Neue Methode

für die

Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe

aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen.

Von

M. Vodušek,

k. k. Gymnasial-Professor.

Laibach 1879.

Druck von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Im Selbstverlage des Verfassers.

Separatabdruck aus dem Programm des k. k. Ober-Gymnasiums
zu Laibach für 1879.

Neue Methode

für die

Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe

aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen.

Von **M. Vodušek**, k. k. Gymnasialprofessor.

Die Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe galten bis auf die neueste Zeit als das geeignetste Mittel für die Bestimmung der Sonnenparallaxe und mithin der Entfernung der Erde und der übrigen Planeten von der Sonne. Die Idee rührt von Halley her und beruht auf der ganz richtigen Ansicht, dass man aus den verschiedenen Stellungen, welche die Venus während eines Vorüberganges, von verschiedenen Orten der Erdoberfläche zu gleicher Zeit betrachtet, an der Sonnenscheibe einnimmt, einen Schluss auf die Grösse der Sonnenparallaxe selbst machen könne. Allein die Methode, die uns Halley zur Realisirung seiner Idee hinterlassen hat, ist sehr unvollkommen, wie es bei dem damaligen Zustande der mathematischen Wissenschaften nicht anders möglich war. Um nichts besser, im Gegenteile noch viel verwickelter ist ein von Delisle angegebenes Verfahren, welches aus der Beobachtung eines einzelnen Contactmomentes die Sonnenparallaxe ableiten will und so das von Halley aufgestellte richtige Princip fahren lässt. Eine bessere Methode wurde seither nicht gefunden, und so kann es nicht Wunder nehmen, dass nicht ein einziger der bisher stattgefundenen Venusvorübergänge mit dem gewünschten Erfolge beobachtet werden konnte und die Sonnenparallaxe, diese für unser Planetensystem so wichtige Grösse, noch heute nicht genau festgestellt ist. Ich will mich hier nicht näher einlassen, sondern bemerke nur, dass in einer der vom 16. bis 19. April 1878 abgehaltenen Sitzungen der amerikanischen Akademie der Wissenschaften in Washington über die Venus der Stab gebrochen und erneute Messungen der Geschwindigkeit des Lichtes als künftige Grundlage der Parallaxenbestimmung vorgeschlagen wurden.* Mit nichten. Die Venusvorübergänge sind und bleiben das vorzüglichste Mittel zur Eruirung der Sonnenparallaxe. Dies darzutun und zugleich eine neue, sehr einfache Methode an die Stelle der zwei unbrauchbaren zu setzen, ist die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung. Dieselbe dürfte um so zeitgemässer erscheinen, als sie dem für den 6. Dezember 1882 bevorstehenden Venusvorübergange, dem dann erst in 122 Jahren wieder einer nachfolgt, noch zu Gute kommen kann.

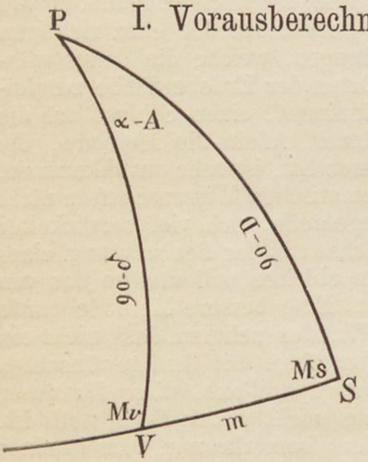
---

* Einen kurzen Bericht über diese Sitzungen bringt die Zeitschrift „Gæa“ vom Jahre 1878, p. 377 ff.

Die Einfachheit der hier entwickelten Formeln und des darauf gegründeten Verfahrens ist mir Bürge, dass der vorgezeichnete Weg der richtige und dass schwerlich je ein besserer zu finden sein wird.

Während ich mich aber mit den Venusvorübergängen beschäftigte, drängte sich mir immer mehr und mehr der Gedanke auf, dass auf diesem Wege auch für die Mondesparallaxe sich wird etwas tun lassen; deshalb brach ich die ursprünglich rein differentiell angelegte Entwickelung ab und suchte nach einer neuen Grundlage für alle von der Parallaxe abhängigen Rechnungen. Nachdem ich so glücklich war, dieselbe zu finden und eine neue Theorie der Sonnenfinsternisse aufzustellen, war es mir auch möglich, für die Bestimmung der Mondesparallaxe aus Sonnenfinsternissen eine Formel zu entwickeln, die man im Vergleich zu dem bisherigen Verfahren sehr vorteilhaft wird nennen müssen. Die teilweise elementare Ableitung verbreitete aber auch viel Licht auf die Differentialformeln und nützte so auch dem ersten Problem. Dass die Theorie der Sonnenfinsternisse nicht nach allen Seiten hin erörtert und mit einem Beispiele versehen werden konnte, daran trägt der für ein Gymnasialprogramm kurz bemessene Raum, dann wol auch der Mangel an Zeit, woran der Verfasser in diesem Schuljahre besonders litt, die Schuld; derselbe hofft aber bei einer anderen Gelegenheit das hier Versäumte nachzuholen, und behält sich alle Rechte vor.

I. Vorausberechnung für den Erdmittelpunkt.



Im sphärischen Dreiecke VPS sei P der Pol des Aequators, in V und S befinden sich zwei Gestirne, wovon wenigstens eines mit Eigenbewegung, die Entfernung der Mittelpunkte derselben sei $m = VS$; M_v und M_s sind dann die entsprechenden Positionswinkel; wenn ferner α, δ die Rectascension und Declination des Gestirnes V, A und D die Rectascension und Declination des Gestirnes S bedeuten, so ist $VP = 90 - \delta$, $SP = 90 - D$ und der Winkel $VPS = \alpha - A$; vermöge der Gaussischen Formeln ist nun

$$\begin{aligned}
\sin {}^1/_2\, m \sin {}^1/_2 (M_v + M_s) &= \sin {}^1/_2 (\alpha - A) \cos {}^1/_2 (\delta + D)\\
\sin {}^1/_2\, m \cos {}^1/_2 (M_v + M_s) &= \cos {}^1/_2 (\alpha - A) \sin {}^1/_2 (\delta - D)\\
\cos {}^1/_2\, m \sin {}^1/_2 (M_v - M_s) &= \sin {}^1/_2 (\alpha - A) \sin {}^1/_2 (\delta + D)\\
\cos {}^1/_2\, m \cos {}^1/_2 (M_v - M_s) &= \cos {}^1/_2 (\alpha - A) \cos {}^1/_2 (\delta - D)
\end{aligned}$$

Zur Zeit des Vorüberganges eines Gestirnes vor dem anderen sind ${}^1/_2\, m$, ${}^1/_2 (\delta - D)$ und ${}^1/_2 (\alpha - A)$ sehr klein, so dass man die Sinuse davon gleich den Bögen, die Cosinuse aber gleich der Einheit setzen kann; ebenso ist M_v von M_s nur um eine Kleinigkeit verschieden, so dass man hie und da $M_v = M_s$ angenommen findet; wir wollen der Genauigkeit wegen dieser Annahme nicht folgen, sondern setzen ${}^1/_2 (M_v + M_s) = M$; dem Gesagten gemäss ist nun

$$\left.\begin{aligned}
m \sin M &= (\alpha - A) \cos {}^1/_2 (\delta + D)\\
m \cos M &= \delta - D
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1.)$$

Weil die Vorzeichen von $\alpha - A$ und $\delta - D$ zur Bestimmung des Quadranten von M dienen, so bleibt m immer und unter allen Umständen positiv und es kann mithin keine negativen Distanzen geben. Im Augenblicke der Conjunction in Rectascension ist $\alpha - A = 0$, daher auch $\sin M = 0$, hingegen ist $\cos M = \pm 1$, je nachdem $\delta - D$ positiv oder negativ ausfällt. Im Augenblicke der Conjunction, welche Zeit wir mit T bezeichnen wollen, ist demnach $M = 0^\circ$ oder 180°, je nachdem der zu dieser Zeit stattfindende Declinationsunterschied $\delta - D$, welche Grösse wir kurz mit c bezeichnen, positives oder negatives Vorzeichen hat. Die zur Zeit T stattfindende Distanz ist aber $m = \delta - D$, wenn $\delta > D$, oder $m = D - \delta$, wenn $D > \delta$, so dass m positiv bleibt. Die beiden Grössen m und c dürfen mithin nicht verwechselt werden. T und c müssen aus den Ephemeriden berechnet werden, und zwar ist T die mittlere Zeit des Meridians, für welchen die Ephemeriden gelten (London, Paris, Berlin), wir werden ihn kurz Hauptmeridian nennen. Für einen anderen Meridian, der vom obengenannten um l^h gegen Osten zu liegt, ist diese Zeit $T + l^h$.

Bedeuten dann $\frac{d(\alpha - A)}{dx}$ und $\frac{d(\delta - D)}{dx}$ die relative stündliche Bewegung in Rectascension und Declination der beiden Gestirne, und setzt man

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \frac{d(\alpha - A)}{dx} \cos {}^1/_2 (\delta + D) \\ n \cos N &= \frac{d(\delta - D)}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.)$$

so bedeutet $n \sin N$ die stündliche Bewegung in ostwestlicher und $n \cos N$ in nordsüdlicher Richtung; dabei ist n wie oben m immer positiv.* Zur Zeit $T + \tau$, in welcher die Distanz der beiden Gestirne allgemein wie in 1.) m betragen mag und wo τ Stunden mittlerer Zeit bedeutet, ist dann

$$\left.\begin{aligned} m \sin M &= n\tau \sin N = (\alpha - A) \cos {}^1/_2 (\delta + D) \\ m \cos M &= c + n\tau \cos N = \delta - D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.)$$

Multiplicirt man mit Ausschluss der dritten Teile die erste Zeile mit $\cos N$, die zweite mit $\sin N$, so erhält man

$$m \sin (N - M) = c \sin N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.)$$

Multiplicirt man hingegen die erste Zeile mit $\sin N$, die zweite mit $\cos N$, so erscheint

$$m \cos (N - M) = n\tau + c \cos N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.)$$

Aus 5.) ergibt sich sofort

$$\tau = -\frac{c}{n} \cos N + \frac{m}{n} \cos (N - M), \text{ daher}$$

$$T + \tau = T - \frac{c}{n} \cos N + \frac{m}{n} \cos (N - M) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

Für die Zeit einer äusseren Ränderberührung ist $m = R + r$, für die Zeit einer inneren $m = R - r$, wo R und r die scheinbaren Radien der beiden Gestirne bedeuten, und zwar möge R immer der grössere Radius sein.

* Als Argument für die Berechnung der stündlichen Bewegung und der Grösse $^1/_2 (\delta + D)$ nimmt man zuerst die Conjunctionszeit T, dann, wenn man genauer sein will, die Zeit der Mitte des Vorüberganges.

Aus 4.) erhält man $sin(N - M)$ sammt seinem Vorzeichen; über das Zeichen von $cos(N - M)$ entscheidet aber, da sonst nichts näheres vorliegt, die Natur der Aufgabe, und zwar wird dasselbe für Zeiten vor der Mitte des Durchganges als negativ, hingegen für Zeiten nach dieser Mitte als positiv gelten müssen. Quadrirt und addirt man die Gleichungen 4.) und 5.) und löst die neue Gleichung nach τ auf, so erhält man in der Tat für $cos(N - M)$ ein doppeltes Vorzeichen, welches im ebenerwähnten Sinne der Aufgabe zu deuten ist. Behält man dies im Gedächtnisse, so kann man die Gleichung α) als die allgemeinere gelten lassen. Man erhält somit für die vier verschiedenen Berührungszeiten und für einen Ort, der vom Hauptmeridian um l^h gegen Osten zu liegt, die allgemeine Formel:

$$T + l + \tau = T + l - \frac{c}{n} cos\, N + \frac{R \pm r}{n} cos\,(N - M) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \beta)$$

Aus der Gleichung 4.), der wir auch die Form $m = \frac{c\, sin\, N}{sin\,(N - M)}$ geben können, sieht man, dass für $sin(N - M) = \pm 1$ die Distanz m zu einem Minimum wird; damit nämlich m positiv bleibt, müssen Zähler und Nenner des Bruches gleich bezeichnet sein; ist also die für einen Vorübergang constante Grösse $c\, sin\, N$ positiv, so ist für das Minimum in m der Nenner $sin(N - M) = 1$ oder $N - M = 90^0$, ist hingegen $c\, sin\, N$ negativ, so ist $N - M = 270^0$. Weil nun zur Zeit des Minimums in der Distanz $cos(N - M) = 0$ ist, so ist diese Zeit ausgedrückt durch $T - \frac{c}{n} cos\, N$. Dieser Ausdruck gibt aber, wie man ohne weiteres sieht, die Zeit der Mitte des Vorüberganges an; dass dem so ist, geht auch aus dem bekannten geometrischen Satze hervor, dass nämlich der auf der Sehne eines Kreises senkrecht stehende Radius dieselbe halbirt. Die Grösse der Verfinsterung wird gewöhnlich in Zollen (Zwölfteln) des Durchmessers angegeben, das heisst, man teilt den Durchmesser der Sonne in zwölf Teile, Zolle genannt, ein und gibt an, wie viele Zolle vom Monde bedeckt werden. Ein Zoll beträgt daher $\frac{R}{6}$ des Sonnendurchmessers. Bei einer z-zölligen Finsternis erscheint demnach $\frac{zR}{6}$ des Durchmessers bedeckt; die Grösse dieser Bedeckung ist aber auch ausgedrückt durch $R + r - m$, mithin

$$\frac{zR}{6} = R + r - m, \text{ und } z = 6\left(1 + \frac{r - m}{R}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6.)$$

Teilt man z durch 12, also $\frac{z}{12} = {}^1/_2\left(1 + \frac{r - m}{R}\right)$, so hat man die Grösse der Verfinsterung in Teilen des Durchmessers, wie man sie hie und da auch anzugeben pflegt. Je kleiner m ist, desto bedeutender wird z; da nun das Minimum von m zur Zeit der Mitte des Vorüberganges stattfindet, so ist die zu dieser Zeit stattfindende Grösse der Verfinsterung ein Maximum, welches sich aus 6.) leicht berechnen lässt, man braucht nur für m die kürzeste Distanz $k = c\, sin\, N$, welche Grösse, als Distanz betrachtet, immer positiv zu nehmen ist, einzusetzen. Wird $R + r < k$, so ist, wie man aus 4.) ersieht, $sin(N - M)$ unmöglich, das heisst, das Phänomen ist für den Erdmittelpunkt nicht sichtbar.

