Vega

Mathematik

3.

Vorleſungen
über die
Mathematik
Dritter Band,
welcher
die Mechanik der feſten Körper enthält.

zum Gebrauche
des
Kaiſerl. Königl. Artilleriecorps
ausgefertiget von
Georg Vega,
[illegible]
Kaiſerl. Königl. [illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Vorleſungen

über die

Mathematik

Dritter Band,

welcher
die Mechanik der feſten Körper enthält.

Zum Gebrauche
des
Kaiſerl. Königl. Artilleriekorps
aufgeſetzt von

Georg Vega

Hauptmann und Profeſſor der Mathematik bey dem
Kaiſerl. Königl. Bombardierkorps.

* * *

WIEN,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiſerl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1788.

Dem

ſämmtlichen kaiſerlichen königlichen

Artilleriekorps.

Der dritte Theil der Ihnen gewidmeten mathematiſchen Vorleſungen iſt dieſer Band ; er enthält die Mechanik der feſten Körper. Nicht von der Begierde, Neu zu ſeyn, hingeriſſen, ſondern von der Wahrheit, und dem Wunſche, nützlich zu werden, geleitet, habe ich bey verſchiedenen Gegenſtänden den faſt allgemein betrettenen Weg verlaſſen, und (ich ſchmeichle mir, nicht ohne Erfolg) einen beſonderen zu eröffnen gewaget. Dieſes werden Sie bey der allgemeinen Methode die Wirkungen der Kräfte, nicht durch bedingte Verhältniſſe, ſondern durch wahre Gleichungen auszudrücken, dieſes werden Sie beym Eindringen der Körper in ein gleichförmig dichtes Mittel, dieſes werden Sie bey der Abhandlung der Centralkräfte in der dreyzehnten und vierzehnten Vorleſung, wie auch bey der offenbaren Nothwendigkeit des **Boſcovichiſchen** Syſtems von der Elementarkraft der Materie, inſonderheit bey dem baliſtiſchen Pendel, und beym Stoſſe der Körper finden. Ich habe zum Gegenſtande meiner Unterſuchungen auch die Geſetze der Bewegung der im weiten Raume um die Sonne ſchwebenden Körper gemacht; ein ſehnlich forſchender Blick, den Sie von der Oberfläche der Erde in dieſe weiten Gefilde machen würden, ſollte dieſer wohl unfruchtbar ſeyn? **Leibnitzens** Lehre von dem mathematiſch unendlich Groſſen und unendlich Kleinen habe ich durchaus beybehalten; ſie führet uns auf dem kürzeſten Wege an die Gränze des menſchlichen Verſtandes, und iſt die ſicherſte Warnung vor Irrlehren. Iſt Ihre Wißbegierde befriediget, ſo iſt mein Ziel erreichet, und mein Wunſch, Ihnen nützlich zu ſeyn, erfüllet.

Wien am 19 März 1788.

Der Verfaſſer.

Inhalt
des
dritten Bandes.

Erſte Vorleſung.
Welche eine vorläufige Einleitung enthält.

Zeit, und ihre Abtheilung in Stunden, Minuten, und Sekunden; Erklärung einer Zeitſekunde. §. 21. Die gleichförmige, ungleichförmige, beſchleunigte, verzögerte Bewegung. §. 22. Verhältniß der Zeiten und Wege bey der gleichförmigen Bewegung. §. 23. Die Geſchwindigkeit eines Körpers; ihr Maaßſtab bey der gleichförmigen, bey der ungleichförmigen Bewegung, §. 24. und 25. Eigenſchaften der gleichförmigen Bewegung. §. 26. Erklärung der bewegenden oder mechaniſchen Kraft, und Verzeichniß einiger der bekannteſten bewegenden Kräfte. §. 27. Wodurch wird das Daſeyn einer bewegenden Kraft erkennet? wodurch ihre Gröſſe beſtimmet? §. 28. Unveränderliche (abſolute), und veränderliche (relative) Kraft. §. 29. Die Abtheilung der bewegenden Kräfte in lebendige und todte iſt überflüſſig. §. 30. Das Gleichgewicht. §. 31. Feſter, flüſſiger, biegſamer, weicher, zäher, ſpröder, elaſtiſcher, unelaſtiſcher Körper. §. 32. Erklärung der Mechanik, und ihre gewöhnliche Eintheilung in die Statik, Hydroſtatik, Aerometrie, Dynamik, Hydrodynamik, Pneumatik, und Maſchinenlehre. §. 33. u. 34. Hauptgrundſätze der Mechanik. §. 35. Trägheit der Körper. Es giebt keine Trägheitskraft.

Zweyte Vorleſung.

Die gleichförmig beſchleunigte Bewegung.

