

Naloge utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike: analiza nekaterih vidikov nalog in uspešnost reševanja

Jerneja Bone
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V prispevku se osredotočimo na naloge utemeljevanja, ki so bile preverjane na Nacionalnem preverjanju znanja matematike v letih od 2006 do 2019. Naloge analiziramo z različnih vidikov, kot so besedilo naloge, način zapisa utemeljitve, taksonomija, območje, v katerega se je naloga uvrstila, ter vsebine matematike, v katere so naloge umeščene. Primerjamo dve nalogi, ki sta bili preverjani tako v 6. kot v 9. razredu v letih 2015 in 2016. Naloge smo analizirali tudi z vidika namena utemeljitve. Ugotavljamo, kateri od prej naštetih vidikov vplivajo na uspešnost reševanja tovrstnih nalog. Zaključujemo, da bomo z izbiro ustreznih didaktičnih pristopov in strategij za razvijanje utemeljevanja prispevali k boljšim dosežkom učencev.

Ključne besede: utemeljevanje, matematika, naloge

Justification Tasks in the National Assessment of Mathematical Knowledge: An Analysis of Selected Aspects and Students' Achievements

Abstract

The article focuses on mathematical justification tasks from the National Assessment of Mathematical Knowledge in years 2006-2019. The tasks are analysed from different perspectives, such as the text in the task, way of writing the justification, Gagne's Taxonomy, and level and mathematical content of the task. Two tasks are compared that were assessed both in the sixth and ninth grade in years 2015 and 2016. The tasks were also analysed in terms of the purpose of the justification. The aim is to find which of the previously mentioned aspects influence the successful solving of this type of tasks. The conclusion is that the selection of the appropriate didactic approaches and strategies for developing the proficiency of justification contributes to better learning outcomes of students.

Keywords: justification, mathematics, tasks

1 Uvod

Pri matematiki ločimo med utemeljevanjem in dokazovanjem. Pri dokazovanju uporabimo zaporedje logičnih korakov, s katerimi pridemo na formalni način do zahtevanega rezultata. Za dokaz neke trditve oz. izreka uporabimo prej dokazane izreke, trditve, definicije in aksiome.

Utemeljevanje je uporaba argumentov v podporo odgovoru ali zaključku, s pomočjo katerih verodostojno pojasnimo, zakaj

neka trditev drži oz. ne drži. Utemeljevanje je torej pojasnjevanje, kjer učeči se pojasnijo svoj odgovor oz. svojo rešitev utemeljijo.

V osnovnošolskem izobraževanju utemeljevanje razumemo kot širši nabor argumentov, ki jih učenci uporabijo za to, da potrdijo domnevo. Argumenti, ki jih učenci uporabijo pri utemeljitvi pravičnega odgovora, so v bistvu utemeljitve. Podatka, koliko nalog utemeljevanja je prisotnih v učnem procesu od preverjanja predznanja do ocenjevanja, nimamo, kakor tudi ne, kakšne so naloge utemeljevanja, če so prisotne pri poučevanju. Tudi podatka, koliko je takih nalog v učbeniških gradivih, nismo našli. Naloge

utemeljevanja so prisotne na Nacionalnem preverjanju znanja (NPZ) in v preizkusih raziskave PISA, kjer je utemeljevanje ena izmed pomembnih veščin, ki jo preverjajo. »Pojmovanje pismenosti v raziskavi PISA vključuje znanja in spretnosti učencev in učenk, da znanje in spretnosti iz temeljnih šolskih predmetov uporabljajo tudi v kontekstih zunaj šolskega kurikula ter da ob postavljanju, reševanju in interpretiranju problemov v različnih situacijah zmorejo svoje zamisli in ugotovitve tudi analizirati, utemeljevati ter učinkovito sporočati.« (Šterman, 2019)

Utemeljevanje lahko poteka ustno (govorno sporočanje) ali pisno (pisno sporočanje). Ne glede na način utemeljevanja so potrebne veščine, ki jih je potrebno pri učencu razvijati postopoma. V NPZ matematike so vključene naloge, ki v učbeniških gradivih niso pogoste ali jih ni in jih učitelji redkeje vključujejo v proces poučevanja. Na Nacionalnem preverjanju znanja matematike se v letih od 2006 do 2019 kontinuirano pojavljajo naloge utemeljevanja, ki zahtevajo odgovor v pisni obliki.

2 Namen raziskave

S podrobno analizo nalog utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike želimo ugotoviti, kako različni vidiki vplivajo na uspešnost reševanja oz. kaj vpliva na uspešnost reševanja tovrstnih nalog.

3 Metodologija

Pregledali smo naloge Nacionalnega preverjanja znanja matematike od leta 2006 do leta 2019 in v analizo vključili naloge, kjer so učenci utemeljevali svoje odgovore. Naloge so predstavljene v prilogi prispevka (Priloga), kjer smo označili, v katerem letu je bila naloga preverjena, v katerem razredu in zaporedno številko naloge v preverjanju znanja (npr.: 2013/9. razred/10. naloga). Za lažje navajanje nalog v nadaljevanju prispevka smo naloge kodirali s številko, ki predstavlja razred in črko abecede (npr. 9E). Naloge smo priredili za objavo.