Als Beispiel bringen wir die Vorausberechnung des nächsten Venusvorüberganges am 6. Dezember 1882. Im Nautical Almanac für das Jahr 1882 findet man für den mittleren Mittag des Greenwicher Meridians folgende Venus- und Sonnenörter:

	Venus α	δ	Sonne A	D
6. Dezbr.	$16^h\,53^m\,10{\cdot}10^s$	$-22^\circ\,47'\,46{\cdot}1''$	$16^h\,51^m\,55{\cdot}79^s$	$-22^\circ\,31'\,49{\cdot}7''$
7. „	50 41·34	28 0·3	56 18·25	38 42·3
8. „	48 14·19	8 9·3	17 0 41·22	45 8·3
9. „	45 49·68	−21 48 19·2	5 4·67	51 7·5
10. „	43 28·79	28 36·0	9 28·56	56 39·6
11. „	41 12·42	9 5·7	13 52·85	−23 1 44·5

Der Sonnenhalbmesser $R = 16'\,13''$, der Venushalbmesser $r = 31{\cdot}4''$, die Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittage des 6. Dezember $\Theta_0 = 17^h\,0^m\,40{\cdot}53^s$.

Auf Grundlage dieser Daten findet man mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel und mit Berücksichtigung noch der fünften Differenzen folgende Reihen, in denen x Stunden bedeutet und der mittlere Greenwicher Mittag des 6. Dezember 1882 als Ausgangsepoche dient:

$$(\alpha - A)_x = 1114{\cdot}65'' - 257{\cdot}134167''\,x + 0{\cdot}000477516''\,x^2 + 0{\cdot}000189887''\,x^3 \quad \ldots a)$$

$$^1/_2\,(\alpha + A)_x = 253^\circ\,8'\,14{\cdot}175'' + 35{\cdot}3076''\,x + 0{\cdot}007042''\,x^2 + 0{\cdot}0000954''\,x^3 \quad \ldots b)$$

$$(\delta - D)_x = -\,956{\cdot}4'' + 66{\cdot}96''\,x - 0{\cdot}013252''\,x^2 - 0{\cdot}00007173''\,x^3 \quad \ldots c)$$

$$^1/_2\,(\delta + D)_x = -\,22^\circ\,39'\,47{\cdot}9'' + 15{\cdot}7334''\,x + 0{\cdot}016587''\,x^2 - 0{\cdot}00004159''\,x^3 \quad \ldots d)$$

Daraus ergibt sich die stündliche Bewegung:

$$\frac{d(\alpha - A)}{dx} = -\,257{\cdot}134167'' + 0{\cdot}000955''\,x + 0{\cdot}00056966''\,x^2 \quad \ldots e)$$

$$\frac{d(\delta - D)}{dx} = +\,66{\cdot}96'' - 0{\cdot}026504''\,x - 0{\cdot}00021519''\,x^2 \quad \ldots f)$$

Die hier gegebenen Reihen sichern bis gegen die zehnte Stunde des 6. Dezember hin, wo das Phänomen längst geschwunden sein wird, eine Genauigkeit in der dritten Decimalstelle; man wird daher aus denselben für eine jede beliebige Zeit des Vorüberganges mit Zuhilfenahme der Gleichungen in 1.) die Grössen m und M mit hinlänglicher Sicherheit berechnen können.

Setzt man $\alpha - A = 0$, so hat man aus *a)* die Gleichung

$$0{\cdot}000189887\,x^3 + 0{\cdot}000477516\,x^2 - 257{\cdot}134167\,x + 1114{\cdot}65 = 0,$$

aus welcher man $x = T = 4{\cdot}335^h$ die Zeit der Conjunction erhält. Geht man mit diesem Werte von x in die Reihen *c)*, *d)*, *e)*, *f)* ein, so hat man für die Zeit der Conjunction $\delta - D = c = -\,666{\cdot}381''$, $^1/_2\,(\delta + D) = -\,22^\circ\,38'\,39{\cdot}5''$, $\frac{d(\alpha - A)}{dx} = -\,257{\cdot}123''$, $\frac{d(\delta - D)}{dx} = +\,66{\cdot}841''$. Die Gleichungen in 2.) geben nun

$$\begin{aligned} lg\,\frac{d(\alpha - A)}{dx} &= 2{\cdot}4101409_n \\ lg\cos {}^1/_2\,(\delta + D) &= 9{\cdot}9651606 \\ \hline lg\,n\sin N &= 2{\cdot}3753015_n \\ lg\,n\cos N &= 1{\cdot}8250429 \\ \hline lg\,tg\,N &= 0{\cdot}5502586_n \end{aligned}$$

$$N = -\,74^\circ\,16'\,8{\cdot}5'' = 285^\circ\,43'\,51{\cdot}5''$$

$$\begin{aligned} lg\,n\sin N &= 2{\cdot}3753015_n \\ lg\sin N &= 9{\cdot}9834272_n \\ \hline lg\,n &= 2{\cdot}3918743 \end{aligned}$$

Nun rechnen wir die Zeit der Mitte und die kürzeste Distanz k

$$\begin{array}{ll} lg\, c & = 2\cdot8237227_n \\ lg\, cos\, N & = 9\cdot4331628 \\ \hline & 2\cdot2568855_n \\ lg\, n & = 2\cdot3918743 \\ \hline & 9\cdot8650112_n = lg - 0\cdot73284 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} T & = 4\cdot335^h \\ -\frac{c}{n} cos\, N & = 0\cdot73284^h \\ \hline T - \frac{c}{n} cos\, N & = 5\cdot06784^h \text{ Zeit d. Mitte,} \end{array}$$

$k = 641\cdot43'' = 10'\,41\cdot43''$ kürzeste Distanz.

$$\begin{array}{ll} lg\, c & = 2\cdot8237227_n \\ lg\, sin\, N & = 9\cdot9834272_n \\ \hline lg\, k & = 2\cdot8071499 = lg\, 641\cdot43'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} N - M & = 90^0 \text{ zur Zeit d. Mitte,} \\ N & = 285^0\, 43'\, 51\cdot5'' \\ \hline M & = 195^0\, 43'\, 51\cdot5'' \end{array}$$

der Positionswinkel zur Zeit der Mitte.

Mit dem Werte $x = 5\cdot06784^h$ bekommt man nun für die Zeit der Mitte $\frac{d(\alpha - A)}{dx} = -257\cdot1147''$, $\frac{d(\delta - D)}{dx} = +66\cdot82''$, $\frac{1}{2}(\delta + D) = -22^0 38' 27\cdot74''$. Berechnet man mit diesen Daten die Grössen n und N nochmals, so erhält man für die Zeit der Mitte $N = -74^0\, 16'\, 25''$ oder $285^0\, 43'\, 35''$, $M = 195^0\, 43'\, 35''$, $lg\, n = 2\cdot3918670$.

Für die Zeit einer äusseren Berührung ist $m = R + r = 1004\cdot4''$; der zu dieser Distanz gehörige Winkel $N - M$ ergibt sich aus 4.):

$$\begin{array}{ll} lg\, c & = 2\cdot8237227_n \\ lg\, sin\, N & = 9\cdot9834309_n \\ \hline lg\, c\, sin\, N & = 2\cdot8071536 \\ lg\, (R + r) & = 3\cdot0019067 \\ \hline lg\, sin\, (N - M) & = 9\cdot8052469 \end{array}$$

$N - M_a = 39^0\, 41'\, 22''$ für den Austritt,
$N - M_e = 180^0 - 39^0\, 41'\, 22'' = 140^0\, 18'\, 38''$ für den Eintritt.

Daraus ergibt sich, wenn man den Index e für den Eintritt und a für den Austritt setzt, $M_e = 145^0\, 24'\, 57''$, $M_a = 246^0\, 2'\, 13''$.

Die Zählung des Positionswinkels M beginnt, wie dies aus der Figur ersichtlich ist, am Nordpunkte der Sonnenscheibe oder in der Figur beim Punkte P und geht dann in östlicher Richtung, also nach links weiter. Um nun auch die Zeiten der äusseren Berührung beim Ein- und Austritte zu berechnen, so ist

$$\begin{array}{ll} lg\, (R + r) & = 3\cdot0019067 \\ lg\, cos\, (N - M) & = 9\cdot8862183_{pn} \\ \hline & 2\cdot8881250_{pn} \\ lg\, n & = 2\cdot3918670 \\ \hline & 0\cdot4962580_{pn} = lg \pm 3\cdot13515 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 5\cdot06784^h \text{ Zeit d. Mitte (Greenw.)} \\ & \pm\, 3\cdot13515^h \\ \hline x_e = & 1\cdot93269^h \text{ erste} \\ x_a = & 8\cdot20299^h \text{ letzte} \end{array} \Big\} \text{ äussere Berührung.}$$

Zur Zeit einer inneren Berührung ist $m = R - r = 941\cdot6''$; der zu dieser Distanz gehörige Winkel $N - M$ findet sich wieder aus 4.):

$$\begin{array}{ll} lg\, c\, sin\, N & = 2\cdot8071536 \\ lg\, (R - r) & = 2\cdot9738664 \\ \hline lg\, sin\, (N - M) & = 9\cdot8332872 \end{array}$$

$N - M_a = 42^0\, 56'\, 20''$,
$N - M_e = 180^0 - 42^0 56' 20'' = 137^0\, 3' 40''$, daher
$M_e = 148^0\, 39'\, 55''$, $M_a = 242^0\, 47'\, 15''$.

$$\begin{array}{ll} lg\, (R - r) & = 2\cdot9738664 \\ lg\, cos\, (N - M) & = 9\cdot8645582_{pn} \\ \hline & 2\cdot8384246_{pn} \\ lg\, n & = 2\cdot3918670 \\ \hline & 0\cdot4465576_{pn} = lg \pm 2\cdot79613 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 5\cdot06784^h \text{ Zeit der Mitte,} \\ & \pm\, 2\cdot79613^h \\ \hline x_e = & 2\cdot27171^h \text{ erste} \\ x_a = & 7\cdot86397^h \text{ letzte} \end{array} \Big\} \text{ innere Berührung.}$$

II. Vorausberechnung für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche.

Die Formel $\beta)$ in der früheren Nummer gibt die Zeit einer Ränderberührung an, wie sie für einen im Erdmittelpunkte befindlichen Beobachter eintreffen würde; es ist nun die Frage, wie man die Zeit der Erscheinung einer Phase für einen beliebigen Ort der Erdoberfläche vorausberechnen kann. Denn hier wird infolge der Veränderungen, welche der geänderte Standpunkt oder die Parallaxe nach sich zieht, die Sache ein wenig anders sich gestalten; die Distanz der Mittelpunkte der beiden Gestirne wird in ebendemselben absoluten Augenblicke von einem Punkte der Erdoberfläche aus gesehen anders sich ausnehmen, als wie sie vom Erdmittelpunkte aus betrachtet erscheint, und es werden daher auch ebendieselben Berührungen an beiden Orten zu verschiedenen Zeiten stattfinden. Um die Sache ganz allgemein zu behandeln und alle Fälle parallaktischer Verschiebung während eines Vorüberganges zu umfassen, nehmen wir ausser den geocentrischen Grössen m, M, α, A, δ, D die in ebendemselben Augenblicke an irgend einem Orte der Erdoberfläche beobachteten Grössen m', M', α', A', δ', D' an. Für die Dauer des Vorüberganges ist daher wie oben

$$m \sin M = (\alpha - A) \cos \tfrac{1}{2} (\delta + D) \qquad m' \sin M' = (\alpha' - A') \cos \tfrac{1}{2} (\delta' + D')$$
$$m \cos M = \delta - D \qquad m' \cos M' = \delta' - D'$$

Wenn wir der Kürze halber $(\alpha - A) \cos \frac{1}{2} (\delta + D) = a$, $\delta - D = b$, $(\alpha' - A') \cos \frac{1}{2} (\delta' + D') = a'$, $\delta' - D' = b'$ setzen, so hat man einfach

$$\left.\begin{aligned} m \sin M &= a \\ m \cos M &= b \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots\ldots A) \qquad \left.\begin{aligned} m' \sin M' &= a' \\ m' \cos M' &= b' \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots\ldots A')$$

Multiplicirt man in $A)$ die erste Gleichung mit $\cos M$, die zweite mit $\sin M$, und dem entsprechend in $A')$ die erste Gleichung mit $\cos M'$, die zweite mit $\sin M'$, so ist

$$a \cos M = b \sin M \quad \ldots . B) \qquad a' \cos M' = b' \sin M' \quad \ldots\ldots B')$$

Multiplicirt man in $A)$ die erste Gleichnng mit $\cos M'$, die zweite mit $\sin M'$, und dem entsprechend in $A')$ die erste Gleichung mit $\cos M$, die zweite mit $\sin M$, so bekommt man durch Subtraction

$$m \sin (M - M') = a \cos M' - b \sin M' \qquad m' \sin (M - M') = b' \sin M - a' \cos M$$

aus $B')$ und $B)$ aber hat man

$$0 = a' \cos M' - b' \sin M' \qquad 0 = b \sin M - a \cos M$$

Subtrahirt man Gleiches vom Gleichen, so kommt

$$m \sin (M - M') = (a - a') \cos M' - (b - b') \sin M' \quad \ldots . C)$$
$$m' \sin (M - M') = (a - a') \cos M - (b - b') \sin M \quad \ldots . D)$$

Subtrahirt man $D)$ von $C)$, so ist

$$(m - m') \sin (M - M') = (a - a') (\cos M' - \cos M) + (b - b') (\sin M - \sin M')$$

Löst man nun die Differenzen der Sinuse und Cosinuse in Producte auf und bedenkt, dass $\sin (M - M') = 2 \sin \frac{1}{2} (M - M') \cos \frac{1}{2} (M - M')$ ist, so ergibt sich

$$(m - m') \cos \tfrac{1}{2} (M - M') = (a - a') \sin \tfrac{1}{2} (M + M') + (b - b') \cos \tfrac{1}{2} (M + M') \quad . . E)$$

Nun wollen wir die Ausdrücke

$$a - a' = (\alpha - A) \cos {}^1/_2 (\delta + D) - (\alpha' - A') \cos {}^1/_2 (\delta' + D')$$

$$b - b' = (\delta - D) - (\delta' - D') = (\delta - \delta') - (D - D')$$

in eine möglichst einfache Form kleiden, um sie dann in die hier entwickelten Gleichungen *C), D), E)* einzuführen.