§. 36. Erklärung der gleichförmig beſchleunigten, und gleichförmig verzögerten Bewegung. §. 37. Wo die gleichförmig beſchleunigte Bewegung ſtatt finde. §. 38. und 39. Die zwey Fundamentalgleichungen für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung. §. 40. Die nämlichen zwey Gleichungen. §. 41. Daraus folgen noch zwey andere Gleichungen. Alle Eigenſchaften der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, allwo aber die Gröſſe der bewegenden Kraft und des bewegten Körpers noch nicht in die Rechnung gezogen iſt, ſind durch zwölf Formeln abgebildet. §. 42. Einige dieſer Eigenſchaften durch Worte ausgedrückt. §. 43. 44. 45. 46. 47. Anwendung der gleichförmig beſchleunigten Bewegung auf den freyen Fall der Körper. Was die Geſchwindigkeitshöhe ſey? §. 48. *) 49. 50. Eigenſchaften der Bewegung, wenn unveränderliche Kräfte von gegebener Gröſſe auf gegebene Körper wirken, die ſich frey bewegen können. §. 51. Anwendung dieſer Lehre I. auf die Bewegung eines gegebenen Körpers auf einer horizontalen Tafel mittels eines angehängten Gewichtes. II. Auf die Bewegung ungleicher Gewichte an der einfachen Rolle. III. Auf das Eindringen der Kanonkugeln in ein gleichförmig dichtes Erdreich, welches aber unrichtig iſt, wovon weiter unten §. 59. I. ausführlicher gehandelt wird. §. 52. Erinnerung wegen dem Leibnitziſchen und Carteſiſchen Kräftenmaaß.

Dritte Vorleſung.

Die veränderliche Bewegung.

§. 53. Erklärung der veränderlichen Bewegung §. 54. 55. 56. Die Eigenſchaften der geradlinigten Be-

---

*) Zu Ende des §. 48. wo die meiſten Anfänger eine Schwierigkeit finden, weil bey der beweglichen Maſſe die Schwere auſſer Acht gelaſſen, und doch dabey die Beſchleunigung derſelben in Erwägung gezogen wird, kann wegen gröſſerer Deutlichkeit noch hinzugeſetzet werden.

Es wird nämlich bey der Beſtimmung oder Ausmeſſung der Beſchleunigung der Kraft P, da ſie auf die Maſſe M wirket, die Beſchleunigung der Schwere $= g$ zum **Maaßſtabe** angenommen, weil bey keiner andern bewegenden Kraft die Beſchleunigung ſo genau bekannt iſt, als bey der Schwerkraft.

wegung, wenn veränderliche Kräfte auf gegebene Körper wirken, werden durch vier Differenzialgleichungen vollſtändig abgebildet. §. 57. 58. Anwendung der veränderlichen Bewegung auf verſchiedene Gegenſtände, als z. B. auf den freyen Fall der Körper bey veränderlicher Schwere in verſchiedenen Erhöhungen, auf die Zuſammenpreſſung einer elaſtiſchen Feder, u. m. d. §. 59. Das berühmte Boſcovichiſche Syſtem von der Elementarkraft der Materie; eine Anwendung davon auf den Stoß der Körper wird weiter unten §. 216. vorkommen. Die Kraft des Stoſſes. Die ſonſt gewöhnliche Lehre von dem Eindringen der Kugeln in ein gleichförmig dichtes Erdreich wird berichtiget.

Vierte Vorleſung.

Die zuſammengeſetzte Bewegung.

§. 60. Erklärung der zuſammengeſetzten Bewegung, der Seitenkräfte und der mittleren Kraft. §. 61. 62. Zwey Grundſätze. §. 63. 64. 65. Bewegung eines gegebenen Körpers, wenn zwey gegebene Seitenkräfte darauf wirken. Der Weg iſt nicht jederzeit die Diagonale des Parallelograms. §. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. Aus den gegebenen Seitenkräften die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft zu finden; und umgekehrt. Das Kräftenparallelogram. Das Zuſammenſetzen, und Zerlegen der Kräfte §. 73. 74. 75. Die Zerlegung und Zuſammenſetzung der Geſchwindigkeit.

Fünfte Vorleſung.

Die freye Bewegung geworfener ſchwerer Körper.

§. 76. Die Fundamentalgleichung für die Bahn des geworfenen Körpers wird aus der vorhergehenden Lehre von der zuſammengeſetzten Bewegung abgeleitet. §. 77. 78. 79, 80. 81. 82. 83. Werden die übrigen Eigenſchaften daraus abgeleitet, und verſchiedene Aufgaben aufgelöſet. §. 84. 85. 86. Vergleichung dieſer Theorie mit der Erfahrung. Urſachen der Abirrungen. Die Theorie des Luft-Widerſtandes beym Bombenwerfen weichet von der Erfahrung noch mehr ab, als die paraboliſche. §. 87. Vorſchlag zu Hilfstafeln beym Bombenwerfen. §. 88. Praktiſche Anweiſung zu ihrem Gebrauche, und Vorſchlag zu Rikoſchet-Tafeln.