Nalog utemeljevanja je bilo v 9. razredu 13, od tega štiri na naknadnih rokih, ostale na rednih rokih (Priloga). V 6. razredu so bile 4 naloge povezane z utemeljevanjem (Priloga). V letu 2015 in 2016 sta bili v preizkusih za 6. in 9. razred enaki nalogi, ki sta preverjali tudi utemeljevanje.

V analizo smo zajeli naloge, ki so se preverjale na rednih rokih, ker za te naloge obstajajo statistični podatki, ki smo jih potrebovali v analizi. Ker sta bili pri dveh nalogah podani dve vprašanji, smo imeli v analizi 13 različnih postavk oz. nalog. Za vsako nalogo oz. postavko, ki je bila preverjana na rednem roku, smo iz Letnih poročil o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja, Dodatne informacije o dosežkih učencev 6. in 9. razreda na nacionalnem preverjanju znanja, Opisov dosežkov učencev 6. in 9. razreda pri NPZ-ju in dodatnih podatkih, ki smo jih pridobili na Državnem izpitnem centru (RIC), razbrali cilj, ki ga je naloga preverjala, vsebinsko področje matematike, v katerega je bila naloga umeščena, taksonomsko stopnjo, indeks težavnosti (IT), indeks diskriminativnosti (ID) ter območje, v katerega je bila naloga razvrščena.

Število učencev, vključenih v Nacionalno preverjanje znanja matematike na rednih rokih v izbranem šolskem letu, vedno presega število 14000 (Prikaz 1), kar nakazuje, da so pridobljeni podatki (IT in ID) reprezentativni.

6. razred	
leto (redni rok NPZ)	št. učencev
2011	14336
2012	14803
2015	16827
2016	16110

9. razred	
leto (redni rok NPZ)	št. učencev
2007	19310
2008	18652
2009	18574
2011	17553
2013	17162
2014	16748
2015	17291
2016	16653
2018	16144

Prikaz 1: Število učencev, ki so pisali NPZ matematike na rednih rokih.

Vzorec nalog ni velik in je posploševanje težje, so pa v obravnavo zajete naloge zadnjih štirinajstih let, kar ni zanemarljivo časovno obdobje.

4 Analiza nalog utemeljevanja

Naloge smo analizirali z vidika besedila zastavljene naloge in zapisa odgovora, to je utemeljitve. Primerjali smo nalogi, ki sta se v letih 2015 in 2016 preverjali tako v 6. in 9. razredu (6C in 9K ter 6D in 9L). Pogledali smo uspešnost reševanja nalog z vidika umeščenosti v taksonomijo, območij, v katera so bile naloge uvrščene in vsebinskega vidika matematike, v katerega je bila naloga razvrščena. Namen utemeljitve posameznih nalog je različen, zato smo naloge pogledali tudi s tega vidika.

V analizi se bomo sklicevali na indeks težavnosti (IT), ki je količnik med povprečnim številom doseženih točk in najvišjim številom točk, ki jih je možno doseči. Pri Nacionalnem preverjanju znanja matematike je pri vsaki postavki (nalogi) možno doseči največ eno točko. Uspešnost reševanja posamezne naloge v odstotkih je zato enaka IT, pomnoženo s 100.

V pomoč nam bo tudi indeks diskriminativnosti (ID), ki je statistični parameter, s katerim skušamo meriti, ali so naloge boljše reševali kandidati, ki so imeli v celoti boljši uspeh pri NPZ. Naloge z visokim ID so uspešno reševali večinoma le kandidati, ki so tudi sicer dosegli zelo dober rezultat na NPZ – uspešnejši kandidati. Nizek ID pomeni, da so nalogo dobro reševali tako uspešnejši kot manj uspešnejši kandidati.

4.1 Besedilo naloge

Med nalogami, ki smo jih analizirali, so naloge zastavljene z besedilom in skico (6A, 6B, 9B, 9G), ki podpira zapis naloge. Skice so predstavljale matematične pojme (npr. stranice geometrijskega lika, trikotnik, premico) in predmete, opisane v nalogi (npr. okrogla plošča, voščilnica, pisemska ovojnica). V besedilu je bila uporabljena matematična terminologija (kot npr. dolžina, širina, stranica trikotnika, kot, premica, verjetnost, trikotnik, krog, pravokotnik, šestkotnik, kvadrat, petkotnik) in simbolika (kot npr. grške črke, znak za vzporednost in pravokotnost, števila (naravna, ulomki), merske enote z besedami in z oznakami). Indeks težavnosti (IT) teh nalog je od 0,19 do najvišje 0,64, povprečni indeks težavnosti teh nalog je 0,43. Indeks diskriminativnosti teh nalog je v razponu od 0,44 do 0,60, povprečni ID je 0,51.

Ena naloga (6A) je imela poleg matematične terminologije in simbolike vključeno tudi skico, ki pa ni imela nobene vloge pri reševanju. Učencem je le pomagala, da so si predmet (voščilnica, ovojnica), opisan v nalogi, lažje predstavljali. Indeks težavnosti te naloge je 0,55, ID pa 0,26.