Setzt man der Kürze halber ${}^1/_2 (\delta + D) = \delta_0$ und ${}^1/_2 (\delta' + D') = \delta_0'$ und bedenkt, dass allgemein

$$x \cos \alpha = x \cos \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} + \frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) = x \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2} - x \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

$$x' \cos \alpha' = x' \cos \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) = x' \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2} + x' \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

daher

$$x \cos \alpha - x' \cos \alpha' = (x - x') \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2} - (x + x') \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

so erhält man $(\alpha - A) \cos \delta_0 - (\alpha' - A') \cos \delta_0' =$

$$= [(\alpha - A) - (\alpha' - A')] \cos \frac{\delta_0 + \delta_0'}{2} \cos \frac{\delta_0 - \delta_0'}{2} -$$

$$- [(\alpha - A) + (\alpha' - A')] \sin \frac{\delta_0 + \delta_0'}{2} \sin \frac{\delta_0 - \delta_0'}{2}.$$

Weil nun ${}^1/_2 (\delta_0 - \delta_0') = {}^1/_4 (\delta - \delta' + D - D')$ ein sehr kleiner Winkel ist und zur Zeit des Vorüberganges eines Gestirnes vor dem anderen der Betrag $(\alpha - A) + (\alpha' - A') = (\alpha + \alpha') - (A + A')$ einmal in die Nulle übergehen muss, daher zu keiner Zeit während der ganzen Dauer des Phänomens gross sein kann, da weiters ${}^1/_2 (\delta_0 + \delta_0')$ nie viel über 20^0 betragen wird, so können wir das mit $\sin {}^1/_2 (\delta_0 - \delta_0')$ multiplicirte Glied ganz gut vernachlässigen, $\cos {}^1/_2 (\delta_0 - \delta_0') = 1$ setzen und sagen

$$a - a' = [(\alpha - \alpha') - (A - A')] \cos \frac{\delta_0 + \delta_0'}{2}.$$

Jetzt tritt die Aufgabe an uns heran, $\alpha - \alpha'$, $A - A'$, $\delta - \delta'$, $D - D'$ zu bestimmen. Im sphärischen Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Gestirn sei h die Höhe des letzteren, δ allgemein die Declination, s der Stundenwinkel, ω das Azimut, C der parallaktische Winkel und schliesslich φ' die geocentrische oder, wie sie auch genannt wird, die verbesserte Polhöhe;*

* Für die Berechnung der geocentrischen Polhöhe φ' aus der scheinbaren φ und des Erdradius ϱ für einen Ort, dessen scheinbare Polhöhe φ ist, hat man bekanntlich die Gleichungen

$$tg\, \varphi' = \frac{b^2}{a^2}\, tg\, \varphi \qquad \varrho = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi - \varphi')}}.$$

wo a die halbe grosse (Aequatoreal) und b die kleine (Polar) Axe des elliptischen Erdsphäroides bedeuten. Der wahrscheinlichste Wert für die Erdabplattung ist nun $\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{289}$, mithin $\frac{b}{a} = \frac{288}{289}$, daher ist

$$tg\, \varphi' = [9 \cdot 9969894]\, tg\, \varphi, \text{ und } tg\, \varphi = [0 \cdot 0030106]\, tg\, \varphi',$$

wobei die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Bezeichnet man dann die Grösse $\varrho : a$ oder den in Teilen des Aequatorealhalbmessers der Erde ausgedrückten Erdradius für den betreffenden Ort mit ϱ_0, so ist

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi - \varphi')}}.$$

wenn man erwägt, dass $s = \Theta - \alpha$ ist, wo Θ die Sternzeit der Beobachtung und α die Rectascension des Gestirnes bedeuten, so erhält man die bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi' \sin\delta + \cos\varphi' \cos\delta \cos(\Theta - \alpha) \\ \sin\delta &= \sin\varphi' \sin h - \cos\varphi' \cos h \cos\omega \\ \sin\varphi' &= \sin h \sin\delta + \cos h \cos\delta \cos C \end{aligned}\right\} \;.\; 7.) \qquad \left.\begin{aligned} \cos h \sin C &= \cos\varphi' \sin s \\ \cos\delta \sin s &= \cos h \sin\omega \\ \cos\varphi' \sin\omega &= \cos\delta \sin C \end{aligned}\right\} \;.\; 8.)$$

Differencirt man die ersten zwei Gleichungen in 7.), indem man ausser φ' und Θ alles als veränderlich annimmt, so kommt

$$\begin{aligned} dh &= \cos C\, d\delta + \cos\delta \sin C\, d\alpha \\ d\delta &= \cos C\, dh + \cos h \sin C\, d\omega \end{aligned}$$

Da es sich in unserem Falle um die Aenderungen handelt, welche die Parallaxe bewirkt, so bedeutet dh augenfällig nichts anderes als die Höhenparallaxe, also ist $dh = \pi \cos h'$, wo π die momentane, auf den Ort reducirte Horizontalparallaxe des Gestirnes und h' die an der Erdoberfläche gemessene Höhe desselben bedeutet. Dabei erlauben wir uns die Erde als vollkommene Kugel anzunehmen, und setzen daher auch $d\omega = 0$. In Berücksichtigung alles dessen gehen aus den beiden Differentialformeln für die Parallaxe in Declination und Rectascension die Ausdrücke hervor:

$$d\delta = \pi \cos h' \cos C \qquad d\alpha = \frac{\pi \cos h' \sin C}{\cos\delta}.$$

Bezeichnet man dann, um die hier entwickelten Formeln auf unseren Fall anzuwenden, die Horizontalparallaxe des der Erde näheren Gestirnes mit π_v, die des entfernteren mit π_s, sind ferner C_v und C_s die beiden parallaktischen Winkel und h_v', h_s' die entsprechenden an der Erdoberfläche beobachteten Höhen der beiden Gestirne, so ist

$$d\delta = \delta - \delta' = \pi_v \cos h_v' \cos C_v \qquad dD = D - D' = \pi_s \cos h_s' \cos C_s$$

$$d\alpha = \alpha - \alpha' = \frac{\pi_v \cos h_v' \sin C_v}{\cos\delta} \qquad dA = A - A' = \frac{\pi_s \cos h_s' \sin C_s}{\cos D}.$$

Weil zur Zeit eines Vorüberganges die Höhen sowol als auch die parallaktischen Winkel der beiden Gestirne um eine Kleinigkeit von einander verschieden sind, so können wir, um nur mit einer beiden Gestirnen gemeinsamen Höhe und einem einzigen parallaktischen Winkel zu tun zu haben, setzen

$$1/2\,(h_v' + h_s') = h', \quad 1/2\,(C_v + C_s) = C, \quad 1/2\,(\delta + D) = \delta_0 \quad \text{und sagen}$$

$$d\delta - dD = (\pi_v - \pi_s) \cos C \cos h' \qquad d\alpha - dA = (\pi_v - \pi_s)\, \frac{\sin C \cos h'}{\cos\delta_0}.$$

Indem wir so verfahren, handeln wir ganz im Sinne des Positionswinkels $M = 1/2\,(M_v + M_s)$. Demnach ist, weil der Unterschied zwischen δ_0 und $1/2\,(\delta_0 + \delta_0')$ vernachlässiget werden kann

$$a - a' = (\pi_v - \pi_s) \sin C \cos h' \qquad b - b' = (\pi_v - \pi_s) \cos C \cos h'.$$

Führt man nun die hier gefundenen Werte von $(a - a')$ und $(b - b')$ in die Gleichungen *C), D), E)* ein und setzt in der letzteren der Kürze halber $1/2\,(M + M') = \mu$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} m \sin(M - M') &= (\pi_v - \pi_s) \sin(C - M') \cos h' \\ m' \sin(M - M') &= (\pi_v - \pi_s) \sin(C - M) \cos h' \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 9.)$$

$$(m - m') \cos 1/2\,(M - M') = (\pi_v - \pi_s) \cos(C - \mu) \cos h' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 10.)$$

Um das Ganze noch mehr zu beleuchten, wollen wir auch reine Differentialformeln, die den Einfiuss der Parallaxe auf die Distanz und den Positionswinkel veranschaulichen, ableiten; dabei können wir den Ausdruck, der die Zeit enthält, mitnehmen. Zu diesem Ende differenziren wir die hier zu Grunde gelegten Gleichungen 3.), nämlich

$$m \sin M = n\tau \sin N = (\alpha - A) \cos \delta_0$$
$$m \cos M = c + n\tau \cos N = \delta - D$$

Man bekommt sofort nach bekannten Regeln des Differenzirens

$$\sin M\, dm + m \cos M\, dM = n \sin N\, d\tau = \cos \delta_0\, d(\alpha - A)$$
$$\cos M\, dm - m \sin M\, dM = n \cos N\, d\tau = d(\delta - D)$$

Multiplicirt man die erste Zeile mit $\cos M$, die zweite mit $\sin M$, so erhält man durch Subtraction

$$m\, dM = n \sin (N - M)\, d\tau = \cos \delta_0 \cos M\, d(\alpha - A) - \sin M\, d(\delta - D) \quad . \; . \; F)$$

Multiplicirt man hingegen die erste Zeile mit $\sin M$, die zweite mit $\cos M$, so bekommt man durch Addition

$$dm = n \cos (N - M)\, d\tau = \cos \delta_0 \sin M\, d(\alpha - A) + \cos M\, d(\delta - D) \quad . \; . \; . \; G)$$

Sind nun $d(\alpha - A)$ und $d(\delta - D)$ diejenigen Aenderungen, welche die Parallaxe bewirkt, so müssen wir $d(\alpha - A) = d\alpha - dA$ und ebenso $d(\delta - D) = d\delta - dD$ in dieser Hinsicht bestimmen. Dies haben wir oben schon getan und wir brauchen die dafür gefundenen Ausdrücke in $F)$ und $G)$ einfach zu substituiren. So bekommen wir allsogleich

$$\left.\begin{aligned} m\, dM &= n \sin (N - M)\, d\tau = (\pi_v - \pi_s) \sin (C - M) \cos h' \\ dm &= n \cos (N - M)\, d\tau = (\pi_v - \pi_s) \cos (C - M) \cos h' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 11.)$$

Daraus sieht man vor allem, dass für Orte, an denen $h' = 90^\circ$ ist oder welche die beiden Gestirne zur Zeit des Vorüberganges im Zenith zu beobachten in der Lage sind, sowol dm als auch dM zur Nulle werden, das heisst, die Distanz sowol als auch der Positionswinkel werden durch die Parallaxe in nichts geändert, die Orte sehen das Phänomen gerade so, wie aus dem Erdmittelpunkte. Da das Zenith im Meridian liegt, so setze man $h' = 90^\circ$ in die Meridiangleichung $90 - h' = \varphi' - \delta_0$, und man bekommt $\varphi' = \delta_0$ die geocentrische Breite eines solchen Ortes; weil ferner der Stundenwinkel $s = \Theta + l - \frac{1}{2}(\alpha + A) = 0$ ist, wo Θ die für den Hauptmeridian geltende Sternzeit einer für den Erdmittelpunkt berechneten Phase ist, so hat man die Längendifferenz des Ortes vom Hauptmeridian $l = \frac{1}{2}(\alpha + A) - \Theta$. Indem wir $\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta + D)$ und $\frac{1}{2}(\alpha + A)$ in Rechnung bringen, handeln wir im Sinne der ganzen bisherigen Entwickelung.

Wollte man z. B. den Ort ermitteln, der zur Zeit der Mitte (nämlich $5{\cdot}06784^h$ Greenw. Zeit) des nächsten Venusdurchganges die beiden Gestirne im Zenithe sieht, so ist, da die Sternzeit im mittleren Mittage in Greenwich für den 6. Dezember 1882 $\Theta_0 = 17^h\, 0^m\, 40{\cdot}53^s$ beträgt, und $5{\cdot}06784^h$ mittlere $= 5{\cdot}0817^h = 5^h\, 4^m\, 54{\cdot}12^s$ Sternzeit ist,

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= 17^h\, 0^m\, 40{\cdot}53^s \\ &\;\; 5\;\; 4\;\; 54{\cdot}12 \\ \hline \Theta &= 22^h\, 5^m\, 34{\cdot}65 = 331^\circ\, 23'\, 39{\cdot}75'' \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(\alpha + A)$ z. Z. d. Mitte $= 253^\circ\, 11'\, 13{\cdot}31''$ $\qquad \frac{1}{2}(\delta + D) = -22^\circ\, 38'\, 27{\cdot}7'' = \varphi'$

$l = -78^\circ\, 12'\, 26{\cdot}44''$ $\qquad \varphi = -22^\circ\, 46'\, 57''$

Der Ort liegt also $78^\circ\, 12'\, 26{\cdot}44''$ westl. von Greenwich, oder $60^\circ\, 32'\, 35{\cdot}44''$ westlich von Ferro und $22^\circ\, 46'\, 57''$ südlich vom Aequator.