Sechſte Vorleſung.

Von der Bewegung ſchwerer Körper auf einer ſchiefen Ebene und in einigen krummen Linien.

§. 89. 90. 91. Erklärung der ſchiefen Ebene. Beſtimmung der bewegenden Kraft und der Richtung der Bewegung eines ſchweren Körpers auf der ſchiefen Ebene. §, 92. 93. 94. 95. Aus zwey gefundenen Fundamentalgleichungen werden die übrigen Eigenſchaften der freyen Bewegung eines ſchweren Körpers auf der ſchiefen Ebene abgeleitet. §. 96. 97. 98.. Von dem Gleichgewichte auf der ſchiefen Ebene. §. 99, 100. Bewegung auf der ſchiefen Ebene, wo die Reibung auch in die Rechnung gezogen wird. §. 101. Beſtimmung der Reibung, und auch der Beſchleunigung der Schwere mittelſt der ſchiefen Ebene, §. 102. Eine allgemeine Eigenſchaft des Falles eines ſchweren Körpers in einer jeden krummen Linie von ununterbrochener Krümmung. §. 103. Die Zeit des Falles in der Cycloide.

Siebente Vorleſung.

Das einfache Pendel.

§. 104. 105. Erklärung des einfachen und zuſammengeſetzten Pendels. Eigenſchaften der Schwingungsbewegung eines einfachen Pendels. §. 106. Dauerzeit eines Pendelſchlages in einem ſehr kleinen (unendlich kleinen) Kreisbogen. §. 107. Dauerzeit in einem Schwingungsbogen von gegebener Gröſſe. §. 108. Daraus werden verſchiedene Folgen abgeleitet, als z. B. aus der Länge des einfachen Sekundpendels die Beſchleunigung der Schwere zu finden, und umgekehrt. §. 109. Der Gebrauch der Cycloide bey dem Uhrperpendickel iſt unrichtig.

Achte Vorleſung.

Der Hebel.

§. 110. 111. Erklärung der einfachen Rolle, und Zuſtand des Gleichgewichtes an derſelben §. 112. Erklärung des Hebels. §. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. Vorläufige Hilfsſätze um das Hauptgrundgeſetz des Hebels zu beweiſen. §. 120. Hauptgrundgeſetz des Hebels. §. 121. Der Winkelhebel. §. 122. 123. 124. 125. 126. Verſchiedene zum Gleichgewichte am Hebel gehörige Sachen.

Neunte Vorleſung.

Der Schwerpunkt.

§. 127. Erklärung des Schwerpunktes. §. 128. 129. 130. 131. Jede Linie, jede Fläche, jeder Körper hat einen Schwerpunkt, wenn gleich groſſe Elementartheilchen derſelben von gleichgroſſen Kräften nach parallelen Richtungen getrieben werden. §. 132. Wie ſolcher zu finden ſey. §. 133. Die Summe der Momente in Rückſicht einer Linie oder Ebene, die durch den Schwerpunkt geht, iſt = 0. §. 134. Allgemeine Formeln zur Be-

Vier-

Inhalt.

Vierzehnte Vorleſung.

Die Kreisbewegung.

I. Die gleichförmige Kreisbewegung.

§. 196. Zur Kreisbewegung iſt auſſer der Tangentialgeſchwindigkeit auch noch eine Centralkraft erforderlich. §. 197. Beſtimmung der zu einem gegebnen Kreiſe erforderlichen Centralkraft, und verſchiedene daraus abgeleitete Folgen. §. 198. Berechnung der Umlaufszeit, und verſchiedene daraus abgeleitete Folgen. Betrachtung über die Umlaufsbewegung der Planeten um die Sonne und der Nebenplaneten um die Hauptplaneten. §. 199. 200. Von der nicht freyen Keisbewegung. Ob aus der Umlaufsbewegung eine Fliehekraft entſtehe?

II. Die ungleichförmige Kreisbewegung.

§. 201. 202. 203. 204. 205. Differenzialgleichungen für die ungleichförmige Kreisbewegung. §. 206. 207. Das Drehungsmoment (Moment der Trägheit). Berechnung der Drehungsmomente bey verſchiedenen Körpern. §. 208. 209. 210. Die beſchleunigte Bewegung des Wellrades, des Räderwerkes, und des Flaſchenzuges. §. 211. Die Schwingungsbewegung des zuſammengeſetzten Pendels. §. 212. Erklärung des Schwingungspunktes, und Beſtimmung deſſelben bey verſchiedenen zuſammengeſetzten Pendeln. §. 213. Wie die Länge des einfachen Sekundenpendels durch Beobachtung zu ſuchen ſey? Ein Beyſpiel davon iſt Herrn **Liesganigs** Beſtimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels in Wien. §. 214. Nutzen dieſer Unterſuchung. §, 215. 216. Die Lehre von dem baliſtiſchen Pen-

Pendel, und von dem Stoſſe der weichen ſowohl als auch der vollkommen harten Körper wird mittelſt der Boscovichiſchen Elementarkraft abgeleitet.