Tri naloge (9J, 9K/6C, 9L/6D) so v besedilo vključevale matematično simboliko (merske enote in merska števila) in besede iz vsakdanjega življenja (npr. kmetija, sok, steklenice, jabolka, zaboj). Indeks težavnosti teh nalog je od najnižjega 0,36 do največjega 0,49; povprečni IT je 0,44; ID je v razponu od 0,47 do 0,54; povprečni ID je 0,50.

Besedilo šestih nalog (9C, 9D, 9E, 9I, 9J, 9M) je vključevalo matematično terminologijo (npr. izraz, prizma, kocka rob, dolžina, višina, telesna diagonala, trikotnik, notranji kot, stranica, rešitev enačbe) in simboliko (npr. črke (neznanka, spremenljivka), številke, merske enote). Indeks težavnosti teh nalog je od 0,10 do 0,64, povprečni IT je 0,37. ID je v razponu od 0,43 do 0,66; povprečni ID je 0,54.

4.2 Zapis utemeljitve

Zapisana navodila, ki so učence pozvala k utemeljevanju, so bila različna in jih navajamo v nadaljevanju:

- »Odgovor utemelji.«,
- »Odgovor utemelji z besedami.«,
- »Utemelji, zakaj je tvoja izbira pravilna.«,
- »Svojo izbiro utemelji z računom.«,
- »Utemeljitev odgovora.«,
- »Utemelji svojo izbiro.«,
- »Utemelji trditev.«,
- »Utemelji.«,
- »Utemelji, ali je ...«,
- »Utemelji svojo odločitev.«.

Ugotavljamo, da so zapisana navodila nakazovala način zapisa odgovora, to je utemeljitve.

1. način: Utemeljitev je ubesedena.
»Odgovor utemelji z besedami.«
2. način: Utemeljitev je izražena le z računom.
»Odgovor utemelji z računom.«

3. način: Utemeljitev je lahko izražena tako z besedo kot z računom ali skico, glede na kontekst naloge.

»Utemelji odgovor, trditev, izbiro, odločitev.«

Iz predvidenih odgovorov, to je zapisov utemeljitev, ugotavljamo, da so odgovori, zapisi utemeljitev do sedaj bili podani na naslednje načine:

- utemeljitev z računom,
- utemeljitev s sliko, skico,
- ubeseditev utemeljitve, v zapisu katere je uporabljena matematična terminologija in simbolika ali
- kombinacija naštetih.

Pri zapisih utemeljitev se lahko pojavijo tudi še grafični prikazi, preglednice, različne konkretne reprezentacije, modeli teles ...

V zapisih utemeljitev učenci uporabljajo simbolni zapis, ustrezno matematično terminologijo ali korekten zapis računske utemeljitve oz. narišejo skico ali načrtajo geometrijsko konstrukcijo. V odgovorih povezujejo različna matematična znanja: poznavanje pravil, definicij, izračunov ... Pri utemeljevanju (odgovorih) je možno zapisati več različno oblikovanih utemeljitev, ki so pomensko podobne in se po navodilih za vrednotenje štejejo kot pravilne.

Preizkus pri enačbi je neke vrste utemeljitev dobljene rešitve enačbe. V tem primeru lahko rečemo, da je utemeljitev podana računsko.

Glede na podano navodilo ugotavljamo, da je med nalogami, ki smo jih zajeli v analizo, ena naloga (9E), ki izrecno zahteva utemeljitev z računskim postopkom. Indeks težavnosti te naloge je 0,19 (ID je 0,44). Zasledili smo tudi samo eno nalogo (9B), ki v navodilu zahteva utemeljitev z besedami. Indeks težavnosti te naloge je 0,10 (ID je 0,43). Ostale naloge dopuščajo zapis utemeljitve tako z besedami kot z računskimi postopki oz. skicami (če kontekst naloge seveda to dopušča). Povprečni indeks težavnosti teh nalog je 0,46, povprečni ID pa 0,51.

4.3 Primerjava dosežkov učencev 6. in 9. razreda

Predmetna komisija za matematiko je leta 2015 in 2016 v Nacionalni preizkus znanja matematike za 6. in 9. razred uvrstila enako nalogo (6C/9K, 6D/9L), pri kateri so učenci morali utemeljiti svoj odgovor. Naloga je izhajala iz problemske situacije iz vsakdanjega življenja. Dober pokazatelj za ugotavljanje morebitnih razlik v dosežkih učencev 6. in 9. razreda so enake naloge (Preglednica 1).

Preglednica 1: IT in ID pri enakih nalogah v letih 2015 in 2016.

	6. razred			9. razred		
	naloga	IT	ID	naloga	IT	ID
2015	6C: 9. b)	0,25	0,46	9K: 2. b)	0,49	0,50
	6C: 9. c)	0,26	0,46	9K: 2. c)	0,46	0,54
2016	6D: 10. c)	0,25	0,44	9L: 3. c)	0,36	0,47

Četrtnina učencev 6. razreda je uspešno rešila nalogo v obeh letih, leta 2015 je bila uspešna polovica učencev 9. razreda, dobra tretjina pa leta 2016. Opazimo, da je razlika v IT opazna, v ID pa razlika ni tolikšna, kar nakazuje, da so nalogo uspešneje reševali učenci, ki so na NPZ dosegli višji dosežek. To potrjuje dejstvo, da sta se v obeh razredih v obeh letih nalogi razvrstili v modro območje.

