi škatla z barvnimi karticami (slika 2) se pri pouku dobro obnese.

Literatura

[1] Adams, C. M. in Pierce, R. L. (2021). *Differentiation that really works: Strategies from real teachers for real classrooms (Grades 3–5).* Routledge.

[2] Altbach, P. G. (2017). Responding to Massification. V: Altbach, P. G., Reisberg, L., Wit, H. d. (ur.), *Responding to Massification. Global Perspectives on Higher Education*. SensePublishers, Rotterdam.

[3] Bowen, J. A. (2021). *Teaching Change*, (uvod), John Hopkins University Press, 488.

[4] Hattie, J. in Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research, 77* (1), 81–112.

[5] Konstantinou-Katzi, P., Tsolaki, E., Meletiou-Mavrotheris, M. in Koutselini, M. (2013). Differentiation of teaching and learning mathematics: an action research study in tertiary education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44* (3), 332–349.

[6] Tomlinson, C. A. (2014). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners.* Alexandria: ASCD.

[7] Tomlinson, C. A. (2017). *How to differentiate instruction in academically diverse classrooms.* Alexandria: ASCD.

[8] academy.europa.eu/courses/teaching-outside-the-classroom (Official EU website).

[9] https://bookwidgets.com (pridobljeno: 2. 5. 2023).

[10] https://quizlet.com (pridobljeno: 2. 5. 2023).

[11] https://www.uitgeverijzwijsen.be/veiliglerenlezen/visie/differentiatie, Založba priročnikov za osnovno in srednje izobraževanje (pridobljeno: 2. 5. 2023).

Članek z originalnim naslovom »Dynamic differentiation: a colorful example of good practice in the classroom« je iz angleščine prevedla Polonca Luznik.

Kartice – učno gradivo v podporo motivaciji in učenju

Using Flashcards to Boost Motivation and Learning

mag. Andreja Oder Grabner
Osnovna šola Gustava Šiliha Velenje

Izvleček

Ob spreminjanju učne prakse, sledenju sodobnejšim načinom učenja in poučevanja pogosto naletimo na izziv primernosti učnih okolij in učnih gradiv. Ustvarjanje lastnih učnih gradiv s t. i. karticami omogoča učitelju poučevanje skozi preiskovanje, hitro prilagajanje težavnosti nalog, spreminjanje razredne klime. Učitelj pridobi vpogled v učenčeva razmišljanja in razumevanja. Učenci lahko izbirajo naloge glede na zastavljene kriterije uspešnosti, samovrednotijo svoje znanje, dobijo takojšnjo povratno informacijo, učijo se preko igre, preko preiskovanja, z učiteljem razvijajo strokovne pogovore. Učenci se med učenjem gibajo, kar še dodatno spodbuja delovanje njihovih možganov.

Ključne besede: učna gradiva, matematika, proces učenja

Abstract

As educators change teaching methods to pursue more modern educational styles, we are often challenged by the appropriateness of learning environments and didactic materials. Our own materials, such as flashcards, enable us to teach through inquiry, instantly adjust task complexity, and change the classroom atmosphere. We gain insight into the students' reasoning and comprehension. Students can choose tasks according to performance criteria, self-evaluate their knowledge, get immediate feedback, learn through play and investigation, and develop professional conversations with the teacher. They can move around while learning, which further stimulates their brain function.

Keywords: instructional materials, mathematics, learning process

Uvod

Verjetno je želja vsakega učitelja, da bi imel (visoko) motivirane učence, ki bi prevzemali odgovornost za lastno učenje. Da bi to dosegli, moramo organizirati ustrezno učno okolje, torej takšno, da so učenci aktivneje vključeni v sam proces učenja (Black in William, 2014). Pred leti sem ob opažanju nizke motivacije za učenje ter posledično upadanju učne uspešnosti veliko časa posvetila iskanju strategij, ki bi pozitivno vplivale na motivacijo učencev za učenje. Skozi prebiranje domače in tuje strokovne literature se je kot skupni dejavnik za uspešnejše učenje in poučevanje pojavljala večja vključenost učencev v sam učni proces, bolj dinamične učne ure z vključevanjem gibanja in prilagajanje učenja posameznikovim sposobnostim (Hattie, 2018; Kristanc, 2015; William, 2013; William, 2014).

Motivacija, vidno učenje, formativno spremljanje

Motivacija ni predhodnik dejavnosti (Kristanc, 2015), ampak ravno nasprotno. Ko nekaj počnemo, najdemo v tej dejavnosti smisel, zadovoljstvo in to nas motivira za nadaljnje delo. Zato je smiselno temeljito razmisliti o dejavnostih, ki bodo učence motivirale. Učitelji smo tisti, ki bomo s spremembami v svoji miselnosti spreminjali svojo pedagoško prakso in posledično se bodo spreminjali tudi učenci. Koncepta, ki nedvomno pripomoreta k pozitivnim spremembam v učilnicah, sta vidno učenje in formativno spremljanje. Oba koncepta vključujeta učence v celoten proces učenja, učitelji pa prevzemajo vlogo svetovalca in usmerjevalca procesa učenja, njihov cilj je izboljšanje kakovosti učenja in poučevanja ter, kot pravi William (2014:10), aktivirajo učence, da postanejo lastniki svojega lastnega učenja.

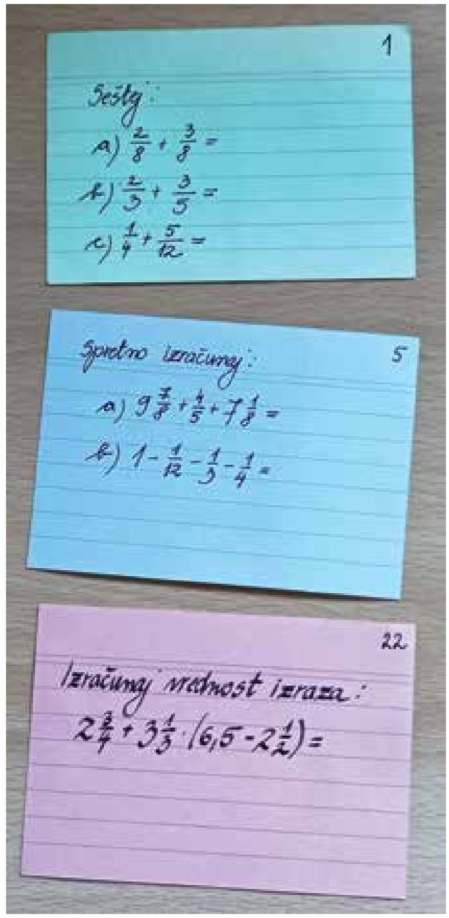
Ob prebiranju literature o sodobnejših načinih poučevanja in učenja pa se vseeno postavlja cela vrsta dilem, vprašanj, kako naj ta spoznanja vključimo v pouk. Učitelji se pogosto preveč opiramo na učbenik ali delovni zvezek kot osnovno gradivo. Če želimo spremeniti svojo pedagoško prakso, moramo na učbenike in delovne zvezke gledati kot na enega izmed učnih pripomočkov. Soočamo se z izzivom, kako učencem prilagoditi naloge, da bodo lahko sledili svojim zastavljenim ciljem, saj vsi ne potrebujejo enakih nalog za utrjevanje. Kako torej pripraviti naloge, da bodo učenci reševali tisto, kar res potrebujejo? Pri nekaterih poglavjih lahko opažamo, da imajo veliko več znanja od pričakovanega po učbeniku, da jih zanima reševanje problemov v drugačnem vrstnem redu. Ali morajo res čakati ves teden, da bodo dobili odgovore, ali pa lahko delo organiziramo tako, da bodo z reševanjem problema sami odkrili matematične zakonitosti? Kako? Pogled na vrtiljak kartic s telefonskimi številkami v tajništvu šole je sprožil idejo, ki je bila že ob prvem uvajanju v razred izjemno dobro sprejeta, se razvijala in je med našimi učenci najbolj priljubljen način učenja. Tako sem si pripravila kartice različnih barv in velikosti ter začela ustvarjati različne naloge, učna gradiva, igre, … Vse kartice pišem na roko, saj si s tem delo poenostavim, v razredu po potrebi lahko hitro kakšno kartico dodam ali preprosto zamenjam poškodovano. V nadaljevanju vam predstavljam nekaj primerov uporabe takšnih kartic.

Utrjevanje znanja in samovrednotenje

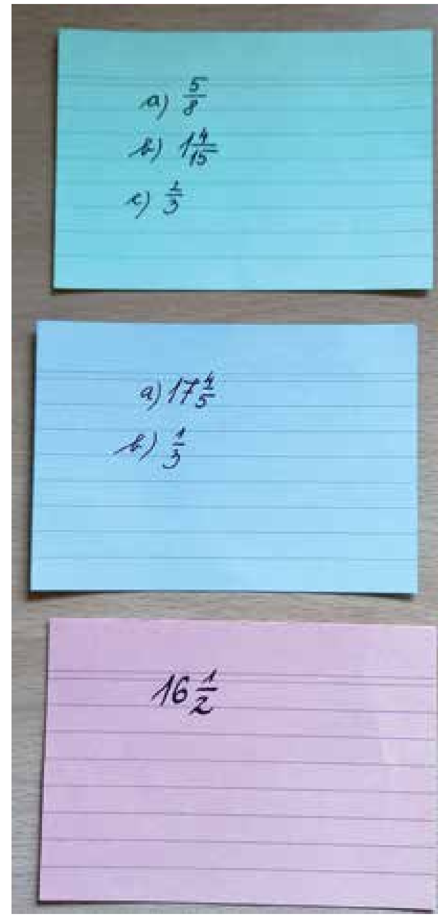
Delovni listi z 20 in več nalogami na učence z nižjo motivacijo za učenje nikakor niso vplivali pozitivno. Opažala sem, da rešijo le malo nalog, le redki rešijo vse. Iste naloge sem prepisala na kartice (slika 1), na hrbtno stran sem napisala rešitev (slika 2). Kartice zložimo na posebno mizo. Učenci si sami izbirajo naloge. Ko nalogo rešijo, na hrbtni strani preverijo rešitev. Če naloge ne znajo rešiti ali ne najdejo napake ob napačni rešitvi, pridejo po nasvet do učiteljice. Ko je naloga uspešno rešena, se sprehodijo do mize s karticami, vrnejo že rešeno in izberejo novo nalogo.

Število rešenih nalog v eni šolski uri se je s takšnim načinom dela povečalo. Pozitivno vpliva na učence tudi gibanje, ko gredo zamenjat kartico.

Obstaja past, da si bodo učenci izbirali naloge enakega tipa ali le tiste, ki jih znajo rešiti, ali pa prelahke naloge. Smiselno jih je na to opozoriti, jim svetovati in jih ob spremljanju skozi reševanje nalog usmerjati. Ob spremljanju in preverjanju lahko s pogovori o njihovem napredku, dosežkih in o počutju pozitivno vplivamo na razvijanje njihove odgovornosti za lastno znanje. Prav zavedanje odgovornosti za lastno znanje, po mojih izkušnjah, povečuje motiviranost, delovno vnemo ter posledično uspešnost.



Slika 1: Naloge za utrjevanje po težavnostnih stopnjah



Slika 2: Rešitve na hrbtni strani kartic

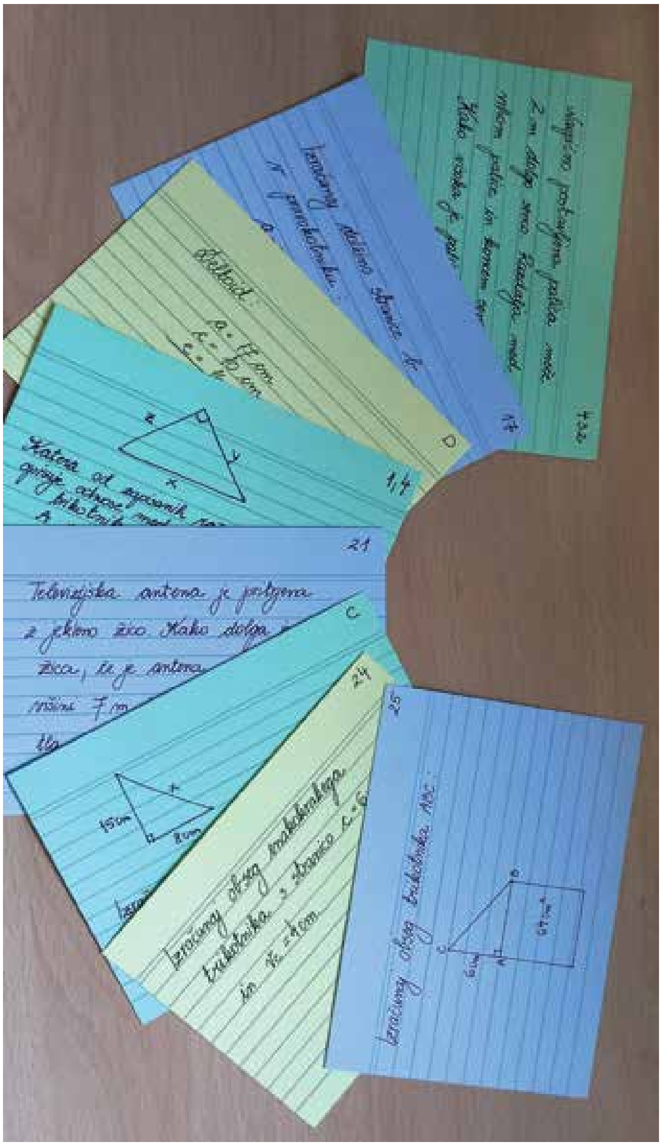
Z izbiro kartic različnih barv lahko pripravimo naloge različnih težavnostnih stopenj in učence lažje usmerjamo v izbiro njim primernih težavnostnih stopenj, pri čemer jih spodbujamo, da posegajo tudi po nalogah višjih težavnostnih stopenj. Kot je razvidno iz slike 1, so osnovne, lažje naloge na karticah zelene barve, na modrih karticah so malo težje naloge, a še vedno v okvirih temeljnih znanj, medtem ko rdeča barva vsebuje naloge višjih taksonomskih ravni ali pa npr. številske izraze z več računskimi operacijami in kombinacijo ulomkov ter decimalnih števil.

Za utrjevanje lahko ustvarimo kartice z nalogami, pri katerih učenca pravilna rešitev naloge na prvi kartici pripelje do naslednje kartice (slika 3). Če kartice, ki bi imela oznako rešitve, ki jo je učenec dobil, ni, naloga ni pravilno rešena. Učenec skuša poiskati napako, se posvetuje s sošolcem ali z učiteljico. Krog rešitev je zasnovan tako, da učence pot, ne glede na to, kje začnejo reševati, pripelje na začetek. Ob tako zasnovanem utrjevanju so učenci zelo motivirani za delo, želijo si biti hitri, a hkrati hitro ugotovijo, da morajo biti tudi dovolj natančni pri reševanju, saj jim napačna rešitev pot podaljša.

Ustvarimo lahko različne tipe nalog: razporejanje števil v skupine (slika 5), iskanje parov, razporejanje od največjega do najmanjšega … Komplet kartic pospravimo v kuverto, na katero lahko napišemo navodilo za reševanje (slika 4). Takšne naloge lahko uporabimo še pri dopolnilnem pouku ali pri urah dodatne strokovne pomoči kakor tudi pri preverjanju in ocenjevanju znanja, saj nam tak način ponuja veliko priložnosti za pogovore z učenci, pri katerih je dobro vidno njihovo razmišljanje in razumevanje.

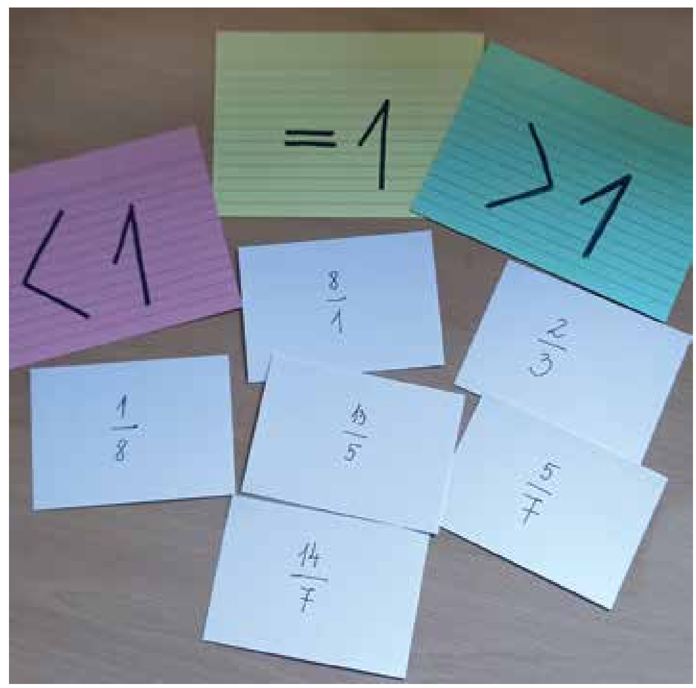
Učenje kot igra

S karticami razmeroma hitro pripravimo gradivo za utrjevanje hitrega računanja,



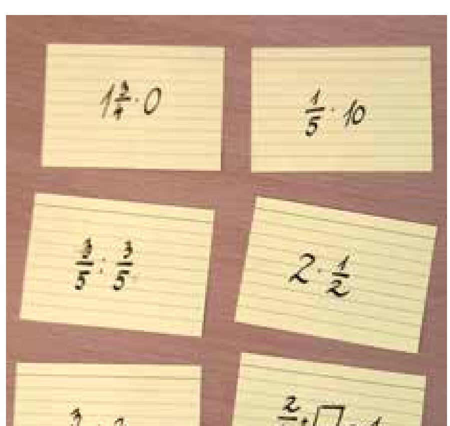
Slika 3: Kartice z nalogami za raziskovanje uporabe Pitagorovega izreka (krožna pot)

Slika 4: Kuverte s karticami glede na vsebino in tipe



Slika 5: Primer naloge za razporejanje kartic v ustrezne skupine

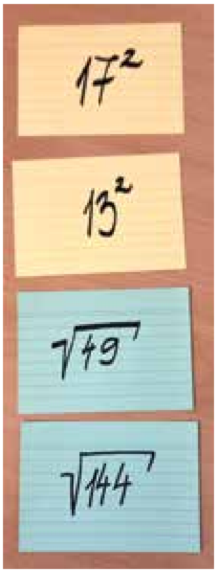
poznavanja kvadratov naravnih števil ipd. Na kartico napišemo številski izraz, primeren za hitro računanje, kot je npr. poštevanka, enostaven številski izraz z ulomki (prikazano na sliki 6) ali decimalnimi števili, kvadrat naravnega števila (slika 7), na hrbtno stran pa njegovo rešitev (slika 8). Vsak učenec dobi eno kartico. Učenci se premikajo po razredu. Ob srečanju s sošolcem drug drugemu pokažeta izziv na kartici. Učenec, ki zastavljen številski izraz izračuna pravilno, lahko svoje premikanje po razredu nadaljuje in zastavi svojo nalogo naslednjemu sošolcu, ki ga sreča. Učenec, ki ni odgovoril oziroma izračunal pravilno, počepne. Rešiti ga lahko poskusi drug mimoidoči sošolec tako, da mu zastavi svojo nalogo na kartici. Če jo učenec v počepu pravilno reši,



Slika 6: Kartice za utrjevanje hitrega računanja z ulomki

lahko tudi on nadaljuje svoje potovanje po razredu in zopet zastavlja nalogo svojim sošolcem. Učenci se to igro zelo radi igrajo in opaziti je visoko stopnjo empatije med njimi, saj zelo hitro opazijo, če sošolec počepne in prav tekmujejo, kdo ga bo rešil.

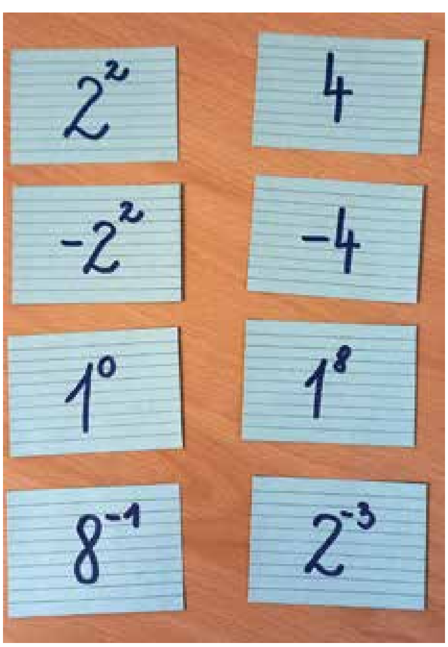
Na sliki 9 je predstavljen del igre iskanja parov, ki se lahko igra kot namizna igra spomin ali pa v igro vključimo gibanje in učenci s premikanjem po razredu iščejo svoj par. Vsak učenec izvleče svojo kartico in s premikanjem po razredu med sošolci skuša najti tistega z enako vrednostjo na kartici. Ob tem razvija matematično terminologijo, komunikacijo, se posvetuje, argumentira svojo izbiro. Ustvarimo lahko nekaj parov in nekaj trojic kartic z



Slika 7: Kartice za učenje in utrjevanje poznavanja kvadratov in kvadratnih korenov naravnih števil do 20

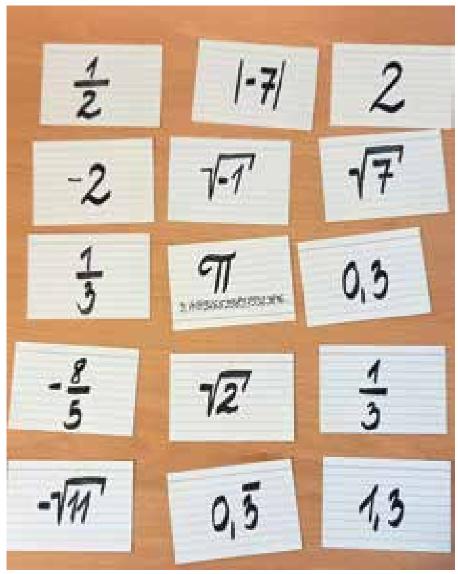
Slika 8: Rešitev na hrbtni strani

enakimi vrednostmi – tako nalogo malo otežimo, pri učencih pa spodbudimo še več komunikacije.