Fünfzehnte Vorleſung.

Die Centralbewegung.

§. 217. 218, 219. 220. 221. Allgemeine Eigenſchaften einer jeden freyen Centralbewegung. §. 221. Abgeſönderte Differenzialgleichung für die Bahn des Körpers, wenn die Centralkraft eine Funktion der Entfernung iſt. §. 222. Allgemeine Formel für die Auflöſung der geraden Aufgabe von der Centralbewegung. §. 223. 224. 225. 226. 227. 228. Die Bahn bey der Centralbewegung, wenn die Centralkraft ſich verhält wie umgekehrt das Quadrat der Entfernung. Betrachtungen über den elliptiſchen Umlauf der Planeten um die Sonne. §. 229. 230. Die wahre und mittlere Anomalie. Eine Formel für die Auflöſung der **Kepleriſchen** Aufgabe. Berichtigung einer Stelle in H. **L. Eulers** ſcientia motus.

Von der Bewegung der feſten Körper und von den Kräften, welche auf ſelbe wirken.

I. Vorleſung,

welche eine vorläufige Einleitung enthält.

§. 1.

Ein **phyſiſcher, ein wirklicher Körper** heißt eine begränzte Ausdehnung, welche auf unſere Sinnen zu wirken fähig iſt. Die weſentlichſte Eigenſchaft eines jeden Körpers iſt demnach die Ausdehnung, welche wir in der Geometrie für ſich allein betrachtet und abgehandelt haben. Einige der übrigen Haupteigenſchaften eines jeden Körpers ſind aus folgenden zu erſehen.

§. 2.

Jeder Körper iſt aus einer beſtimmten Menge miteinander verbundener Beſtandtheile zuſammengeſetzt; dieſe

Fig. Beſtandtheile zuſammengenommen heißen die **Materie** oder die **Maſſe** des Körpers (Maſſa corporis). Und zwar **Materie** heißt dasjenige Weſen, nämlich der Stoff, woraus die Körper beſtehen; **Maſſe** aber heißt die beſtimmte Menge der Materie, welche in einem gegebenen Körper enthalten iſt.

§. 3.

Jeder Köper iſt **poros** (allenthalben durchlöchert), nämlich mit leeren, oder doch **von fremder Materie angefüllten** Zwiſchenräumen verſehen. Die Zwiſchenräume (pori) ſind bey einigen Körpern ſogar ſichtbar, als bey einem Schwamme, bey dem Pimſenſteine u. d. m., bey anderen Körpern können ſie durch die überzeugendeſten Verſuche dargethan werden,. ſo z. B. dringt eine gewiſſe Menge Queckſilber in ein Stück Gold allenthalben hinein, ohne die Gränzen der Ausdehnung, ohne den Kubikinhalt, oder Inhalt (volumen) dieſes Stückes im mindeſten zu vergröſſern. Zwey Körper von einerley Kubikinhalte können demnach ungleiche Mengen der materiellen Beſtandtheile enthalten, können ungleiche Maſſen haben; ein Kubikſchuh Bley hat mehr Maſſe, als ein Kubikſchuh Zinn. Ein Körper iſt deſto **dichter**, je mehr materielle Beſtandtheile bey demſelben in einerley Raume eingeſchloſſen ſind, und er iſt **gleichförmig dicht**, wenn allenthalben gleich groſſe Theile deſſelben gleich viel Materie enthalten; im Gegentheile iſt er **ungleichförmig dicht**. Bey einem gleichförmig dichten Körper kann man die Dichtigkeit deſſelben durch die Menge der materiellen Beſtandtheile ausdrücken, welche ſich in einem beſtimmten für die Einheit angenommenen Theile deſſelben befinden.

Anmerk. Ein Körper würde vollkommen dicht ſeyn, wenn er gar keine Zwiſchenräume hätte; die letzten Beſtandtheile, die **Elemente**, eines phyſiſchen Körpers kön-

können vielleicht vollkommen dicht ſeyn, von denen wir aber gar keine deutlichen Begriffe haben; es iſt zwar ſehr wahrſcheinlich, daß die Elemente aller noch ſo verſchiedener Körper unter einander gleich ſind, daß die Elemente des Goldes mit den Elementen des Holzes, die Elemente des Zuckers mit den Elementen des Eßigs, daß ſie alle einerley ſind, ſo wie die Elemente des Waſſers, des Schnees, und des Eiſes einander gleich ſind, und daß die Verſchiedenheit der Körper nur bloß von der verſchiedenen Ordnung und Verbindung der Elemente herrühre; jedoch iſt dieß nur eine **Wahrſcheinlichkeit**, und keine mathematiſche Wahrheit.