Aus 10.) hat man nun

$$m = m' + (\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C - \mu) \cos h'}{\cos {}^1/_2 \, (M - M')} \quad \ldots \ldots \ldots \; 12.)$$

Diese Gleichung sagt, dass die an der Erdoberfläche gemessene Distanz m' noch einer Correction $(\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C - \mu) \cos h'}{\cos {}^1/_2 \, (M - M')}$ bedarf, um auf die gleichzeitige geocentrische Distanz m reducirt zu werden; die Gleichung setzt uns also in den Stand, zu jeder an irgend einem Orte der Erdoberfläche während eines Vorüberganges stattfindenden Phase die entsprechende, in ebendemselben Augenblicke vom Erdmittelpunkte aus gesehene Distanz zu berechnen; hat man m gefunden, so gehe man damit als mit einer wahren geocentrischen Distanz, die irgend einmal während des Vorüberganges statthat, in die Gleichungen 4.) und $a)$ der Nr. I ein und berechne die Zeit, in welcher die gleichzeitigen Grössen m und m' stattfinden. Hiermit ist im allgemeinen das Verfahren gekennzeichnet, das hier in Anwendung kommt. Für eine äussere oder innere Ränderberührung, wie sie an einem Orte der Erdoberfläche beobachtet wird, ist $m' = R' + r'$, wo R' und r' die durch die Parallaxe vergrösserten scheinbaren Halbmesser der beiden Gestirne bedeuten. Diese Vergrösserung, die indessen nur beim Monde einen nennenswerten Betrag erreicht, ist ausgedrückt in der Gleichung $r' = r \, (1 + \sin \pi \sin h)$, wo π die Horizontalparallaxe und h die Höhe des Gestirnes bezeichnen. Für $h = 0$ ist daher $r = r'$, das heisst, im Horizonte findet keine Vergrösserung statt. Die einer an der Erdoberfläche beobachteten Ränderberührung entsprechende geocentrische Distanz ist mithin

$$m = R' \pm r' + (\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C - \mu) \cos h'}{\cos {}^1/_2 \, (M - M')} \quad \ldots \ldots \; 13.)$$

Die Aufgabe, die hier gestellt werden kann, ist nun in der Hauptsache eine doppelte. Man kann nämlich für $C - M$ und h' bestimmte selbstgewählte Werte annehmen und fragen, in welcher Zeit die eine oder die andere Ränderberührung unter der gegebenen Annahme an der Erdoberfläche eintreffen wird, und welcher der Ort ist, der eine solche Ränderberührung zur betreffenden Zeit sieht; zweitens kann man um die Zeit fragen, in welcher ein bestimmter Ort der Erdoberfläche, der in den Grenzen der Sichtbarkeit liegt, die eine oder die andere Ränderberührung sieht. Die Bestimmung der Grenzen der Sichtbarkeit ist ein Teil der ersten Aufgabe, daher wir dieselbe vor allen kurz erledigen.

Nimmt man für $C - M$ und h' bestimmte selbstgewählte Werte an, und ist $m' = R' + r'$, so ergibt sich für eine äussere oder innere Ränderberührung an einem Orte der Erdoberfläche vor allem der Winkel $M - M'$ aus der Gleichung in 9.):

$$\sin (M - M') = \frac{\pi_v - \pi_s}{R' + r'} \sin (C - M) \cos h' \quad \ldots \ldots \; 14.)$$

Da nun $C - \mu = C - M + {}^1/_2 \, (M - M')$, so findet man aus 13.) die einer an der Erdoberfläche stattfindenden Ränderberührung entsprechende geocentrische Distanz m, womit man dann in die Gleichungen 4.) und $a)$ der Nr. I eingeht und den zu dieser Distanz gehörigen Positionswinkel M und ebenso die Zeit berechnet, in der dieselbe statthat, wodurch dann zugleich die Zeit der Ränderberührung an der Erdoberfläche gegeben ist. Man bekommt aber, weil $\cos (N - M)$ in $a)$ positiv und negativ zu nehmen ist, zwei Positionswinkel und zwei Zeiten, wovon die eine nach und die andere vor der Mitte des Vorüberganges liegt. Man kann nun weiters auch den Ort ermitteln, an dem eine Ränderberührung zu der so berechneten Zeit und unter der gegebenen Bedingung zu sehen ist. Denn es seien $C - M = \alpha$ und h' gegebene Grössen, so ist $\sin C = \sin(\alpha + M)$, $\cos C = \cos(\alpha + M)$, und man hat aus 7.) und 8.):

$$\left.\begin{array}{c} \sin\varphi' = \sin h \sin\delta_0 + \cos h \cos\delta_0 \cos(\alpha + M),\ \cos\varphi' \sin s = \cos h \sin(\alpha + M) \\ \text{und ausserdem } \sin h = \sin\varphi' \sin\delta_0 + \cos\varphi' \cos\delta_0 \cos s \end{array}\right\} . \quad 15.)$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen erhält man sofort φ' die geocentrische Breite des fraglichen Ortes, aus der zweiten ergibt sich dann $s = \Theta + l - \frac{1}{2}(\alpha + A)$, wo Θ die in Sternzeit verwandelte, für den Hauptmeridian geltende Zeit $T + \tau$ ist, die man aus *a)* gefunden, und l die nach Osten positiv gezählte Längendifferenz vom Hauptmeridian bedeutet. Um über den Quadranten von s zu entscheiden, bestimme man das Zeichen von $\cos s$ aus der dritten Gleichung. Ist s gefunden, so hat man dann $l = s + \frac{1}{2}(\alpha + A) - \Theta$. Hiebei ist der Unterschied von h' und h vernachlässiget, wollte man ihn berücksichtigen, so ist $h = h' + \frac{1}{2}(\pi_v + \pi_s) \cos h'$.

Darnach lassen sich nun leicht die Grenzen in Distanz, Zeit und Ort festsetzen. Nimmt man nämlich $C - M = 0^0$, 180^0 an, so ist vermöge 14.) $M - M' = 0$, das heisst, der an der Erdoberfläche gemessene Positionswinkel fällt mit dem aus dem Erdmittelpunkte beobachteten völlig zusammen. Infolge dessen wird $C - M = C - \mu = 0^0$, 180^0 und man erhält aus 13.) $m = R' \pm r' \pm (\pi_v - \pi_s) \cos h'$. Lässt man dabei auch $h' = 0$ werden, so hat man als Grenzwert $m = R \pm r + (\pi_v - \pi_s)$. Ist eines der beiden Gestirne der Mond, so ist $R + r < \pi_v - \pi_s$, daher kann in diesem Falle, weil m stets positiv bleiben muss, nur der Grenzwert $m = R \pm r + \pi_v - \pi_s$ zulässig sein, wobei, wie schon bemerkt, R stets den grösseren Halbmesser bedeuten möge. Bei Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen durch den Mond können also nie gleichzeitig $C - M = 180^0$ und $h' = 0^0$ sein, wol aber ist es bei den Vorübergängen der Venus und des Mercur vor der Sonnenscheibe dem Winkel $C - M$ gestattet, unter Beibehaltung des Wertes $h' = 0$ den ganzen Kreisbogen zu durchlaufen, wodurch die Curve der Sichtbarkeit eine gewisse Abrundung erhält.

Befindet sich allgemein der Winkel $C - \mu$ im ersten oder vierten Quadranten, so ist, wie aus 13.) ersichtlich ist, die Correction positiv und es ist $m > R \pm r$, daher wird, weil m und τ gleichzeitig wachsen und abnehmen, in Hinsicht auf die für den Erdmittelpunkt berechneten Zeiten der Eintritt für die Erdoberfläche beschleuniget, hingegen der Austritt verzögert; das Gegenteil wird sich ereignen, wenn $C - \mu$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, der Eintritt wird später, der Austritt hingegen früher erfolgen als im Erdmittelpunkte. Ist daher $C - M = 0^0$, $h' = 0^0$, so bekommt man $m_1 = R + r + \pi_v - \pi_s$ und damit aus den Gleichungen 4.) und *a)* die Zeiten des frühesten Anfanges und spätesten Endes des Vorüberganges für die Erdoberfläche sammt den zwei betreffenden Positionswinkeln, welche, da wegen $C - M = 0^0$ auch $M - M' = 0$ wird, ebenso gut der Erdoberfläche als dem Erdmittelpunkte angehören. Gerade so erhält man mit dem Grenzwerte $m_2 = R - r + \pi_v - \pi_s$ die Zeit einer frühesten ersten und spätesten zweiten inneren Berührung. Setzt man andererseits $C - M = 180^0$, $h' = 0^0$, so bekommt man mit dem Grenzwerte $m_3 = R + r - (\pi_v - \pi_s)$ die Zeit des spätesten Anfanges und frühesten Endes des Vorüberganges für die Erdoberfläche, und mit dem Grenzwerte $m_4 = R - r - (\pi_v - \pi_s)$ die Zeit einer spätesten ersten und frühesten zweiten inneren Berührung. Dass m_3 und m_4 bei Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen durch den Mond unmöglich sind, geht aus dem früher Gesagten hervor. Sind nun die Zeiten und entsprechenden Positionswinkel gefunden, so ergeben sich die Oerter aus den Gleichungen in 15.), welche für $C - M = \alpha = 0^o$, 180^o und $h' = 0^o$ also für die Bestimmung der Grenzörter in folgende drei übergehen:

$$\sin\varphi' = \pm\cos\delta_0 \cos M, \quad \cos\varphi' \sin s = \pm \sin M, \quad \cos s = -tg\,\varphi'\, tg\,\delta_0.$$

Für den nächsten Venusvorübergang am 6. Dezember 1882 sind $\pi_v = 33{\cdot}5''$, $\pi_s = 9''$, daher $\pi_v - \pi_s = 24{\cdot}5''$; da ausserdem $R + r = 1004{\cdot}4''$ und $R - r = 941{\cdot}6''$ sind, so hat man $m_1 = 1028{\cdot}9''$, $m_2 = 966{\cdot}1''$, $m_3 = 979{\cdot}9''$, $m_4 = 917{\cdot}1''$ als Grenzwerte. Geht man mit m_1 in die Gleichungen 4.) und *a)* ein, so ist

$$\begin{array}{ll} lg\, c \sin N & = 2{\cdot}8071536 \\ lg\, m_1 & = 3{\cdot}0123732 \\ \hline lg \sin(N - M) & = 9{\cdot}7947804 \end{array}$$

$N - M_a = 38^o\, 33'\, 58{\cdot}6''$
$N - M_e = 180^o - 38^o 33' 58{\cdot}6'' = 141^o 26' 1{\cdot}4''$, da nun
$N = 285^o\, 43'\, 35''$ ist, so ergibt sich
$M_e = 144^o\, 17'\, 33{\cdot}6''$, $M_a = 247^o\, 9'\, 36{\cdot}4''$.

$$\begin{array}{rl} lg\, m_1 & = 3{\cdot}0123732 \\ lg \cos(N - M) & = 9{\cdot}8931443_{pn} \\ \hline & \ 2{\cdot}9055175_{pn} \\ lg\, n & = 2{\cdot}3918670 \\ \hline & \ 0{\cdot}5136505_{pn} = lg \pm 3{\cdot}26325 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Mitte: } & 5{\cdot}06784^h \text{ (Greenw.)} \\ & \pm\ 3{\cdot}26325^h \\ \hline & 1{\cdot}80459^h \text{ erste beschl.} \\ & 8{\cdot}33109^h \text{ letzte verzög.} \end{array} \Big\} \text{ äussere Berühr. a. d. Erdoberfl.}$$

Der Vorübergang für die Erdoberfläche überhaupt dauert daher $2 \times 3{\cdot}26325^h = 6{\cdot}5265^h = 6^h\, 31^m\, 35{\cdot}4^s$. Geht man nun mit dem Werte $x = 1{\cdot}80459^h$ in die Reihen *b)* und *d)* ein, so erhält man für die Zeit der ersten beschleunigten äusseren Berührung $\frac{1}{2}(\alpha + A) = 253^o\, 9'\, 17{\cdot}91''$, $\delta_0 = -22^o\, 39'\, 19{\cdot}45''$; ausserdem findet man die Sternzeit dieser Phase $\Theta = 282^o\, 18'\, 42''$. Wollte man sehr genau zu Werke gehen, so müsste man auch $\alpha - A$ und $\delta - D$ aus den Reihen *a)* und *c)* bestimmen und damit aus den Gleichungen in 1.) die Grössen m und M rechnen; dabei würden, wie dies nicht anders sein kann, kleine Unebenheiten zu Tage treten; in Hinsicht auf M würde es sich zeigen, dass das oben gefundene M_e um einige Sekunden zu klein, M_a hingegen um beiläufig ebenso viel zu gross ist. Wir haben, da die Ephemeriden selbst wahrscheinlich kleine Ungenauigkeiten enthalten, die Ausgleichung dieser Fehler, die übrigens mit Hilfe der Differentialformeln in 11.) leicht gemacht werden kann, unterlassen und begnügen uns im Folgenden mit Zehnteln der Bogenminute:

$$\begin{array}{rl} lg \cos\delta_0 & = 9{\cdot}9651255 \\ lg \cos M_e & = 9{\cdot}9095704_n \\ \hline lg \sin\varphi' & = 9{\cdot}8746959_n \\ \varphi' & = -48^o\, 32'\, 9'' \\ \varphi & = -48^o\, 43'\, 58'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} lg \sin M_e & = 9{\cdot}7661301 \\ lg \cos\varphi' & = 9{\cdot}8209574 \\ \hline lg \sin s & = 9{\cdot}9451727 \\ s & = 118^o\, 11'\, 18'' \\ \frac{1}{2}(\alpha + A) & = 253\ \ 9\ \ 18 \\ \hline & \ 371\ \ 20\ \ 36 \\ \Theta & = 282\ \ 18\ \ 42 \\ \hline l & = 89^o\ \ 1'\, 54'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} l & = 5^h\, 56^m\ \ 7{\cdot}6^s \\ 1{\cdot}80459^h & = 1^h\, 48^m\, 16{\cdot}5^s \\ \hline \text{Ortszeit} & = 7^h\, 44^m\, 24^s \end{array}$$