Slika 9: Kartice za igro iskanja parov – potence

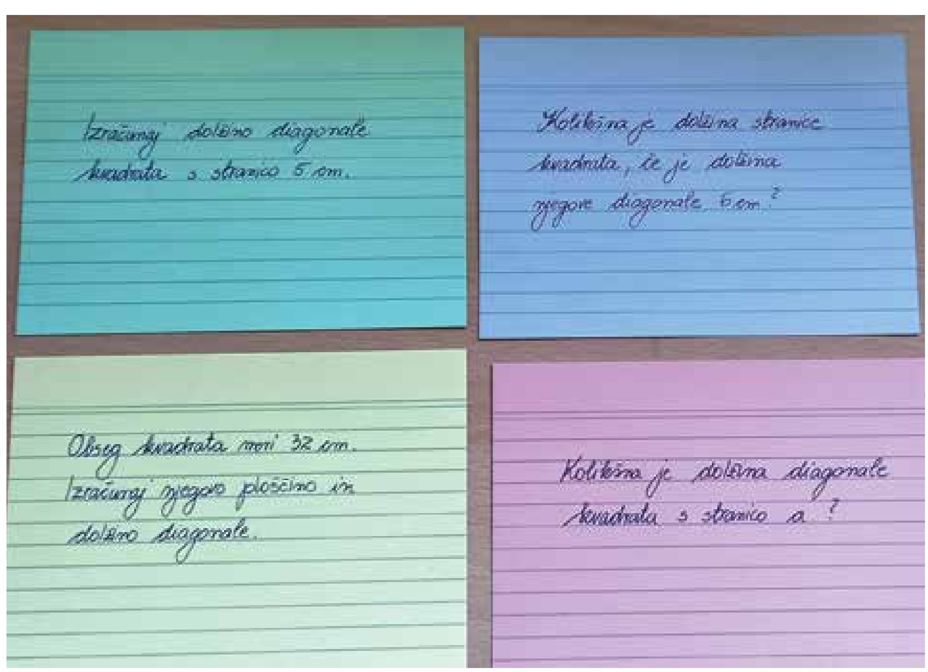
S pomočjo kartic, ki so predstavljene na sliki 10 lahko učencem dodelimo vlogo nekega števila (npr. 3, -5, $\frac{2}{3}$, 0,75, π) in zastavimo nalogo, naj se združijo v ustrezne številske množice ali naj se razporedijo na številsko premico. Ob takšni nalogi se med učenci razvijejo neprecenljive matematične razprave, ob čemer učenci razvijajo medsebojno komunikacijo in ustvarjalnost ter uporabljajo matematično terminologijo. Naredimo lahko tudi fotografijo, ki v učilnici služi za analizo reševanja naloge ter razpravo.



Slika 10: Kartice s števili iz različnih številskih množic

Obrnjeno učenje

Obrnjeno učenje (angl. flipped learning) je pedagoški učni pristop, pri katerem se tradicionalno učenje v razredu obrne tako, da učenci aktivno uporabljajo že usvojeno znanje, ga poglabljajo, razpravljajo z vrstniki in rešujejo zastavljene probleme (Flipped learning, 2020). Učitelj ima vlogo svetovalca, usmerjevalca, mentorja. Kartice so lahko zelo dobra podpora takšnemu konceptu učenja. Ustvarimo lahko učno gradivo, s katerim učenci sami ob reševanju nalog raziščejo učno vsebino. Vsebinski sklop Pitagorov izrek zasnujem tako, da po uri aktivnosti, ko učenci z načrtovanjem, barvanjem, rezanjem in sestavljanjem geometrijsko raziščejo in spoznajo Pitagorov izrek, tega dobro spoznamo, rešujemo naloge za razumevanje in utrjujemo Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku. Nato v skupinah ob nalogah na karticah raziskujejo uporabo Pitagorovega izreka v različnih likih in vsakdanjih situacijah. Naloge na karticah so različnih težavnostnih stopenj. Skupinam dodeljujem naloge glede na njihovo razumevanje in napredek. Na teh karticah na hrbtni strani ni podanih rešitev z namenom, da se lahko z učenci o rešitvi in strategiji reševanja pogovorimo. Ob koncu ure skupaj naredimo povzetek, po potrebi dodaten zapis v zvezek in se dogovorimo za domačo nalogo, naloge za utrjevanje.



Slika 11: Kartice z nalogami za samostojno raziskovanje uporabe Pitagorovega izreka v likih

Zaključek

»Učencev ne morem ničesar naučiti, ponudim jim lahko samo priložnost za učenje!«
(Carl Rogers)

Naloga učitelja je, da učencu omogoča učenje. »Učenci morajo raziskovati in negovati svojo radovednost« (Rogers). Z zavedanjem, da obstajajo dobri koncepti, dobri načini poučevanja in učenja, ki učencem dejansko omogočajo preiskovanje, učenje s preiskovanjem, lahko ustvarimo v učilnici spodbudno učno okolje. Lastna gradiva, ki jih lahko prilagajamo svojim učencem, podkrepijo in dejansko omogočijo tudi učenje učenja. Delo s karticami omogoča tudi učenje z gibanjem, kar učence še dodatno motivira.

Literatura

Black, P. in William, D. (2014). Spreminjanje poučevanja skozi formativno spremljanje: raziskovanje in praksa – projekt formativnega spremljanja znanja King's-Meadway-Oxfordshire, *Vzgoja in izobraževanje, XLV* (5–6), 10–18.

Flipped learning. (2020). https://www.advance-he.ac.uk/knowledge-hub/flipped-learning-0 (Pridobljeno 22. 12. 2023).

Hattie, J. (2018). *Vidno učenje za učitelje: maksimiranje učinka na učenje*. Griže: Svetovalno-izobraževalni center MI.

Kristanc, M. (2015). *Moj otrok je brihten, samo učiti se mu ne da: zgodba o motivaciji otroka.* M. Kristanc. Ljubljana.

Rogers, C. (23. 12. 2023). *Learning Theories of Educators: Where no Psychologist went before*. University of Whyoming. https://www.uwyo.edu/aded5050/5050unit9/rogers.asp

William, D. (2014). Formative assessment and contingency in the regulation of learning processes. http://www.dylanwiliam.org/Dylan_Wiliams_website/Papers.html (Pridobljeno 21. 12. 2023).

William, D. (2013). Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih. V: *O naravi učenja: uporaba raziskav za navdih prakse*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo. http://www.zrss.si/pdf/o-naravi-ucenja.pdf (Pridobljeno 21. 12. 2023).

Različne poti do uspešnosti pri matematiki

Multiple Pathways to Mathematical Success

Loreta Hebar, Osnovna šola Jarenina
Tatjana Kerin, Osnovna šola Leskovec pri Krškem
Andrejka Kramar, Osnovna šola Bistrica

Izvleček

V članku so predstavljene izkušnje pri pouku matematike s poudarkom na preizkušanju različnih aktivnih oblik pouka, predvsem raznolikih načinov ugotavljanja matematičnega znanja, s katerimi se učitelji bolj približajo različnim sposobnostim, afinitetam in potrebam različnih skupin učencev, učenci pa lahko v tem primeru učinkoviteje izkažejo svoje matematično znanje. Vsi učenci se namreč ne učijo enako hitro ali na enak način. V članku so kratki opisi izbranih oblik ugotavljanja matematičnega znanja, ki jim sledijo predstavitve izvedb v razredu in dokazi o znanju učencev: preiskovanje, tvorjenje pisnih besedil, vizualna predstavitev – izdelek, didaktična igra …

Ključne besede: miselno aktivni učenci, ugotavljanje matematičnega znanja

Abstract

The article presents mathematics classroom experiences. It focuses on evaluating several active types of instruction, notably different ways of formative assessment in mathematics, to bring teachers closer to various learning abilities, affinities, and needs. In turn, students can more effectively demonstrate their mathematical knowledge. Not everyone learns at the same pace or in the same way. This article briefly describes the selected forms of mathematics formative assessment, followed by classroom demonstrations and evidence of student achievement: investigations, written texts, visual representations, didactic games, etc.

Keywords: mentally active learners, mathematics formative assessment

Uvod

Matematika, jezik vzorcev, števil, veličin in oblik, ki nam pomaga razumeti in opisati svet okoli nas, pri mnogih posameznikih pogosto sproži občutek tesnobe. Ta lahko negativno vpliva na samopodobo, motivacijo in končni uspeh posameznika pri učenju matematike. Pa brez tega ne gre? Se mora učenec pri matematiki nujno počutiti nelagodno? Menimo, da ni tako. Tudi učenci, ki pri matematiki niso najbolj učno uspešni, lahko v varnem in spodbudnem učnem okolju aktivno sodelujejo in napredujejo.

Obstaja veliko poučevalnih praks, nekatere so že uveljavljene, nekatere se razvijajo. Kot je zapisal Hattie v svoji knjigi *Vidno učenje za učitelje*, nam nobena poučevalna praksa ne zagotavlja odličnih dosežkov učencev sama po sebi. Ključen je učitelj. Če se čezmerno posvečamo le učnim dosežkom, zagotovo spregledamo znanja in veščine, ki jih učenec že ima, ali tisto, kar ima rad. Namen šolanja presega le učne dosežke. Pomemben je razvoj otroka v mislečega in aktivnega državljana, ki bo razvil skrb zase in za druge ter se opiral na dejstva in prevzemal odgovornost za svoja dejanja. Učenje mora biti vidno učiteljem in učencem. Učenci morajo biti pripravljeni na vseživljenjsko učenje, imeti pozitiven odnos do učenja in ga ceniti. Zato naj bo poučevanje usmerjeno k učencu in ga gradimo na njegovem predznanju. V procesu učenja mu pomagajo in ga usmerjajo nameni učenja in kriteriji uspešnosti ter povratne informacije, ki jih pridobi. Kakovostna povratna informacija ni številčna ocena, biti mora kvalitativna. Tako v veliko večji meri zagotavljamo kakovostno znanje in dovolimo učencem, da se učijo tudi iz napak (Hattie, 2018).

Ko smo razmišljale o svojem poučevanju, smo se spomnile začetkov svoje poučevalne prakse oziroma prakse, ki smo je bile kot učenke deležne same.

Čas, v katerem živimo, in potrebe učencev so nas spodbudili, da smo na svojo poučevalno prakso in vlogo učitelja začele gledati drugače. Treba je bilo poiskati načine, ki bodo učenca postavili v središče učnega procesa. Z razvijanjem različnih veščin učenci pridobijo kakovostno in trajnostno znanje.

Na uspeh pri pouku zagotovo vpliva tudi to, ali se vsi dobro počutimo, tako učenci kot učitelji.

Slika 1

Načrtovanje pouka

Na sliki 1 so prikazani koraki poučevanja, ki nas vodijo pri oblikovanju zgoraj opisanega učnega procesa.

Pred obravnavo učnih vsebin je pomembno preveriti učenčevo predznanje. To lahko naredimo s pogovorom v parih ali manjših skupinah, s krajšo dejavnostjo, z vstopnim listom … O tem, kaj morajo znati in kako uspešni so na poti doseganja ciljev pouka, se sprašujemo celoten proces učenja. Pri tem si pomagamo s kriteriji uspešnosti, ki jih oblikujemo in sproti dopolnjujemo. Med učenjem učenci zbirajo različne dokaze o svojem znanju, s katerimi sproti izkazujejo in nadgrajujejo svoje znanje. Pri tem so ključne sprotne povratne informacije, ki so lahko ustne ali pisne, lahko jih poda učitelj ali pa si jih učenci izmenjajo med seboj. Seveda je to proces in po več izkušnjah učencev s podajanjem povratnih informacij bodo le-te vedno bolj kakovostne. Tako učenci osmišljajo svoje učenje in prevzemajo odgovornost za svoje znanje. Učitelji učence usmerjamo, spodbujamo, vodimo na poti učenja.

Napake morajo biti priložnost za učenje in iz njih se lahko veliko naučimo. Niso samo povratna informacija učitelju, so predvsem smerokaz za nadaljnje delo.

Aktivne oblike pouka

Pri obravnavi snovi se trudimo, da so učenci in s tem pouk čim aktivnejši, da preiskujejo, razmišljajo in naloge rešujejo samostojno, v paru oziroma skupini, kot je prikazano na slikah 2a, 2b, 2c.

Učenje lahko poteka praktično kjerkoli, velikokrat tudi zunaj učilnice. Naloge lahko razporedimo po učilnici in se učenec premika med njimi ter se tako uči. Učenec se premakne do listka, ga odlepi, prepiše številski izraz v svoj zvezek, izračuna njegovo vrednost in ga nato vrne na mesto, kjer ga je dobil. Če delo poteka v skupinah, se lahko dogovorimo, da gre vsakič po listek drug učenec. Če pa želimo situacijo še otežiti, lahko učencem rečemo, naj si nalogo ali številski izraz zapomnijo … Pravilnost reševanja praviloma preverimo na koncu ure, lahko z učnim listom, na katerem so zapisane rešitve, ali pa z žepnim računalom.

Različni načini izkazovanja znanja

Ne učijo se vsi učenci enako hitro in na enak način. Dobro je, da učitelj zaradi različnih učnih tipov učencev vključuje v pouk tudi drugačne načine izkazovanja znanja. Predstavljamo nekaj načinov izkazovanja znanja, ki jih poleg pisnega in ustnega uporabljamo v razredu.

Te načine uporabljamo kot samostojni dokaz o učenju in znanju učenca ter jih lahko med seboj povezujemo.

Kaj ponujajo raznoliki načini izkazovanja znanja?

- Vpogled v proces učenja, raznolika znanja in veščine
- Celostna informacija o učenčevem znanju na različnih zahtevnostnih ravneh
- Večja veljavnost ocenjevanja v skladu s cilji in standardi iz učnih načrtov
- Večja motiviranost in odgovornost učencev za učenje
- Poudarjanje napredka, ne le končne ocene
- Bolj individualiziran pristop in upoštevanje učenčevih močnih področij
- Več povezovanja med različnimi področji znotraj predmeta in med različnimi predmeti
- Spodbujanje ustvarjalnosti
- Iz jasnih in pravočasno opredeljenih kriterijev učenci vedo in razumejo, kaj se od njih pričakuje

(*Izzivi izkazovanja in ocenjevanja znanja na raznolike načine*, 2021)

Slika 2a

Slika 2b

Slika 2c

a) Predstavitve ob opori

Opora je lahko plakat (tudi interaktivni plakat), zloženka, različni modeli (modeli iz vsakdanjega življenja, modeli geometrijskih teles, modeli ulomkov …) ali predstavitvene drsnice … Medtem ko učenci iščejo najprimernejšo obliko ali model, razmišljajo o matematiki, jo povezujejo z okolico in vsakdanjim življenjem. Učenci nas največkrat presenetijo z izvirno idejo, saj njihova domišljija nima meja. Iz njihovih idej se velikokrat lahko učimo tudi učitelji.

Na slikah od 3 do 13 so prikazani nekateri primeri opor učencev za predstavitev.

- V 6. razredu pri vsebinah ulomki (sliki 3 in 4) in osnovni geometrijski pojmi (slika 5).

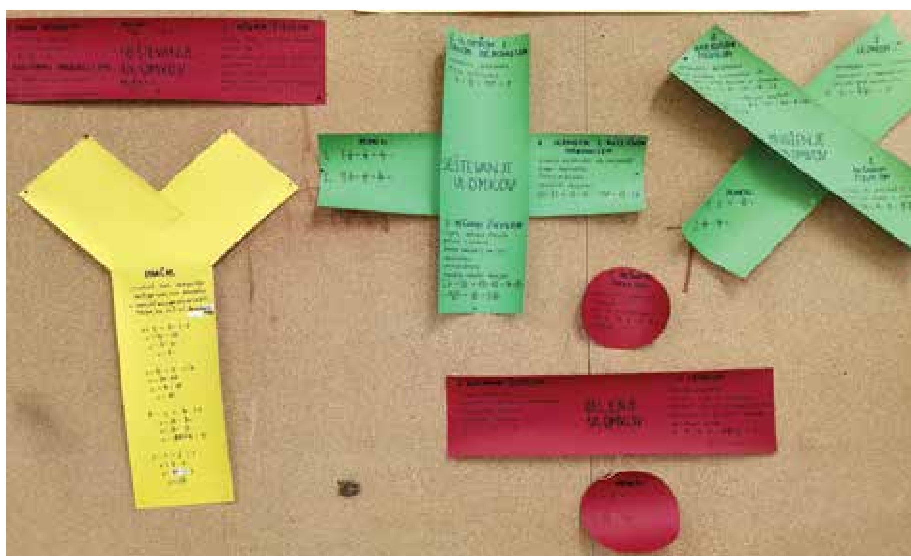
Slika 3

Slika 4

Slika 5

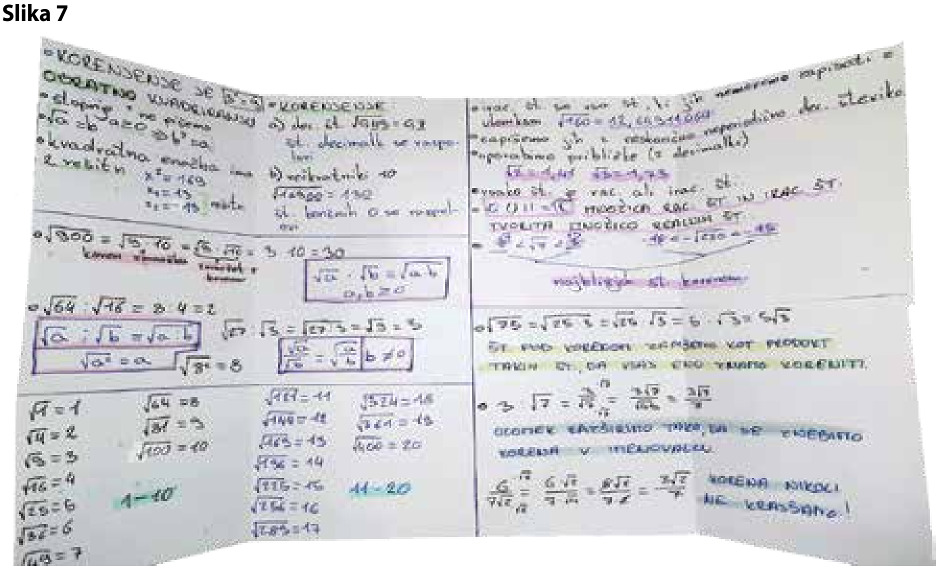
- V 7. razredu pri vsebinah praštevila (slika 6) in računanje z ulomki (slika 7).

Slika 6

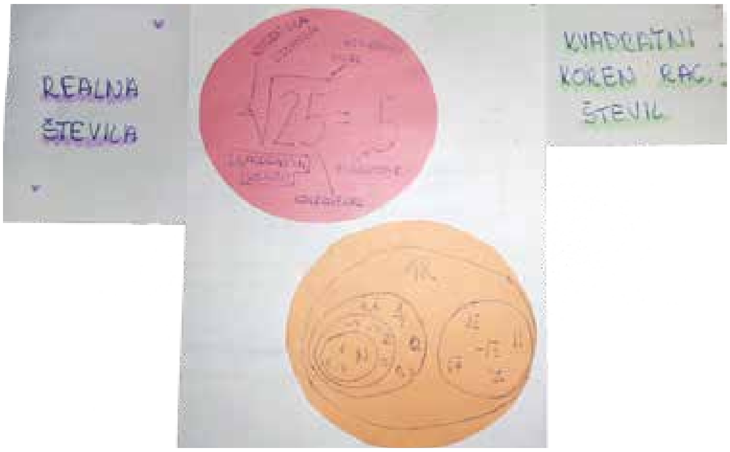


Slika 7

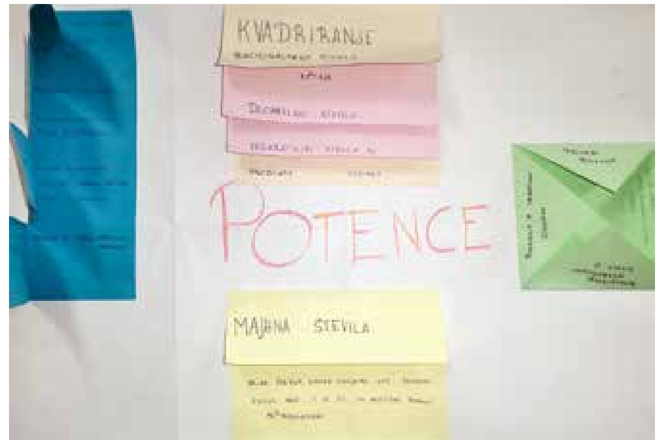
- V 8. razredu pri vsebinah realna števila, potence in koreni (slike 8, 9, in 10).



Slika 8

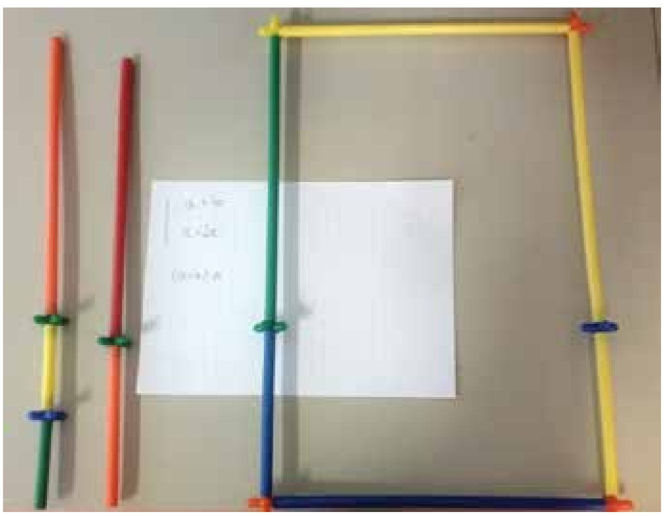


Slika 9

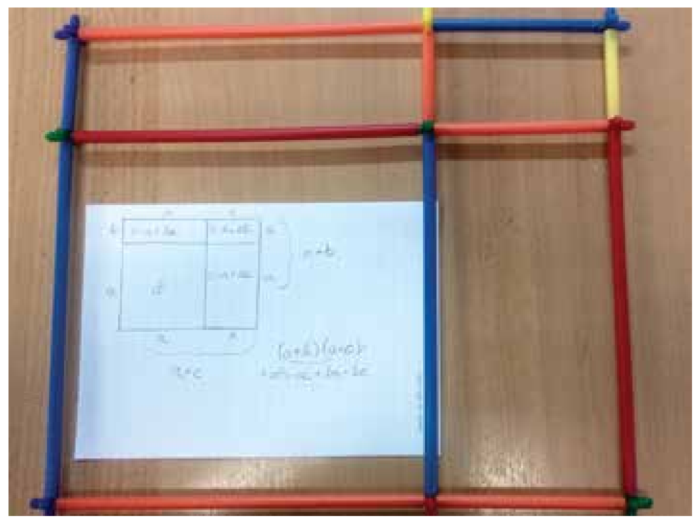


Slika 10

- V 9. razredu pri povezavi algebrskih izrazov z geometrijo (sliki 11 in 12).



Slika 11



Slika 12

b) Tvorjenje pisnih besedil

Učenci pogosto znajo rešiti matematični problem, na vprašanje, zakaj so tako reševali, pa jim je veliko težje odgovoriti, pogosto rečejo: »Znam rešiti nalogo, samo ne znam razložiti.«

Pri vseh predmetih spodbujamo razvijanje vseh štirih sporazumevalnih zmožnosti: poslušanje, govorjenje, branje in pisanje. Tvorjenje pisnih besedil pri matematiki vključuje smiselno kombinacijo uporabe besedila, simbolov (oznak) in slikovnih reprezentacij (slik, fotografij). Učence moramo postopno navajati na zapisovanje: od krajših do daljših besedil, od preprostejših do kompleksnejših zapisov. Pisno izražanje oz. tvorjenje pisnih besedil je namreč za učence mnogo težje kot ustno sporočanje oz. govorjenje (Bone v Suban, 2020).

Kako tvorimo pisna besedila pri matematiki?

