PETNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Kot že vrsto let se je tudi v letu 2008 ekipa Fakultete za matematiko in fiziko udeležila mednarodnega tekmovanja študentov matematike. Tokrat so se s študenti z vsega sveta pomerili Špela Špenko iz drugega letnika, Sara Kališnik iz tretjega letnika ter Kris Stopar in Nik Stopar iz četrtega letnika. Prvič je svojega zastopnika na to tekmovanje poslala tudi Univerza na Primorskem, študenta prvega letnika Petra Muršiča.

Tekmovanje je tudi letos zraslo, tako po številu sodelujočih držav kot po številu študentov; kar 283 študentov je zastopalo 90 različnih univerz. Mnoge univerze pripeljejo dokaj številne ekipe, saj pravila, da vsaka univerza tekmuje s štirimi študenti, že nekaj let ni več. Tako je na primer iz Zagreba prišlo kar enajst tekmovalcev. Uveljavlja se tudi rangiranje univerz glede na najboljše tri dosežke, kar seveda favorizira ekipe z več študenti.

Naše ekipe se vsako leto uvrščajo nekako v zlato sredino. Tudi letos je bilo tako. Špela Špenko in Nik Stopar sta osvojila tretjo nagrado, Sara Kališnik in Kris Stopar pa pohvalo. Prav tako je pohvalo dobil Peter Muršič.

Glede na to, da mnoge univerze organizirajo posebne priprave ter izbore tekmovalcev (mi pa ne), ta uspeh ni zanemarljiv. V posebnem točkovanju univerz smo dosegli 34. mesto.

Poleg tekmovanja je velik poudarek na druženju študentov. Predsednik žirije John E. Jayne je posebej pozval k preseganju dnevnih političnih delitev. Kot primer je navedel, da kljub temu da je Francija leta 1066 napadla Anglijo, vseeno rad pokramlja s kakšnim Francozom. V študentskem domu je bilo ves čas živo, še posebej po drugem tekmovalnem dnevu, ko je (glasna) zabava trajala pozno v noč. Domačini so sicer rekli, da imajo od vseh gostov še najraje nas matematike, ker jim naredimo najmanj škode na inventarju.

Če je za študente dobro poskrbljeno (oziroma jim je omogočeno, da sami dobro poskrbijo zase), je zgodba pri vodjih ekip deloma drugačna. Izbiranje tekmovalnih nalog je zelo mukotrpen proces, pri katerem se pokažejo tudi politične delitve (na algebraike in analitike). Še slabše je pri ocenjevanju izdelkov, kjer ni dovolj nadzora nad samim procesom. Predsednik žirije je recimo v dveh dneh ocenjevanja v dvorano vstopil le dvakrat, ko nas je napodil spat in zaklenil vrata. Tega mu sicer nismo zamerili, saj se po desetih urah ocenjevanja v dvorani brez svežega zraka pri več kot 35 °C prileže polurni sprehod po spečem Blagoevgradu. Zaradi slabih razmer se veliko vodij ekip temu delu odreče, kar nujno pomeni več zabave za tiste, ki imajo dovolj čuta dolžnosti. Pisec teh vrstic je tako v dveh dneh imel čast oceniti in skoordinirati ocene okoli 200 izdelkov. Presenetljivo (ali pa morda tudi ne) so na koncu rezultati kar objektivni, vsaj tako je splošno subjektivno mnenje udeležencev.

Še nekaj besed o Blagoevgradu, kjer so tekmovanje gostili že četrtič. Mesto je zagotovo eno lepše urejenih v Bolgariji, za kar je delno zaslužna Ameriška univerza, ki ima tam sedež (v stavbi, kjer je pred leti imela sedež komunistična partija). Prav tako se pozna pritok evropskih sredstev, najbolj očitno na pred kratkim zgrajenih avtocestah. Kljub evropeizaciji se življenjski utrip na splošno ni kaj dosti spremenil, nekateri bi ob tem verjetno omenjali polotok, na katerem leži Bolgarija in njene sosednje države.

Leta 2009 bo tekmovanje v Budimpešti. Organizatorjem iz Minska, ki je bil prvi kandidat, namreč ni uspelo zagotoviti namestitve s tekočo vodo.