Der Ort liegt also $89^0\ 1\cdot9'$ östlich von Greenwich oder $106^0\ 41\cdot8'$ östlich von Ferro und $48^0\ 44'$ südlich vom Aequator; derselbe sieht unter allen Orten der Erde zuerst die Venus in die Sonnenscheibe eintreten, und zwar um $7^h\ 44\cdot4^m$ Ortszeit, gerade im Untergehen beider Gestirne. Der Eintritt erfolgt unter einem Winkel von $144^0\ 17\cdot6'$, also beinahe in der Mitte zwischen dem Ost- und Südpunkte der Sonnenscheibe, doch näher dem letzteren als dem ersteren. Macht man einen Blick in die Karte, so findet man den fraglichen Ort im indischen Ozean, beinahe im Parallelkreis der Kerguelen, dennoch ziemlich entfernt hinter denselben. Auf ebendemselben Wege sind die in der nachstehenden Tabelle eingetragenen Grenzörter sammt den dazu gehörigen Ortszeiten und Positionswinkeln gefunden worden:

Berührung		φ	l	Ortszeit t		M
			$C - M = 0^0,\ h' = 0^0$			
Erste beschl.	äussere	$-\ 48^0\ 44\cdot0'$	$+\ 89^0\ 1\cdot9'$	$7^h\ 44\cdot4^m$		$144^0\ 17\cdot6'$
	innere	$-\ 51^0\ 10\cdot3'$	$+\ 86^0\ 50\cdot0'$	$7^h\ 55\cdot6^m$		$147^0\ 20'$
Letzte verzög.	innere	$-\ 23^0\ 54\cdot2'$	$+\ 137^0\ 10\cdot2'$	$17^h\ 8\cdot6^m$		$244^0\ 7'$
	äussere	$-\ 21^0\ 7\cdot9'$	$+\ 134^0\ 43\cdot0$	$17^h\ 18\cdot7^m$		$247^0\ 9'$
			$C - M = 180^0,\ h' = 0^0$			
Erste verzög.	äussere	$+\ 50^0\ 36\cdot4'$	$-\ 92^0\ 43\cdot8'$	$19^h\ 52\cdot9^m$	5. Dez.	$146^0\ 37'$
	innere	$+\ 53^0\ 19\cdot7'$	$-\ 94^0\ 25\cdot2'$	$20^h\ 6\cdot9^m$		$150^0\ 6'$
Letzte beschl.	innere	$+\ 26^0\ 25\cdot8'$	$-\ 40^0\ 2\cdot8'$	$5^h\ 3\cdot5^m$		$241^0\ 21'$
	äussere	$+\ 23^0\ 15\cdot1'$	$-\ 43^0\ 37\cdot3'$	$5^h\ 9\cdot9^m$		$244^0\ 50'$

Lässt man dann in 14.) unter Beibehaltung von $h' = 0^0$ den Winkel $C - M$ von 0^0 an sowol gegen die positive als negative Seite fortschreiten, so bekommt man für $M - M'$ positive und negative Werte, die man in 13.) einsetzt und auf Grund der so erhaltenen Distanzen weitere Grenzen der Sichtbarkeit bestimmt. Ist $\frac{\pi_v - \pi_s}{R + r}$ ein echter Bruch, also $R + r > \pi_v - \pi_s$, so wird bei der Höhe $h' = 0^0$ der Winkel $C - M$ den ganzen Kreisbogen durchmessen können; derselbe wird also bei Vorübergängen der Venus und des Mercur vor der Sonnenscheibe über $\pm 90^0$ in den zweiten und dritten Quadranten treten dürfen, wo dann Orte zum Vorschein kommen, an denen der Eintritt verzögert, der Austritt beschleuniget wird. Ist hingegen $R + r < \pi_v - \pi_s$, welcher Fall bei Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen durch den Mond eintritt, so wird es unter der Bedingung, dass $h' = 0$ ist, für $C - M$ eine Grenze geben, die nicht überschritten werden darf, wenn $\sin(M - M')$ überhaupt möglich sein soll. Das Maximum, welches $C - M$ unter solchen Umständen erreichen kann, ist ausgedrückt in der Formel

$$15.) \quad \sin(C - M) = \pm \frac{R \pm r}{\pi_v - \pi_s} \qquad (h' = 0^0,\ M - M' = \pm 90^0)$$

welche man erhält, wenn in 14.) ausser $h' = 0^0$ auch $M - M' = \pm 90^0$ gesetzt wird. Lässt man nun auch h' von 0^0 an fortschreiten, so kann $C - M$ dann allerdings jenes Maximum überschreiten; sollen aber $C - M$ und h' Grenzwerte liefern, so muss stets sein

$$16.) \quad \cos h' \sin(C - M) = \pm \frac{R' \pm r'}{\pi_v - \pi_s} \qquad (M - M' = \pm 90^0)$$

wobei dann immer $M - M' = \pm 90^0$ bleibt. Man kann aber der Gleichung 13.) auch die Form

$$m = R' \pm r' + (\pi_v - \pi_s) \left[\cos(C - M) - \sin(C - M)\, tg\, \frac{M - M'}{2}\right] \cos h'$$

geben, welche für $M - M' = \pm 90^{\circ}$ übergeht in

17.) . . . $m = R' \pm r' + (\pi_v - \pi_s) \sin(45^{\circ} - C + M) \,.\, \sqrt{2} \,.\, \cos h'$,

in welcher Formel -45° zu nehmen ist, falls $C - M$ negativ ist.

Auf diese Art erhält man bei Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen durch den Mond noch andere Grenzen in Distanz, Zeit und Ort, wo aber eine Ränderberührung nicht mehr im Horizonte, sondern schon in einer gewissen Höhe der beiden Gestirne gesehen wird. Dabei wird m immer kleiner. Es gibt aber eine Grenze, welche m bei seinem Abnehmen unter keiner Bedingung überschreiten darf; diese Grenze ist die kürzeste Distanz, die wir oben mit k bezeichnet haben. Denn offenbar muss eine jede Phase an der Erdoberfläche, die auf eine noch kürzere geocentrische Distanz hindeuten würde, zur Unmöglichkeit werden. Man hat also als Grenze für m die Gleichung

18.) $k = R' \pm r' + (\pi_v - \pi_s) \sin(45^{\circ} - C + M) \,.\, \sqrt{2} \,.\, \cos h' \quad (M - M' = \pm 90^{\circ})$.

Löst man diese und die Gleichung 16.) nach $\cos h'$ auf und setzt nach der Comparationsmethode die beiden Werte einander gleich, so hat man

19.) $tg\,(C - M) = \pm \frac{R' \pm r'}{k}, \quad \cos h' = \frac{\sqrt{k^2 + (R' \pm r')^2}}{\pi_v - \pi_s} \quad (M - M' = \pm 90^{\circ})$.

Wenn $R' \pm r' > k$ ist, so kann $C - M$ über $\pm 45^{\circ}$ hinauskommen, ist hingegen $R' \pm r' < k$, so muss $C - M$ unter $\pm 45^{\circ}$ verbleiben. Die kürzeste Distanz tritt bekanntlich zur Zeit der Mitte ein, wo $N - M = \pm 90^{\circ}$ ist, wie in Nr. I gezeigt wurde; somit sind für die Berechnung des betreffenden Grenzortes alle notwendigen Grössen gegeben. Das hier inbetreff von $C - M$ Gesagte gilt natürlich nur für die Grenzbestimmung, denn aus 14.) ist ersichtlich, dass $C - M$ recht hoch hinaufgehen kann, man braucht nur eine bedeutende Höhe einzuführen, aber der entsprechende Ort ist keine Grenze und $M - M'$ wird weniger betragen als 90°. Es ist von selbst einleuchtend, dass für $k > R + r + \pi_v - \pi_s$ eine Verfinsterung unmöglich wird.

Wir wollen uns mit diesen allgemeinen Andeutungen begnügen und gehen an die Lösung der zweiten Aufgabe, wie man nämlich für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche den Verlauf eines Vorüberganges vorausberechnen kann. Hier ist die Sache weniger einfach; denn da sind $C - M$ und h' Grössen, die nicht unserer beliebigen Annahme anheimgestellt werden, sondern dieselben haben für einen bestimmten Ort und für eine bestimmte Zeit einen gewissen Wert, den man durch Rechnung finden muss. Eine derartige Berechnung setzt aber die Kenntnis der Zeit schon voraus, in der eine Phase an dem betreffenden Orte zu sehen ist, daher die Lösung dieser Aufgabe nach den in dieser Nummer entwickelten Formeln nur eine indirecte sein kann, und zwar wird man folgendermassen vorgehen. Man nehme die für den Erdmittelpunkt berechnete Zeit einer Phase als erste hypothetische Zeit auch für den Ort der Erdoberfläche an und rechne mit dem Stundenwinkel $s = \Theta + l - \frac{1}{2}(\alpha + A)$ und der geocentrischen Polhöhe φ' des Ortes vor allem h aus der Gleichung

$$\sin h = \sin \varphi' \sin \delta_0 + \cos \varphi' \cos \delta_0 \cos s.$$

Den Winkel C findet man dann aus den beiden Gleichungen

$$\cos \varphi' \sin s = \cos h \sin C, \qquad \sin \varphi' = \sin h \sin \delta_0 + \cos h \cos \delta_0 \cos C,$$

wovon die letztere nur zur Festsetzung des Quadranten von C dient. Nimmt man nun auch M, wie die Rechnung für den Mittelpunkt es gegeben hat, als eine Näherung an, so hat man für $C - M$ und h genäherte Werte, womit man dann aus 14.) den Winkel $M - M'$, weiters aus 13.) die geocentrische Distanz m, aus 4.) und $a)$ in Nr. I eine verbesserte Zeit sammt dem dazu gehörigen Positionswinkel M findet. Die Rechnung kann dann behufs Erzielung eines genauen Resultates wiederholt werden. Vermittelst dieser Methode wird man die Planetenvorübergänge für jeden Ort der Erdoberfläche mit beliebiger Genauigkeit berechnen können; nicht so die Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen durch den Mond. Denn der Winkel C involvirt nur das erste, freilich bedeutendste Glied in der Reihenentwickelung für die Parallaxe in Declination und Rectascension; da aber in Hinsicht auf den Mond selbst noch das dritte Glied einen nicht zu vernachlässigenden Betrag enthalten kann, so muss die Berechnung der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen durch den Mond nach dieser Methode im allgemeinen minder genau ausfallen und nur angenäherte Zeiten geben, die um eine oder vielleicht auch um zwei Minuten falsch sein können. Es bliebe demnach nichts anderes übrig, als dass man

$$a - a' = m \sin M - m' \sin M' = (\alpha - A) \cos \delta_0 - (\alpha' - A') \cos \delta'_0$$
$$b - b' = m \cos M - m' \cos M' = (\delta - D) - (\delta' - D')$$

von Fall zu Fall direct berechnet, $a - a' = (\pi_v - \pi_s) \sin \mathfrak{C} \cos \mathfrak{h}$, $b - b' = (\pi_v - \pi_s) \cos \mathfrak{C} \cos \mathfrak{h}$ setzt und so überall $\mathfrak{C}$ statt C und $\mathfrak{h}$ statt h in den obigen Formeln einführt. Statt dieser einzelnen directen Rechnungen, die sehr viel Mühe, und dies für einen nur kleinen Teil der Aufgabe, beanspruchen würden, wird man lieber das ganze Verfahren in ein directes verwandeln, und zwar so, dass man sich für den betreffenden Ort die durch die Parallaxe veränderten Coordinaten der beiden Gestirne für drei oder besser vier aufeinanderfolgende, der Mitte der allgemeinen (d. h. für den Erdmittelpunkt berechneten) Finsternis nahen Stunden berechnet, wobei für den Mond die strengen Formeln anzuwenden sind (sieh Brünnow, III. Abschn., 4.), im übrigen aber dann ganz so verfährt, wie in Nr. I für den Erdmittelpunkt; man rechnet also wie dort die Zeit der Conjunction T', dann c', die stündliche relative Bewegung, n', N', k' u. s. w. Es ist klar, dass dies Verfahren der grössten Schärfe fähig ist; zugleich behauptet der Verfasser, dass es keine kürzere Methode der Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen für einen einzelnen Ort gibt.

Bei den Vorübergängen der Venus und des Mercur vor der Sonnenscheibe sind übrigens die durch die Parallaxe bewirkten Unterschiede in Distanz und Zeit so unbedeutend, dass man an die für den Erdmittelpunkt berechnete Zeit einer Ränderberührung nur eine kleine Correction anzubringen braucht, um die Zeit der Phase für einen bestimmten Ort der Oberfläche zu erhalten. Diese Correction ergibt sich aus 11.), wo man hat

$$d\tau = \frac{dm}{n \cos (N - M)} = \frac{(\pi_v - \pi_s) \cos (C - M) \cos h'}{n \cos (N - M)}.$$

Es ist demnach die Zeit einer Ränderberührung an einem Orte der Oberfläche, dessen geocentrische Polhöhe φ' und dessen gegen Osten positiv gezählte Entfernung vom Hauptmeridian l^h beträgt, gemäss der Formel $\beta)$ in Nr. I:

$$t = T + l + \tau + d\tau =$$

$$= T + l - \frac{c}{n} \cos N + \frac{R \pm r}{n} \cos(N - M) + \frac{(\pi_v - \pi_s) \cos(C - M) \cos h'}{n \cos(N - M)} \quad . \; . \; . \; \gamma)$$

t ist also die Ortszeit des betreffenden Ortes; wir erinnern aber nochmals, dass $\cos(N - M)$ positiv und negativ sein kann, je nachdem man den Aus- oder Eintritt rechnet; h und C werden nach den obigen Formeln gerechnet; es geht aber aus dem dort Gesagten hervor, dass, um genau sein zu wollen, die in der Correction vorkommenden Grössen h, C und M der Zeit t angehören sollen, eine Bemerkung, die uns bei einer Vorausberechnung wenig einträgt, für die Ausführungen der nächsten Nummer jedoch nicht ohne Belang ist.