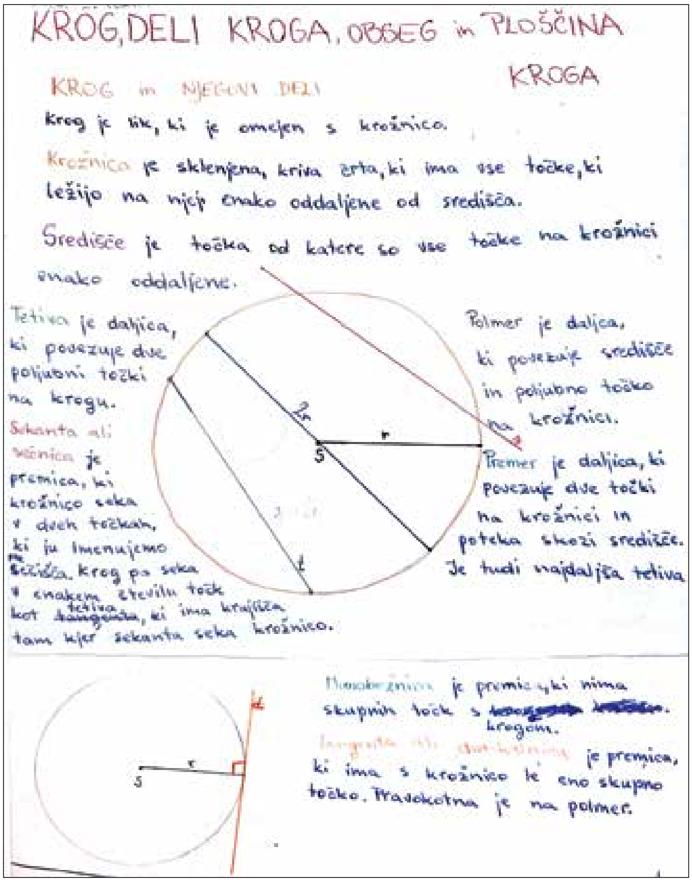
Za vsak obravnavani učni sklop z učenci **oblikujemo kriterije uspešnosti**, da vedo, kaj se bomo učili oz. kaj bodo morali na koncu znati. Kriteriji uspešnosti so osnova za **dajanje povratnih informacij** o napredovanju učenčevega znanja.

Že v fazi preverjanja učenci **pripravijo pisni sestavek** – predstavitev obravnavane vsebine. Z njim pokažejo razumevanje pojmov in postopkov reševanja nalog na obravnavano temo. Dolžina sestavka in oblika nista predpisani, določijo si ju lahko sami. V besedilo lahko vključijo skice, primere nalog … ki bodo pojasnjevale njihov zapis. Pri pisanju morajo uporabljati ustrezno matematično besedišče. Pomagajo si lahko s kriteriji uspešnosti, da ne spregledajo vsebin, ki so bile obravnavane in jih morajo zajeti v besedilu. Usmerjamo jih v prikaz uporabe matematike in v iskanje povezav matematike z vsakdanjim življenjem.

Tvorjenje pisnih besedil:
- pomaga učencem bolj poglobljeno in jasneje razmišljati o matematiki,
- prispeva k poglobljenemu razumevanju matematičnih pojmov, struktur, veščin, konceptov in procesov,
- nudi možnost odpravljanja napačnih predstav,
- močno podpira učenje, ker od učencev zahteva, da organizirajo svoje ideje, jih razjasnijo in razmislijo o njih (Bone v Suban, 2020).

S tvorjenjem pisnih besedil pri matematiki realiziramo različne cilje iz učnega načrta za matematiko. Primer izdelka učenca pri obravnavi vsebine krog in deli kroga je prikazan na slikah od 13 do 16.

Matematika v šoli, št. 1, letnik 30, 2024



KROG, DELI KROGA, OBSEG in PLOŠČINA KROGA

KROG in NJEGOVI DELI

Krog je lik, ki je omejen s krožnico.

Krožnica je sklenjena, kriva črta, ki ima vse točke, ki ležijo na njej enako oddaljene od središča.

Središče je točka od katere so vse točke na krožnici enako oddaljene.

Tetiva je daljica, ki povezuje dve poljubni točki na krogu.

Polmer je daljica, ki povezuje središče in poljubno točko na krožnici.

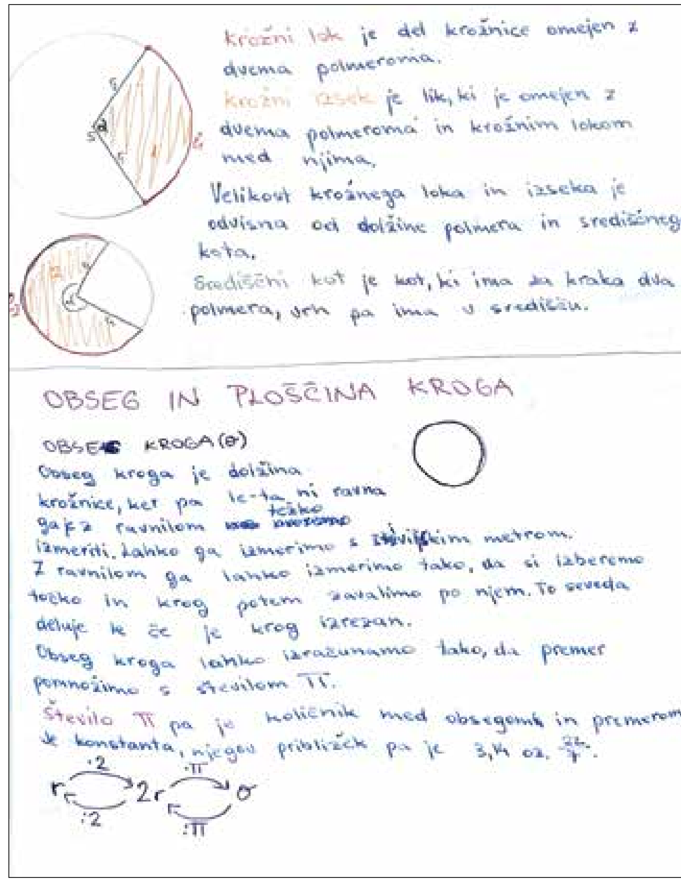
Premer je daljica, ki povezuje dve točki na krožnici in poteka skozi središče. Je tudi najdaljša tetiva.

Sekanta ali sečnica je premica, ki krožnico seka v dveh točkah, ki ju imenujemo sečišča. Krog pa seka v enakem številu točk kot tetiva, ki ima krajišča tam kjer sekanta seka krožnico.

Mimobežnica je premica, ki nima skupnih točk s ~~[illegible]~~ krogom.

Tangenta ali dotikalnica je premica, ki ima s krožnico le eno skupno točko. Pravokotna je na polmer.

Slika 13



Krožni lok je del krožnice omejen z dvema polmeroma.

Krožni izsek je lik, ki je omejen z dvema polmeroma in krožnim lokom med njima.

Velikost krožnega loka in izseka je odvisna od dolžine polmera in središčnega kota.

Središčni kot je kot, ki ima za kraka dva polmera, vrh pa ima v središču.

OBSEG IN PLOŠČINA KROGA

OBSEG KROGA (o)

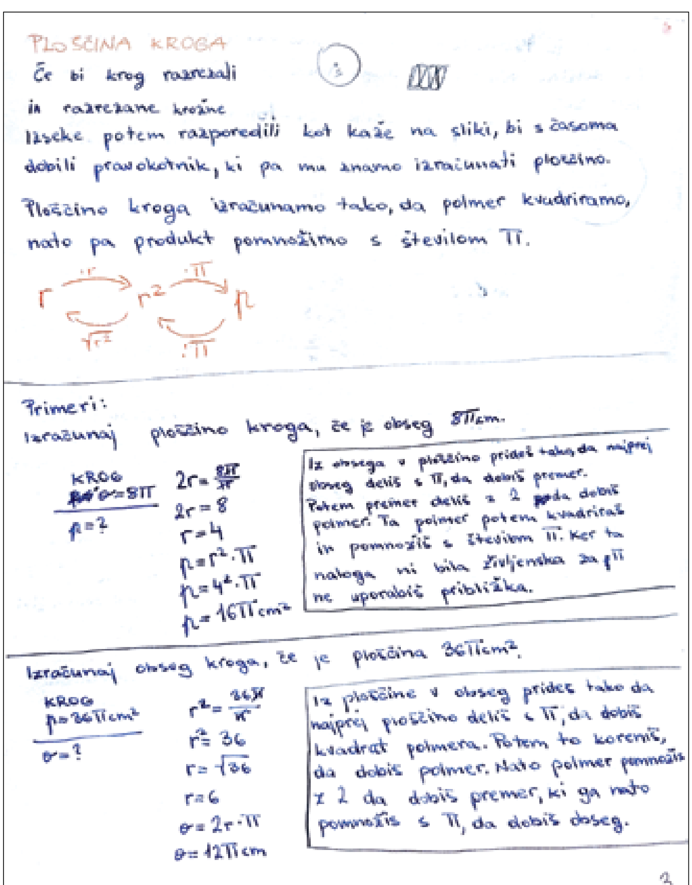
Obseg kroga je dolžina krožnice, ker pa le-ta ni ravna ga je z ravnilom težko izmeriti. Lahko ga izmerimo s šiviljskim metrom. Z ravnilom ga lahko izmerimo tako, da si izberemo točko in krog potem zavalimo po njem. To seveda deluje le če je krog izrezan.

Obseg kroga lahko izračunamo tako, da premer pomnožimo s številom π.

Število π pa je količnik med obsegom in premerom. Je konstanta, njegov približek pa je 3,14 oz. $\frac{22}{7}$.

$r \xrightarrow{\cdot 2} 2r \xrightarrow{\cdot \pi} o$, $o \xrightarrow{:\pi} 2r \xrightarrow{:2} r$

Slika 14



PLOŠČINA KROGA

Če bi krog razrezali in razrezane krožne izseke potem razporedili kot kaže na sliki, bi s časoma dobili pravokotnik, ki pa mu znamo izračunati ploščino.

Ploščino kroga izračunamo tako, da polmer kvadriramo, nato pa produkt pomnožimo s številom π.

$r \xrightarrow{^2} r^2 \xrightarrow{\cdot \pi} p$, $p \xrightarrow{:\pi} r^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} r$

Primeri:

Izračunaj ploščino kroga, če je obseg 8π cm.

KROG
$o = 8\pi$
$p = ?$

$2r = \frac{8\pi}{\pi}$
$2r = 8$
$r = 4$
$p = r^2 \cdot \pi$
$p = 4^2 \cdot \pi$
$p = 16\pi\ cm^2$

Iz obsega v ploščino prideš tako da najprej obseg deliš s π, da dobiš premer. Potem premer deliš z 2 da dobiš polmer. Ta polmer potem kvadriraš in pomnožiš s številom π. Ker ta naloga ni bila življenjska za π ne uporabiš približka.

Izračunaj obseg kroga, če je ploščina 36π cm².

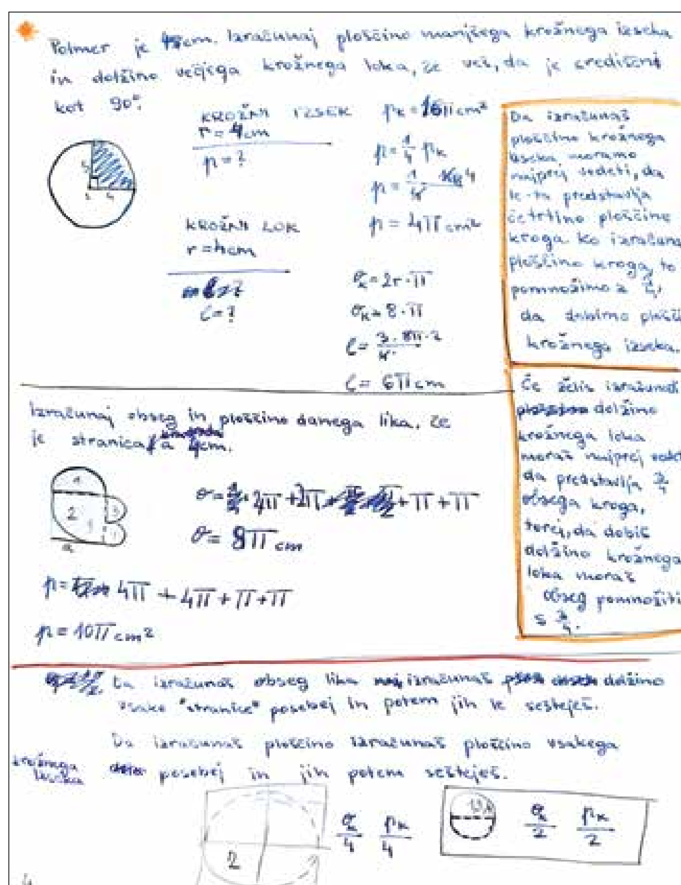
KROG
$p = 36\pi\ cm^2$
$o = ?$

$r^2 = \frac{36\pi}{\pi}$
$r^2 = 36$
$r = \sqrt{36}$
$r = 6$
$o = 2r \cdot \pi$
$o = 12\pi\ cm$

Iz ploščine v obseg prideš tako da najprej ploščino deliš s π, da dobiš kvadrat polmera. Potem to koreniš, da dobiš polmer. Nato polmer pomnožiš z 2 da dobiš premer, ki ga nato pomnožiš s π, da dobiš obseg.

3

Slika 15



Polmer je 4 cm. Izračunaj ploščino manjšega krožnega izseka in dolžino večjega krožnega loka, če veš, da je središčni kot 90°.

KROŽNI IZSEK
$r = 4\ cm$
$p = ?$

$p_K = 16\pi\ cm^2$
$p = \frac{1}{4} p_K$
$p = \frac{1}{4} \cdot 16\pi$
$p = 4\pi\ cm^2$

KROŽNI LOK
$r = 4\ cm$
$l = ?$

$o_K = 2r \cdot \pi$
$o_K = 8 \cdot \pi$
$l = \frac{3 \cdot 8\pi}{4}$
$l = 6\pi\ cm$

Da izračunaš ploščino krožnega izseka moramo najprej vedeti, da le-ta predstavlja četrtino ploščine kroga. Ko izračunamo ploščino kroga, to pomnožimo z $\frac{1}{4}$, da dobimo ploščino krožnega izseka.

Če želiš izračunati dolžino krožnega loka moraš najprej vedeti, da predstavlja $\frac{3}{4}$ obsega kroga, torej, da dobiš dolžino krožnega loka moraš obseg pomnožiti s $\frac{3}{4}$.

Izračunaj obseg in ploščino danega lika, če je stranica a 4 cm.

$o = 2\pi + 2\pi + \pi + \pi$
$o = 8\pi\ cm$

$p = 4\pi + 4\pi + \pi + \pi$
$p = 10\pi\ cm^2$

Ko izračunaš obseg lika najprej izračunaš dolžino vsake "stranice" posebej in potem jih le seštevaš.

Da izračunaš ploščino izračunaš ploščino vsakega krožnega izseka posebej in jih potem seštevaš.

$\frac{o}{4}$ $\frac{p_K}{4}$ $\frac{o}{2}$ $\frac{p_K}{2}$

4

Slika 16

c) Preiskovanje

Preiskovanje kot aktivna oblika dela lahko traja le nekaj minut ali pa učno uro ali dve. Pomembno je, da učenci najprej sami / v paru / v skupini razmišljajo in preiskujejo neko zakonitost, pravilo ali vzorec.

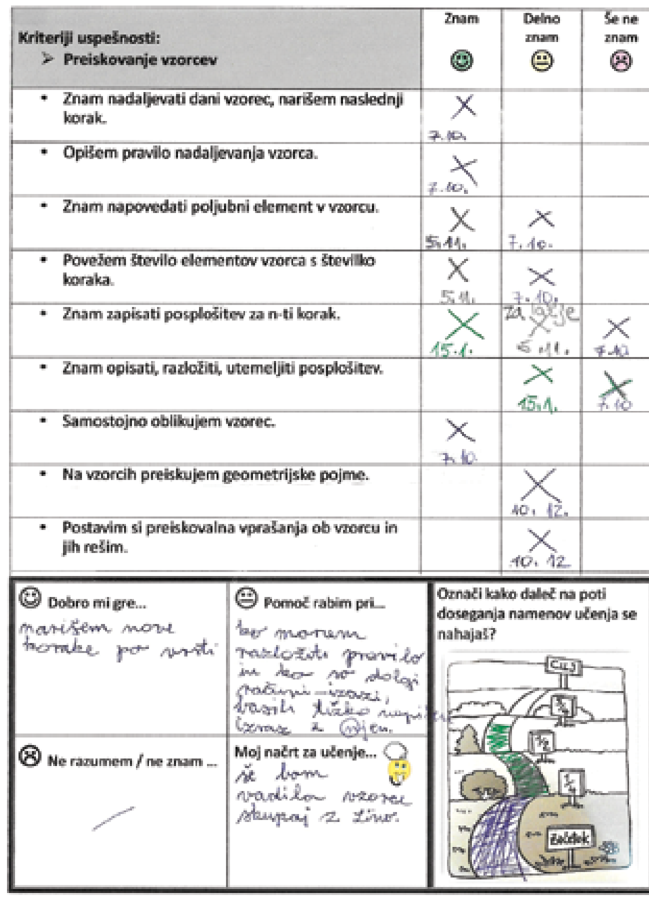
Predstavljamo primer **preiskovanja vzorcev**. S tem ko učenci opazujejo vzorce, ugotavljajo pravila in iščejo posplošitve, razvijajo algebraično mišljenje.

Vsebino obravnavamo daljši čas. Sprva je poudarek na prepoznavanju vzorcev, nadaljevanju vzorcev in predvsem pogovoru o tem, kako posamezni vzorec logično nadaljujemo. Pomembno je, da si pri preiskovanju vzorcev učenci pomagajo s sistematičnim zapisovanjem v preglednico. Tako lažje opazujejo povezavo med sosednjima korakoma ter povezujejo zaporedno številko koraka s sliko in številom objektov oz. vrednostjo v preglednici. V procesu se veliko pogovarjamo in se tako učimo uporabe matematične terminologije, predvsem opisovanja pravil.

Vzorci naj postajajo vse bolj kompleksni. Po preštevanju elementov v posameznem koraku vzorca in po posploševanju zapisa števila elementov v n-tem koraku se lotimo preiskovanja geometrijskih lastnosti: dolžin stranic, diagonal, velikosti obsegov, ploščin ipd.

Predstavljamo primer izdelka učencev. Učenci so izbirali med različnimi ponujenimi vzorci. Postavljali so si različna preiskovalna vprašanja in raziskovali rastoče geometrijske vzorce. Zapisovali so svoje ugotovitve in posplošitve (slika 17). Za lažje spremljanje napredka in samovrednotenje uspešnosti smo zapisali kriterije uspešnosti (slika 18a) in kasneje še kriterije za ocenjevanje (slika 18b), s katerimi smo vrednotili preiskovanje vzorcev, ki so jih učenci samostojno oblikovali in preiskovali.

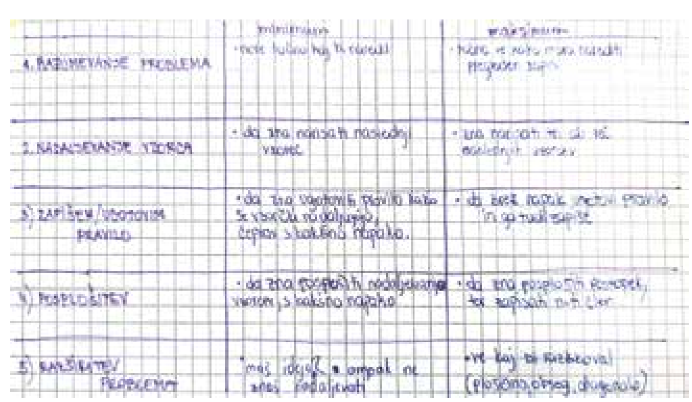
Slika 17



Kriteriji uspešnosti: ➢ Preiskovanje vzorcev	Znam	Delno znam	Še ne znam
• Znam nadaljevati dani vzorec, narišem naslednji korak.	X 7. 10.		
• Opišem pravilo nadaljevanja vzorca.	X 7. 10.		
• Znam napovedati poljubni element v vzorcu.	X 5. 11.	X 7. 10.	
• Povežem število elementov vzorca s številko koraka.	X 5. 11.	X 7. 10.	
• Znam zapisati posplošitev za n-ti korak.	X 15. 1.	Za lažje X 5. 11.	X 7. 10.
• Znam opisati, razložiti, utemeljiti posplošitev.		X 15. 1.	X 7. 10.
• Samostojno oblikujem vzorec.	X 7. 10.		
• Na vzorcih preiskujem geometrijske pojme.		X 10. 12.	
• Postavim si preiskovalna vprašanja ob vzorcu in jih rešim.		X 10. 12.	

Dobro mi gre...
Pomoč rabim pri...
Ne razumem / ne znam ...
Moj načrt za učenje...
Označi kako daleč na poti doseganja namenov učenja se nahajaš?
Začetek

Slika 18a

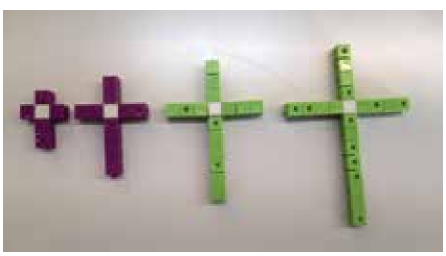


Slika 18b

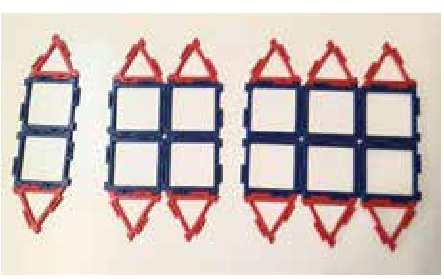
Učenci so predstavili vzorce s konkretnimi materiali (z vžigalicami, kockami, gumbi, ploščicami), kot je prikazano na slikah od 19 do 22, s pomočjo interaktivnih gradiv in z risanjem.

Slika 19

Slika 20



Slika 21

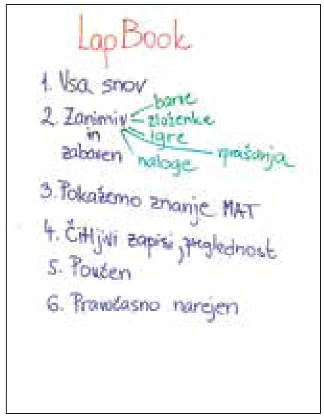


Slika 22

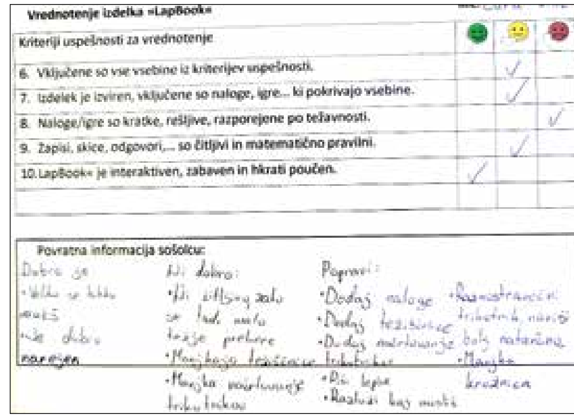
d) Predstavitev interaktivnega plakata – *lapbooka*

Kaj je lapbook?

Je vsestransko izobraževalno orodje, ki se uporablja za predstavitev učenja katere koli teme ali predmeta, za katero koli starost. Notranjost mape je polna miniaturnih knjig (mini knjig, zloženk) in drugih komponent, ki so zbirka tega, kar se je učenec naučil o določeni temi. Omogoča pregledno, organizirano učenje in utrjevanje znanja, individualizacijo ter razvijanje kreativnosti in ustvarjalnosti učencev. Prav tako podpira razvijanje predstavitvenih veščin sporočanja v matematičnem jeziku (*How to Make a Lapbook*, 2021).



Slika 23



Slika 24

Predstavljamo primer, ki smo ga uporabili v 7. razredu pri obravnavi vsebine trikotnik.

Kako smo se lotili izdelave?