§. 4.

Jeder Körper iſt **undurchdringlich**, das iſt zwey oder mehr Beſtandtheile eines Körpers können nicht zugleich an einem nämlichen Orte ſich befinden, können nicht zugleich den nämlichen Theil des Raumes einnehmen. Nur in die Zwiſchenräume eines Körpers kann zuweilen die Materie eines andern Körpers dringen, nie aber kann die Materie eines Körpers den nämlichen Raum zugleich einnehmen, welchen die Materie eines andern einnimmt; das Waſſer dringt in die Zwiſchenräume des Schwammes, vertreibt daraus die zum Schwamme nicht gehörige Materie nämlich die Luft, aber dabey nehmen die Beſtandtheile des Waſſers doch nicht mit den Beſtandtheilen des Schwammes vollkommen einerley Raum ein. Ein Körper kann zwar in die Zwiſchenräume eines andern **hineindringen**, nie aber kann ein Körper einen andern wahrhaft **durchdringen**. Wenn die Elemente der Materie durchdringlich wären, ſo könnten daraus keine ausgedehnten Körper entſtehen, gleichwie aus noch ſo vielen mathematiſchen Punkten keine mathematiſche Ausdehnung entſtehen kann.

§. 5.

Fig. Jeder Körper iſt **theilbar**; nicht nur in Gedanken, ſondern wirklich läßt ſich ein jeder in eine ungeheuere Menge kleiner Theile zerſtücken; ein kleines Körnchen Kampfer erfüllet ein ſehr geräumiges Zimmer mit ſeinem Geruche, da ſehr kleine Theilchen in ſo groſſer Menge ſich davon abſöndern, daß ſie allenthalben in dem Raume des Zimmers anzutreffen ſind, daß ſie allenthalben in unſere Naſe dringen, und den Geruch verurſachen. Ob die wirkliche Materie eines phyſiſchen Körpers, ſo wie ſeine geometriſche Ausdehnung ohne Ende theilbar ſey, überlaſſen wir den Metaphyſikern zu entſcheiden.

§. 6.

Jeder Körper iſt **ſchwer**, das iſt, jeder um uns her befindliche Körper fällt, wenn er nicht unterſtützet iſt, gegen die Erde herab, preſſet oder drücket die Hand und jede andere Unterlage, die ihn unterſtützet. Warum die Flamme in der Luft, eine Luftblaſe im Waſſer, eine eiſerne Kugel im Queckſilber von der Erde aufwärts ſteige, obſchon dieſe Körper alle ſchwer ſind, wird in der Folge erkläret werden. Läßt man einige Körper in verſchiedenen nicht zu groſſen Entfernungen von einander zugleich fallen, ſo ſind die Linien, nach denen ſie fallen, ſo genau als man es mit den Sinnen bemerken kann, parallel; bindet man ſchwere Körper an Fäden, ſo werden dieſe Fäden ebenfalls nach ſolchen parallelen Linien ausgedehnet, nach deren Verlängerung die Körper fallen, wenn man die Fäden abſchneidet. Dieſe Linien heiſſen die **Richtungen der Schwere**; eine Ebene auf ſie ſenkrecht gelegt z. B. die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers, heißt eine **horizontale Ebene**, und jede Linie in einer ſolchen Ebene oder

jede

jede Linie auf die Richtung der Schwere ſenkrecht gezogen wird eine **horizontale** oder **wagrechte** Linie genennt; die Richtungen der Schwere ſelbſt heiſſen **vertikale, bleyrechte, lothrechte** Linien, oder **Scheitellinien**, und jede Ebene durch eine ſolche Linie gelegt, wird eine **vertikale Ebene** genennt. Wenn man die Erde für eine Kugel, und folglich die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers für ein Stück der Kugelfläche anſieht, ſo müſſen die Richtungen der Schwere in dem Mittelpunkte der Erdkugel zuſammenſtoſſen, da ſie auf der Oberfläche des ſtillſtehenden Waſſers, auf der Kugelfläche ſenkrecht ſtehen, und ſind in nicht gar zu groſſen Entfernungen von einander auf der Oberfläche der Erde nur deßwegen für parallel anzuſehen, weil ſie in dem Mittelpunkte der Erde nur ſehr kleine Winkel einſchlieſſen. Iſt aber die Erde etwan ein abgeplattetes Elliptoides, ſo können nicht alle Richtungen der Schwere, welche auf der Oberfläche des abgeplatteten Elliptoides ſenkrecht ſtehen, in dem Mittelpunkte zuſammenſtoſſen, weil nicht alle Normalen einer Ellipſe und folglich auch nicht alle Normalen eines Elliptoides in dem Mittelpunkte zuſammenſtoſſen.