Wollte man z. B. die Zeit der ersten äusseren Berührung für die Kerguelen (Hâvre de Noël, $\varphi = -48^\circ\,41'\,15''$, $l = 69^\circ\,2'\,9''$) rechnen, so hat man für den Erdmittelpunkt $T + \tau = 1{\cdot}93269^h$, $M_e = 145^\circ\,24'\,57''$; ferner $\pi_v - \pi_s = 24{\cdot}5''$. Mit dem Werte $x = 1{\cdot}93269^h$ (Greenw.) findet man aus den Reihen $b)$ und $d)$ $\frac{1}{2}(\alpha + A) = 253^\circ\,9'\,22{\cdot}44''$, $\frac{1}{2}(\delta + D) = \delta_0 = -22^\circ\,39'\,17{\cdot}4''$, ausserdem ist die Sternzeit $\Theta = 284^\circ\,14'\,18{\cdot}3''$ und $\varphi' = -48^\circ\,29'\,25{\cdot}7''$; die Rechnung steht nun so:

$\Theta = 284^\circ\,14'\,18{\cdot}3''$	$lg \sin \varphi' = 9{\cdot}8743922_n$	$lg \cos \varphi' = 9{\cdot}8213402$
$l = 69^\circ\;2'\;9''$	$lg \sin \delta_0 = 9{\cdot}5856623_n$	$lg \cos \delta_0 = 9{\cdot}9651274$
$\Theta + l = 353^\circ\,16'\,27{\cdot}3''$	$9{\cdot}4600545$	$lg \cos s = 9{\cdot}2447148_n$
$\frac{1}{2}(\alpha + A) = 253^\circ\;9'\,22{\cdot}4''$		$9{\cdot}0311824_n$
$s = 100^\circ\;7'\;5''$	$+\,0{\cdot}2884393$	
	$-\,0{\cdot}107444$	
	$\sin h = +\,0{\cdot}1809953,$	$lg \sin h = 9{\cdot}2576673$
		$h = 10^\circ\,25'\,40''$

$lg \sin s = 9{\cdot}9931927$	$C = 138^\circ\,26'\,29''$	$lg\, \pi_v - \pi_s = 1{\cdot}3891661$
$lg \cos \varphi' = 9{\cdot}8213402$	$M_e = 145^\circ\,24'\,57''$	$lg \cos(C - M) = 9{\cdot}9967744$
$9{\cdot}8145329$	$C - M = -6^\circ\,58'\,28''$	$lg \cos h = 9{\cdot}9927672$
$lg \cos h = 9{\cdot}9927672$		$1{\cdot}3787077$
$lg \sin C = 9{\cdot}8217657$		

$T + \tau = 1{\cdot}93269^h$	$= 1^h\,55^m\,57{\cdot}68^s$	$lg\, n = 2{\cdot}3918670$
$l = 69^\circ\;2'\;9''$	$= 4^h\,36^m\;8{\cdot}6^s$	$lg \cos(N - M) = 9{\cdot}8862183_n$
$d\tau = -0{\cdot}12607^h$	$= -0^h\;7^m\,33{\cdot}86^s$	$2{\cdot}2780853_n$
$t = T + l + \tau + d\tau =$	$6^h\,24^m\,32{\cdot}4^s$	$lg\, d\tau = 9{\cdot}1006224_n =$
der Ortszeit in Hâvre de Noël für die erste äussere Berührung (6. Dez. 1882).		$= lg - 0{\cdot}12607$

III. Bestimmung der Parallaxe aus Vorübergängen.

Wird t, die Zeit einer Ränderberührung an der Erdoberfläche, der Beobachtung entnommen, so lässt sich mit Hilfe der bisher entwickelten Formeln vor allen die Grösse $\pi_v - \pi_s$ bestimmen. Um aber diejenigen Glieder, die sich auf den Erdmittelpunkt beziehen, zu eliminiren und überhaupt diese Berechnung den Fehlern der Ephemeriden möglichst zu entziehen, wollen wir die Beobachtungen ein und derselben Phase, wie sie an zwei verschiedenen Orten der Erdoberfläche gemacht wurden, combiniren. Sind nämlich t_1 und t_2 diese Beobachtungszeiten, l_1 und l_2 die gegen Osten positiv gezählten Distanzen vom Hauptmeridian, φ'_1 und φ'_2 die geocentrischen Polhöhen der beiden Beobachtungsorte, C_1 und C_2 die parallaktischen Winkel, h'_1 und h'_2 die beiden Höhen, in denen ein und dieselbe Ränderberührung an zwei verschiedenen Orten beobachtet wurde, so ist gemäss der Formel γ)

$$t_1 = T + l_1 - \frac{c}{n} \cos N + \frac{R \pm r}{n} \cos (N - M) + (\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C_1 - M) \cos h'_1}{n \cos (N - M)}$$

$$t_2 = T + l_2 - \frac{c}{n} \cos N + \frac{R \pm r}{n} \cos (N - M) + (\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C_2 - M) \cos h'_2}{n \cos (N - M)}$$

Durch Subtraction ergibt sich

$$t_1 - t_2 = l_1 - l_2 + (\pi_v - \pi_s) \frac{\cos (C_1 - M) \cos h'_1 - \cos (C_2 - M) \cos h'_2}{n \cos (N - M)}$$

und daraus

$$(\pi_v - \pi_s) = \frac{(t_1 - t_2 + l_2 - l_1)\, n \cos (N - M)}{\cos (C_1 - M) \cos h'_1 - \cos (C_2 - M) \cos h'_2} \quad . \; . \; . \; 20.)$$

Um zu erfahren, wie beschaffen die Beobachtungen sein und an welchen Orten der Erdoberfläche sie gemacht werden sollen, damit Fehler in den Beobachtungszeiten und in der Längendifferenz der beiden Orte einen möglichst geringen Einfluss auf $\pi_v - \pi_s$ ausüben, wollen wir die vorstehende Gleichung differenziren. Bezeichnet man der Kürze halber den Nenner des Bruches mit B und setzt $t_1 - t_2 + l_2 - l_1 = u$, so ist, wenn du Sekunden der Zeit bedeuten soll,

$$d\,(\pi_v - \pi_s) = \frac{n \cos (N - M)}{3600\, B}\, du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{für } 20.)$$

Man sieht, wie ausserordentlich günstig sich die Dinge für die Berechnung von $\pi_v - \pi_s$ gestalten können. Dabei muss aber der Nenner $B = \cos (C_1 - M) \cos h'_1 - \cos (C_2 - M) \cos h'_2$ zu einem Maximum werden. Dieses Maximum kann nun offenbar den Wert von 2 nicht übersteigen; wenn dieser Wert erreicht werden soll, so müssen beide Höhen $= 0^\circ$, $C_1 - M = 0^\circ$, $C_2 - M = 180^\circ$ sein, das heisst, es müssen Beobachtungen zweier Orte combinirt werden, von denen an einem die Ränderberührung mit der grösstmöglichen Beschleunigung, an dem anderen mit der grösstmöglichen Verzögerung eintrifft, ausserdem soll die Ränderberührung im Horizonte erfolgen. Ob die letztere Bedingung bei den Planetenvorübergängen, von denen hier allein die Rede sein kann, sich wird erfüllen lassen oder nicht, darüber kann der Verfasser kein entscheidendes Urteil fällen, dennoch will es ihn bedünken, dass die Sonnenränder auch im Horizonte genug scharf abgegränzt sind, um das Eindringen eines fremden Körpers genau wahrnehmen zu können. Die Refraction kann hier nur nützen, da sie die beiden Gestirne über den Horizont ein wenig hebt. Nach der Ansicht des Verfassers soll jedenfalls über 5° Höhe nicht hinausgegangen werden. Die Bedingung $C_1 - M = 0$, $C_2 - M = 180^\circ$ wird sich leichter erfüllen lassen, da man, wie es sich zeigen wird, auch von Schiffen aus derartige Beobachtungen anstellen kann, ohne dem Gewichte des Resultates irgend welchen Abbruch zu tun.

Um die Oerter zu ermitteln, an denen der Bedingung $C_1 - M = 0$, $C_2 - M = 180^\circ$ Genüge geschieht, verfahre man ganz in der oben angegebenen Weise. Zur Bestimmung von m hat man die Gleichung

$$m = R' \pm r' \pm (\pi_v - \pi_s) \cos h'.$$

Mit Zugrundelegung dieser Distanz bekommt man dann aus 4.) und α) den Positionswinkel M und die entsprechende Zeit des Ein- oder Austrittes, womit zuletzt aus 15.) die geocentrische Polhöhe und Längendifferenz vom Hauptmeridian gerechnet wird; es übergehen aber die erwähnten Gleichungen für $C - M = \alpha = 0^\circ$, 180° in die folgenden

$$\sin \varphi' = \sin h \sin \delta_0 \pm \cos h \cos \delta_0 \cos M, \qquad \cos \varphi' \sin s = \pm \cos h \sin M,$$

ausserdem hat man zur Bestimmung der Quadranten von s die Gleichung $\sin h = \sin \varphi' \sin \delta_0 + \cos \varphi' \cos \delta_0 \cos s$ zur Verfügung. Wollte man z. B. für den nächsten Venusvorübergang den Ort ausfindig machen, an welchem unter der Bedingung $C - M = 0^\circ$ der Eintritt (erste äussere Berührung) in einer Höhe von 5° erfolgt, so hat man nachstehende Rechnung:

$$(\pi_v - \pi_s) \cos 5^\circ = 24{\cdot}41'', \quad \text{mithin } m_1 = R + r + 24{\cdot}41'' = 1028{\cdot}81''$$

$$\begin{array}{ll}
\lg c \sin N & = 2{\cdot}8071536 \\
\lg m_1 & = 3{\cdot}0123352 \\
\hline
\lg \sin (N - M) & = 9{\cdot}7948184
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
N - M_a = & 38^\circ 34' 13'' \\
N - M_e = & 141^\circ 25' 47'' \\
N = & 285^\circ 43' 35''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
M_a = 247^\circ \ 9' 22'' \\
M_e = 144^\circ 17' 48''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg m_1 & = 3{\cdot}0123352 \\
\lg \cos (N - M) & = 9{\cdot}8931201_{pn} \\
\hline
& 2{\cdot}9054553_{pn} \\
\lg n & = 2{\cdot}3918670 \\
\hline
& 0{\cdot}5135883_{pn} = \lg \pm 3{\cdot}26278
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
5{\cdot}06784^h & \text{Greenw. Zeit der Mitte} \\
\pm 3{\cdot}26278^h & \\
\hline
1{\cdot}80506^h & \text{erste} \\
8{\cdot}33062^h & \text{letzte}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\text{äussere Berührung} \\ \text{Greenw. Zeit.}\end{array}$$

Mit dem Werte $x = 1{\cdot}80506^h$ bekommt man aus den Reihen b) und d) für die erste äussere Berührung die Daten $^1/_2 (\alpha + A) = 253^\circ\ 9'\ 17{\cdot}95''$, $\delta_0 = -22^\circ\ 39'\ 19{\cdot}5''$, ausserdem ist $\Theta = 282^\circ\ 19'\ 7{\cdot}35''$, $h = 5^\circ\ 0'\ 16{\cdot}2''$,

$$\begin{array}{rl}
\lg \sin h & = 8{\cdot}9631712 \\
\lg \sin \delta & = 9{\cdot}5856729_n \\
\hline
& 8{\cdot}5488441_n \\
\lg & - 0{\cdot}035387
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lg \cos h & = 9{\cdot}9981595 \\
\lg \cos \delta_0 & = 9{\cdot}9651255 \\
\lg \cos M_e & = 9{\cdot}9095856_n \\
\hline
& 9{\cdot}8728706_n \\
\lg & - 0{\cdot}746227
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
& - 0{\cdot}035387 \\
& - 0{\cdot}746227 \\
\hline
\sin \varphi' & = - 0{\cdot}781614 \\
\lg \sin \varphi' & = 9{\cdot}8929923_n \\
\varphi' & = - 51^\circ\ 24'\ 31'' \\
\varphi & = - 51^\circ\ 36'\ 7{\cdot}5''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg \sin M & = 9{\cdot}7661008 \\
\lg \cos h & = 9{\cdot}9981595 \\
\hline
& 9{\cdot}7642603 \\
\lg \cos \varphi' & = 9{\cdot}7950190 \\
\hline
\lg \sin s & = 9{\cdot}9692413
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
s & = 111^\circ 18' 43{\cdot}5'' \\
\dfrac{\alpha + A}{2} & = 253^\circ\ 9' 17{\cdot}9'' \\
\hline
& 364^\circ 28'\ 1{\cdot}4'' \\
\Theta & = 282^\circ 19'\ 7{\cdot}3'' \\
\hline
l & = 82^\circ\ 8' 54{\cdot}1''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
l & = 5^h\ 28^m\ 35{\cdot}6^s \\
1{\cdot}80506^h & = 1^h\ 48^m\ 18{\cdot}2^s \\
\hline
\text{Ortszeit} & = 7^h\ 16^m\ 53{\cdot}8^s
\end{array}$$

Der Ort liegt also $82^\circ\ 8{\cdot}9'$ östlich von Greenwich und $51^\circ\ 36{\cdot}1'$ südlich vom Aequator.