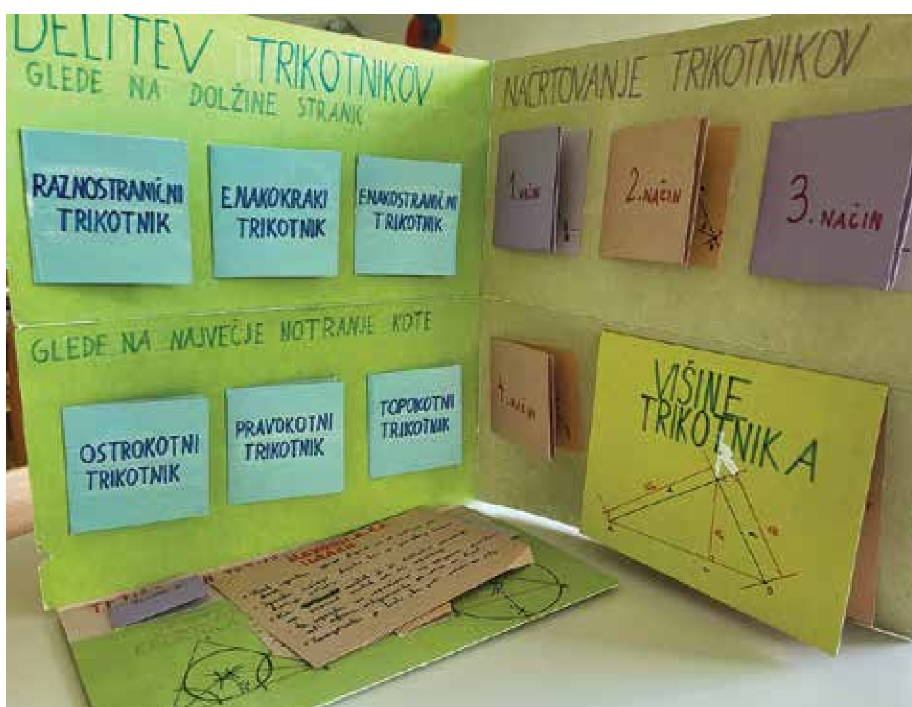
Najprej smo si z učenci ogledali videoposnetke z YouTuba, kjer smo našli prvo idejo – prikaz. Oblikovali smo prve usmeritvene kriterije uspešnosti (slika 23).

Nadaljevali smo z obravnavo vsebin učne snovi, učenci pa so doma sproti pripravljali svoj lapbook. V šoli so dobivali sprotne povratne informacije o napredku. Ves čas so potekali medvrstniško sodelovanje glede tehnične in vsebinske izvedbe izdelka, izmenjava izkušenj, iskanje novih idej …

Sledile so prve povratne informacije sošolcev. V dvojicah so učenci vrednotili izdelke svojih sošolcev in jim dajali povratne informacije. Glede na pridobljene povratne informacije so učenci lahko dopolnili svoje izdelke.

Po zaključku obravnave učnega sklopa smo nadaljevali z vrstniškim vrednotenjem izdelkov. Vsak učenec je po kriterijih uspešnosti pregledal in ovrednotil izdelek enega od sošolcev (slika 24).

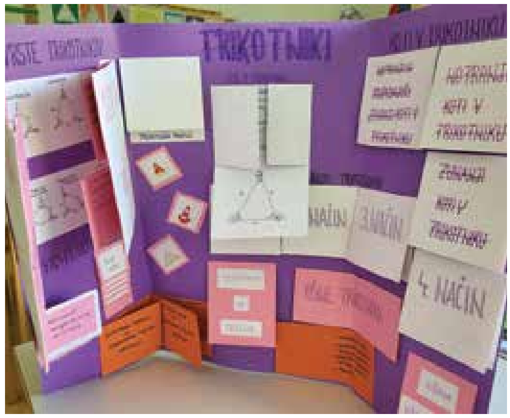
Glede na pridobljene povratne informacije so učenci lahko ponovno dopolnili



Slika 25

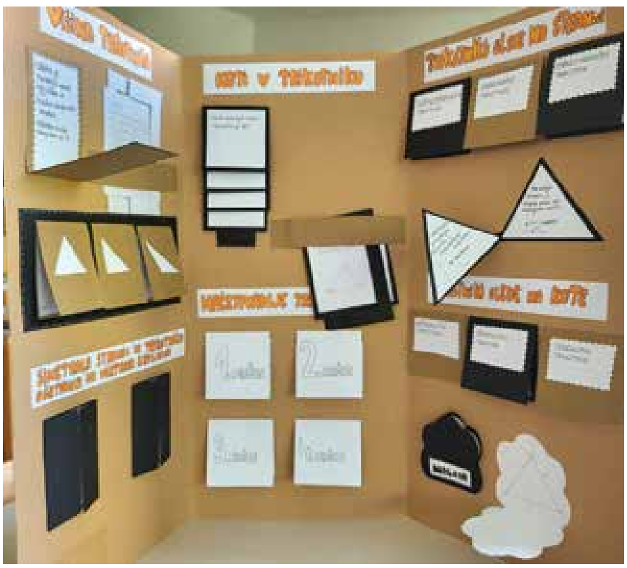
svoje izdelke. Sledile so govorne predstavitve izdelkov, kjer so učenci na kratko predstavili svoj izdelek, morda poudarili kakšno posebnost.

Učitelj ima ob opisani dejavnosti priložnost tudi za vrednotenje znanja. Predstavitev lapbooka je lahko opora pri govorni predstavitvi, ustnem izkazovanju znanja ali geometrijskem načrtovanju po navodilih. Na slikah 25 do 28 so primeri izdelkov učencev.



Slika 26

Slika 27



Slika 28

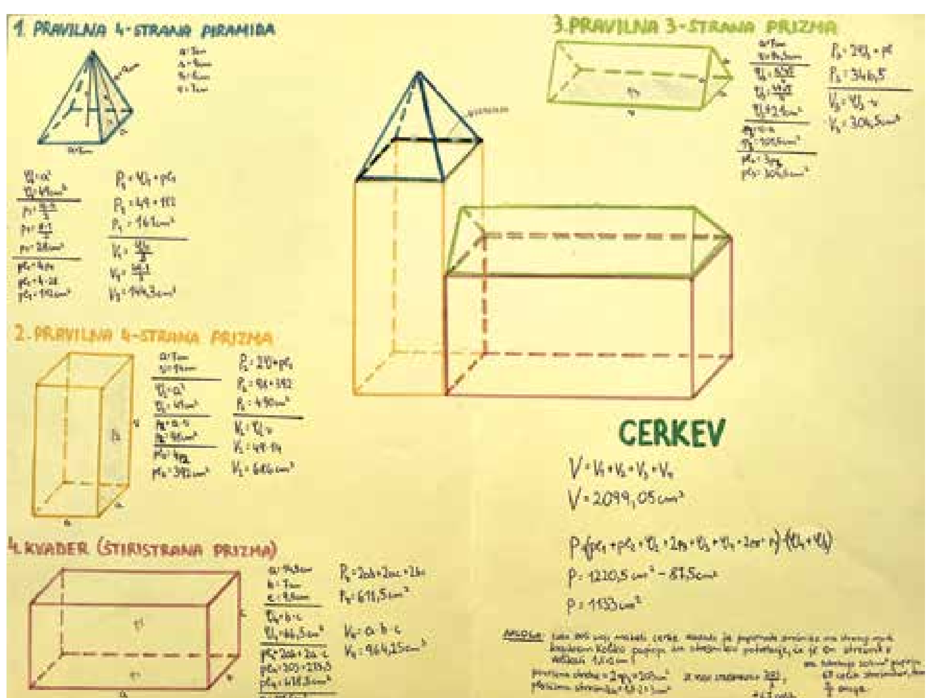
e) Izdelki učencev

Učence v učnem procesu z dejavnostmi, pri katerih pripravljajo in izdelujejo različne izdelke, spodbujamo, da razvijajo svoje veščine in spretnosti ter pri tem uporabijo svoje znanje. Učenci z delom s konkretnim materialom razvijajo in poglabljajo svoje znanje, ga konkretizirajo in abstraktno povežejo z realnim izdelkom. S tem ne spodbujamo samo učenčeve kreativnosti, temveč učenci s tem tudi poglabljajo razumevanje različnih matematičnih konceptov. Pogosto konstruktorske izdelke vključujemo pri geometrijskih vsebinah po zaključku obravnavanih sklopov. Pomagamo si lahko s konkretnimi materiali, kot so škatle odpadne embalaže različnih oblik, lahko samostojno izdelajo modele iz mrež geometrijskih teles (slika 29) ali uporabijo link kocke, ki so prikazane na sliki 30.

Predstavljamo nekaj izdelkov učencev, ki so nastali ob obravnavi vsebine geometrijska telesa. Učenci so med spoznavanjem geometrijskih teles iskali svoje ideje za sestavljeno telo. Sledili so načrtovanje, oblikovanje in konstrukcija izdelka. Sestavljenemu telesu so nato izračunali prostornino in površino. S tem so se urili v uporabi znanja v

Slika 29

Slika 30



Slika 31

novi situaciji, na konkretnem izdelku ter sestavljeno geometrijsko telo postavili v življenjsko situacijo – obračun stroškov barvanja fasade, strešne kritine … (slike 31, 32, 33).

Slika 32

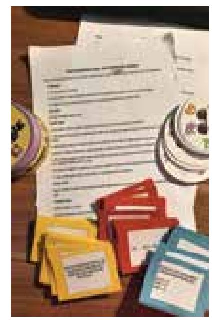
Slika 33

f) Didaktične igre

Učenec za dano učno vsebino izdela igro in zapiše navodila za igranje. Pomembno je, da v igro vključi primere nalog in vprašanj različnih zahtevnosti, z rešitvami in odgovori. Zato da igra v razredu poteka tekoče in jo lahko igrajo vsi učenci, naj bodo naloge hitro rešljive. Z izdelavo igre učenec izkaže usvojeno znanje in veščine, izhajajoč iz učnih ciljev. Pomembno je, da z učenci oblikujemo kriterije uspešnosti za kasnejše vrednotenje njihovih izdelkov. Primer vrstniškega vrednotenja izdelane didaktične igre učencev prikazuje slika 34.

Kasneje se igranje izdelanih iger v razredu uporablja kot orodje za učenje ali za ponavljanje in utrjevanje. Poleg učnih vidikov se z igranjem iger v razredu vzpostavljajo tudi boljši medosebni odnosi, učenje tako postane bolj sproščeno in zanimivo. Igra prehaja v delo in učenje. Primera izdelanih iger učencev prikazujeta sliki 35 in 36.

Slika 34



Slika 35

Slika 36

Zaključek

V prispevku smo predstavili načine vrednotenja znanja, ki jih sicer pri pouku matematike ne uporabljamo tako pogosto kot pisno in ustno vrednotenje znanja. Z vključevanjem raznolikih načinov vrednotenja znanja pridobi tako učenec kot učitelj in tako rastemo skupaj z učenci.

Več o različnih načinih ugotavljanja matematičnega znanja lahko preberete v priročniku *Ugotavljanje matematičnega znanja: priročnik za učitelje*. Priročnik je rezultat dela učiteljev matematike pri razvojni nalogi »Uvajanje formativnega spremljanja in inkluzivne paradigme (2018–2020)« in je dostopen v digitalni bralnici na spletni strani ZRSŠ.

Viri

Hattie, J. (2018). *Vidno učenje za učitelje: Maksimiranje učinka na učenje*. Griže: Svetovalno-izobraževalni center MI.

How to Make a Lapbook. (2021). Pridobljeno iz homeschoolshare.com: https://www.homeschoolshare.com/how-to-make-lapbook/

Interno gradivo RNUUO in PRS, nastalo v razvojni nalogi Uvajanje formativnega spremljanja in inkluzivne paradigme (2018–2020), Zavod RS za šolstvo.

Izzivi izkazovanja in ocenjevanja znanja na raznolike načine. (2021). Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno iz https://arhiv.zrss.si/zrss/wp-content/uploads/2021-01-21-priloga-1_izzivi-izkazovanja-in-ocenjevanja-znanja-na-raznolike-nacine.pdf

Suban, M., Bone, J., Herbaj, V., Jerko, A., Sirnik, M., Rajh, S., Pulko, L., Gorše Pihler, M., Hebar, L., Rihtaršič, U., Canzutti, A., Škafar, K., Novoselec, M., Plut, M., Verbinc, A., Oder Grabner, A., Udovč, K., Lipnik, R., Jug, L., Potočnik, A., Kerin, T. in Kramar, A. (2020). *Ugotavljanje matematičnega znanja. Priročnik za učitelje*. Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf

Suban, M., Kmetič, S., Žakelj, A., Lipovec, A., Magajna, Z., Sirnik, M., Vršič, V., Legvart, P., Perkovič, A., Čekada, D., Flisar, M., Magdič, M., Kmetec, K., Kodelja, A., Bone, J., Rajh, S., Repovž, B. in Senekovič, J. (2013). *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika*. Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/Posodobitve-pouka-v-osnovnosolski-praksi-MATEMATIKA.pdf

Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo.

Varno učno okolje pri matematiki

Safe Learning Environment in Mathematics

Rok Lipnik
Gimnazija Celje – Center

Izvleček

V članku je predstavljen primer dejavnosti za spodbujanje varnega učnega okolja z drugačnimi oblikami poučevanja matematike in izražanja mnenj dijakov o pouku matematike. Opisana je dejavnost pri metrični geometriji v prostoru z izdelavo vizualnega izdelka.

Ključne besede: matematika, geometrija, vizualni izdelek

Abstract

The article describes an activity in metric geometry in space that provides a secure learning environment through various methods of mathematics instruction and allows students to express their opinions on it. The activity comprises the creation of a visual product.

Keywords: mathematics, geometry, visual product

Uvod

Učitelji pogosto rečemo, da ne vemo več, kako bi dijake motivirali za delo. V času izobilja in velike zasičenosti z informacijami, ko imajo dijaki vse na dosegu roke, se zdi učiteljeva vloga vedno manj pomembna. A v resnici je prav nasprotno, učiteljeva vloga se krepi, saj dijake usmerja, jih motivira in vodi na poti k cilju, ki je lahko znanje, veščina ali še mnogo drugega. Z učnimi strategijami, usmerjenimi v cilj (predvsem usmerjenost v učenje), dijakom omogočimo, da so samostojnejši in vztrajnejši ter uporabljajo strategije globinskega učenja (Bizjak, 2022).

Matematika je predmet, o katerem imajo dijaki veliko povedati – dolgočasna, veliko snovi, ogromno nalog, hiter tempo, težka … Pogosto je razlog tudi to, da lahko svoje znanje izkažejo le na dva tipična načina – ustno in pisno, drugi načini pa ostajajo v senci. Učitelji nemalokrat tudi mislimo, da je pri izkazovanju znanja vedno treba dijaka tudi oceniti. Izkaže se, da dijake motivira tudi to, da lahko izkažejo svoje znanje in dokažejo sami sebi, da zmorejo, ocena pa je pogosto le dodaten stresni dejavnik in ne poskrbi za motivacijo.

Tako smo matematiki v razvojni nalogi **Ustvarjanje učnih okolij za 21. stoletje** razmišljali predvsem o tem, kako bi dijake spodbudili k različnim načinom izkazovanja znanja. V priročniku **Ugotavljanja matematičnega znanja**, ki je povzel naše ugotovitve in izdelano gradivo, je zapisano: »Po dvoletnem preizkušanju drugačnih oblik ugotavljanja matematičnega znanja so učitelji poročali, da so se uspeli bolj približati različnim sposobnostim, afinitetam in potrebam različnih skupin učencev in so zato ti lahko bolj učinkovito izkazali, koliko matematike znajo.« (Suban idr., 2020, str. 8.)

Hkrati se v sodobnem času pojavlja vse več potreb po kreativnosti, šole pa jo večinoma ne spodbujamo, vsaj ne na pravi način (Robinson, 2006).

Različni pristopi

Pri svojem pouku uporabljam različne pristope in načine dela, s katerimi dijake spodbujam k aktivnemu sodelovanju in izkazovanju znanja na različne načine – pripravijo npr. pisni sestavek, odigrajo kratek skeč, pripravijo pesem, didaktično igro, model ali maketo. To dijakom pomaga tudi, da učni prostor razumejo kot varno in spodbudno učno okolje, kjer lahko izkažejo znanje s sebi ljubim načinom, ob tem pa dobijo kakovostno povratno informacijo od sošolcev in od učitelja.

Mnogi dijaki se v prehodu iz osnovne v srednjo šolo matematike bojijo oz. jim ni všeč. Svoje mnenje o matematiki si ustvarijo na podlagi izkušenj, govoric starejših dijakov ter tudi ustvarjene slabe podobe predmeta, češ da je zelo zahteven, da je potrebno veliko dela in učenja ipd.

Z dijaki zato gradimo odnos do predmeta in z dejavnostmi vzpostavljamo varno učno okolje. Dijaki se lažje spopadajo z zadolžitvami, če jih vnaprej poznajo, če vedo, kako se spopasti z nalogo, in če imajo v oddelku vzpostavljen odnos, v katerem se počutijo varne, v katerem lahko zastavljajo vprašanja, so slišani in videni ter spoštovani.

Različni načini izkazovanja znanja dijakom dajejo tudi več možnosti, da pokažejo svoje znanje in tudi druge spretnosti. Na sliki 1 je prikazan domači abakus, ki ga je dijak izdelal iz lego gradnikov. Izdelek je nastal kot izziv maturantom, kako bi svoje znanje lahko predstavili na uporaben način in to združili z različnimi znanji, ki so jih pridobili v štirih letih šolanja. Dijaki so sami izbirali obliko in funkcionalnost izdelka, drugim so predstavili postopek priprave in izdelavo.

Slika 1: Domači abakus

Ker mi mnenje dijakov veliko pomeni in se je skozi leta izkazalo kot dobro, da lahko dijaki izrazijo svoje doživljanje pouka matematike, z dijaki ob polletju in ob zaključku pouka naredim evalvacijo, da vidim, na katerih področjih bi bilo treba napredovati oz. kje so še možnosti za izboljšave. Evalvacijo naredim dvakrat, da se vidi napredek in razlika od polletja do zaključka pouka.

Evalvacija poteka pisno, na papir ali v spletni učilnici. Namen je predvsem odkriti področja, na katerih bi bilo treba doseči izboljšave, dostikrat pa dijaki presenetijo tudi s svojimi predlogi in s tem prispevajo k spremembi pouka v prihodnjih šolskih letih.

> Da, pri matematiki me je včasih strah. Včasih se mi zdi, da sem edina v razredu, ki ne razume snovi oz. mi gre slabše. Zato me je strah, da bom poklicana, da naj povem rezultat pred razredom in ga ne bom imela ali pa bo napačen.

Slika 2: Izjava dijakinje ob vmesni evalvaciji

> Pri matematiki mi je zelo zabavno, rada hodim k vašim uram. Imate zanimiv način dela. Všeč mi je, ker veliko ponavljamo in ker vi pomagate vsakomur.

Slika 3: Izjava dijakinje ob zaključni evalvaciji

> PRI MATEMATIKI ME NI STRAH, ker je vzdušje sproščeno, gospa profesorica nam z veseljem pomaga in vse razloži. Matematika mi gre v srednji šoli veliko bolje kot v osnovni zaradi sproščenosti pri urah in zaradi tega, ker za enkrat še vse razumem.

Slika 4: Izjava dijaka ob zaključni evalvaciji

> **Česa se pri pouku matematike najbolj veseliš?**
>
> Pri pouku mi je všeč, da uporabljamo glasovalne lističe, tako lažje sporočimo, če snov razumemo ali ne. Všeč mi je tudi, ko s posebnimi kodami »glasujemo« za pravilne odgovore.
>
> Profesor dobro razlaga in če česa ne razumemo, to tudi večkrat razloži.
>
> Velikokrat smo tudi mi v učilnici FIL, kjer delamo v skupinam in si med seboj pomagamo.
>
> **Česa pri pouku matematike ne maraš?**
>
> Snov se mi zdi kar težka in matematike že na splošno ne maram (že iz OŠ).
>
> Pouk matematike letos pa mi je v celoti všeč.

Slika 5: Zaključna evalvacija dijaka

Na sliki 2 je zapisana izjava dijakinje, ki jo je pri matematiki občasno strah, ker se ji zdi, da je edina, ki snovi ne razume, in jo je strah, da bodo to opazili tudi sošolci. Evalvacijo je zapisala ob polletju.

Na sliki 3 je zapisana izjava dijakinje, ki se pri matematiki čuti varno in rada hodi k uram.

Izjava na sliki 4 prikazuje, da dijak zaznava sproščeno okolje in mu to pomaga pri razumevanju.

Dijak na sliki 5 pojasni, da se počuti varno, ker lahko sproti podaja povratne informacije, ker delamo v skupini in si pomagamo med seboj.

Česa se pri pouku matematike najbolj veseliš?

Všeč mi je skupinsko delo in množično razpravljanje o posameznem primeru. Zanimivi so različni načini poučevanja s katerimi si popestrimo pouk (uporaba elektronskih tablic). Smiselno se mi zdi podrobno poglabljanje v posamezen primer in različni načini razlage, tako, da lahko vsak posameznik najde razlago, ki mu osebno najbolj ustreza.

Slika 6: Evalvacija dijakinje

Dijakinja v izjavi na sliki 6 predstavi, kako ji različni načini poučevanja pomagajo, da se lažje nauči, ker si vsak najde razlago, ki mu najbolj ustreza.

Dijakom vedno predstavim povzetke evalvacije ter tudi njihove predloge in komentarje (anonimizirane), ki so tehtni in neposredno vplivajo na nadaljevanje dela. Pogovorimo se tudi o morebitnih možnostih izboljšav predlaganih področij.

V nadaljevanju je opis dejavnosti, pri kateri so dijaki izdelali vizualni izdelek – to je eden od primerov dejavnosti, s katero dijaki vzpostavljajo varno učno okolje, gradijo medsebojne odnose in poleg matematike razvijajo tudi svojo kreativnost.

Opis poteka dejavnosti

V nadaljevanju je predstavljen primer izdelave vizualnega izdelka pri matematiki. Dijaki so v poglavju Geometrija spoznali osnovne geometrijske pojme, aksiome in izreke, lastnosti posameznih elementov ipd. Proti koncu poglavja smo naredili povzetek, dijakom pa sem zastavil izziv, da svoje znanje združijo v vizualni izdelek. Drugih omejitev nisem postavil – le da bomo izdelek lahko pogledali in da bodo realizirali zastavljene namene učenja:

- ponoviti znanje osnovnih geometrijskih pojmov
- sodelovati v skupini
- razmišljati izven običajnih okvirjev
- soočiti se z neznanim
- predstaviti svoje delo pred razredom
- ustvariti sistem za vrednotenje izdelkov

Prvi dan so se dijaki razdelili v skupine, si razdelili naloge in se lotili idej ter iskanja načinov predstavitve.

Sliki 7 in 8 prikazujeta dijake v času načrtovanja svojega izdelka – prva faza je bila iskanje ideje in načina prikaza znanja. Dijaki so v sproščenem vzdušju razmišljali, viharili ideje, načrtovali in pripravili prve osnutke izdelkov.

Pred začetkom dela smo si zastavili kriterija uspešnosti, ki sta zapisana tudi v učni pripravi: »Predstavim svoj izdelek in kako sem ga naredil. V izdelek smiselno vključim znanje matematike.«

Slika 7: Dijaki pri iskanju idej

Slika 8: Dijakinja med izdelavo osnutka

Medtem ko so v nekaterih skupinah takoj začeli izdelavo izdelka, so v drugih šele nastajali osnutki. Naslednji dan smo imeli dve uri matematike, ko so intenzivno izdelovali izdelke, dokončali so jih doma.