4.4 Taksonomija na NPZ

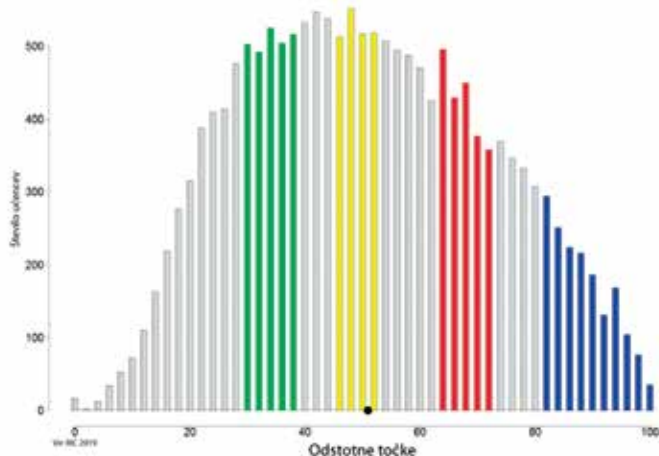
Predmetna komisija za matematiko uporablja pri razvrščanju nalog glede na taksonomske stopnje prirejeno Gagnejevo klasifikacijo znanj, ki ima štiri stopnje:

1. Poznavanje in razumevanje pojmov in dejstev.
2. Izvajanje rutinskih postopkov.
3. Uporaba kompleksnih postopkov.
4. Reševanje in raziskovanje problemov.

Naloge utemeljevanja je Predmetna komisija za matematiko razvrstila v vse štiri stopnje. Ena naloga (9G) je bila umeščena k 1. stopnji (IT je 0,64, ID je 0,49), tri (6A, 9K/6C (b), 9M) so bile umeščene k 2. stopnji (IT od 0,36 do 0,55; povprečni IT je 0,46, ID je v razponu od 0,26 do 0,54, povprečni ID je 0,43), štiri naloge oz. pet postavk (6B, 9E, 9I(a, b), 9K/6C (a)) k 3. stopnji (IT od 0,10 do 0,64; povprečni IT je 0,40; ID je od 0,43 do 0,60, povprečni ID je 0,53), štiri (9B, 9D, 9J, 9L/6D) pa k 4. stopnji (IT je od 0,19 do 0,41; povprečni IT je 0,34; ID je od 0,44 do 0,66, povprečni ID je 0,52).

4.5 Območje dosežkov

Dosežki vseh učencev, ki sodelujejo na NPZ matematike (Prikaz 1), so razvrščeni od najnižjega do najvišjega, višina stolpca pa nakazuje število učencev z danim dosežkom.



Prikaz 1: Porazdelitev točk pri matematiki, 9. razred, 2019.
(Vir: RIC. Letno poročilo o izvedbi NPZ v šolskem letu 2018/2019)

S posebno barvo so označena štiri območja: zeleno, rumeno, rdeče in modro območje. Zeleno območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo spodnje četrtine dosežkov.

Rumeno območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo med polovicama dosežkov. Rdeče območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki določajo mejo zgornje četrtine dosežkov. Modro območje označuje 10 % učencev, katerih skupni dosežki so v zgornji desetini dosežkov. Nalog, ki so v območju nad modrim, v 65 % primerov ne rešijo niti učenci z najvišjimi skupnimi dosežki (RIC, 2019).



Prikaz 2: Prikaz štirih podskupin v celotni populaciji učencev posameznega predmeta.

(Vir: RIC. Priročnik za uporabo orodja za ugotavljanje kakovosti izkazane znanja ORKA)

Pri učencih, ki dosežejo na NPZ od 20 do 30 %, se naloge, ki so jih reševali z uspešnostjo vsaj 65 %, uvrstijo v zeleno območje (prikaz 2). Podobno je npr. pri učencih, ki dosežejo na NPZ od 70 do 80 %. Naloge, ki so jih ti učenci reševali z uspešnostjo vsaj 65 %, se uvrstijo v rdeče območje (Prikaz 2).

Naloge utemeljevanja ni v zelenem območju, kar nakazuje, da večina učencev v spodnji četrtini dosežkov ne zna zapisati utemeljitve. V rumeno območje sta bili uvrščeni dve nalogi (9G, 9I(a)), IT obeh nalog je 0,64, v rdeče območje prav tako dve nalogi (6A, 6B), povprečni IT nalog je 0,50 (0,55 in 0,45). V modro območje je uvrščenih največ nalog (9C, 9D, 9F, 9H, 9I(b), 9J, 9K/6A, 9L/6D, 9M), povprečni IT teh nalog je 0,40. Dve nalogi (9B, 9E) sta bili umeščeni v območje nad modrim, povprečni IT teh dveh nalog je 0,15.

V rumeno območje sta umeščeni nalogi iz geometrije (koti) in verjetnosti. V rdeče območje sta umeščeni nalogi iz merjenja in števila (deli celote), obe nalogi sta bili v preizkusu za 6. razred. Naloge modrega območja so iz vsebin algebre in analize, merjenja in geometrije ter iz drugih vsebin.