Oblika tekmovanja je enaka vse od začetka. Študenti dva dni po pet ur rešujejo po šest nalog. Vsak dan je prva naloga lahka in bi jo morali rešiti res skoraj vsi, naslednje tri naj bi bile srednje težavnosti, zadnji dve pa sta po navadi zelo težki. Letos komisiji ni uspelo dobro oceniti težavnosti nalog, študenti so imeli namreč prvi dan občutek, kot da rešujejo le pete in šeste naloge. Tako so bili rezultati prvega dne skoraj katastrofalni – morda je kdo pomislil, da bi test morali ponavljati. Drugi dan se je stanje normaliziralo. Oglejmo si nekaj nalog skupaj z njihovimi rešitvami. Naloge so označene po dnevih in zaporednih številih. Tako je II.3. tretja naloga drugega dne (in je bila verjetno najlažja med vsemi), II.1. je prva naloga drugega dne in je prav tako lahka (a morda malce težja od prve predstavljene), I.6. pa je zadnja naloga prvega dne in je težka. Tokrat je sicer kot najtežja obveljala naloga I.5., kjer je bil povprečen rezultat 0,2 točke od 20 možnih. Vsi trije zmagovalci so popolnoma rešili 11 nalog, pri tej pa vsi dobili ničlo.

II.3. Naj bo n naravno število. Dokažite, da je število

$$\sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

deljivo z 2^{n-1}.

Rešitev. Če srednješolec vidi nalogo z okvirnim besedilom „dokažite, da za vsak n velja …“, verjetno pomisli na indukcijo. V tem primeru to ni prava pot. Bolje se je spomniti binomskega izreka

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ker pa v izrazu v nalogi manjkajo lihi členi, se jih moramo znebiti. Zapišemo še

$$(-a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$$

ter izraza odštejemo, da dobimo

$$(a+b)^n - (-a+b)^n = 2 \sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} b^{n-2k-1}.$$

Da bi desna stran postala izraz iz naloge, ustrezno izberemo a in b.

$$(\sqrt{5}+1)^n - (-\sqrt{5}+1)^n = 2\sqrt{5} \sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

oziroma

$$\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}\,.$$

Dobljeni izraz nas mora spomniti na splošni člen Fibonaccijevega zaporedja. Velja namreč, da ima rekurzivno podano zaporedje $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ z začetnima členoma $F_1 = F_2 = 1$ splošni člen enak

$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\,.$$

Tako velja

$$\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k=2^{n-1}F_n$$

in naloga je rešena.

II.1. Dokažite, da če za celi pozitivni števili k in n polinom $x^{2k}-x^k+1$ deli polinom $x^{2n}+x^n+1$, tudi polinom $x^{2k}+x^k+1$ deli polinom $x^{2n}+x^n+1$.

Rešitev. Ker vsak polinom lahko zapišemo kot produkt linearnih polinomov (nekateri med njimi so seveda lahko kompleksni), polinom h deli polinom g, če je vsaka kompleksna ničla polinoma h hkrati tudi ničla polinoma g. Tako naloga pravzaprav zahteva, da določimo (nekatere) ničle navedenih polinomov. Označimo $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$, $g(x) = x^{2k} - x^k + 1$ in $h(x) = x^{2k} + x^k + 1$. Dokazati moramo, da če je vsaka ničla polinoma g tudi ničla f, so potem tudi ničle h ničle f. Poti do rešitve je seveda več. Predstavimo zanimivo rešitev, ki uporabi le eno ničlo polinoma $g(x)$. Lahko bi tudi okarakterizirali vse ničle vseh treh polinomov in jih primerjali med seboj ali pa poiskali vse pare celih števil k in n, za katere g deli f, ter tiste pare k in n, za katere h deli f, ter spet izvedli primerjavo. A dela bi bilo tako več.

Ker imajo opazovani polinomi precej kompleksnih ničel, bo potrebnega nekaj računanja s kompleksnimi števili. Izkaže se, da je za začetek dovolj poiskati eno ničlo polinoma $g(x)$. Opazimo, da je $g(x)(x^k + 1) = x^{3k} + 1$. Ničle polinoma $g(x)$ so torej rešitve enačbe $x^{3k} + 1 = 0$, ki niso hkrati tudi rešitve $x^k+1 = 0$. Recimo, $x_1 = \cos\frac{\pi}{3k} + i\sin\frac{\pi}{3k}$ je ena izmed ničel polinoma $g(x)$. Naj bo $\alpha = \frac{n\pi}{3k}$. Ker $g(x)$ deli $f(x)$, je x_1 ničla polinoma $f(x)$. Tako velja

$$0 = x_1^{2n} + x_1^n + 1 = (\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)) + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1\,.$$

Ker je $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ in $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, lahko zgornji izraz razstavimo:

$$\begin{aligned}(\cos^2\alpha \; - \; & \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha) + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \\ &= 2\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha + (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \\ &= (2\cos\alpha + 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\end{aligned}$$

Ker drugi faktor ne more biti enak 0, sledi, da je $2\cos(\alpha) + 1 = 0$. Zaključimo, da je $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi c$ za neko celo število c.