Naslednjo uro smo najprej ponovili kriterija uspešnosti in merila za vrednotenje izdelkov, nato so dijaki svoje izdelke predstavili in komentirali ter si dajali povratne informacije. Vrstniške povratne informacije dijaki dajejo na različne načine – kadar so izdelki takšni, da jih lahko imamo na tabli ali steni, jih pustimo na mestu in jih dijaki polepijo z lističi s povratno informacijo. Pri drugih izdelkih ali nastopih pa dijaki podajajo povratno informacijo večinoma ustno, po načelu poudarjanja dobrih plati in iskanja možnih izboljšav. Vedno se trudimo, da se podaja povratne informacije spoštljivo in smo drug drugemu kritični prijatelj.

Dijaki so bili sprva plašni in so spraševali, ali mora nastati plakat ali mora nastati PowerPoint ... Skrbelo jih je, da ne bodo izbrali »prave oblike« izdelka. Pomagal je predvsem pogovor, da so vse izbire njihove, poskrbijo naj za to, da bo izdelek takšen, da bo smiselno vseboval matematično znanje iz poglavja Geometrija.

Skupinsko delo je potekalo dobro, saj so ga vajeni, brez težav so si razdelili delo in pričeli vihariti ideje. Nastali so zanimivi izdelki, tudi dijaki drugih skupin so bili nad vsako predstavitvijo presenečeni, ker je bila vsaka drugačna, v vseh pa smo našli matematično znanje.

Nastala je igra spomin z geometrijskimi pojmi/izreki ... (glejte sliko 11), igra, ki je kombinacija iger človek, ne jezi se in Activity (sliki 9 in 10), strip in izpiski, ki so jih z veseljem uporabili tudi pri učenju za ocenjevanja.

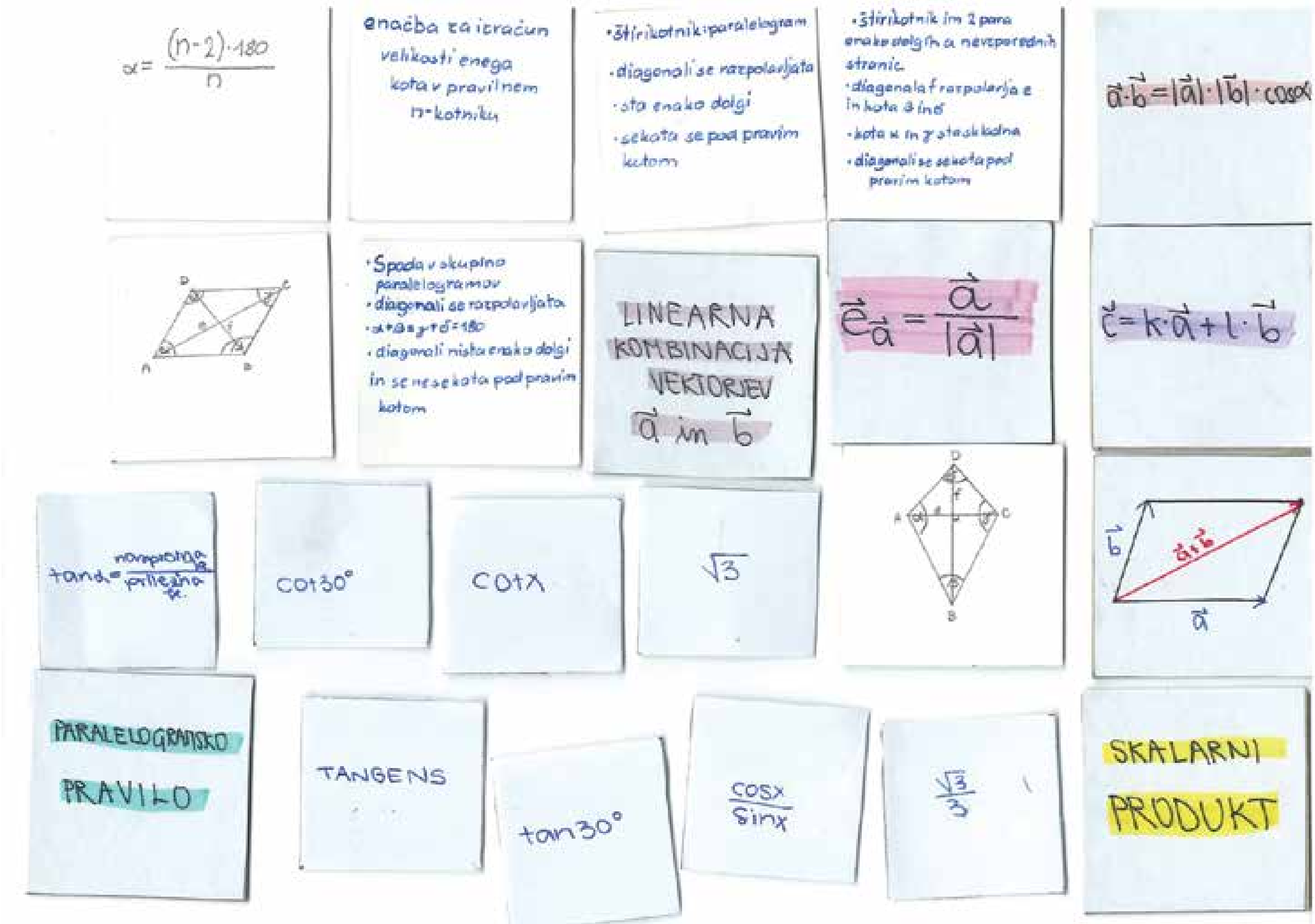
Slika 9 prikazuje igralno ploščo za interaktivno igro, ki je prilagojena oblika igre človek, ne jezi se. Vsak igralec z igralne plošče izbere kartico z vprašanjem (slika 10) – glede na barvo so vredne 2, 4 ali 6 polj. Če na vprašanje odgovori pravilno, se figurica prestavi za toliko polj naprej, kot je vredna kartica.

Slika 10 prikazuje igralne kartice za interaktivno igro na sliki 9. Rumene kartice so vredne 2 polji, oranžne 4 polja, rožnate 6 polj.

Dijaki so izdelali tudi strip in dramsko uprizoritev, vse izdelke so medsebojno vrednotili in podali povratno informacijo. V evalvaciji dejavnosti so sporočali, da niso pričakovali, da bodo lahko na tako različne načine predstavili svoje znanje. Poudarili so tudi, da jih veseli, da niso dobili ocene, ampak le povratne informacije svojih vrstnikov in učitelja. Motivirani so bili, ker so lahko svoje znanje prikazali na lasten način, sodelovali v skupini, si pomagali in si delo razdelili, hkrati pa so videli tudi raznolike ideje, ki jih imajo sošolci.

Slika 9: Igralna plošča za interaktivno igro

Slika 10: Igralne kartice za interaktivno igro na sliki 9



Slika 11: Igra spomin z geometrijskimi pojmi

Zaključek

Vizualni izdelek pri geometriji ni bil prvi drugačen način dela v tem oddelku, zato so bili dijaki vajeni tega, da bodo svoje znanje prikazali drugače kot običajno. Vajeni so bili dajati kakovostne povratne informacije drug drugemu, se učiti drug od drugega in sodelovati v skupini. Tudi zaradi vseh teh razlogov je dejavnost odlično uspela. Pri matematiki prepogosto ugotavljamo, da nam zmanjkuje časa, oz. si ga težko vzamemo za drugačne pristope, a se obnese in obrestuje. Menim, da je pri pouku vseh predmetov pomembno, da dobijo vsi dijaki priložnost, da svoje znanje pokažejo – četudi to pomeni, da ni v klasični ustni ali pisni obliki kot običajno.

Viri in literatura

Bizjak, C., Rajh, S., Bačnik, A., Hajdinjak, M., Majer Kovačič, J. in Vrabič, N. (2022). *Spodbujanje motiviranosti za globinsko učenje – Odnos do učenja naravoslovja in matematike*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Robinson K. (2006). TED predavanje: https://www.ted.com/talks/sir_ken_robinson_do_schools_kill_creativity.

Suban, M., Bone, J., Herbaj, V., Jerko, A., Sirnik, M., Rajh, S., Pulko, L., Gorše Pihler, M., Hebar, L., Rihtaršič, U., Canzutti, A., Škafar, K., Novoselec, M., Plut, M., Verbinc, A., Oder Grabner, A., Udovč, K., Lipnik, R., Jug, L., Potočnik, A., Kerin, T. in Kramar, A. (2020). *Ugotavljanje matematičnega znanja*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Preiskovalna aktivnost z aplikacijo Zajci

Investigation Activity with Rabbits App

Natalija Horvat, Irena Rauter Repija in mag. Mateja Škrlec in Štefka Štrakl
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Izvleček

V članku predstavljamo učno situacijo, ko dijaki skozi igro in preiskovanje razvijajo razumevanje algebrskega zapisa. Hkrati jih motiviramo za učenje matematike. S pomočjo mobilne aplikacije Zajci dijaki raziskujejo in rešujejo probleme ter medsebojno aktivno sodelujejo. Učitelj opazuje dijake, beleži njihove rešitve in strategije, jih spodbuja ter usmerja. Postavlja tudi preiskovalna vprašanja in jih vodi do cilja učne situacije. V članku je vključen podroben opis poteka učne situacije, v katerem so zapisane dejavnosti učitelja in dijakov.

Ključne besede: matematika, učna situacija, preiskovanje, vzorci, igra, spremljanje

Abstract

This paper presents a learning situation where students develop their understanding of algebraic notation through play and experimentation while being motivated to learn mathematics. Using the Rabbits app and online game, students explore, problem-solve, and actively interact with each other. The teacher observes and records students' solutions and strategies, encourages and guides them, asks investigative questions and leads them to the goal of the learning situation. A detailed description of the learning situation and the lesson flow with teacher and student activities is included to the article.

Keywords: mathematics, learning situation, investigation, patterns, game, monitoring

Uvod

Matematika za marsikoga predstavlja velik izziv. Učitelji se teh težav zavedamo in se trudimo, da bi matematiko dijakom čim bolj približali in si olajšali učni proces. Želimo si, da znanje, ki ga dijaki pridobijo, ostane trajno. To je ključno za njihov nadaljnji uspeh ne le v matematiki, ampak tudi na drugih področjih, ki zahtevajo analitično razmišljanje in reševanje kompleksnejših problemov.

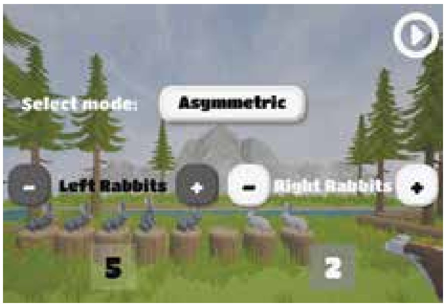
Pri poučevanju se osredotočamo na uporabo različnih pristopov in metod, ki dijakom omogočajo lažje razumevanje in povezovanje matematičnih pojmov s konkretnimi primeri iz vsakdanjega življenja. Prav tako se trudimo razvijati matematične veščine, kot sta logično razmišljanje in reševanje problemov.

Za dojemanje matematičnih idej na konkretnejši način uporabljamo različne vizualne pripomočke, interaktivne igre in realne situacije. Zelo učinkovit pristop pri poučevanju matematike je učenje s preiskovanjem. S pomočjo vzorcev dijake spodbujamo k aktivnemu preiskovanju, razpravljanju, sistematičnemu beleženju in zapisovanju posplošitve.

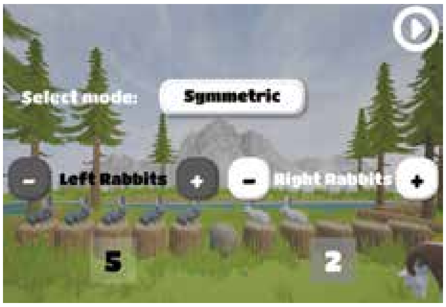
Razumevanje in spretnosti v prepoznavanju in nadaljevanju vzorcev se začnejo razvijati že v osnovni šoli. V srednji šoli jih pri različnih temah vsa štiri leta postopoma nadgrajujemo in se bolj osredotočamo na zapis algebrskega izraza.

V nadaljevanju je predstavljena učna situacija, pri kateri nam je v pomoč igra na mobilni aplikaciji Zajci (Rabbits Riddle, slika 1), s katero matematiko osmislimo na zabaven način.

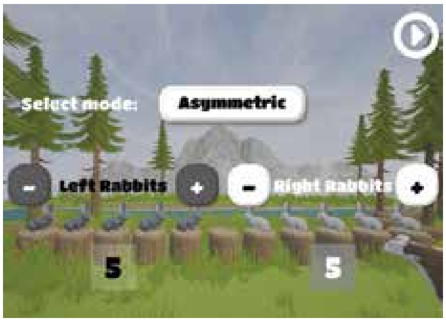
Slika 1: Vstopna stran mobilne aplikacije Zajci (Rabbits Riddle)



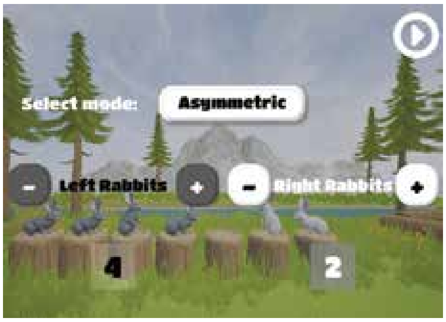
Slika 2: Vstopna stran igre za nesimetrični način



Slika 3: Vstopna stran igre za simetrični način



Slika 4: Enako število zajcev sive in bele barve



Slika 5: Različno število zajcev sive in bele barve

Mobilna aplikacija Zajci omogoča dijakom, da rešujejo zastavljene probleme, preiskujejo, razpravljajo s sošolci in iz konkretnih števil najdejo posplošitve ter zapišejo ustrezen algebrski izraz.

Pri igri Zajci nastopajo zajci dveh barv, sivi in beli.

Pred začetkom igre lahko dijaki v aplikaciji izberejo nesimetrični način (Asymmetric, slika 2) ali simetrični način (Symmetric, slika 3) postavitve zajcev glede na začetno prazno mesto izmenjave.

V obeh načinih, nesimetričnem in simetričnem, pa lahko dijaki izbirajo še med enakim številom (slika 4) ali različnim številom zajcev sive in bele barve (slika 5).

Cilj igre je premikanje zajcev do končne želene postavitve.

Pri enakem številu sivih in belih zajcev ni razlik med nesimetričnim in simetričnim načinom preiskovanja. Razlika se pojavi, ko je število sivih in belih zajcev različno. V simetričnem načinu morajo zajci zamenjati položaj preko enega fiksnega mesta, v tem primeru kamna. Število štorov na levi in desni strani kamna je enako (simetrično), pri čemer lahko nekaj štorov ostane tudi brez zajcev. V tem načinu dijaki iščejo najmanjše število premikov za rešitev problema.

Pri nesimetričnem načinu je prazen samo en štor, preko katerega se začne izmenjava zajcev. Za dijake je ta način preiskovanja nekoliko lažji, zato jih na začetku spodbudimo, naj s preiskovanjem začnejo v tem načinu.

Med drugim aplikacija prikazuje število korakov (Steps), število skokov (Jumps) in skupno število premikov (Total). To dijakom pomaga predvideti število premikov, ne da bi vedeli, da obstaja le ena strategija za izmenjavo položaja zajcev. Na začetku je v obeh načinih, nesimetričnem in simetričnem, število korakov, skokov in premikov enako nič, kot je prikazano na slikah 6 in 7.

Naj za konec omenimo še ozadje igre, ki ob petju ptic in žuborenju potoka igralca v mislih popelje v del naše prelepe dežele Slovenije, od panonskih ravnic s travniki in gozdovi do gorskega sveta s Triglavom v ozadju.

Opis poteka dejavnosti

Dejavnost poteka po učnem scenariju, ki je zapisan v nadaljevanju.

Učni scenarij je ustvarjen za potrebe mednarodnega projekta TIME[2],[1] zato je v angleškem prevodu objavljen na spletni strani projekta TIME (https://time-project.math.hr/). Projekt TIME je nadaljevanje projekta MERIA,[2] zato je za zapis učnega scenarija uporabljena ista predloga.

Učitelj predstavi problem in vodi učno uro po zapisanih navodilih za učitelja ter dijake spodbuja in usmerja. Dijaki pri delu uporabljajo svoje pametne telefone ali tablične računalnike.

Slika 6: Nesimetrični način

Slika 7: Simetrični način

1 TIME – Teachers' Inquiry in Mathematics Education (Učitelj matematike preiskuje lastno poučevalno prakso), gradivo v slovenskem jeziku je objavljeno na povezavi https://www.zrss.si/projekti/projekt-time/.

2 MERIA – Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable (Matematično izobraževanje – pomembno, zanimivo in uporabno), gradivo v slovenskem jeziku je objavljeno na povezavi https://www.zrss.si/projekti/zakljuceni-projekti/matematicno-izobrazevanje-pomembno-zanimivo-in-uporabno-meria/.

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Dijak: – zapisuje številske in algebrske izraze ter z njimi računa (uporablja distributivnostni zakon ...), – prepozna vzorec in ga posploši.
Splošni cilji[3]	Dijak: – rešuje matematične in življenjske probleme z izrazi, – sodeluje z različnimi posamezniki ali skupinami, – se izraža z ustrezno terminologijo predmeta in skrbi za ustrezno govorno in pisno raven svojega strokovnega jezika.
Potrebno matematično predznanje	Scenarij omogoča doseganje pričakovanih dosežkov na različnih ravneh. Primeren je za dijake brez predhodnega znanja o preiskovanju in tudi za dijake, ki že imajo izkušnje s preiskovanjem, saj na ta način utrjujejo svoje veščine reševanja problemov in argumentiranja.
Razred/letnik/starost[4]	1. letnik srednje šole; dijaki, stari 15, 16 let
Trajanje	60 minut
Potrebni material	Pametni telefon ali tablični računalnik Aplikacija Rabbits Riddle Google Play https://tinyurl.com/bdf7zv8v App Store https://tinyurl.com/2p883san

Problem

Igra z zajci se začne tako, da imamo na levi strani vrsto sivih zajcev, na desni pa vrsto belih zajcev (slika 8).
Cilj igre je premakniti vse sive zajce na desno in vse bele zajce na levo stran vrste preko praznega mesta (slika 9).
Sivi zajci se lahko premikajo samo v desno smer, beli zajci pa samo v levo.
Pri vsakem premiku lahko zajec naredi korak na sosednji prazen prostor ali preskoči natanko enega drugega zajca.

Slika 8: Začetna postavitev zajcev

Slika 9: Končna postavitev zajcev

Igraj igro in odgovori na vprašanje:
Ali je vedno mogoče doseči končno postavitev zajcev?
Če je odgovor da, kolikšno najmanjše število premikov (korakov in skokov) je potrebno, da sivi in beli zajci zamenjajo mesta?

3 Izraz »broader goals« smo prevedli v »splošni cilji« in označuje cilje, ki presegajo zgolj izvedbo konkretne učne ure. Nakazuje znanje in veščine v širšem smislu, ki jih dijaki razvijajo v daljšem časovnem obdobju.
Glej članek: Suban, M. (2023). Preiskovanje širjenja govoric. Matematika v šoli, letnik XXIX, številka 1.

4 Med sodelujočimi državami (Hrvaška, Danska, Nizozemska, Slovenija) starost dijakov v istem letniku ni enaka, zato smo za boljše razumevanje navajali letnik in starost dijakov.

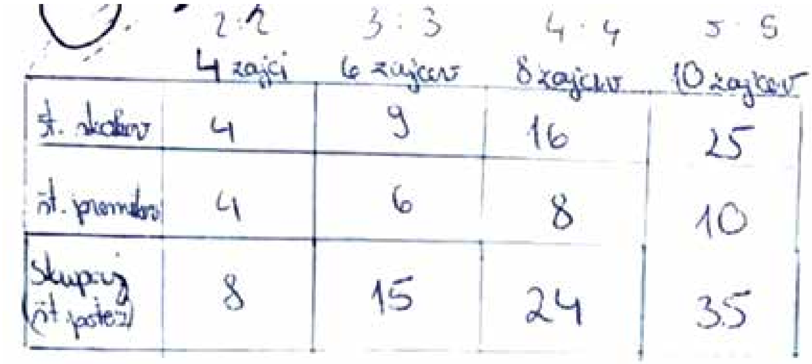
Faze[5]	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija (didaktična faza) 5 minut	Učitelj dijake razdeli v skupine, jim posreduje povezavo za igro in razloži problem. Na podlagi pričakovanih dosežkov učitelj usmerja dijake, da se osredotočijo na to, kar bodo preiskovali in da zapišejo svoje ideje.	Dijaki prenesejo aplikacijo in igrajo igro, da razumejo pravila. Dijaki postavljajo vprašanja.
Akcija (adidaktična faza) 20 minut	Učitelj opazuje delo dijakov in jih pri tem ne moti. Če ima učitelj vtis, da igrajo dijaki igro nesistematično brez preiskovanja vzorca, jih lahko usmeri na posploševanje.	Dijaki igrajo igro, dokler bolje ne razumejo pravil in možnih položajev. S ponavljanjem igre se dijaki srečujejo z različnimi vzorci in ugotavljajo, katere poteze vodijo do rešitve igre. Ko dijaki odkrijejo pot do rešitve igre z danim številom zajcev, začnejo preiskovati z drugimi številkami. Rešitve za različno število zajcev zberejo v preglednici, ki jim omogoča posplošitev. Lahko pa razmišljajo in zapisujejo tudi na druge načine, ki jim omogočajo posploševanje in argumentacijo za svoje hipoteze.
Formulacija (didaktična/adidaktična faza) 20 minut	Učitelj povabi dijake, da predstavijo svoje ugotovitve, hipoteze in argumentacijo. Predstavitve so lahko napisane na plakatih ali v digitalni obliki. Učitelj organizira predstavitve skupin po vrstnem redu od najkonkretnejšega do splošnejšega reševanja.	Skupine pripravljajo svoje predstavitve. Nekatere skupine pojasnila zapišejo z besedami, vendar se pričakuje, da večina skupin uporablja preglednice in formule. Od dijakov se pričakuje, da bodo uporabili različne strategije reševanja in da bodo morda celo dobili različne odgovore, če so naredili manjše napake.
Validacija (didaktična/ adidaktična faza) 10 minut	Učitelj vodi razpravo, v kateri dijaki primerjajo svoje odgovore. Učitelj dijake spodbuja k postavljanju vprašanj, da bi bolje razumeli utemeljitve drugih skupin.	Skupine predstavijo in primerjajo svoje odgovore. Dijaki opazijo, da so njihovi odgovori podobni ali enaki, a da so do njih prišli na različne načine. Dijaki postavljajo vprašanja, da bi povezali različne pristope.
Institucionalizacija (didaktična faza) 5 minut	Učitelj povzame različne strategije reševanja problemov, ki so bile uporabljene, dopolni odgovore dijakov in jih pripelje do splošne rešitev problema.	Dijaki postavljajo dodatna vprašanja in beležijo ideje drugih skupin. Povežejo svoje načine reševanja in sklepanja z drugimi strategijami sklepanja v matematiki.

Dijaki so kljub uporabi pametnega telefona in igre delali zelo zavzeto. Najprej so morali usvojiti strategijo igranja, ki vodi do končne postavitve zajcev. Nato so začeli preiskovanje števila potez tako, da so na levi in desni strani spreminjali število zajcev.