V letih 2011 in 2013 sta bili nalogi (9G, 9I) v 9. razredu uvrščeni v rumeno območje, v letih 2011 in 2012 sta bili nalogi (6A, 6B) 6. razreda uvrščeni v rdeče območje. V preostalih letnih, kjer je bila naloga utemeljevanja, pa se je naloga uvrstila v modro območje.

4.6 Vsebinsko področje nalog

Učni načrt matematike vsebinske sklope razvrsti v tri teme: analiza in algebra, geometrija in merjenje ter druge vsebine. Naloge utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike so iz vseh treh sklopov, in sicer šest postavk (6A, 9B, 9E, 9I (a, b), 9J) je iz teme geometrije in merjenja, tri naloge (6B, 9D, 9M) iz teme analiza in algebra ter štiri postavke (9G, 9K/6C, 9L/6D (a, b)) iz drugih vsebin. Povprečni IT nalog iz geometrije in merje-

nja je 0,36 (povprečni ID teh nalog je 0,49), iz analize in algebre 0,41 (povprečni ID teh nalog je 0,53), iz drugih vsebin pa 0,49 (povprečni ID teh nalog je 0,50).

4.7 Namen utemeljitve

Slovar slovenskega knjižnega jezika opredeli glagol utemeljiti kot »narediti, da je kaj logično upravičeno« oz. »navesti vzroke, razloge za kako dejanje, ravnanje, stanje«. Zelo podoben pomen ima glagol pojasniti, ki ga SSKJ opredeli kot »narediti, da postane komu kaj (bolj) jasno, razumljivo« oz. »narediti, da kdo izve, spozna, kar je potrebno, zaželeno«. Glede na to lahko vsa navodila »utemelji« preoblikujemo v »pojasni«. To razmišljanje podkrepi model DIVINE (Chua, 2017), ki naloge utemeljevanja razvrsti v naloge:

- odločanja (pojasni, ali ... ; pojasni, kateri ...),
- sklepanja (pojasni, kaj ...),
- potrjevanja (pojasni, zakaj ...) in
- izvajanja (pojasni, kako ...).

Za primerjanje nalog utemeljevanja na Nacionalnem preverjanju znanja matematike z modelom DIVINE smo navodila nalog smiselno preoblikovali iz utemelji v pojasni.

Po preoblikovanju navodil sedem postavk pri nalogah (6A, 9I, 9K/6C, 9L/6D, 9M) umestimo k odločanju (povprečni IT je 0,63, povprečni ID je 0,48), k sklepanju smo razvrstili le eno (9J) nalogo (IT je 0,38, ID je 0,66), tri naloge (9B, 9E, 6B) k potrjevanju (povprečni IT je 0,25; povprečni ID je 0,49) in dve nalogi (9D, 9G) k izvajanju (povprečni IT je 0,53; povprečni ID je 0,50).

5 Razprava

Poznavanje pomena besed in situacije iz vsakdanjega življenja, razumevanje matematične terminologije in simbolike, povezovanje znanj znotraj matematične vsebine tako znotraj posameznega razreda kot po vertikali izobraževanja, nakazuje, da so učenci uspešneje reševali naloge (npr. 6A, 9K/6C, 9L/6B), kjer je bil podan problem iz življenjske situacije z uporabo znanih predmetov in pojmov iz realnega sveta ter uporaba merskih števil in merskih enot, torej količin. Slabše so reševali naloge (npr. 9B, 9C, 9D, 9I, 9J), kjer je bila v navodilu uporabljena matematična terminologija in simbolika. Indeks diskriminativnosti je v večini primerov nad 0,50, kar nakazuje na to, da so naloge utemeljevanja ne glede na način, na katerega so zastavljene, bolje reševali tisti, ki so imeli v celoti boljši dosežek na NPZ.

Ugotovili smo, da so učenci uspešnejši pri nalogah utemeljevanja, če lahko izbirajo način zapisa utemeljitve oz. če lahko pri zapisu odgovora uporabijo tako računske postopke kot besedilo ali skico. Največ težav učencem predstavlja zapis utemeljitve samo z besedilom ali samo z računskim postopkom, vendar bi bilo to treba še preučiti, ker je bila v analizo zajeta le ena naloga iz posamezne kategorije. Ob tem se zastavlja vprašanje, kako so učenci uspešni pri izvedbi preizkusa pri reševanju enačb, če je preizkus pri enačbi računsko utemeljitev rešitve dane enačbe.

Tako učenci 6. kot učenci 9. razreda še nimajo razvitih strategij utemeljevanja. Rezultati kažejo, da učenci v treh letih šolanja pridobijo nekatera matematična znanja, razvijejo določene strategije utemeljevanja, pridobijo izkušnje v življenjskih situacijah, ki jim pomagajo pri logičnem sklepanju in utemeljevanju, vendar še ne na zadovoljivi ravni.

Naloge utemeljevanja so bile na NPZ v letih od 2006 do 2019 razvrščene v vse štiri stopnje po taksonomiji na NPZ. Z uvrstitvijo naloge v višjo taksonomsko stopnjo je delež učencev, ki naloge te taksonomske stopnje reši pravilno, manjši. Naloge utemeljevanja na višjih taksonomskih stopnjah uspešneje rešujejo učenci, ki dosegajo višje dosežke na NPZ.