Izberimo sedaj eno izmed ničel polinoma $h(x)$ in jo označimo z x_0. Podobno kot za polinom g za h velja, da je $h(x)(x^k - 1) = x^{3k} - 1$, kar pomeni, da je $x_0 = \cos\frac{2\pi s}{3k} + i\sin\frac{2\pi s}{3k}$ za $s = 3t \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Izračunajmo sedaj $f(x_0)$. Velja

$$\begin{aligned}f(x_0) &= x_0^{2n} + x_0^n + 1 = \cos(4s\alpha) + i\sin(4s\alpha) + \cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) + 1 = \\ &= \cos^2(2s\alpha) - \sin^2(2s\alpha) + 2i\sin(2s\alpha)\cos(2s\alpha) + \\ &\quad + \cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) + \cos^2(2s\alpha) + \sin^2(2s\alpha) = \\ &= 2\cos^2(2s\alpha) + \cos(2s\alpha) + 2i\sin(2s\alpha)\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) = \\ &= (2\cos(2s\alpha) + 1)(\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha))\,.\end{aligned}$$

Sedaj določimo vrednost prvega faktorja:

$$\begin{aligned}2\cos(2s\alpha) + 1 &= 2\cos\left(2s\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi c\right)\right) + 1 = 2\cos\frac{4s\pi}{3} + 1 = \\ &= 2\cos\frac{4(3t \pm 1)\pi}{3} + 1 = 2\cos\frac{4\pi}{3} + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0\,.\end{aligned}$$

Tako je $f(x_0) = 0$ oziroma vsaka ničla polinoma $h(x)$ je hkrati tudi ničla polinoma $f(x)$, to pa smo želeli dokazati.

Mimogrede, obratna trditev ne velja, saj lahko vzamemo $n = k$ in potem h deli f, g pa ne. Trditev ne velja niti, če se omejimo na $k < n$, saj je recimo $x^{10} + x^5 + 1 = \big(x^2 + x + 1\big)\big(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1\big)$.

I.6. Za permutacijo σ števil 1, 2, …, n definiramo $D(\sigma) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$. S $Q(n,d)$ označimo število permutacij σ števil od 1 do n, za katere velja $D(\sigma) = d$. Dokažite, da je za $d \geq 2n$ število $Q(n,d)$ sodo.

Rešitev. Kot se spodobi za rešitev težke naloge, začnemo z objekti, ki na prvi pogled nimajo zveze z nalogo. Tokrat je to determinanta, ki jo označimo z

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ x & 1 & \cdots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Na ij-tem mestu v matriki je element $x^{|i-j|}$. Ko računamo $\Delta(x)$ po definiciji determinante, dobimo

$$\Delta(x) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} x^{D(\sigma)}, \tag{1}$$

kjer je S_n množica vseh permutacij n elementov, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ pa predznak permutacije. Člen $x^{D(\sigma)}$ dobimo kot produkt $\prod_{k=1}^{n} x^{|\sigma(k)-k|}$ in s tem vidimo zvezo med Δ in D.

Recimo, da je $Q(n,d)$ sodo število. To pomeni, da v vsoti (1) člen x^d nastopa sodokrat, nekajkrat pomnožen s $+1$ in nekajkrat z -1. Vsota koeficientov je v vsakem primeru soda. Podobno razmislimo, da če je število $Q(n,d)$ liho, je tudi koeficient pri x^d v $\Delta(x)$ lih. Tako moramo za dokončanje naloge dokazati, da je za $d \geq 2n$ koeficient pri x^d v $\Delta(x)$ sod.

Izračunajmo $\Delta(x)$. V ta namen vsaki (razen prvi) vrstici matrike odštejemo x-krat prejšnjo vrstico. Tako dobimo matriko, ki ima pod diagonalo same ničle:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 1-x^2 & \cdots & x^{n-3}-x^{n-1} & x^{n-2}-x^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-x^2 & x-x^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x^2 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)^{n-1}.$$

Koeficienti pri x^d so za $d \geq 2n-1$ enaki 0 in so sodi, torej je sodo tudi število $Q(n,d)$.

Lepota tega tekmovanja je tudi v tem, da študenti vedno najdejo kakšno alternativno rešitev. Tudi v tem primeru je bilo tako, a uradna rešitev, predstavljena tu, je nekajkrat krajša od čiste kombinatorične rešitve.

Kot zanimivost naj navedem še najtežjo nalogo skupaj z njeno „rešitvijo“.