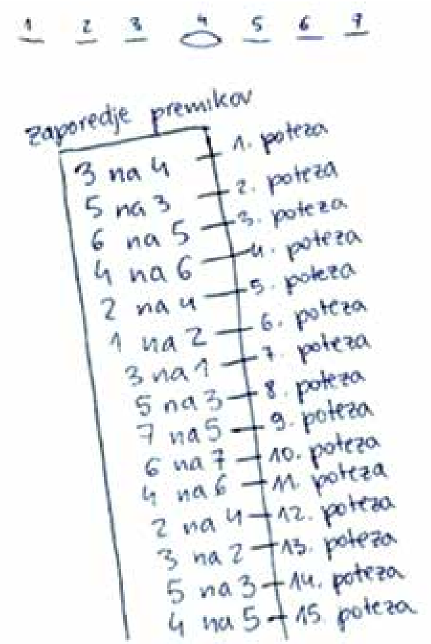
V skupini so si dijaki delo med seboj razdelili. Nekateri so igrali igro, medtem ko so drugi zapisovali število premikov v preglednico. Na sliki 10 je prikazan primer zapisa preglednice ene izmed skupin dijakov.

Nekateri dijaki so se dela lotili tako, da so zapisali vse možne poteze zajcev. Na sliki 11 je prikaz zaporedja premikov za reševanje problema, ki je prikazan na sliki 8 (trije beli in trije sivi zajci).

5 Faze pouka so opisane v članku: Cafuta, K. in Praprotnik, S. (2023). **Preiskovanje pri matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence**. *Matematika v šoli, XXIX* (1).



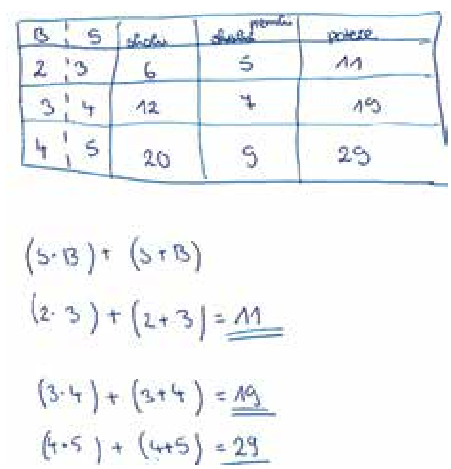
Slika 10: Število potez za 4, 6, 8 in 10 zajcev



Slika 11: Seznam premikov za 6 zajcev, pri čemer so trije beli in trije sivi.

S posplošitvijo pri enakem številu sivih in belih zajcev večina dijakov ni imela težav in so oblikovali pravilne algebrske zapise.

Pri različnem številu sivih in belih zajcev je pri nesimetričnem načinu nekaterim skupinam uspelo ugotoviti predpis in zapisati neke vrste posplošitev, kot prikazuje slika 13.



Slika 13: Število potez za različno število sivih in belih zajcev

Preiskovanje z različnim številom sivih in belih zajcev v simetričnem načinu pa je ostal izziv, za katerega v predvidenem času nobeni skupini ni uspelo zapisati splošnega algebrskega zapisa za število premikov.

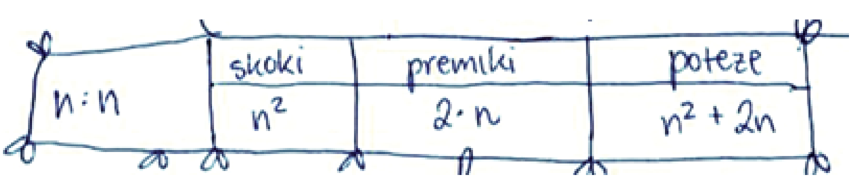
Učni scenarij smo večkrat popravljali in tudi večkrat izvedli, vedno v drugem oddelku.

Prva in druga izvedba sta potekali po prvotnem scenariju, hkrati pa smo želeli tudi preizkusiti razvijajočo se mobilno aplikacijo Zajci. Pri pouku so bili poleg učitelja, ki je vodil uro, prisotni tudi drugi učitelji matematike, ki so spremljali pouk po metodi Lesson Study[6]. Ti so skrbno opazovali in spremljali delo dijakov, zapisovali so si ideje, različne poti do rešitev ter končne predstavljene sklepe dijakov. Po izvedeni uri je sledila analiza in evalvacija učne ure, na kateri so bili prisotni učitelj, ki je poučeval, ter drugi učitelji, ki so spremljali učno uro. Pregledali smo različne poti reševanja dijakov, njihovo odzivanje in razumevanje ter se pogovarjali o morebitni dopolnitvi učne situacije in potrebnih spremembah mobilne aplikacije.

Po teh popravkih smo učno situacijo preizkusili še enkrat. Na izvedbo smo povabili ravnatelja naše šole, Zvonka Kusteca, in mag. Sonjo Rajh z Zavoda RS za šolstvo OE Murska Sobota, ki je med celotnim projektom bdela nad našim delom, nas usmerjala ter spodbujala v pravo smer. Z rezultati in odzivi dijakov smo bili po tretji izvedbi zadovoljni.

Slika 14: Preiskovanje s pomočjo aplikacije Zajci in zapis ugotovitev

Opisano učno situacijo smo v obliki delavnice z naslovom ***Z »zajčki« do posploševanja in boljšega poučevanja*** izvedli tudi na 5. konferenci o učenju in poučevanju matematike KUPM 2022 (povzetek in predstavitveno gradivo je objavljeno na povezavi: https://kupm2022.zrss.si/program/z-zajcki-do-posplosevanja/).



Slika 12: Zapis posplošitve v primeru enakega števila sivih in belih zajcev

6 Več o Lesson Study si lahko preberete v članku: Cafuta, K. in Praprotnik, S. (2023). Preiskovanje pri matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence. *Matematika v šoli, XXIX* (1).

Zaključek

Preiskovalna aktivnost z aplikacijo »Zajci« je bila naša tretja učna situacija, ki smo jo v okviru projekta TIME razvili po načelu Lesson Study (NAČRTOVANJE – OPAZOVANJE – REFLEKSIJA z analizo in izdelava POROČILA).

Pred končno obliko zapisa situacije so svoje mnenje in predloge za izboljšanje podali tudi drugi člani projekta TIME iz Slovenije, s Hrvaške, Danske in Nizozemske. Sedaj sta situacija in mobilna aplikacija Zajci (Rabbits Riddle) na razpolago vsem učiteljem, ki želijo pri svojih dijakih razvijati preiskovanje in jim približati matematiko skozi igro.

Učna situacija in mobilna aplikacija, ki služi za pomoč pri preiskovanju in posploševanju, sta primerni tudi za učence zaključnih razredov osnovne šole. Zato vabimo tudi učitelje osnovnih šol k uporabi pripravljenega gradiva.

Opomnik in dodatni napotki

Če je na obeh straneh enako število zajcev sive in bele barve, se rešitvi v obeh načinih, nesimetričnem in simetričnem, ujemata. Eden izmed možnih zapisov je prikazan v preglednici:

Št. belih zajcev	Št. sivih zajcev	Št. korakov	Št. skokov	Št. vseh premikov
1	1	2	1	$3 = 1 \cdot 3$
2	2	4	4	$8 = 2 \cdot 4$
3	3	6	9	$15 = 3 \cdot 5$
…	…	…	…	
n	n	$2n$	n^2	$n(n+2)$

Dijaki lahko število korakov, skokov in premikov sistematično beležijo v preglednico in posplošujejo na podlagi zapisanih števil. Če pri posplošenem primeru seštejemo korake in skoke, dobimo skupno število premikov, kar nakazuje tudi distributivnostni zakon, npr.:

$$2n + n^2 = n(n + 2)$$

Ko je število zajcev sive in bele barve različno, se rešitvi ter pot do rešitve pri nesimetričnem in simetričnem načinu nekoliko razlikujeta. Več o teh rešitvah, njihovi enoličnosti in strategijah reševanja si lahko preberete na spletni strani projekta TIME v zavihku ACTIVITIES AND RESULTS/O6. TIME teaching scenarios, na povezavi https://time-project.math.hr/.

Povezava na O6. TIME teaching scenarios je na QR kodi:

Viri in literatura

Bašić, M. in Cafuta, K. (2023). *Time[2] Scenarios, Innovative scenarios for inquiry-based mathematics*. Project TIME, dostopno (6. 5. 2023) na povezavi https://time-project.eu/en/intellectual-outputs/time-teaching-scenarios.

Cafuta, K. in Praprotnik, S. (2023). Preiskovanje v matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence. *Matematika v šoli*, *29* (1), 20–26.

Suban, M. (2023). Preiskovanje širjenja govoric. *Matematika v šoli*, *29* (1), (27–36).

Spletna stran aplikacije Rabbits Riddle:
- Google Play: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.TuarStudios.RabbitsRiddle.
- App Store: https://apps.apple.com/us/app/rabbits-riddle/id6449797450.

Uporaba nalog nacionalnega preverjanja znanja pri pouku matematike v srednjem strokovnem izobraževanju

National Assessment Tasks in Mathematics Instruction in Secondary Vocational Education

Mojca Lazar in Mirjana Dujc
Srednja ekonomsko – poslovna šola Koper

Izvleček

Naloge nacionalnega preverjanja znanja so uporabne tudi v srednjem strokovnem izobraževanju. V prispevku predstavimo primer uporabe nalog iz nacionalnega preverjanja znanja matematike iz leta 2019 v različnih fazah učnega procesa. V zaključku poudarimo, da učitelji v srednjih šolah nimajo dostopa do e-banke nalog nacionalnega preverjanja znanja za osnovno šolo. Ta dostop bi učiteljem zelo koristil.

Ključne besede: matematika, srednje strokovno izobraževanje, nacionalno preverjanje znanja

Abstract

The National Assessment tasks have proven suitable for secondary vocational education. In this paper, we demonstrate how to use a task from the 2019 National Mathematics Assessment at various stages of the teaching process. Finally, we note that secondary teachers can not access the online National Assessment task bank for the primary level, which may cause inconvenience.

Keywords: mathematics, secondary education, national assessment

Naloge iz matematike v e-banki nalog

Kot učiteljici v programu ekonomski tehnik, trgovec in administrator sva v dolgoletni delovni praksi prišli do spoznanja, da bi morda lahko uporabili pri pouku tudi veliko zbirko nalog, ki so del zbirke e-banke nalog nacionalnega preverjanja znanja (v nadaljevanju NPZ) matematike v osnovni šoli.

E-banka nalog je spletna aplikacija, ki so jo pripravili na Državnem izpitnem centru (RIC). Učiteljem predmetov v osnovnih in srednjih šolah omogoča dostop do posameznih odpisanih nalog NPZ, splošne in poklicne mature, njihovih prilog in rešitev z navodili za vrednotenje. Naloge lahko iščemo po različnih kriterijih (vsebina, tip naloge ipd.). Velika dodana vrednost je, da omogoča tudi dostop do statističnih in vsebinskih podatkov. Omogoča tudi izvoz nalog in pripravo Wordovega dokumenta z nalogami, kar v nadaljevanju pomeni preprostejšo prilagajanje nalog za potrebe pouka.

Naloge NPZ iz matematike so zelo uporabne v programih srednjega strokovnega izobraževanja, predvsem v nižjem poklicnem izobraževanju (NPI, 2-letni programi), srednjem poklicnem izobraževanju (SPI, 3-letni programi) ter srednjem strokovnem izobraževanju (SSI, 4-letni programi).

Naleteli sva na oviro, saj nama dostop do te zbirke kot učiteljicama v srednji šoli ni omogočen. Zato sva se odločili podrobneje proučiti uporabnost nalog, uporabljenih v NPZ. V ta namen sva si izbrali polo NPZ iz matematike iz leta 2019 za 9. razred. Zapisali sva, kje bi se lahko prav vsaka naloga uporabila pri poučevanju matematike v srednji šoli.

Ugotovili sva, da lahko prav vsako nalogo uporabimo v naslednjih fazah pouka: preverjanje predznanja, usvajanje novih vsebin, pri uvajanju novih vsebinskih tem kot motivacijsko nalogo, utrjevanje, poglabljanje in ocenjevanje, domače delo ter kot ideje za oblikovanje situacijskih nalog pri poklicni maturi.

Srednješolski učitelji uporabljamo e-banko nalog, do katere imamo dostop, in sicer za naloge, ki so vezane na predmet matematike na poklicni in splošni maturi. Prednost te e-banke nalog je v tem, da učitelju omogoča, da si lahko izbere naloge tako po vsebini kot po težavnosti, lahko so krajše naloge ali strukturirane. Največja prednost pa je, da lahko te naloge dopolni tudi s točkovanjem in rešitvami. Naloge e-banke nalog za splošno in poklicno maturo iz matematike največkrat uporabljamo pri preverjanju znanja in pripravi na poklicno maturo.

Uporaba nalog nacionalnega preverjanja znanja pri pouku

V nadaljevanju članka bova prikazali, da so naloge, ki so sestavljene za NPZ, uporabne tudi v srednji šoli in bi bilo zato dobro, da bi bil učiteljem, ki si želijo dostop do e-banke nalog, ta omogočen. Res je, da so pole, ki so bile odpisane na NPZ-jih, objavljene na spletni strani RIC-a, vendar je iskanje nalog in izbira naloge iz posamezne vsebine učnega načrta dolgotrajna in, kot meniva, tudi nesmiselna, saj je ravno to bistvena prednost e-banke nalog. Nesmiselno je imeti pripravljene dobre naloge, ki pa niso na razpolago učiteljem srednjih šol. Pri matematiki se znanje nadgrajuje, zato so naloge NPZ-ja vodilo, kaj vse naj bi učenci usvojili že v osnovni šoli in tudi kako dobro so to usvojili, kar izvemo iz indeksa težavnosti posamezne naloge.

Pri vsaki nalogi NPZ iz matematike 2019 sva zapisali, katere cilje iz posameznega področja, ki so zapisana v specifikacijski tabeli preizkusa znanja v Letnem poročilu NPZ 2019 za matematiko, 9. razred, preverja vsaka naloga, nato predstavljava nalogo in kje ter kako bi lahko srednješolski učitelj nalogo uporabil v različnih programih srednješolskega izobraževanja.

1. naloga

Med cilji prve naloge je zapisano, da učenci znajo seštevati, odštevati, množiti in deliti racionalna števila, izračunati vrednost potence in kvadratni koren popolnih kvadratov manjših števil.

Izračunaj.

a) $-2{,}5 + 3{,}02 - 1{,}57 =$

b) $\frac{5}{6} - 1\frac{1}{4} =$

c) $0{,}037 \cdot 100 =$

d) $22{,}32 : 3{,}6 =$

e) $-2^6 =$

f) $\sqrt{\frac{289}{361}} =$

Prvo nalogo lahko učitelj postavi dijakom 1. letnika SPI pri preverjanju znanja po obravnavi poglavja: Računanje z realnimi števili brez uporabe kalkulatorja.

2. naloga

Učenec v nalogi spozna in upošteva pravila deljivosti z naravnimi števili 2, 3, 5, 9, 10 ter razume uporabo pravila deljivosti za dve naravni števili, 2 in 3, hkrati.

Na črto ob posameznem primeru zapiši vse možnosti. Katero števko lahko postavimo na mesto enic 8-mestnega števila 9052019_, tako da bo to število:

a) deljivo z 2?
Odgovor: ______________________________

b) deljivo s 3?
Odgovor: ______________________________

c) deljivo s 5?
Odgovor: ______________________________

d) deljivo z 9?
Odgovor: ______________________________

e) deljivo z 10?
Odgovor: ____________________

f) deljivo z 2 in s 3 hkrati?
Odgovor: ____________________

Drugo nalogo lahko učitelj predstavi v programu SSI in tudi SPI kot motivacijsko nalogo v uvodni uri usvajanja poglavja Kriteriji deljivosti naravnih števil, s katero lahko dijaki uporabijo že usvojeno osnovnošolsko znanje pri zapisu večine kriterijev deljivosti, izpeljejo kriterij deljivosti s številom 6 in usvojijo tudi kriterije za deljivost s števili 4, 8 in 12, 15.

3. naloga

Učenec iz preglednice razbere ustrezne podatke in zna določiti aritmetično sredino, modus in mediano za dane podatke. Zna pretvarjati enote za merjenje časa v ustrezno enoto.

V preglednici je zapisano, koliko časa so nekateri učenci gledali televizijo v petek, soboto in nedeljo.

	Petek	**Sobota**	**Nedelja**
Miro	0,5 h	180 min	2,5 h
Alenka	30 min	1 h	150 min
Andreja	180 min	2 h 30 min	120 min
Karlo	0 min	2,5 h	1 h 30 min

a) Koliko časa je Alenka v soboto gledala televizijo? ____________________

b) Koliko časa je Karlo gledal televizijo v vseh treh dneh skupaj? ____________________

c) Kdo je največ gledal televizijo v vseh treh dneh skupaj? ____________________

d) Koliko časa v povprečju so v petek Miro, Alenka, Andreja in Karlo gledali televizijo?

____

e) Mediana podatkov o gledanju televizije v soboto je ____________________.

f) Modus podatkov o gledanju televizije v nedeljo je ____________________.

Tretjo nalogo lahko uporabi učitelj v programi SSI pri utrjevanju znanja pri poglavju Statistike.

4. naloga

Učenec zna zmnožiti vsoto in razliko dveh danih dvočlenikov ter zna izračunati kvadrat dvočlenika in dobljeni algebrski veččlenik ustrezno poenostaviti. Učenec zna uporabljati zakon o ohranitvi relacije enakosti pri reševanju linearne enačbe in zna rešiti linearno enačbo z realnimi koeficienti. Učenec zna narediti preizkus enačbe.

Poenostavi izraz.

a) $(2a-3)^2-(a+5)(a-5)=$

b) Reši enačbo $\frac{2x}{3}+\frac{5}{6}=\frac{x}{6}+\frac{1}{3}$ in napravi preizkus.

Reševanje:
Preizks:

Četrto nalogo lahko učitelj uporabi v programu SSI in SPI pri preverjanju usvojenega znanja ali morda kot motivacijsko nalogo v uvodni uri pri usvajanju poglavij Izrazi in Linearna enačba.

5. naloga

Učenec v nalogi spozna in zna uporabljati višino pri načrtovanju trikotnika. Učenec razlikuje pojem notranjega in zunanjega kota trikotnika. Učenec pozna Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku in ga zna uporabiti pri računanju neznane dolžine stranice v pravokotnem trikotniku, ki je vrisan v danem enakokrakem trikotniku.

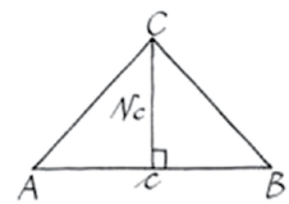
Jure je narisal skico enakokrakega trikotnika in načrtal osnovnico trikotnika.

Podatki:

$c = 8$ cm

$v_c = 3$ cm

Skica:



a) Dokončaj načrtovanje trikotnika.

Slika:

b) Na sliki načrtaj višino na stranico *b* trikotnika *ABC*.

c) Velikost zunanjega kota v oglišču *C* je ___________.

d) Izračunaj dolžino kraka trikotnika *ABC*.

Reševanje:

Dolžina kraka trikotnika *ABC* je ___________ cm.

Peto nalogo lahko učitelj uporabi kot nalogo za ocenjevanje znanja v programu SPI in za ocenjevanje znanja v programu SSI. Nalogo lahko nadgradi oz. dopolni z vprašanji, ki se navezujejo na: notranji koti, kot med višino in krakom, dolžino težiščnice na poljubno stranico, ploščino in obseg trikotnika …

6. naloga

Učenec pozna pojme nasprotna vrednost števila, obratni ulomek danega ulomka, absolutna vrednost racionalnega števila, osnova, potenca in stopnja potence ter zna določiti zapisane vrednosti danim številom. Učenec zna izračunati kvadratni koren popolnih kvadratov.

Na črto zapiši tako število, da bo izjava pravilna.

a) 5 je nasprotna vrednost števila ___________.

b) $\square\frac{\square}{\square}$ je obratna vrednost števila –5.

c) Absolutna vrednost števila 5 je ___________.

d) Če je vrednost potence 32 in stopnja potence 5, je osnova ___________.

e) Kvadratni koren števila ___________ je 9.

Šesto nalogo lahko učitelj uporabi v programu SPI kot preverjanje usvojenega znanja celotnega poglavja Realna števila, pri čemer preveri usvojene pojme in računanje izbranih vrednosti danih števil.

7. naloga

Učenec opazuje dana zaporedja, prepozna pravila v danih zaporedjih in jih nadaljuje oziroma zapiše manjkajoče člene. Učenec zapiše manjkajoči člen in zna poiskati posplošeno pravilo, ki ga zapiše z algebrskim izrazom.

Vpiši manjkajoče število v zaporedju.

1098	1107	1116		1134

0,04	0,12	0,36		3,24

Vpiši manjkajoče število in zapiši pravilo, po katerem je zaporedje oblikovano.

$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$		$-2\frac{1}{4}$

Pravilo: ____

____

Nalogo lahko učitelj uporabi v programi SSI v uvodni uri poglavja Zaporedja kot preverjanje znanja in zgled, s pomočjo katerega dijaki izpeljejo pravilo oz. definicijo za aritmetično oz. geometrijsko zaporedje, lastnost naraščajočega oz. padajočega zaporedja. Učitelj spomni učence, da so zaporedja že srečali v osnovni šoli ter da bodo znanje sedaj nadgradili oz. poglobili.

8. naloga

Učenec zna rešiti odprte in zaprte probleme ter zna razčleniti problemsko situacijo ter zna raziskovati in določiti iskane rešitve problema. Učenec zna rešiti besedilno nalogo z odstotki in izračuna p % od osnove. Učenec reši in zapiše odgovor besedilni nalogi.

Rudi je v nedeljo, 30. decembra 2018, začel brati knjigo in jo do konca prebral v sredo, 2. januarja 2019. Prvi dan je prebral 20 % od vseh strani knjige, naslednji dan $\frac{1}{4}$ ostanka, tretji dan polovico tistega, kar mu je še ostalo, četrti dan pa 30 strani.

a) Koliko strani besedila je imela knjiga, ki jo je prebral Rudi?
Reševanje:

Odgovor: ______________________

b) Koliko odstotkov celotnega besedila je prebral četrti dan?
Reševanje:

Odgovor: ______________________

c) Kateri dan je začel brati drugo polovico knjige?

Odgovor: ______________________

Osmo nalogo lahko učitelj uporabi v programu SSI in SPI pri preverjanju in ocenjevanju znanja v poglavju Procentni in sklepni račun.

9. naloga

Učenec uporablja Pitagorov izrek pri reševanju besedilne naloge o Telesih – pravilna štiristrana piramida. Učenec zna uporabiti obrazec za izračun površine in prostornine piramide in izračuna neznane količite ter zna zapisati odgovor na zastavljena vprašanja v nalogi. Učenec primerja in ureja decimalna števila po velikosti. Učenec zna določiti povečanje/zmanjšanje dane količine za dano odstotno točko.

Šotor ima obliko pravilne štiristrane piramide. Visok je 1,6 m, osnovni rob pa je dolg 2,4 m.

a) Tonček bo premazal zunanjo stran šotorskega platna z zaščitnim sredstvom. Dna šotora ne bo premazal. Koliko kvadratnih metrov šotorskega platna bo premazal?

Reševanje:

Odgovor:____

b) Tonček bo kupil zaščitno sredstvo za premaz šotorskega platna. En liter zaščitnega sredstva zadošča za premaz 10 do 15 m^2. Najmanj koliko bo plačal za nakup, če zaščitno sredstvo prodajajo po 1 *l* oziroma po 5 *l*.