Naloge utemeljevanja iz različnih vsebin matematike so razpršene po vseh območjih, razen zelenega. Najvišji IT je pri nalogah, ki so umeščene v rdeče območje, najnižji pa pri nalogah, ki so umeščene v območje nad modrim, kar je pričakovano. Največ nalog je uvrščenih v modro območje, kar potrjuje, da so naloge slabše reševale generacije učencev v več letih. Zaskrbljujoč je podatek, da so bile naloge pred nekaj leti v rumenem in rdečem območju, zadnja leta so v modrem, kar nakazuje, da se stanje na področju utemeljevanja pri matematiki ne izboljšuje.

Z analizo smo ugotovili, da učenci slabše rešujejo naloge utemeljevanja iz geometrije in merjenja, boljše pa naloge utemeljevanja iz drugih vsebin. Pri geometriji in merjenju je pomembno razumevanje matematične terminologije in simbolike, kakor tudi poznavanje definicij in trditev za posamezne geometrijske pojme. Problemske naloge iz vsakdanjega življenja so učencem bližje in posledično je logično sklepanje in utemeljevanje pri teh nalogah učencem razumljivejše in lažje.

Naloge utemeljevanja na NPZ matematike lahko preoblikujemo v naloge, kjer v navodilu namesto utemelji uporabimo besedo pojasni. Po preoblikovanju navodil smo ugotovili, da je najslabše rešena naloga, kjer morajo učenci navesti razloge oz. dokaze, ki podpirajo ali ovržejo matematično trditev. Najbolje so rešene naloge, kjer morajo učenci pojasniti odločitev.

Zaključek

Skozi poučevanje učitelj pri učencih razvija matematično mišljenje in matematično pismenost, učenci ob procesu učenja pridobivajo zmožnosti za dojetje, razumevanje in uporabo matematičnih argumentov v vsakdanjem življenju. Pomembna je zlasti zmožnost za prirejanje matematičnega argumenta iz znane situacije v neznano oziroma uporaba matematičnih argumentov v novih situacijah. Matematična pismenost torej ni zgolj skupek znanj ali spretnosti, ampak pristop pri reševanju situacije, pri katerem se pokaže sposobnost za

smiselno delo z numeričnimi oziroma matematičnimi podatki, ki so bili zaznani, in smiselnih odločitev. Gre za miselno iskanje vzorcev in ne za upoštevanje danih navodil (Felda, 2012).

Predmetna komisija za matematiko v preizkuse znanja vključuje naloge, s katerimi preverja širše razumevanje matematičnega razmišljanja, s čimer posredno preverja tudi razvijanje matematične pismenosti. Morda s takimi nalogami dajemo priložnost sposobnejšim učencem, da se izkažejo znotraj (pre)široke množice prav dobrih in odličnih zaključnih ocen pri matematiki (Felda, 2018).

Na uspešnost reševanja nalog utemeljevanja na NPZ vpliva več dejavnikov. Pri tovrstnih nalogah učenci interpretirajo matematični problem in zapišejo utemeljitev, vprašanje pa je, kako pogosto so te naloge prisotne v učnem procesu. Razvijanje kritičnega odnosa do podatkov in rešitev je eden od ciljev razvijanja kritičnega mišljenja. Ugotavljamo, da učenci svojih rešitev ne znajo utemeljiti, čeprav dosežki na NPZ nakazujejo na poznavanje lastnosti matematičnih pojmov, obvladovanje in izvajanje postopkov. Naloge utemeljevanja dobro ločujejo učence z višjimi in učence z nižjimi dosežki. Težave pri zapisu utemeljitve izhajajo iz nedosledne uporabe matematične terminologije in simbolike (Bone, 2019). Izbira ustreznih didaktičnih pristopov in strategij, ki razvijajo utemeljevanje ne samo pri pouku matematike, ampak tudi pri drugih predmetih, bo pripomogla, da bodo učenci deležni več izkušenj z utemeljevanjem, kar se bo pokazalo tudi v dosežkih na naslednjih zunanjih in notranjih preverjanjih znanja.