Nimmt man dann unter Beibehaltung von $C - M = 0^\circ$, 180° noch mehrere Höhen an und verbindet die so berechneten Orte auf der Karte mit einer Linie, so erhält man eine Günstigkeitscurve. Da es während eines

Vorüberganges vier Ränderberührungen gibt, zwei beim Eintritte und ebensoviele beim Austritte, und die Beobachtung jeder derselben zwei Orte in Anspruch nimmt, einen der grösstmöglichen Beschleunigung, den andern der grösstmöglichen Verzögerung, so kommen im ganzen acht Orte zur Bestimmung, und dies bei einer einzigen Höhe; legt man dann eine andere Höhe zu Grunde, so kommen acht weitere Orte zum Vorschein, und so kann die Anzahl derselben beliebig vergrössert werden. Es gibt demnach acht solcher Curven. Die günstigsten Orte darunter sind aber, wie gesagt, diejenigen, an welchen $h' = 0$ ist oder die die Berührung im Horizonte sehen. Dies sind die Grenzorte, von denen wir schon oben gesprochen und die wir in einer Tabelle zusammengestellt haben; dieselben sollen jedenfalls besetzt werden. Nebenbei werden sich aber auch solche Orte als Beobachtungsstationen empfehlen, an denen der Bedingung $C - M = 0^o$, 180^o Genüge geschieht, die Höhen aber von 0^o etwas verschieden sind. Befindet sich in der Nähe der berechneten Station trockenes Land, so wird man dasselbe offenbar der See vorziehen, des festen und leicht wieder zu findenden Standpunktes halber, denn der schwierigste Teil der ganzen Aufgabe wird immer eine genaue Längenbestimmung bleiben. Für die Beobachtung der ersten beschleunigten äusseren und inneren Berührung möchte der Verfasser die Kergueleninsel jedenfalls empfehlen, welche für den nächsten Venusvorübergang eine viel grössere Bedeutung hat, als für den im Jahre 1874. Es wäre im Interesse der Wissenschaft sehr zu wünschen, dass die Astronomen aller Nationen die gemeinschaftliche Arbeit unter einander auf geeignete Weise verteilen, und dass alle Separatbestrebungen dabei bei Seite gesetzt werden möchten, denn die Aufgabe ist gross und kann unmöglich von einer einzigen Nation bewältigt werden.

So wäre die Bestimmung derjenigen Orte, an denen ein Venus- oder Mercurvorübergang mit dem bestmöglichen Erfolge beobachtet werden kann, erlediget; es erübrigt noch, über das bei diesen Beobachtungen einzuhaltende Verfahren und über die Ermittelung der in Rechnung kommenden Grössen Einiges zu sagen.

Vor allem ist zu bemerken, dass von der Genauigkeit der Differenz $u = (t_1 - l_1) - (t_2 - l_2)$ das meiste abhängt, daher man auf diesen Punkt die grösste Sorgfalt zu verwenden hat. Nun sind $t_1 - l_1$ und $t_2 - l_2$ nichts anderes, als die auf den Hauptmeridian reducirten Zeiten, und u demnach der absolute Zeitunterschied der beiden Beobachtungen. Stünden daher die beiden Beobachter in directem telegraphischen Verkehre und würde jeder den Augenblick der eigenen Beobachtung nicht nur für sich notiren, sondern auch dem anderen signalisiren, so wäre dieser absolute Zeitunterschied zweimal gegeben, woraus man dann nur das arithmetische Mittel zu nehmen hätte, um ein u zu erhalten, das über eine jede andere Bestimmung spottet. Eine derartige, bis an die Grenze der Wahrheit reichende Bestimmung dieses Zeitunterschiedes ist aber leider heutzutage noch nicht möglich und wird wahrscheinlich auch in 125 Jahren, wo dann der nächste Venusvorübergang stattfindet, nicht möglich sein, deshalb ist eine genaue Längen- und Zeitbestimmung am Beobachtungsorte eine unerlässliche Bedingung. Zu Lande wird dies leichter und zu wiederholten malen geschehen können, zur See wird man aber den Stand und Gang des Chronometers an einer nahe gelegenen Landstation mit bekannter geographischer Länge sowol vor als nach der Beobachtung prüfen und sich mit einer genauen Zeit- und Breitenmessung am Beobachtungsorte selbst, entweder vor oder nach geschehener

Beobachtung des Contactmomentes, begnügen, um alsbald zur erwähnten Station zurückkehren zu können. Doch wollen wir über Dinge nicht weiter sprechen, die den Astronomen mehr als geläufig sind. Die Grössen n und N werden aus den Ephemeriden berechnet, auf welche man sich in der Hinsicht wol verlassen darf; doch gibt es auch Mittel, die Declinations- und Rectascensionsunterschiede für verschiedene Zeiten des Vorüberganges aus Beobachtungen zu bestimmen, woraus sich dann die stündliche relative Bewegung leicht herleiten lässt. Ein solches Mittel wäre, um es kurz anzudeuten, die Aufstellung von Zwischenstationen, an denen beide Gestirne während des Vorüberganges in correspodirenden Höhen beobachtet werden können; die geographische Breite solcher Stationen soll aber von $^1/_2\,(\delta + D)$ nicht stark abweichen, damit der Einfluss der Parallaxe auf die beobachteten Höhen möglichst schwinde. (Uebrigens vergleiche man des Verfassers Schrift „Bestimmung der Zeit, des Meridians u. s. w., bei Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg, Laibach 1878,“ III. Abschn., Nr. 13.) Es wird aber die eine oder andere inzwischenliegende Sternwarte mitarbeiten, ihr vorzüglich wird die Bestimmung einer absoluten Rectascension und Declination zufallen, da man auch $^1/_2(\delta + D)$ und $^1/_2\,(\alpha + A)$ benötiget. Auf diese Art wird n, N und auch M unabhängig von den Ephemeriden berechnet werden können. Die Höhe und den parallaktischen Winkel C findet man dann aus den schon mehrmals angeführten Gleichungen

$$\sin h = \sin \varphi' \sin \delta_0 + \cos \varphi' \cos \delta_0 \cos s, \qquad \cos \varphi' \sin s = \cos h \sin C,$$

ausserdem hat man zur Bestimmung des Quadranten von C die Gleichung

$$\sin \varphi' = \sin h \sin \delta_0 + \cos h \cos \delta_0 \cos C$$

zur Verfügung; s bedeutet den zur Zeit einer Ränderberührung stattfindenden Stundenwinkel, also $s = \vartheta - {}^1/_2\,(\alpha + A)$, wo ϑ die Ortssternzeit bezeichnen mag; $^1/_2\,(\alpha + A)$ berechnet man aus der Reihe *b)*. Ebenso findet man M aus 1.), nachdem man früher aus den Reihen *a)*, *c)*, *d)* die der Zeit der Ränderberührung angehörigen Grössen $\alpha - A$, $\delta - D$ und $^1/_2\,(\delta + D)$ berechnet hat. Da aber t_1 und t_2 verschiedene Zeiten bedeuten, so werden auch die beiden zum Vorschein kommenden Positionswinkel verschieden sein. Ist daher M_1 der der Zeit t_1 und M_2 der der Zeit t_2 angehörige Positionswinkel, so bekommen wir statt 20.) die verbesserte Formel

$$\pi_v - \pi_s = \frac{(t_1 - t_2 + l_2 - l_1)\, n \cos (N - M_1) \cos (N - M_2) \cdot}{\cos (C_1 - M_1) \cos h'_1 \cos (N - M_2) - \cos (C_2 - M_2) \cos h'_2 \cos (N - M_1)} \quad . \quad . \quad 21.)$$

Daraus sieht man, dass $\cos (N - M_1)$ und $\cos (N - M_2)$ gleichbezeichnet und nahe an ± 1 sein sollen, damit der Nenner so viel als möglich in der Nähe seines Maximums verbleiben kann. Aus der Gleichung 4.) aber ist ersichtlich, dass der Winkel $N - M$ nahe an 0^o, 180^o sein wird, wenn die kürzeste Distanz recht klein ausfällt oder wenn der Vorübergang nahe ein centraler sein wird. Für den nächsten Venusvorübergang ist $k = 10' 41{\cdot}4''$; im Jahre 1874 war $k = 13' 46{\cdot}6''$, hingegen im Jahre 1761 nur $9' 34{\cdot}1''$. Daraus geht hervor, dass der nächste Vorübergang zwar nicht so günstig sein wird, als der im Jahre 1761, dass er aber den im Jahre 1874 stattgefundenen an Günstigkeit bei weitem übertrifft. Dies sieht man auch an der Dauer des Phänomens; im Jahre 1874 dauerte der Vorübergang für die Erde überhaupt $5^h\, 1^m\, 36^s$, der nächste Vorübergang wird hingegen $6^h\, 31^m\, 35^s$ dauern. Aus der Gleichung 4.) ist auch zu ersehen, dass $N - M$ desto kleiner wird, je grösser m ist, dass also eine äussere Berührung mit grösserem Nutzen wird beobachtet werden können, als eine innere.

Im ganzen aber sehen wir, dass das Geschäft eines Beobachters während des Vorüberganges selbst in der blossen Fixirung der Berührungsmomente besteht, welches Geschäft also ebenso gut zu Lande als auch zur See versehen werden kann, was als ein grosser Vorteil bezeichnet werden muss. Sind die Vorbereitungen genug sorgfältig gemacht worden, und werden die vorgeschriebenen Bedingungen möglichst genau eingehalten, so kann ein günstiges Resultat nicht fehlen. Aus dem Unterschiede der beiden Parallaxen $\pi_v - \pi_s$ lässt sich dann die Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne, die wir mit Π_s bezeichnen wollen, ohne Mühe herleiten. Es ist nämlich

$$\sin \pi_v = \frac{\varrho}{\Delta_v}, \quad \sin \pi_s = \frac{\varrho}{\Delta_s},$$

wo ϱ der wirkliche Erdhalbmesser für den Beobachtungsort ist, Δ_v und Δ_s aber die wirklichen Entfernungen der Venus und Sonne von der Erde bedeuten; wegen der Kleinheit der Winkel π_v und π_s kann man auch schreiben

$$\pi_v \sin 1'' = \frac{\varrho}{\Delta_v}, \quad \pi_s \sin 1'' = \frac{\varrho}{\Delta_s}, \quad \text{mithin}$$

$$\pi_v - \pi_s = \frac{\varrho}{\sin 1''}\left[\frac{1}{\Delta_v} - \frac{1}{\Delta_s}\right] = \frac{\varrho}{b \sin 1''}\left[\frac{b : a}{\Delta_v : a} - \frac{b : a}{\Delta_s : a}\right],$$

wo b den Aequatorealhalbmesser der Erde und a die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde bedeuten mögen; nun ist $b : a = \sin \Pi_s = \Pi_s \sin 1''$ und $\varrho : b = \varrho_0$, d. i. der in Einheiten des Aequatorealhalbmessers ausgedrückte Radius der Erde für den Beobachtungsort, dann $\Delta_v : a = d_v$, $\Delta_s : a = d_s$, d. i. die in Einheiten von a ausgedrückten Entfernungen beider Gestirne von der Erde, Grössen, die aus der Centralbewegung bekannt sind und den Ephemeriden entnommen werden, mithin

$$\pi_v - \pi_s = \varrho_0 \Pi_s \cdot \frac{d_s - d_v}{d_v d_s} \quad \text{oder } \Pi_s = \frac{(\pi_v - \pi_s)\, d_v d_s}{\varrho_0 (d_s - d_v)} \quad . \; . \; . \; 22.)$$

$$d\Pi_s = \frac{d_v d_s}{\varrho_0 (d_s - d_v)}\, d(\pi_v - \pi_s) = \frac{n \cos (N - M)\, d_v d_s}{3600\, (d_s - d_v)\, B\, \varrho_0} \quad . \; . \; \text{für } 22.)$$

Für den nächsten Venusvorübergang ergibt sich aus dem Nautical Almanac

$$lg\, d_s(x) = 9\cdot9934380 - 0\cdot00000228\, x + 0\cdot0000000013\, x^2 \quad . \; . \; . \; g)$$

$$lg\, d_v(x) = 9\cdot4223904 - 0\cdot0000049\, x + 0\cdot000000425694\, x^2 \quad . \; . \; h)$$

wo x, wie in den Reihen *a), b), c), d)*, Stunden mittlerer Zeit bedeutet und der mittlere Greenwicher Mittag des 6. Dezember 1882 als Ausgangsepoche angesetzt ist. Für die Zeit der Mitte, also für $x = 5\cdot06784^h$, erhält man hieraus $lg\, d_s = 9\cdot9934265$, $lg\, d_v = 9\cdot4223765$. Nimmt man nun $B = 2$, $\varrho_0 = 1$ an, so erhält man für die äussere Berührung $d\Pi_s = 0\cdot009679\, du$. Ist daher bei der Bestimmung der Längendifferenz der beiden Orte oder bei der Fixirung der Berührungsmomente im ganzen ein Fehler von 10^s gemacht worden, so bewirkt dies erst eine Aenderung von $0\cdot1''$ in der Sonnenparallaxe. Weil aber die einzelnen Berührungen mit vieler Schärfe sich beobachten lassen, da der vorüberwandelnde Planet vor der glänzenden Sonnenscheibe wie ein schwarzer Punkt erscheint, so wird, vorausgesetzt, dass die Längenbestimmungen genau sind, das arithmetische Mittel aus allen Resultaten für die Sonnenparallaxe einen Wert liefern, der noch in der dritten Decimale zuverlässig ist.

