PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **12** (1984/1985)
Številka 4
Strani 182–184

Roman Drnovšek:

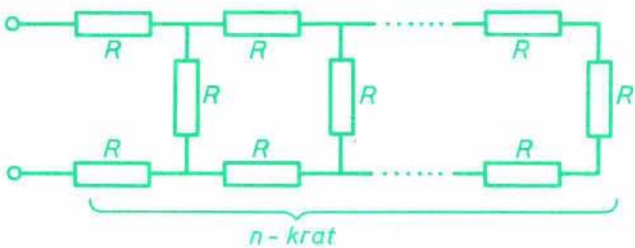
NADOMESTNI UPOR VERIGE UPORNIKOV

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/12/731-Drnovsek.pdf

NADOMESTNI UPOR VERIGE UPORNIKOV

Rešili bomo naslednjo nalogo o električnih vezjih: Izračunaj nadomestni upor verige enakih upornikov (glej sliko)! Vseh upornikov je $3n$, upor vsakega izmed njih pa je enak R.



Rešitev:

1. Iskani nadomestni upor označimo z R_n. Naša naloga je določiti R_n v odvisnosti od R in n. Očitno je $R_1 = 3R$. R_{n+1} dobimo iz R_n, če le temu dodamo še tri upornike:

$$R_{n+1} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_n}} + R$$

$$R_{n+1} = 2R + \frac{R.R_n}{R + R_n} = \frac{(2R + 3R_n)\,R}{R + R_n} \qquad (1)$$

Po tej rekurzivni formuli izračunamo: $R_2 = \frac{11}{4} R$ in $R_3 = \frac{41}{15} R$.
2. Definirajmo zaporedji x_n in y_n $(n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$:

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 2y_n && \text{(a)} \\ y_{n+1} &= x_n + y_n && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Prvih nekaj členov zaporedja x_n je: 1, 3, 11, 41, ..., zaporedja y_n pa 0, 1, 4, 15, ...

3. Dokažimo s popolno indukcijo, da je

$$R_n = R\,\frac{x_n}{y_n} \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{3}$$

Za $n = 1$ je $R_1 = R\,\dfrac{x_1}{y_1} = 3R$, kar res velja.

Predpostavimo, da (3) velja za n in pokažimo, da tedaj velja tudi za $(n + 1)$. S tem namenom vstavimo (3) v (1):

$$R_{n+1} = 2R + \frac{R.R\,\dfrac{x_n}{y_n}}{R + R\,\dfrac{x_n}{y_n}} = 2R + R\,\frac{x_n}{x_n + y_n} = R\,\frac{3x_n + 2y_n}{x_n + y_n}$$

Upoštevamo definiciji (2), pa dobimo: $R_{n+1} = R\,\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$. Tako je dokaz enakosti (3) končan.

4. Z uporabo računalnika, na katerem lahko programiramo, je mogoče izračunati poljuben x_n in y_n (s pomočjo (2)), medtem ko na običajnem žepnem računalniku pri velikih n to ni mogoče. Zato bi želeli določiti formule za x_n in y_n samo v odvisnosti od n.

Iz (2b) izpeljemo $x_n = y_{n+1} - y_n$, kar vstavimo v (2a) in dobimo:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = 3y_{n+1} - 3y_n + 2y_n$$

oziroma

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0 \tag{4}$$

Kako se v splošnem rešuje diferenčne enačbe oblike $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$ $(a, b \in \mathbf{R})$, piše na str. 116 v knjigi *Alojzija Vadnala OSNOVE DIFERENČNEGA RAČUNA*, Knjižnica *Sigma*. V našem primeru bomo to opravili na kratko.

Rešitev diferenčne enačbe (4) iščemo v obliki $y_n = t^n$. To vstavimo v (4) in dobimo:

$$t^{n+2} - 4t^{n+1} + t^n = 0$$

oziroma

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Ker t_1 ni enako t_2, je splošna rešitev enačbe (4) enaka:

$$y_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n$$

Konstanti A in B izračunamo z upoštevanjem pogojev $y_0 = 0$ in $y_1 = 1$:

$$0 = A + B$$
$$1 = A(2+\sqrt{3}) + B(2-\sqrt{3})$$

Rešitev sistema teh dveh enačb z dvema neznankama je:

$$A = 1/(2\sqrt{3}) \quad \text{in} \quad B = -1/(2\sqrt{3})$$

. Torej je:

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right) \qquad (5)$$

Po kratkem računu iz $x_n = y_{n+1} - y_n$ dobimo:

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^n(1-\sqrt{3})\right) \qquad (6)$$

Ko (5) in (6) vstavimo v (3), je naloga rešena:

$$R_n = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^n}{1-(7-4\sqrt{3})^n}\, R$$

5. Poglejmo še primere, ko je veriga upornikov neskončna. Po kratkem premisleku ugotovimo: ko n raste čez vse meje, se kvocient x_n/y_n približuje vrednosti $(1+\sqrt{3})$. Torej je: $R_\infty = R\ (1+\sqrt{3})$.

Roman Drnovšek