Fig.

§. 7.

Das Beſtreben eines Körpers gegen die Erde herabzufallen, oder der Druck gegen das, was ihn unterſtützet, heißt ſein **Gewicht**. Dieſes Beſtreben, dieſer Druck, läßt ſich einigermaſſen durch das **Anziehen**, durch die **Attraktion** der Erde erläutern, welche die **Schwere** genennt wird; man ſtellet ſich nämlich vor, daß jedes noch ſo kleines Theilchen eines Körpers von der Erde angezogen werde, obſchon wieder unſer allzubegränzter Verſtand nicht mehr einſehen kann, wie eigentlich dieſes Anziehen geſchieht; **und zwar gleich groſſe Theile der Materie bey was immer für**

Fig. **Körpern werden gleich ſtark angezogen, äuſſern gleiches Beſtreben gegen die Erde herabzufallen**; denn genaue Verſuche zeugen, daß Körper von verſchiedenen Maſſen (z. B. ein Stück Gold und ein Stückchen von einer Pflaumenfeder), in einem luftleeren Raume durch den Fall, in einer nämlichen Zeit gleiche Wege zurücklegen, welches nicht geschehen könnte, wenn nicht ein jedes Element der Materie in der Pflaumenfeder eben ſo ſtark von der Erde angezogen würde, als jedes eben ſo groſſe Element der Materie in dem Golde, wenn ſchon die Maſſe des Goldes ohne Vergleich gröſſer angenommen wird, als die Maſſe der Pflaumenfeder. Wenn jedes einzelne Elementartheilchen der Materie dergeſtalt von der Erde angezogen wird, daß jedes für ſich allein in einer nämlichen beſtimmten Zeit einen nämlichen beſtimmten Weg durch den freyen Fall zurücklegt, ſo müſſen auch mehrere Elementartheilchen mit einander dergeſtalt verbunden, daß ſie dieſen oder jenen Körper bilden, in der nämlichen Zeit durch den freyen Fall den nämlichen Weg zurücklegen, weil der Zuſammenhang der Elementartheilchen unter einander auf den freyen Fall keinen Einfluß hat. In der Luft legen zwar in der nämlichen Zeit einige Körper durch den Fall einen gröſſern, einige einen kleinern Weg zurück, welches aber nur daher rühret, weil ſie nicht **frey** fallen können, weil die Luft das Herabſinken verſchiedener Körper verſchiedentlich verzögert. Dieſer **Umſtand**, daß alle groſſe und kleine Körper durch den freyen Fall in einerley Zeit gleiche Wege zurücklegen, oder daß gleich große Theile der Materie von verſchiedenen Körpern gleich ſtark von der Erde angezogen werden, hat einige Schriftſteller zu der zweydeutigen Redensart verleitet, **alle Körper haben gleiche Schwere**, da man ſonſt im gemeinen Leben unter dem Worte **Schwere eines Körpers** unrichtig ſein Gewicht ver-

verſteht. Wir werden in der Folge unter dem Worte **Schwere** jederzeit das Anziehen der Erdkugel verſtehen, nämlich dasjenige, was den Fall der Körper, wenn ſie nicht unterſtützet ſind, und den Druck gegen die Unterlage verurſachet, wovon ſie unterſtützet ſind; das Wort **Gewicht** aber ſoll jederzeit den wirklichen Druck eines Körpers gegen die Unterlage bedeuten, die ihn unterſtützet. Die Größe, die Stärke der Anziehung, welche auf einen beſtimmten Theil z. B. auf ein Element eines Körpers wirket, läßt ſich am füglichſten aus dem freyen Falle eines Körpers in einer beſtimmten Zeit (z. B. in 1. Sek.) beurtheilen; wenn z. B. an irgend einem Orte A der durch den freyen Fall in 1 Sek. zurückgelegte Weg = g, und dieſer Weg = ng an einem anderen Orte B iſt, ſo verhält ſich die Anziehung in A zur Anziehung in B, wie $g : ng$ oder wie $1 : n$, weil die Anziehungen die **Urſachen**, und die zurückgelegten Wege die **Wirkungen** ſind, welche ſich wie die Urſachen verhalten, wenn ſie in einer nämlichen Zeit auf einerley Art hervorgebracht werden.

§. 8.