Aus der Differentialformel ist ebenfalls ersichtlich, dass behufs Erzielung grösserer Sicherheit für die Berechnung von Π_s die Grösse d_v im Vergleiche zu d_s so viel als möglich klein sein soll, dass also die der Erde nähere Venus in ihren Vorübergängen mit mehr Vorteil wird beobachtet werden können, als der entferntere Mercur.

Die Formel 22.) enthält aber die stillschweigende Bedingung, dass die beiden Orte, deren Beobachtungen man combinirt, vom Aequator nach beiden Seiten hin gleichweit abstehen sollen, damit ϱ_0 eine beiden Orten gemeinsame Grösse bedeuten kann. Diese Bedingung liese sich nun allerdings erfüllen, namentlich bei niederen Höhen, doch wird man einen Unterschied von 2^o—3^o leicht hinnehmen können, wenn man dafür ϱ_0 für das arithmetische Mittel der beiden Breiten rechnet. Je bedeutender die Höhen werden, desto misslicher wird die Sache, also ein Grund mehr, dass man bei niederen Höhen bleiben soll.

Ein weiterer Grund, dass die Höhen nahe bei 0^o sein sollen, ist der, dass die Abplattung der Erde in diesem Falle in Hinsicht auf die Höhen- und Azimutalparallaxe ganz vernachlässiget werden kann. Aus den in Brunnow's sphärischer Astronomie, Abschn. III, Nr. 3, zu Grunde gelegten Gleichungen ergibt sich nämlich, wenn man, wie wir es oben getan haben, das Azimut mit ω und die momentane auf den Ort reducirte Parallaxe eines Gestirnes mit π bezeichnet,

$$\omega - \omega' = d\omega = - \frac{\pi \sin(\varphi - \varphi') \sin \omega'}{\cos h}$$

$$h - h' = dh = \pi \left[\cos(\varphi - \varphi') \cos h' - \sin(\varphi - \varphi') \sin h' \frac{\cos {}^1/_2 (\omega + \omega')}{\cos {}^1/_2 (\omega - \omega')}\right].$$

Daraus sieht man, dass ausser dem Minimum $d\omega = 0$, welches die Azimutalparallaxe im Meridian erreicht, noch ein anderes für $h = 0$ existirt, welches desto unbedeutender wird, je mehr ω' von $\pm 90^o$ entfernt ist. Da man ferner $\cos(\varphi - \varphi') = 1$ setzen kann, so wird für $h' = 0$ die Höhenparallaxe $dh = \pi$, also gerade so, wie bei sphärischer Gastalt der Erde.

Zuletzt spricht für die Beobachtung in niederen Höhen noch der Umstand, dass für $h = 0^o$ der Radius eines Gestirnes durch die Parallaxe nicht vergrössert wird, vielmehr so erscheint, wie aus dem Mittelpunkte der Erde, ein Umstand, der nicht zu unterschätzen ist, namentlich in Hinsicht auf den Mond, dessen Parallaxe sich aus Sonnenfinsternissen bestimmen lässt, wie wir alsbald sehen werden.

Nimmt man nämlich $C - M = 0^o$ an, so ist, wie oben gezeigt wurde, in sämmtlichen Fällen parallaktischer Verschiebung zweier Gestirne während eines Vorüberganges $m = R' \pm r' + (\pi_v - \pi_s) \cos h'$. Dieser Grenzwert gilt also nicht nur für die Planetenvorübergänge vor der Sonne, sondern er ist auch für Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen durch den Mond in aller Strenge richtig. Wird dabei auch $h' = 0^o$, wie dies aus den vorher angeführten triftigen Gründen wirklich der Fall sein soll, so ist $m = R \pm r + (\pi_v - \pi_s)$. Gemäss der Formel α) in I hat man aber für zwei verschiedene Orte, an deren einem der Eintritt, an dem anderen hingegen der Austritt bei ein und derselben geocentrischen Distanz m beobachtet wurde, die mittlere Ortszeit, und zwar für den

$$\text{Eintritt} \quad t_e = T + l_e - \frac{c}{n} \cos N - \frac{m}{n} \cos (N - M),$$

$$\text{Austritt} \quad t_a = T + l_a - \frac{c}{n} \cos N + \frac{m}{n} \cos (N - M),$$

wobei das Vorzeichen von $\cos (N - M)$ schon berücksichtiget ist und $N - M$ nun einen Winkel im ersten oder vierten Quadranten bedeutet. Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man

$$t_a - t_e = l_a - l_e + \frac{2\,m}{n} \cos (N - M) \text{ und daraus}$$

$$m = \frac{(t_a - t_e - l_a + l_e)\,n}{2 \cos (N - M)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 23.)$$

Ist nun $m = R \pm r + \pi_v - \pi_s$, oder hat man den Ein- und Austritt an Orten beobachtet, die der Bedingung $C - M = 0^0$ entsprechen, und ist die Ränderberührung im Horizonte geschehen, also bei $h' = 0$, so gibt die Combination beider Beobachtungen entweder $m_1 = R + r + \pi_v - \pi_s$ oder $m_2 = R - r + \pi_v - \pi_s$, je nachdem die äussere oder innere Ränderberührung beobachtet wurde. Sind beide Berührungen beobachtet worden, so findet man dann durch Addition und Subtraction

$$R + \pi_v - \pi_s = {}^1/_2\,(m_1 + m_2) \qquad r = {}^1/_2\,(m_1 - m_2). \; . \; . \; . \; 24.)$$

Bei ringförmigen Sonnenfinsternissen ist R der Sonnenhalbmesser; da nun letzterer und die Sonnenparallaxe π_s genau oder wenigstens viel genauer bekannt sind, als die Mondesparallaxe π_v, so erhält man nach dieser Methode, die man die Methode correspondirender Distanzen nennen könnte, einen ziemlich genauen Wert für π_v; ausserdem bekommt man auch r, den scheinbaren Mondhalbmesser, und ist dadurch im Stande, auch den wahren zu berechnen. Differenzirt man die Gleichung 23.) in Hinsicht auf m und $t_a - t_e - l_a + l_e = u$, so ist, wenn du Sekunden der Zeit bedeuten soll,

$$dm = \frac{n\,du}{7200 \cos (N - M)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \text{ für } 23.)$$

Daraus erhellt, wie vorteilhaft es ist, die Mondesparallaxe nach dieser Methode zu bestimmen. Hiebei muss aber $N - M$ nahe an 0^0 sein; je centraler daher der Vorübergang oder je kleiner die kürzeste Distanz ausfällt, desto günstiger werden die Dinge sich gestalten. Für die nächste Sonnenfinsternis z. B., welche auf den 19. Juli d. J. fällt und ringförmig sein wird, ist für die äussere Berührung $N - M_a = -5^0\,20'\,28''$ und $k = 8'\,9{\cdot}26''$, $lg\,n = 3{\cdot}2565592$, mithin $dm = 0{\cdot}2518\,du$; würde also in u ein Fehler von 4^s gemacht werden, so würde dies eine Aenderung von $1''$ in m hervorbringen, ein immerhin günstiges Verhältnis, wenn man bedenkt, dass bei Sonnenfinsternissen wegen der raschen Rectascensionsbewegung des Mondes die eine oder die andere Ränderberührung mit der grössten Schärfe sich wahrnehmen lässt. Die Grössen n und N ändern sich zwar während der Dauer des Phänomens, rechnet man aber dieselben für die Zeit der Mitte und nimmt für $N - M$ das arithmetische Mittel aus $N - M_a$ und $180^0 - (N - M_e)$, also $N - M = 90 - {}^1/_2\,(M_a - M_e)$ oder $90 - {}^1/_2\,(M_e - M_a)$, wenn $M_e > M_a$ sein sollte, so kommt aus der Formel 23.) ein m zum Vorschein, welches der Zeit der

Mitte des Vorüberganges so genau als möglich angepasst ist. Der Formel 23.) kann man also auch die Gestalt

$$m = \frac{(t_a - t_e - l_a + l_e)\, n}{2 \sin {}^1/_2 (M_a - M_e)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25.)$$

geben, wobei aber dann M_a immer den grösseren Positionswinkel bedeuten mag. Daraus sieht man, dass je eher der Positionswinkel vom Ein- bis zum Austritte einen Bogen von 180^o durchläuft, oder je centraler der Vorübergang ist, desto günstiger die Berechnung von m sein wird.

Ist der Bedingung $C - M = 0^o$ zwar Genüge geschehen, sind aber die Höhen, in denen die eine oder die andere Phase bei einer ringförmigen Sonnenfinsternis beobachtet wurde, etwas von 0^o verschieden, so wird man aus 25.) erhalten $m_1 = R + r'_1 + (\pi_v - \pi_s) \cos h'_1$ und $m_2 = R - r'_2 + (\pi_v - \pi_s) \cos h'_2$, denn die Vergrösserung des Sonnenhalbmessers durch die Parallaxe kann namentlich bei niederen Höhen vernachlässiget werden. Da nun $r' = r\,(1 + \sin \pi \sin h)$, so hat man

$$m_1 = R + r\,(1 + \sin \pi \sin h_1) + (\pi_v - \pi_s) \cos h'_1$$
$$m_2 = R - r\,(1 + \sin \pi \sin h_2) + (\pi_v - \pi_s) \cos h'_2$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \pi_v - \pi_s &= \frac{{}^1/_2 (m_1 + m_2) - R}{\cos {}^1/_2 (h'_2 + h'_1) \cos {}^1/_2 (h'_2 - h'_1)} - r \sin \pi_v \, tg\, {}^1/_2 (h_1 - h_2) \\ r &= \frac{{}^1/_2 (m_1 - m_2) - (\pi_v - \pi_s) \sin {}^1/_2 (h'_2 + h'_1) \sin {}^1/_2 (h'_2 - h'_1)}{1 + \sin \pi_v \sin {}^1/_2 (h_1 + h_2) \cos {}^1/_2 (h_1 - h_2)} \end{aligned}\right\} \quad 26.)$$

Man sieht, dass die Ränderberührungen, wenn schon nicht im Horizonte, so doch sehr nahe an demselben beobachtet werden müssen, damit die Correctionen möglichst klein ausfallen; auch soll man darauf bedacht sein, dass die beiden Höhen gleich sind, denn dann wird einfach

$$\pi_v - \pi_s = \frac{{}^1/_2 (m_1 + m_2) - R}{\cos h'}, \qquad r = \frac{{}^1/_2 (m_1 - m_2)}{1 + \sin \pi_v \sin h'}.$$

Man darf aber nicht übersehen, dass die Formel 26.) die Gleichheit der beiden Höhen, in denen eine Ränderberührung beobachtet wurde, schon stillschweigend voraussetzt und man also hier auf eine neue Schwierigkeit stösst, wenn verschiedene Höhen angenommen werden. Aus dem Ganzen geht hervor, dass man in allen Fällen die Beobachtungen im Horizonte vorziehen wird.

Die so gefundene Differenz $\pi_v - \pi_s$ wird dann auf den Aequator reducirt, was durch die Division mit einem ϱ_0 geschehen wird, dessen Argument das arithmetische Mittel aus den Polhöhen der vier Beobachtungsorte ist. Bedeutet nun P die der Ephemeridenrechnung zu Grunde gelegte, hingegen Π die gesuchte mittlere Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe des Mondes, ferner p die für die Zeit der Mitte der Finsternis aus den Ephemeriden berechnete, hingegen π die aus der Beobachtung für eben diese Zeit gefundene, auf den Aequator reducirte Horizontalparallaxe des Mondes, so besteht die Proportion

$$P : \Pi = p : \pi, \text{ daher } \Pi = \frac{P}{p}\,\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27.)$$

Bei totalen Sonnenfinsternissen ist R der scheinbare Mondhalbmesser; da derselbe eine von der Parallaxe abhängige Grösse ist, so kann man setzen $R = e\pi_v$, wo dann e eine Constante bedeutet; mithin ist aus 24.)

$$e\pi_v + (\pi_v - \pi_s)\,\varrho_0 = {}^1/_2\,(m_1 + m_2), \qquad r = {}^1/_2\,(m_1 - m_2),$$

ϱ_0 entspricht wie früher einer aus dem arithmetischen Mittel aller vier Beobachtungstationen abgeleiteten Polhöhe. Daraus erhält man

$$\pi_v = \frac{{}^1/_2\,(m_1 + m_2) + \varrho_0\,\pi_s}{\varrho_0 + e} \quad \text{und} \quad \Pi = \frac{P}{p} \cdot \frac{{}^1/_2\,(m_1 + m_2) + \varrho_0\,\pi_s}{\varrho_0 + e} \quad . \; . \; 28.)$$

Einen solchen Ausdruck für Π bekommt man nun aus der Beobachtung einer jeden totalen Finsternis und ist durch Gleichsetzung von nur zweien derselben im Stande, die Constante e zu berechnen; da man jedesmal auch den Sonnenhalbmesser erhält, so hat man darin zugleich einen Prüfstein für die Güte der Beobachtung.

Bei Planetenvorübergängen bekommt man ausser m_1 und m_2 auch $m_3 = R + r - (\pi_v - \pi_s)$ und $m_4 = R - r - (\pi_v - \pi_s)$, woraus sich dann R, r, $\pi_v - \pi_s$ abgesondert ergeben; doch ist die Sicherheit der Berechnung von $\pi_v - \pi_s$ aus der Formel 25.) $\frac{1}{\cos(N - M)}$ mal geringer als aus 21.), wie die betreffenden Differentialformeln es dartun. Bei den Vorübergängen Mercurs vor der Sonnenscheibe kann es sich indessen ereignen, dass die Formel 25.) mehr Vorteile bietet, man wird also diese Phänomene, wenn schon nicht für die Bestimmung der Sonnenparallaxe, so doch des Sonnenhalbmessers, als sehr geeignet halten müssen. Ob sich aus den Sternbedeckungen die Mondesparallaxe wird bestimmen lassen, darüber wagt der Verfasser nichts zu entscheiden; die Erfahrung wird diese Frage am besten lösen.

Laibach, Ende Mai 1879.