Literatura

- Bone, J. (2019). Naloge z utemeljevanjem na Nacionalnem preverjanju znanja iz matematike. V *Sedemdeset let DMFA Slovenije*, 71–72.
- Cankar, G., Semen E., Knežević M., Urank, M. (2020) Priročnik za uporabo orodja za ugotavljanje kakovosti izkazanega znanja: Nacionalno preverjanje znanja. Državni izpitni center. Pridobljeno 25. 2. 2020, <https://www.ric.si/mma/Orka%20prirocnik/2018090312493817/>
- Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. CERME, Dublin, Ireland. Pridobljeno 28. 12. 2019, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873071/document>
- Felda, D. (2012). Pomanjkljivo zavedanje potreb po matematični pismenosti v naši šoli. *Didactica Slovenica–Pedagoška obzornja*, 27(3–4), 37–50.
- Felda, D. (2018). Preverjanje matematičnega znanja. *Revija za elementarno izobraževanje*, 175. Pridobljeno, 29. 12. 2019, http://rei.pef.um.si/images/Izdaje_revije/2018/2/REI_11_2_CLANEK5.pdf
- Letna poročila o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja v šolskih letih od 2005/2006 do 2018/2019, Pridobljeno 27. 12. 2019, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/
- Nacionalno preverjanje znanja. Preizkusi znanja. Matematika. Pridobljeno december 2019, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/in_Banka_nalog_https://bankanalog.ric.si
- Opisov dosežkov učencev 6. in 9. razreda pri NPZ-ju od 2005/2006 do 2018/2019. Pridobljeno januar 2020, https://www.ric.si/preverjanje_znanja/statisticni_podatki/
- Šterman, I. K. (2019). PISA 2018: program mednarodne primerjave dosežkov učencev in učenk: nacionalno poročilo s primeri nalog iz branja. Pedagoški inštitut. Pridobljeno 20. 12. 2019, https://www.pei.si/wp-content/uploads/2019/12/PISA2018_NacionalnoPorocilo.pdf

Naloge utemeljevanja na NPZ matematike v 6. in 9. razredu

6A: 2011/6. razred/6. naloga

Pisemska ovojnica je dolga 15 cm 5 mm široka pa 11 cm.

- Koliko milimetrov je dolžina pisemske ovojnice večja od njene širine?
- Katere voščilnice zagotovo ne bomo mogli zapreti v pisemsko ovojnico?

Obkroži črko pred pravilnim odgovorom.

- Voščilnica, dolga 9 cm 5 mm in široka 120 mm.
- Voščilnica, dolga 15 cm in široka 12 cm 5 mm.
- Voščilnica, dolga 14 cm in široka 10 cm.

Utemelji svojo odločitev.



6B: 2012/6. razred/8. naloga

Nik bi moral pobarvati $\frac{2}{3}$ vsakega lika:

pravokotnika, kroga, šestkotnika, kvadrata, trikotnika in petkotnika.

- Katere like je Nik pravilno pobarval?
- Nik je pobarval $\frac{4}{10}$ nekega lika. Katerega? Utemelji.

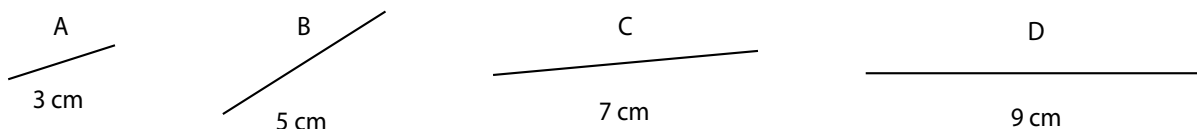


6C: glej 9K

6D: glej 9L

9A: 2006/9. razred naknadni rok/ 10. naloga

Marko ima štiri paličice z dolžinami 3 cm, 5 cm, 7 cm in 9 cm. Z njimi želi sestaviti model trikotnika. Paličice predstavljajo stranice trikotnika.



b) S katerimi tremi paličicami Marko ne more sestaviti trikotnika?

Odgovor utemelji.

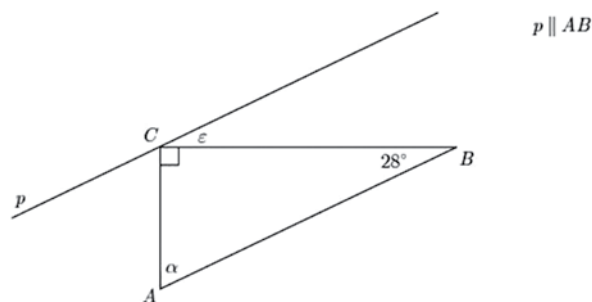
9B: 2007/9. razred/12. naloga

Določi, koliko stopinj merita kota α in ϵ , ki sta označena na spodnji skici. Premica p je vzporedna premici AB .

Opomba: Koti na skici niso v pravi velikosti.

a) Koliko meri kot α ?

b) Koliko meri kot ϵ ? Odgovor utemelji z besedami.

**9C: 2007 naknadni rok/9. razred/5. naloga**

a) Marko je s premislekom reševal enačbo $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

Zapisal je množico rešitev enačbe: $R = \{0\}$

Ali je zapisal vse rešitve te enačbe? Odgovor utemelji.

9D: 2008/9. razred/7. naloga

b) Pet učencev je preoblikovalo izraz $(3 - a)^2$.

Obkroži ime učenca, ki je pravilno preoblikoval dani izraz tako, da velja za poljubno število a . Utemelji, zakaj je tvoja izbira pravilna.

Anita: $(3 - a)^2 = 3^2 - a^2$

Borut: $(3 - a)^2 = 9 - 6a - a^2$

Cilka: $(3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2$

Drago: $(3 - a)^2 = 9 + a^2$

Erika: $(3 - a)^2 = 9 - 3a + a^2$

9E: 2009/9. razred/14. naloga

Izdelati želimo žični model pravilne 4-strane prizme z osnovnim robom 4 dm in z višino 6 dm.