Der Weg, den ein Körper in einem beſtimmten Orte vermög der Anziehung der Erdkugel durch den freyen Fall in 1 Sek. zurücklegt, heißt die Beſchleunigung der Anziehung, oder die **Beſchleunigung der Schwere.** Allhier in Wien beträgt die Beſchleunigung der Schwere 15,51512 Wienerſchuhe; wie man dieſe ſo genau gefunden habe, läßt ſich allhier noch nicht zeigen.

§. 9.

Es iſt ſehr wahrſcheinlich, daß über der Erdoberfläche die Schwere im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernungen vom Mittelpunkte gerechnet abnehme; nämlich die Beſchleunigungen der Schwere, Fig. und auch die Gewichte eines nämlichen Körpers in verſchiedenen Erhöhungen über der Erdfläche verhalten ſich gegeneinander, wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde gerechnet; z. B. in einer Erhöhung von zwey Erdhalbmeſſern über der Erdfläche wird die Beſchleunigung $= G$ an dieſem Orte aus der Beſchleunigung $= g$ an der Erdoberfläche, und aus dem Halbmeſſer der Erde $= R$ durch folgende Proportion gefunden; $(3R)^2 : R^2 = g : G$, oder $\frac{1}{R^2} : g = \frac{1}{(3R^2)} : G$, woraus $G = \frac{1}{9}g$ folgt; es iſt demnach an dieſem Orte die Beſchleunigung der Schwere 9mal kleiner als an der Erdoberfläche, und alſo auch das Gewicht eines nämlichen Körpers an dieſem Orte 9mal kleiner als an der Erdoberfläche; wer demnach allhier etwas weniges mehr als einen Eymer (z. B. 1 Eymer und 5 Maaß) Waſſer zu heben und frey fortzutragen vermögend iſt, der kann in dieſer Erhöhung ſchon ein ganzes Faß das iſt 10 Eymer des nämlichen Waſſers heben und frey forttragen.

§. 10.

Zu dieſer Vermuthung von der Abnahme der Schwere kann folgende Betrachtung Anlaß geben. Es

I. ſey Fig. 1, A die Erdkugel, in den Entfernungen AB $= a$, und AC $= b$ Schuhen vom Mittelpunkte gerechnet gedenke man zwey concentriſche Kugelflächen; ferner ſtelle man ſich vor, daß die Anziehung aus dem Mittelpunkte nach geraden Richtungen ſo ohngefähr ausgehe, wie die Lichtſtrahlen von einem leuchtenden Punkte, ſo wird die anfangs auf der Kugelfläche Bb vertheilte Anziehung darauf in einer größern Entfernung AC auch auf einer größern Kugelfläche nämlich auf der Kugelfläche Cc verbreitet ſeyn; man ſetze die Gröſſe der

An-

Fig. 1

Anziehung = m, welche auf der Kugelfläche Bb auf einem beſtimmten Theile derſelben z. B. auf einem Quadratſchuhe verbreitet iſt, und die Gröſſe der Anziehung = n, welche auf der Kugelfläche Cc ebenfalls auf einem Quadratſchuhe verbreitet iſt, ſo iſt auf der Kugelfläche Bb die ganze Anziehung $= m \times 4a^2\pi$, und $= n \times 4b^2\pi$ auf der Kugelfläche Cc, weil die erſte $4a^2\pi$ und die zweyte Kugelfläche $4b^2\pi$ Quadratſchuhe enthält; es iſt aber $m \times 4a^2\pi = n \times 4b^2\pi$, weil man die nämliche ganze Anziehung auf der Kugelfläche Cc gleichförmig vertheilet vorausſetzet, welche anfangs auf der Kugelfläche Bb gleichförmig vertheilet iſt; folglich iſt auch $ma^2 = nb^2$, und $m : n = b^2 : a^2$, oder $m : \frac{1}{a^2} = n : \frac{1}{b^2}$, **nämlich die Gröſſen der Anziehung auf einen nämlichen Gegenſtand, folglich auch die Beſchleunigungen der Schwere, und auch die Gewichte eines nämlichen Körpers in verſchiedenen Erhöhungen über der Erdfläche verhalten ſich gegeneinander wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde gerechnet.** Aſtronomiſche Beobachtungen beſtättigen dieſe Vermuthung von der Abnahme der Schwere, und machen ſie beynahe zur unumſtöſſlichen Wahrheit, da ſie deutlich zeugen, daß der Mond in ſeinem mittleren Abſtande von dem Mittelpunkte der Erde, nämlich in einer Entfernung von 60 Erdhalbmeſſern dergeſtalt von der Erde angezogen werde, dergeſtalt gegen die Erde zu fallen ſtrebe, daß er in 1 Sek. durch den freyen Fall beynahe $\frac{1}{240}$ Schuh, nämlich ziemlich genau $\frac{g}{(60)^2}$ zurücklegen könnte, allwo g die Beſchleunigung der ſchwere an der