Reševanje:

Odgovor:____

Deveto nalogo lahko učitelj uporabi v programu SSI pri usvajanju znanja v poglavju Telesa ali pri pripravi na poklicno maturo kot idejo za situacijsko nalogo, ki jo lahko dopolni z dodatnimi vprašanji, kot sta izračun prostornine piramide ter izračun kota med stranskim robom in osnovno ploskvijo.

Vpogled in uporabnost gradiv matematike po vertikali v obe smeri

Vsem srednješolskim učiteljem prepuščava razmislek, ali bi bile naloge NPZ iz matematike lahko del pouka v srednji šoli ter v katerih fazah pouka so uporabne. Prav tako meniva, da bi bilo smiselno omogočiti dostop do nalog NPZ-ja, poklicne mature ali splošne mature za področje matematike vsem učiteljem, ki bi si želeli, ne glede na to, ali so osnovnošolski ali srednješolski učitelji. Tudi osnovnošolski učitelji bi lahko dobili marsikatero idejo za poučevanje nadarjenih dijakov ali pa za obogatitev pouka, še posebej pri nalogah poklicne mature. Upava, da bomo v prihodnosti lahko uporabljali prav vsa gradiva, ki so že na voljo, saj se nama zdi smiselna povezava po vertikali v obe smeri, tako vpogled srednješolskih učiteljev matematike v osnovno šolo kot obratno, da osnovnošolski učitelji dobijo vpogled v srednješolsko poučevanje. Morda se komu uporaba teh nalog ne bo zdela smiselna, saj ima že veliko drugega gradiva, vendar vidiva velik pomen v tem, **da ima učitelj možnost izbire**. Še en argument, s katerim želiva podkrepiti najino željo: za programe nižjega in srednjega poklicnega izobraževanja je premalo gradiv za poučevanje in naloge iz e-banke nalog NPZ-ja iz matematike bi še kako koristile.

Viri

RIC. (2019). Matematika. Preizkus znanja. Nacionalno preverjanje znanja v 9. razredu. Državni izpitni center. Ljubljana. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-9%20-razredu/matematika/

RIC. (2019). Nacionalno preverjanje znanja v 9. razredu. Letno poročilo NPZ 2019/2020. Državni izpitni center. Ljubljana. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/porocila—analize--raziskave/

Od matematične preiskave pri pouku do raziskovalne naloge na tekmovanju mladih raziskovalcev

From Mathematics Investigation in Classroom to Research Paper in Young Researcher Competition

Jožef Senekovič
Osnovna šola Bojana Ilicha, Maribor

Izvleček

V članku je opisan primer preiskovanja pri pouku matematike, ki ga dva učenca nadgradita v raziskovalno nalogo. Opredeljeni so bistveni poudarki oblikovanja raziskovalne naloge za osnovnošolce. Vsaka raziskovalna naloga, s katero soočimo učence, je lahko učinkovita metoda za razvijanje v nadaljevanju opredeljenih želenih znanj in sposobnosti pri učencih. V ta namen je predstavljen konkreten primer raziskovalne naloge. Tako je omogočen uvid v pozitivne, a tudi morebitne negativne vplive na razvoj učenčevega razmišljanja.

Ključne besede: raziskovalna naloga, poučevanje, matematična preiskava

Abstract

This article describes a mathematics investigation that two students have upgraded into a research assignment. It outlines the key components of designing a research assignment for primary school pupils. Any research assignment can effectively build the desired knowledge and abilities of pupils. The concrete example of a research assignment sheds light on the good and potentially harmful consequences on the development of student thinking.

Keywords: research assignment, instruction, mathematics investigation

Uvod

Znanje, pridobljeno v osnovni šoli, vedno bolj prehaja iz formalnega v funkcionalno. Učni načrt, razvijanje kompetenc, priporočila sveta Evropske unije in spremembe načina poučevanja (npr. formativno spremljanje) usmerjajo in spreminjajo nekatere obstoječe načine poučevanja. Učitelji želimo s čim učinkovitejšim poukom pri učencih doseči razvijanje predvsem procesnih znanj in hkrati z njimi takih socialnih veščin, ki jim bodo omogočale uspešno delovanje v globaliziranem okolju.

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli že v opredelitvi predmeta nagovarja učitelje k dejavnostim, ki spodbujajo in razvijajo različne oblike mišljenja, ustvarjalnost, aplikativna formalna znanja in spretnosti. Učencem z učnimi situacijami omogočamo, da spoznajo praktično uporabnost in smiselnost učenja matematike (*Učni načrt*, 2011, str. 4). Učni načrt s splošnimi in operativnimi cilji daje okvir preiskavam pri pouku matematike.

Z izrazom preiskovanje označujemo osnovnošolsko obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji (Magajna in Žakelj, 2000). Preiskujemo torej »naloge« ali, bolje rečeno, izzive, v katerih ni določeno, kaj natančno moramo ugotoviti, niti iz formulacije ali konteksta naloge ni razvidno, kako naj pridemo do ugotovitev.

Zgleda takih ugotovitev sta:
- Preiskuj pravokotnike na geoplošči 3×3.
- Ali je ugodneje kupovati hrano v Sloveniji ali na Hrvaškem?

Cilja obeh nalog sta nejasna, nedorečena in reševalec se mora sam odločiti, kaj natančno bo preučil in kako bo to storil.

Pri pravokotnikih na geoplošči nas lahko zanimajo mogoči liki, ki nastanejo, njihove ploščine, obsegi. V drugem primeru moramo podrobneje premisliti, kaj razumemo kot ugodnejši nakup (cena prehranskih izdelkov, bližina nakupa, porabljen čas …).

Z vidika vsebine pri osnovnošolskem pouku matematike preiskujemo dva tipa problemskih situacij. Pri matematičnih problemskih situacijah so objekti preiskovanja matematične narave, take situacije obravnavamo z matematičnimi preiskavami, zgled je zgornja naloga o pravokotnikih na geoplošči. Obravnava večine preostalih problemskih situacij v osnovni šoli temelji na delu s podatki, taka je npr. zgornja naloga o nakupovanju hrane. Lotevamo se jih z empiričnimi preiskavami.

Matematične preiskave temeljijo na problemskih situacijah. Problemske situacije spodbujajo razvoj matematičnega razmišljanja (Žakelj, 2003, str. 16). Matematična preiskava je dejavnost, ob kateri učenci pri pouku ali doma, s samostojnim delom ali sodelovanjem, premisleki in povezovanjem znanja preiščejo značilnosti, lastnosti dane problemske situacije. Preiskava problemske situacije lahko odpira nova vprašanja in vodi v matematično raziskovalno nalogo. Učenje ob problemskih situacijah omogoča razvoj procesnih znanj, ki niso nujno vsa matematična (Žakelj, 2003, str. 34). Prav razvoj znanj, ki presegajo okvire matematičnih vsebin, je srž matematičnih preiskav in raziskovalnih nalog. Gre za znanja, ki so prenosljiva tudi na druga predmetna področja in jih običajno poimenujemo procesna znanja.

Navedimo kategorije procesnih znanj (Žakelj, 2003, po Frobisher):
- komunikacijski procesi (pojasnjevanje, strinjanje, spraševanje …),
- operacijski procesi (zbiranje, sortiranje, urejanje, spreminjanje …),
- miselni procesi (analiziranje, razjasnitev, razumevanje …),
- procesi zapisovanja (risanje, izdelava seznamov, grafični prikazi …).

Različni avtorji procesna znanja različno klasificirajo. Dodajmo morda še čedalje pomembnejši vidik uporabe digitalne tehnologije. S preiskavami in raziskovalnimi nalogami učenci posamezne procese združujejo v učne strategije.

Matematična preiskava poteka ob izbrani problemski situaciji, ki ima največkrat delni ali končni zaključek oziroma ugotovitev raziskovalca. Pri matematični preiskavi lahko rečemo, da gre za metodo pouka.

Raziskovalna naloga oz. matematična raziskava lahko obravnava enako problemsko situacijo kot preiskava, vendar veliko bolj poglobljeno, z iskanjem splošnih ugotovitev, posplošenih pravil, zapisov formul, izdelavo modela. Matematična raziskava je obsežnejša od preiskave tako po vsebini kot po času obravnave. Zahteva uporabo različnih strategij, morda uporabo digitalne tehnologije, uporabo raznih virov, posvetovanja, različnih metod reševanja. S spreminjanjem pogojev problemske situacije matematično raziskovanje posega v nenačrtovana področja začetne problemske situacije. Ugotovitve matematične raziskave je treba utemeljiti, zapisati v matematičnem jeziku in predstaviti.

Raziskovalne naloge nastajajo tudi na srečanjih mladih raziskovalcev. Več o tem najdete na spletu (https://www.zotks.si/raziskovalci/razpis). Na področnih izborih komisije izberejo najkakovostnejše naloge za državno srečanje. Na zaključno državno srečanje se uvrstijo samo naloge, ki tekmujejo za srebrna in zlata priznanja, bronasta podelijo že prej. Pogosta napaka, ki jo avtorji in mentorji največkrat naredijo, tj. usmerjanje v postavljanje hipotez, izhaja iz presplošnih navodil za raziskovalne naloge. O tem piše dr. Borut Jurčič Zlobec v več člankih revije *Matematika v šoli*. Naloge te vrste pravzaprav niso matematične raziskovalne naloge, saj se največkrat ukvarjajo z odgovori na anketna vprašanja. Menim, da področje matematike, sploh v osnovni šoli, težko zadosti predpisanim navodilom za raziskave. Matematični problemi so odprti, pogosto ne vemo, v katero smer bo raziskava potekala in do katerih ugotovitev bomo prišli.

Od matematične preiskave do raziskovalne naloge

Poglejmo si primer prehoda od matematične preiskave k matematični raziskovalni nalogi. Izhodišče matematične preiskave je naloga »Katera zaporedna naravna števila imajo vsoto 171?« (Žabkar, 1971).

Nekatere ugotovitve in predstavitev izvedbe preiskave te problemske situacije pri pouku so opisane v prispevku Ane Kodelja v priročniku *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi: Matematika* (str. 179).

Problemska situacija je odprta. Naloga ne sprašuje po dveh ali katerem drugem številu seštevancev. Postavlja samo pogoj, da so števila naravna in zaporedna. Problemska situacija je časovno obširnejša, poleg matematičnega znanja zahteva miselne procese, procese zapisovanja, urejanja, pravzaprav vse predhodno omenjene (po Frobisher).

V procesu reševanja učenci najprej najdejo vsoto dveh zaporednih števil, 85 + 86 = 171. Uporabijo zase najenostavnejšo in najobičajnejšo pot do rešitve. Dve števili najpogosteje seštevajo. Pri opisu reševanja navajajo deljenje števila 171 s številom 2 (ker sta v vsoti dve števili). S sklepanjem in poskušanjem (število 171 ni deljivo z 2) pridejo do seštevancev 85 in 86. Z uporabo enake strategije razmišljajo tudi o vsoti treh zaporednih naravnih števil. Število 171 delijo s številom 3. Količnik je število 57. Ker seštejemo tri zaporedna števila, je v vsoti še predhodnik in naslednik števila 57. Torej 56 + 57 + 58 = 171.

Nadaljevanje preiskave je bolj ali manj odvisno od posredovanja učitelja. Učenci so namreč zadovoljni že samo z eno rešitvijo (števili 85 in 86), le redki posamezniki razmišljajo o treh zaporednih številih. Izjemno redko kateri izmed učencev postavi vprašanje: »Sem našel vse možne rešitve? Obstaja še katera?« Od tu naprej se za učence začne raziskovanje. Potrebna je spodbuda učitelja.

Recimo, da učenci utemeljijo, zakaj število 171 nikakor ne more biti vsota štirih seštevancev. V taki vsoti je vedno polovica sodih in polovica lihih števil (po dve). Vsota dveh lihih števil je sodo število. Vsota sodih števil je sodo število. Ker je vsota štirih seštevancev vedno sodo število, lihega števila 171 nikakor ne moremo zapisati na ta način. Sledi pomembna ugotovitev: v vsoti zaporednih naravnih števil mora biti liho število lihih seštevancev, če želimo dobiti liho število 171.

Primeri

V vsoti 56 + 57 + 58 = 171 je en lihi seštevanec.

S sistematičnim poskušanjem lahko učenci najdejo tudi rešitev s tremi lihimi seštevanci. Tako dobijo vsoto šestih zaporednih naravnih števil:

26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 171.

Podobno lahko najdejo rešitev s petimi lihimi seštevanci oziroma z devetimi zaporednimi naravnimi števili: 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 171.

Nekateri učenci so ugotavljali, da je število 171 deljivo s števili 1, 3, 9, 19, 57, 171. Ker so našli že rešitev s tremi in devetimi zaporednimi naravnimi števili, so preverili, ali obstaja 19, 57 ali celo 171 zaporednih naravnih števil z vsoto 171.

V nadaljevanju predstavimo razvoj raziskovalne naloge **Vsota zaporednih naravnih števil** (Smaka in Verlič, 2013). Učenca devetošolca sta problem začela reševati z zapisom enačb.

Za dve zaporedni naravni števili rešujemo enačbo:

$$x + (x + 1) = 171$$
$$2x + 1 = 171$$
$$x = 85$$

Rešitev sta zaporedni naravni števili 85 in 86.

Za tri zaporedna naravna števila rešujemo enačbo:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 171$$
$$3x + 3 = 171$$
$$x = 56$$

Rešitev so zaporedna naravna števila 56, 57, 58.

Za štiri zaporedna naravna števila rešujemo enačbo:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 171$$
$$4x + 6 = 171$$
$$x = 41{,}25$$

41,25 ni naravno število, zato ne obstajajo štiri zaporedna naravna števila z vsoto 171.

Ob zapisih enačb, ki sta jih reševala, sta opazila, da nastaja vzorec. Z x je označeno prvo naravno število v vsoti zaporednih naravnih števil:

$2x + 1 = 171$

$3x + 3 = 171$

$4x + 6 = 171$

$5x + 10 = 171$

$6x + 15 = 171$

$7x + 21 = 171$

$8x + 28 = 171$

$9x + 36 = 171$

Drugi členi vsote oblikujejo zaporedje števil 1, 3, 6, 10, 15 … To so trikotniška števila. Poljubno trikotniško število lahko zapišemo $\frac{n(n-1)}{2}$.

Zapisala sta splošno enačbo

$nx + \frac{n(n-1)}{2} = 171.$

Spremenljivka x je v tem primeru prvo izmed zaporednih števil, ki jih iščemo, n pa je število zaporednih števil (število seštevancev). Število 171 je seveda vsota zaporednih števil, ki jih iščemo.

Iz enačbe izrazimo prvo zaporedno število vsote

$x = \frac{171}{n} - \frac{n-1}{2}.$

Število x (prvo izmed števil v zaporedju) je naravno število in ga izračunamo kot razliko dveh členov.

Učenca sta ugotovila, da je prvi člen $\frac{171}{n} \in \mathbb{N}$, ko je n delitelj izbranega števila 171. Z razcepom na prafaktorje sta poiskala delitelje števila 171, $D_{171} = \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Tako je $n \in \{1, 3, 9, 19, 57, 171\}$. Ker so vse vrednosti za n liha števila,[1] je vrednost ulomka $\frac{n-1}{2}$ vedno naravno število ali število nič.

Vsak delitelj števila 171 sta vstavila v enačbo, jo rešila ter tako zapisala iskana zaporedja naravnih števil.

a) $n = 1$

$$x = \frac{171}{1} - \frac{1-1}{2}$$
$$x = 171$$

Gre za eno zaporedno število. To je število samo, 171.

b) $n = 3$

$$x = \frac{171}{3} - \frac{3-1}{2}$$
$$x = 57 - 1 = 56$$

Pri treh zaporednih naravnih številih je prvo torej 56. Iskana vsota števil je 56 + 57 + 58 = 171.

c) $n = 9$

$$x = \frac{171}{9} - \frac{9-1}{2}$$
$$x = 19 - 4 = 15$$

Pri devetih zaporednih naravnih številih je prvo torej 15. Iskana vsota števil je 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 171.

d) $n = 19$

$$x = \frac{171}{19} - \frac{19-1}{2}$$
$$x = 9 - 9 = 0$$

Pri devetnajstih zaporednih številih je prvo torej 0 (ki ni naravno). Iskana vsota števil je 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 171.

Na ta način smo našli vsoto osemnajstih zaporednih naravnih števil 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 171.

e) $n = 57$

$$x = \frac{171}{57} - \frac{57-1}{2}$$
$$x = 3 - 28 = -25$$

Ko dobimo negativno rešitev enačbe, trditev, da je n število zaporednih naravnih števil, ne velja več. V tem primeru dobimo 57 celih števil od –25 do +31, katerih vsota je 171. Med temi celimi števili je vsota od –25 do +25 enaka 0. Tako k vsoti prispevajo le naravna števila 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 171. Na ta način smo našli vsoto šestih zaporednih naravnih števil.

f) $n = 171$

$$x = \frac{171}{171} - \frac{171-1}{2}$$
$$x = 1 - 85 = -84$$

Rešitev enačbe je število –84. V tem primeru dobimo 171 celih števil od –84 do +86. Izkaže se, da je vsota teh sto enainsedemdesetih celih števil prav tako 171. Med temi celimi števili je vsota od –84 do +84 enaka 0. Tako k vsoti prispevata le naravni števili 85 in 86. Na ta način smo našli vsoto dveh zaporednih naravnih števil 85 + 86 = 171.

1 Seveda bi v splošnem reševali enačbo v dveh delih, ko je n liho in ko je n sodo število.

Pa posplošimo.

Za poljubno liho naravno število y, ki je vsota zaporednih naravnih števil, izračunamo prvo zaporedno število s pomočjo enačbe:

$$x = \frac{y}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Število n je delitelj poljubnega lihega naravnega števila y.

Število x je prvo naravno število v zaporedju.

Število n je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $x \leq 0$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $y - (2|x| + 1)$ števil.

V nadaljevanju raziskovalne naloge učenca razmišljata, ali ugotovljeno pravilo velja tudi za soda števila. Raziskovalno vprašanje torej razširita, zanima ju širši vidik problema. V prvem delu namreč obravnavata le liha števila (ker je 171 liho število). Raziskavo nadaljujeta s sistematičnim preizkušanjem uporabnosti pravila še za soda števila.

Na primerih ugotovita, da pravilo velja le za lihe delitelje sodih števil.

Primer

Število 20 ima samo dva liha delitelja, število 1 in število 5, saj je $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Z uporabo enačbe $x = \frac{20}{n} - \frac{n-1}{2}$ zapišemo:

a) $n = 1$

$$x = \frac{20}{1} - \frac{1-1}{2}$$

$$x = 20$$

V tem primeru lahko število 20 zapišemo kot vsoto enega samega zaporednega števila. To je število 20 samo.

b) $n = 5$

$$x = \frac{20}{5} - \frac{5-1}{2}$$

$$x = 2$$

To pomeni, da lahko število 20 zapišemo z vsoto petih zaporednih naravnih števil $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.

c) Za preostale delitelje, ki so soda števila (2, 4, 10, 20), pa na primerih ugotovita, da za x ne dobita naravnega števila.

Sledi še ugotovitev:

Za poljubno sodo naravno število y določimo vsoto zaporednih naravnih števil s pomočjo enačbe

$$x = \frac{y}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Število n je lihi delitelj poljubnega sodega naravnega števila y.

Število x je prvo naravno število v zaporedju.

Število n je hkrati tudi število členov vsote.

Če je rešitev enačbe $x \leq 0$, je v vsoti zaporednih naravnih števil natanko $y - (2|x| + 1)$ števil.

Zaključek

Med matematično preiskavo in raziskovalno nalogo je očitna razlika: po obsegu, globini preiskovanja, času dela, zahtevanih procesnih znanjih in uporabi matematičnega znanja.

Kot dolgoletni mentor ugotavljam nedvoumne pozitivne pridobitve učencev, ki se lotijo raziskovalne naloge. Učenci postanejo bistveno samozavestnejši in pridobijo veliko matematičnega ter širšega znanja. Naučijo se zapisovanja matematičnih vsebin, predstavljanja in zagovarjanja svojih idej in zamisli. Utemeljujejo in diskutirajo, sodelujejo, razdelijo delo, povzemajo in razmišljajo o novih vprašanjih.

Negativne izkušnje učencev z raziskovalnimi nalogami lahko bistveno zmanjšajo interes in motivacijo učenca. Vplivajo lahko tudi na učenčevo samopodobo. Učenci pri izdelavi raziskovalne naloge ne smejo doživeti pritiska s strani učitelja. Morebitno nerazumevanje vsebin, postopkov, iskanje rešitev … rešujejo skupaj z učiteljem (mentorjem). Ta vloga učitelja je zato zelo pomembna, pomembnejša od vloge usmerjevalca v raziskovanju matematičnih vsebin. Napake v razmišljanju so lahko ključne pri razvoju procesnih znanj. Učencem nikakor ne smemo odvzeti možnosti napak. Zato je napačna tudi preveč pokroviteljska vloga učitelja, če ta prevzame bistveno delo v korakih nastajanja raziskovalne naloge. Učenci morajo pridobiti izkušnjo vseh korakov, od zasnove problema, iskanja problemskih vprašanj, iskanja virov, uporabe digitalne tehnologije, izdelave zapisov, skic, grafov, postopkov reševanja do utemeljenih zaključkov in predstavitve.

Viri

Jurčič Zlobec, B. (2017). Raziskovalne naloge iz matematike na srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2017. *Matematika v šoli, 23* (2), str. 57. Zavod RS za šolstvo.

Magajna, Z., Žakelj, A. (2000). *Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9*. Zavod RS za šolstvo.

Smaka, M., Verlič, J. (2013). *Vsota zaporednih naravnih števil, raziskovalna naloga*, mentor Senekovič, J. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2013.

Suban, M., Kmetič, S., Žakelj, A., Lipovec, A., Magajna, Z., Sirnik, M., Vršič, V., Legvart, P., Perkovič, A., Čekada, D., Flisar, M., Magdič, M., Kmetec, K., Kodelja, A., Bone, J., Rajh, S., Repovž, B. in Senekovič, J. (2013). *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi*. Zavod RS za šolstvo.

Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod RS za šolstvo.

Žabkar, J. (1971). *Vaje in naloge iz matematike za VIII. razred osnovne šole*. DZS.

Žakelj, A. (2003). *Kako poučevati matematiko*. Zavod RS za šolstvo.

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2023

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

Zveza za tehnično kulturo Slovenije je leta 2023 v Murski Soboti organizirala že 57. državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije.

Namen srečanja je popularizacija znanosti in tehnike med mladimi, približevanje raziskovalne dejavnosti mladim talentiranim učencem in dijakom ter poglabljanje njihovega šolskega znanja.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih.

Organizator je dobil v pregled 13 osnovnošolskih in šest srednješolskih nalog s področja matematike in logike. Med osnovnošolskimi nalogami smo jih sedem izbrali za bronasto priznanje. Preostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vseh šest nalog, ki so prišle v končni izbor, kandidiralo za zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, doc. dr. Polona Repolusk, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in dr. Borut Jurčič Zlobec.

Komisija je izbrala dve osnovnošolski in dve srednješolski nalogi za zlato priznanje, preostale pa so dobile srebrno priznanje.

Rezultate vsako leto objavljamo v tej reviji, med drugim zato, da se lahko učenci, dijaki in ne nazadnje tudi mentorji orientirajo, kakšne naloge komisija ocenjuje za najprimernejše. Po drugi strani pa želimo učence in mentorje spodbuditi, da se prijavijo na tekmovanje.