- a) Koliko metrov žice bomo potrebovali za vse osnovne in stranske robove skupaj?
- b) V modelu bomo izdelali tudi telesno diagonalo. Katera najmanjša dolžina žice od navedenih bi zadoščala za izdelavo telesne diagonale?

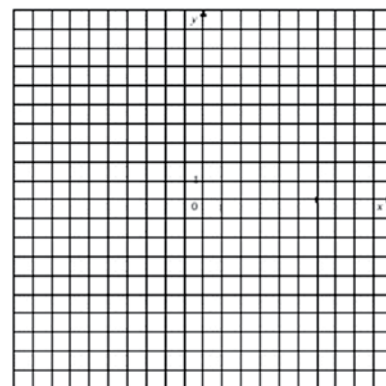
Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Svojo izbiro utemelji z računi.

- A 6 dm
B 7 dm
C 8 dm
Č 9 dm
D 10 dm

9F: 2009 naknadni rok/9. razred/7. naloga

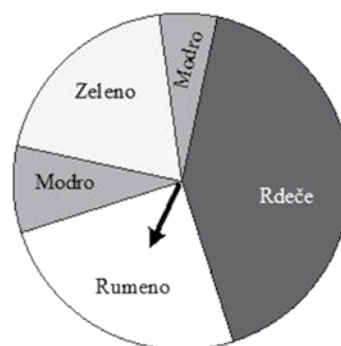
Enačba premice p je $y = \frac{x}{2} - 4$.

- a) Nariši premico p v koordinatni sistem.
- b) Zapiši koordinati točke, v kateri premica p seka ordinatno os: _____.
- c) Ali leži točka A $(-140, -74)$ na premici p ? Utemelji odgovor.

**9G: 2011/9. razred/12. naloga**

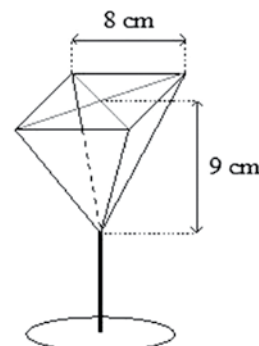
Na sliki je krožna plošča, razdeljena na 5 pobarvanih polj. V središču plošče je pritrjen kazalec. Kazalec zavrtimo. Opazujmo in ocenimo:

- a) Kakšne barve je polje, na katerem se kazalec najverjetneje ustavi?
- b) Kaj je bolj verjetno: da se ustavi kazalec na modrem ali na zelenem polju?
- c) Jana trdi: verjetnost, da se kazalec ustavi na rumenem polju, je $\frac{1}{5}$, ker je krog razdeljen na 5 delov. Ali sklepa prav? Odgovor utemelji.

**9H: 2011 naknadni rok/ 9. razred/14. naloga**

Ali lahko v kozarec, ki ima obliko pokončne pravilne 4-strane piramide, natočimo 2 dl pijače, ne da bi se tekočina prelila čez rob?

Utemelji z računom. Podatke preberi na sliki.



9I: 2013/9. razred/6. naloga

Ali je trikotnik z danimi podatki pravokoten?

Obkroži pravilni odgovor in utemelji svojo izbiro.

- | | | |
|---|----|----|
| a) Trikotnik, katerega velikost enega notranjega kota je 30° , drugega pa 60° . | DA | NE |
| b) Trikotnik, ki ima stranice dolge 15 cm, 12 cm in 11 cm. | DA | NE |

9J: 2014/9. razred/10. naloga

Prostornina pravilne štiristrane piramide je 243 dm^3 , njena višina je 9 dm.

- a) Izračunaj ploščino osnovne ploskve.
- b) Dolžina osnovnega roba je _____ dm.
- c) Prostornina pokončne prizme, ki ima enako osnovno ploskev in enako višino kot dana piramida, je _____ dm^3 .
- č) Mija trdi, da se tej pokončni prizmi reče kocka. Utemelji Mijino trditev.

9K in 6C: 2015/9. razred/ 2. naloga in 2015/6. razred/9. naloga

Na kmetiji so nabrali 0,75 tone jabolk.

- a) Nekaj nabranih jabolk so preložili v zaboje. Napolnili so 50 zabojev po 5 kg in 25 zabojev po 15 kg. Koliko kilogramov jabolk niso preložili v zaboje?
- b) Vsa nabrana jabolka bi lahko zložili v 30 zabojev, če bi v vsak zaboj dali enako količino jabolk. Koliko kilogramov jabolk bi bilo v vsakem zaboju?
- c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolkami napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

9L in 6D: 2016/9.razred/3. naloga in 2016/6. razred/10. naloga

Na kmetiji so pripravili 55 l soka in dovolj stekleničk po $\frac{1}{2}$ l in po 3 dl.

- a) Napolnili so 50 stekleničk po $\frac{1}{2}$ l, preostanek soka so pretočili v stekleničke po 3 dl. Koliko stekleničk po 3 dl so napolnili?
- b) Ali bi lahko s 55 l soka napolnili le stekleničke po $\frac{1}{2}$ l? Utemelji.
- c) Ali bi lahko s 55 l soka napolnili le stekleničke po 3 dl? Utemelji.

9M: 2018/9. razred/5. naloga

Utemelji, ali je $x = \frac{1}{3}$ rešitev enačbe $5 - 3x = -x + 2$.