Pojdimo k nalogam, najprej k temam, ki so bile predstavljene pred državno komisijo.

- Med osnovnošolskimi nalogami:
  pet pedagoških, štiri geometrijske in štiri aritmetične.
- Med srednješolskimi nalogami:
  2 aritmetični, 1 geometrijska, 1 iz numeričnih metod, 1 statistična in 1 iz kriptografije.

Anketnih nalog letos ni bilo. Vendar pa se je med osnovnošolskimi nalogami pojavil val pedagoških nalog. Komisija jih je ocenila za ne najbolj primerne, ker nas na srečanjih mladih raziskovalcev ne zanima, kako drugi rešujejo matematične probleme, ampak bolj to, kako jih sami učenci in dijaki rešujejo. Zato ni nobena od pedagoških nalog prišla v ožji izbor za srebrno oziroma zlato priznanje.

Naj ponovimo, da so anketne in pedagoške naloge privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je potrebno v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za matematične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se teh tem izogibajo.

Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

Naloge smo uredili po vrsti, najprej osnovnošolski zlati nalogi, nato pa še srednješolski. Na prvem mestu v kategoriji je naloga, ki jo je komisija ocenila za najboljšo in je dosegla prvo mesto v kategoriji.

1 Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2023

Zlato priznanje so dobile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

- KAPREKARJEVA KONSTANTA
  Avtorici: Nuša Demšar in Neža Jeromen
  Mentor: Ambrož Demšar
  Šola: Osnovna šola Alojzija Šuštarja, Ljubljana Šentvid
- EULERJEVA KARAKTERISTIKA
  Avtorica: Polona Larisa Perman
  Mentorica: Meta Hrast
  Šola: Osnovna šola Škofljica
- NUMERIČNA ANALIZA RAYLEIGH-BENARDOVE KONVEKCIJE
  Avtorja: Žiga Vaupotič in Jaka Jakopin
  Mentorja: Grega Celcar in doc. dr. George Mejak
  Šola: Gimnazija Jožeta Plečnika Ljubljana
- REŠEVANJE POLINOMSKIH ENAČB Z GEOMETRIJO
  Avtorja: Tadej Vovk in Ema Ptičak
  Mentor: mag. Alojz Grahor
  Šola: Škofijska gimnazija Vipava

2 Kratek opis nagrajenih nalog

2.1 naloga: Kaprekarjeva konstanta.

Člene Kaprekarjevega zaporedja računamo po naslednjem pravilu. Vzamemo poljubno število. To število je prvi člen zaporedja. Njegove števke v desetiškem zapisu uredimo po velikosti od najve-

če do najmanjše. Od tako dobljenega števila odštejemo število, ki se zapiše z istimi števkami v obratnem vrstnem redu. Razlika, ki jo dobimo, je naslednji člen zaporedja.[1]

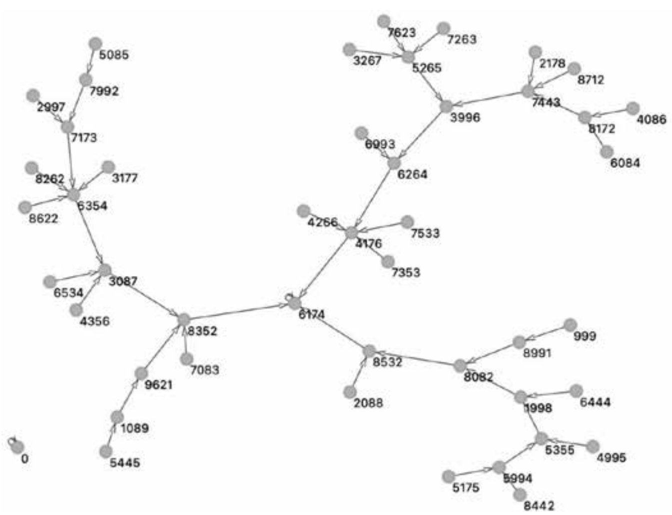
Naloga je zanimiva, zato si zasluži malo več pozornosti.[2]

Ker vsakokrat uredimo števke po vrstnem redu, je dovolj, če vzamemo za prve člene le števila, ki imajo v zapisu števke urejene po velikosti. Tako začnemo pri številih, zapisanih s štirimi števkami namesto z 10 000 števili le s 715 števili, kolikor je število kombinacij (to pomeni, da ni pomemben vrstni red) s ponavljanjem razreda 4, (štirimestna števila) z desetimi elementi, to so števke od 0 do 9.

Vsako zaporedje se zaključi s ciklom, to pomeni, da se števila v zaporedju začnejo ponavljati. Cikel dolžine 1, kjer se ponavlja le eno število, je negibna točka zaporedja, ki dobi ime Kaprekarjeva konstanta.

Pri številih, ki se zapišejo s štirimi števkami v desetiškem številskem sistemu, imamo le dve negibni točki 0 in 6174 (glejte sliko 1).

Vseh drugih različnih členov Kaprekarjevega zaporedja pri številih, zapisanih s štirimi števkami v desetiškem sistemu, je le 55, ti so prikazani na sliki 1.



Slika 1: Drevo števil, ki se zapišejo s štirimi števkami. Slika je vzeta iz naloge.

Na koncu naloge je zapisan še program v programskem jeziku python. Kot sem razumel, ta program izrisuje slike, kot je na primer slika 1, za števila zapisana s štirimi števkami v desetiškem številskem sistemu.

Zato sem posebej zapisal program, ki razumljiveje odraža opis v besedilu.

```
#!/usr/bin/env python3
def kombinacije(razr, lst, pon=True): # Vrne seznam kombinacij s ponavljanjem
if razr == 1: # elementov s seznama [lst] dolžine n = 10,
return [[x] for x in lst] # razreda [razr] dolžine r.
res = [] # Število kombinacij je k = (n + r - 1)!/r!/(n - 1)!.
j = 0 if pon else 1 # To je število vseh različnih števil med 0 do 999...9,
for i in range(len(lst)): # ki se zapišejo s števkami, urejenimi po velikosti.
for item in kombinacije(razr - 1, lst[i+j:], pon):
res.append([lst[i]] + item)
return res
def kaprekar_(seed): # Izračuna naslednji člen Kaprekarjevega zaporedja.
r = len(seed)
seed_max = ‚‘.join(sorted(seed, reverse = True))
seed_min = ‚‘.join(sorted(seed)) # Sestavimo obe števili s padajočimi in naraščajočimi števkami,
seed = str(int(seed_max) - int(seed_min))
# ju odštejemo in
seed = (r - len(seed))*‘0‘ + seed # dodamo vodilne ničle.
return seed
def kaprekars(seed_list): # Seznam drugih členov Kaprekarjevega zaporedja.
all_list = set()
for seed in seed_list:
seed = kaprekar_(seed)
while True:
if seed in all_list:
break
else:
all_list.add(seed)
seed = kaprekar_(seed)
return all_list
if __name__ ==‚__main__‘:
res = kaprekars([‚‘.join([str(y) for y in x]) for x in kombinacije(4, range(10))])
print(len(res)) # Seznam drugih členov Kaprekarjevega zaporedja,
dict_branch = {} # Prvi člen preberemo s seznama kombinacij s ponavljanjem.
for x in res:
dict_branch[x] = kaprekar_(x) # Drevo drugih členov Kaprekarjevega zaporedja,
# kot ga prikazuje slika 1, zapisano v obliki slovarja.
for k in sorted(dict_branch.keys()):
print(k,dict_branch[k]) # Izpis slovarja.
```

2.2 naloga: Eulerjeva karakteristika

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

Eulerjeva karakteristika mi je bila prvič predstavljena kot formula za izračun neznanega števila oglišč, robov ali ploskev konveksnih poliedrov v treh dimenzijah.

Število ploskev označimo s F, število robov z E in število oglišč z V. Formula se glasi:

$$F + V = E + 2.$$

1 Z ležečo pisavo bomo zapisali prepise iz raziskovalnih nalog.

2 Z osnovno pisavo so zapisani komentarji avtorja.

Če si poznal dve od naštetih količin, si lahko izračunal tretjo neznano. Predstavljena formula je Eulerjeva poliedrska formula, iz katere izrazimo Eulerjevo karakteristiko, ki jo pišemo z grško črko χ:

$$\chi = V - E + F.$$

Kot smo omenili, to velja za konveksne poliedre. Zanimalo me je, kako se izraža formula za poliedre, ki niso konveksni. Začela sem z najosnovnejšim geometrijskim objektom – točko. Nato sem nadaljevala z robovi, ploskvami in na koncu še s telesi. Raziskovala sem, kaj se zgodi z Eulerjevo karakteristiko, če jih medsebojno povezujemo, lepimo in razrežemo. Natančno sem obravnavala enostavne mnogokotnike in pokazala, da njihova Eulerjeva karakteristika ni odvisna od tega, kako so razrezani na trikotnike. Spraševala sem se, kaj vpliva na Eulerjevo karakteristiko in kaj ne. Pokazala sem, kako z Eulerjevo karakteristiko lahko dokažemo, da res obstaja le pet platonskih teles. Svoje ugotovitve sem na koncu prikazala s pomočjo tabele. Primerjala sem objekte, ki imajo enako Eulerjevo karakteristiko, in ugotovila, kako so medsebojno povezani. Objekte sem si za lažjo predstavo risala v programu Geogebra in si tako omogočila globlje razumevanje.

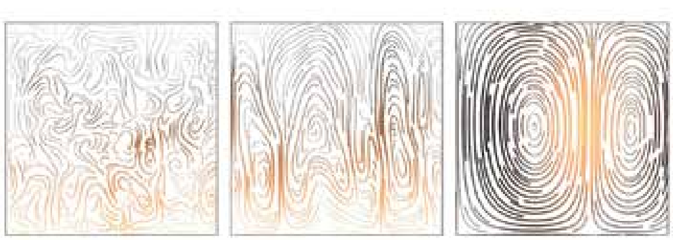
2.3 naloga: Numerična analiza Rayleigh-Bénardove konvekcije

V povzetku k nalogi je med drugim zapisano:

Ta raziskovalna naloga obravnava numerične metode reševanja Navier-Stokesovih enačb. V nalogi obravnavamo dve preprosti mrežni metodi s stališča njune matematične formulacije, časovne zahtevnosti in natančnosti. Navier-Stokesove enačbe opisujejo gibanje tekočin.

Posvetili smo se predvsem enačbam, ki opisujejo nestisljive tekočine. Zapisali smo enačbe na podlagi Rayleigh-Bénardove konvekcije in se ukvarjali z najpreprostejšimi robnimi pogoji.

Numerično rešujemo parcialne diferencialne enačbe, tako da diferencialne enačbe pretvorimo v sistem navadnih enačb. Za reševanje Navier-Stokesovih enačb se uporabljajo različne metode. V nalogi smo si izbrali dve metodi, in sicer metodo končnih volumnov in končnih razlik. V nadaljevanju primerjamo obe metodi. Rešitve v dveh dimenzijah so grafično predstavljene.



Slika 2: Kritično Rayleighevo število. Slika je vzeta iz naloge.

Rayleighevo število je mera za intenzivnost konvekcije tekočine. Konvekcija se pojavi, ko vrednost Rayleighevega števila (Ra) doseže kritično vrednost.

Slika 3: Bénardove celice, slika se nahaja na naslovu: https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh%E2%80%93B%C3%A9nard_convection

2.4 naloga: Reševanje polinomskih enačb z geometrijo

Poglejmo najprej, kaj piše v povzetku k nalogi.

V nalogi obravnavamo reševanje polinomskih enačb, to so enačbe oblike

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer so koeficienti a_i realna števila. Za polinomske enačbe do vključno četrte stopnje poznamo formule, po katerih se rešitve izrazijo s koeficienti polinoma z uporabo korenov. V nalogi obravnavamo alternativne metode reševanja polinomskih enačb, in sicer s pomočjo dinamične geometrije, konstrukcije skupnih tangent, s pomočjo prepogibanja papirja ter s pomočjo tako imenovane želvje grafike.

Pravila konstrukcij z neoznačenim šestilom in ravnilom:

(1) Za dani točki P_1 in P_2 lahko narišemo premico, tako da bo potekala skozi obe točki.

(2) Za dano točko O in daljico P_1P_2 lahko narišemo krožnico, katere središče je v točki O s polmerom dolžine daljice P_1P_2.

(3) Za dane premice in krožnice lahko določimo presečišča.

S pomočjo ravnila in šestila lahko rešujemo enačbe druge stopnje. S prepogibanjem papirja lahko rešujemo tudi enačbe višjih stopenj. Prepogibanje papirja se imenuje matematični origami, zanj pa veljajo naslednja pravila:[3]

(1) Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi ti točki.

(2) Za dani premici lahko poiščemo presečišče, če obstaja.

(3) Za dani točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (tako dobimo simetralo daljice P_1P_2).

3 Različni avtorji nekoliko drugače razvrstijo in poimenujejo pravila matematičnega origamija.

(4) Za dani različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (tako dobimo simetralo kota, ki ga določata premici l_1 in l_2).

(5) Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (tako dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).

(6) Za dani točki P_1 in P_2 ter premico l lahko naredimo pregib tako, da točko P_1 preslika na premico l in da poteka skozi točko P_2.

(7) Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2.

Avtorja sta si zastavila naslednja vprašanja:

- Kako z želvjo grafiko rešimo polinomsko enačbo poljubne stopnje?
- Kako s prepogibanjem papirja rešimo kvadratne in kubične enačbe?
- Kako rešiti starogrški problem konstrukcije podvojitve kocke s prepogibanjem papirja?

Film o reševanju enačb s pomočjo želvje grafike najdete na naslovu: https://www.youtube.com/watch?v=IUC-8P0zXe8

3 Opombe glede ocenjevanja nalog

Pri raziskovalnih nalogah na ravni osnovne in srednje šole vrednotimo tako kakovost izbire in obdelave problema kot tudi ustrezno težavnost in izvirnost.

Večkrat smo opazili, da nekatere naloge presegajo znanje, ki ga dobi učenec oziroma dijak v šoli. To se mi ne zdi narobe. Gre za učence in dijake, ki se zanimajo za snov, in zaželeno je, da se ne ustrašijo tem, ki jih v šoli niso srečali. Vendar ima vse svoje meje. Izogibati se moramo pretirano zahtevnih nalog, ki zahtevajo znanje daleč nad tistim, ki se pričakuje od učencev oziroma dijakov na dani stopnji, ki med drugim zahtevajo tudi vrhunsko strokovno pomoč, ki jo lahko nudi le strokovnjak za določeno področje. Komisija bo težavnost take naloge upoštevala le do določene mere in tako omogočala, da lahko dobijo nagrade tudi tisti dijaki in učenci, ki jim taka pomoč ni dostopna.

Včasih dobimo pritožbe, češ zakaj ni moja naloga dobila zlatega priznanja, kaj je narobe z njo. Tu je treba upoštevati politiko organizatorja. Prva zlata medalja se podeli v posamezni skupini le eni nalogi zato, ker imajo prvi zlati nagrajenci določene ugodnosti, na primer izberejo lahko brezplačen poletni tabor v organizaciji Zveze za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS). Sredstva so omejena, zato se določi le ena naloga iz vsake skupine za prvo zlato priznanje.

Zato je ocenjevanje nalog relativno. Naloge komisija zbere na kup in pogleda, katera je po njenem mnenju najboljša, katera je druga najboljša in tako naprej. Tako se lahko zgodi, da z dano nalogo, ki je dobila drugo zlato priznanje, ni nič narobe. V drugem kontekstu bi prav lahko dobila prvo zlato priznanje.

V navodilih za ocenjevanje nalog organizatorja piše, da se naloge ocenjujejo po naslednjih kriterijih:

1. Raziskovalna odličnost naloge.
2. Jasno opredeljen namen raziskovalne naloge in njena izvirnost.
3. Interpretacija rezultatov (preglednost, grafi, tabele).
4. Navajanje literature in citiranje (označeno v besedilu naloge).
5. Tehnična izvedba in dovršenost naloge (jezik, oblika, estetski videz).

Komisija na koncu naredi relativno lestvico nalog na podlagi omenjenih ocenjevalnih kriterijev.

30 letnikov revije *Matematika v šoli*

Decembra 1992 je Predmetna skupina za matematiko pri takratnem Zavodu Republike Slovenije za šolstvo in šport izdala predstavitveno številko revije z delovnim naslovom *Matematika v šoli*. Delovni naslov prve številke prvega letnika v šolskem letu 1992/93 ste učiteljice in učitelji matematike v osnovnih in srednjih šolah vzeli za svojega, zato se je ohranil vse do letos, ko obeležujemo izid že 30. letnika revije *Matematika v šoli*.

Slika 1: Naslovnica in zadnja stran ovitka prve številke revije *Matematika v šoli*.

Na zadnji strani ovitka prve številke revije je bil rokopis prof. dr. Josipa Plemlja, saj je vlada Republike Slovenije ob petindvajsetletnici smrti tega velikega matematika leto 1992 razglasila za Plemljevo leto (slika 1).

Uredniški odbor prve številke revije so sestavljali Darjo Felda (odgovorni urednik), Nada Marčić (glavna urednica), Ivan Galun, Zvonko Perat, Anka Hribar Košmerl (likovna oprema) in Marija Sivec (jezikovni pregled).

Slika 2: Naslovnica *Jubilejne publikacije ob izidu 20. letnika revije Matematika v šoli*.

Odgovorni urednik prve številke revije, **Darjo Felda**, je nalogo odgovornega urednika opravljal šest let. Nato je nalogo odgovorne urednice za osem let prevzela **Nada Marčić**, ki je bila do takrat glavna urednica revije.

Odgovorna urednica naslednjih osem let, od 2009 do 2016, je bila **Jerneja Bone**. V tem času se je spremenila grafična podoba revije. Uredniški odbor je leta 2014 pod vodstvom Jerneje Bone slovesno obeležil praznovanje izida 20. letnika revije. Ob tej priložnosti je izšla *Jubilejna publikacija ob izidu 20. letnika revije Matematika v šoli*, v kateri so naslovi vseh izdanih prispevkov in seznami vseh sodelujočih pri oblikovanju revije (dosegljiva je na spodnji QR-kodi in na povezavi https://www.zrss.si/pdf/matematika-v-soli-jubilejna2014.pdf).

Okroglo številko izdajanja revije smo obeležili tudi z razstavo in okroglo mizo na 2. mednarodni Konferenci o učenju in poučevanju matematike – KUPM 2014, ki je potekala 21. in 22. avgusta 2014 v Termah Čatež.

Slika 3: 20 letnikov revije *Matematika v šoli*, predstavljenih na KUPM 2014. Vir fotografije: spletna stran KUPM 2014 (https://www.zrss.si/kupm2014/).

Slika 4: Okrogla miza ob izidu 20. letnika revije *Matematika v šoli* na KUPM 2024 (od leve proti desni: Simona Vozelj, Zlatan Magajna, Jerneja Bone, Marija Lesjak Reichenberg, Darjo Felda in Simona Vreš. Vir fotografije: spletna stran KUPM 2014 (https://www.zrss.si/kupm2014/).

Med letoma 2017 in 2022 je delo odgovorne urednice opravljala **Mateja Sirnik**. Že takoj po njenem prevzemu funkcije, leta 2017, je revija ponovno spremenila grafično podobo in »zrasla« v format A4.

Slika 5: Nova podoba revije od leta 2017.

Zadnje dve leti je odgovorna urednica **Sonja Rajh**.

Tokrat bomo na rojstnodnevni torti naše revije zapisali številko 30. Toda kako?

Število 30 zapišemo:

- z rimsko številko, XXX;
- z grškimi akrofoničnimi številkami, ΔΔΔ;
- v babilonskem klinopisu, 𒌍;
- z egipčanskim zapisom, 𓎆𓎆𓎆;
- v majevski horizontalni izvedbi, ;
- s kitajskimi pismenkami, 三十;
- v Braillovi pisavi, ⠼⠉⠚;
- z Morsejevo abecedo, ...-- -----;
- kot $11110_{(2)}$ v dvojiškem številskem sestavu.

Število 30 lahko zapišemo kot vsoto:

- zaporednih naravnih števil, $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$;
- zaporednih prvih petih sodih števil, $30 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$;
- kvadratov prvih štirih zaporednih naravnih števil, $30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$;
- treh kvadratov naravnih števil, $30 = 1^2 + 2^2 + 5^2$;
- različnih praštevil na več načinov, $30 = 7 + 23$, $30 = 11 + 19$, $30 = 13 + 17$, $30 = 2 + 11 + 17$, $30 = 2 + 5 + 23$, $30 = 2 + 3 + 5 + 7 + 13$;
- $30 = 3! + 4!$.

Število 30 je zmnožek:

- prvih treh praštevil, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, in je najmanjše število, ki je zmnožek treh zaporednih praštevil;
- treh zaporednih Fibonaccijevih števil, $30 = F_3F_4F_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$;
- dveh zaporednih naravnih števil, $30 = 5 \cdot 6$, zato spada med t. i. podolžna števila ($n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$).

Pravilni 30-kotnik je konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom (Razpet, 2015).

Pravilna poliedra, ki sta narisana na naslovnici revije, dodekaeder (dvanajsterec) in ikozaeder (dvajseterec), imata vsak po 30 robov.

Število 30 je četrto kvadratno piramidno število, saj lahko 30 enakih krogel zložimo v kvadratno piramido s štirimi »sloji«, kot je narisano na naslovnici revije.

Vir

Bone, J., idr. (2014). *Jubilejna publikacija ob izidu 20. letnika revije Matematika v šoli*. https://www.zrss.si/pdf/matematika-v-soli-jubilejna2014.pdf

Razpet, M. (2015). *Figarova števila*. Študijsko gradivo, Matematične teme z didaktiko.

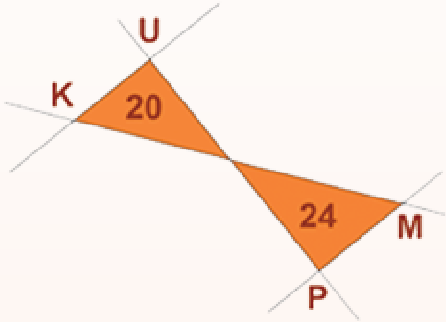
Zapis pripravil: Uredniški odbor revije *Matematika v šoli*

Mathematics in school

1 2024 Volume 30

CONTENTS

Najava
6. konference o učenju in poučevanju matematike
KUPM 2024



Vljudno vas vabimo na **6. konferenco o učenju in poučevanju matematike (KUPM 2024)**,
ki bo **11.** in **12. novembra 2024**
v **Kongresnem centru Laško**.

Konferenca KUPM 2024 nadaljuje svojo povezovalno vlogo ter združuje vse učitelje, ki poučujejo matematiko od 1. razreda osnovne šole do zaključnega letnika srednje šole (učitelje razrednega pouka, učitelje matematike v osnovnih in srednjih šolah) ter strokovnjake na področju matematičnega izobraževanja.

Osrednje konferenčne teme bodo:

- **Prenova učnih načrtov in katalogov znanja za matematiko**
- **Umetna inteligenca, digitalna tehnologija, algoritmično mišljenje**
- **Delo z nadarjenimi**
- **30. letnik revije *Matematika v šoli***

Konferenca bo potekala v obliki plenarnih predavanj z vabljenimi predavatelji, vabljenih predstavitev, okrogle mize in delavnic.

Program konference bo objavljen na spletni strani konference:
https://kupm.zrss.si/

Veselimo se strokovnega srečanja z vami.

Programsko organizacijski odbor KUPM 2024

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO
REPUBLIKA SLOVENIJA MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE
I FEEL SLOVENIA
Sofinancira Evropska unija