Fig. Erdoberfläche bedeutet (§. 8.) *). Dem ohngeachtet kann man in allen denjenigen Erhöhungen, auf denen ſich noch Verſuche anſtellen laſſen, dieſe Abnahme der Schwere auſſer Acht laſſen, da dieſe Erhöhungen in Rückſicht des Erdhalbmeſſers ungemein klein ſind; denn dieſe Erhöhungen können niemals eine ganze geographiſche Meile betragen, weil keines einzigen bisher bekannten Berges höchſter Gipfel eine volle geographiſche Meile über die Meeresfläche erhöhet iſt. Wenn man den Halbmeſſer der Erde = 3360500 W. Kl. ſetzet, ſo iſt in einer Erhöhung von 1000 Kl. über der Erdfläche die Beſchleunigung der Schwere nur um $\frac{1}{1681}$ kleiner als an der Erdfläche. Die Schwere iſt auch noch einer andern Veränderung unterworfen, man hat nämlich durch Beobachtungen entdecket, daß ſelbſt auf der Erdoberfläche vom Aequator gegen die beyden Pole die Schwere **zunehme**, am kleinſten unter dem Aequator, am größten unter den beyden Polen ſey. Von dieſer Veränderung der Schwere wird an einem andern Orte ausführlicher gehandelt werden.

§. 11.

Gleiche materielle Theilchen von noch ſo verſchiedenen Körpern äuſſern gleiches Beſtreben gegen die Erde herab zu fallen, drücken oder preſſen die Unterlagen gleich ſtark, welche ſie vom Falle hindern, mit einem Worte haben gleiches Gewicht (§. 7.); es haben alſo auch Körper von gleichen Maſſen, die nämlich gleichviel Elementartheilchen enthalten (§. 2.), gleiche Gewichte, weil

---

*) Die Zurückweiſungen auf die Abſätze des gegenwärtigen 3ten Bandes ſind mit (§. 1.), (§. 2.) u. ſ. w. hingegen jene auf die Abſätze der vorhergehenden zwey Bände mit (1), (2), u. ſ. w. ohne dem Zeichen §. bezeichnet.

weil das Gewicht eines jeden Körpers aus der Summe der Gewichte aller ſeiner Elementartheilchen zuſammengeſetzt iſt; iſt aber eines Körpers *A* Maſſe 2, 3, *n*mal gröſſer als die Maſſe eines andern Körpers *B*, ſo iſt auch das Gewicht des erſten 2, 3. *n*mal gröſſer als das Gewicht des zweyten, und umgekehrt; nämlich die Maſſen verſchiedener Körper verhalten ſich gegeneinander wie ihre Gewichte, wenn z. B. ein beſtimmtes Stück Holz 10mal ſo viel wiegt, als ein beſtimmtes Stück Bley, ſo enthält das erſte 10mal ſo viel des urſprünglichen materiellen Stoffes als das zweyte Stück, oder die Maſſe des erſten verhält ſich zur Maſſe des zweyten, gleichwie das Gewicht des erſten zum Gewichte des zweyten Stückes. Die Maſſe eines Körpers und ſein Gewicht dienen einander demnach wechſelweiſe zum Maaßſtabe, ſo wie der geradlinigte Winkel und der Kreisbogen zwiſchen ſeinen Schenkeln, **das iſt, man kann im erfoderlichen Falle ſtatt der Maſſe eines Körpers ſein wirkliches ganzes Gewicht an der Erdoberfläche ſubſtituiren, und umgekehrt**, ſo wie man für einen geradlinigten Winkel den Kreisbogen zwiſchen ſeinen Schenkeln und umgekehrt zu ſetzen pflegt. Man hat wirklich allenthalben für den Maaßſtab des Gewichtes der Körper gewiſſe kleine körperliche Maſſen angenommen, die man **Pfunde** nennt, und ſelbe in mehrere kleine gleiche Theile z. B. 1 Pf. in 32 Lothe zertheilet; dieſe Pfunde ſind in verſchiedenen Ländern auch verſchieden; unſere Pfunde (unſer Wienergewicht) ſind alſo beſchaffen, daß 1 W. Kub. Sch. Regenwaſſer 56,5 Pfunde wiegt; dabey ſind 163840 Wienerpfunde = 196161 Kölnerpfunden. In der Folge werden jederzeit, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeiget iſt, die Gewichte und die Maſſen der Körper durch Wienerpfunde ausgedrückt ſeyn, wo ſie in Zahlen berechnet vorkommen.

Die Worte, **die Maſſe eines Körpers iſt gegeben**, ſollen in der Folge jederzeit die Bedeutung haben, **das Gewicht dieſes Körpers an der Erdoberfläche** (wenn er entweder wirklich daſelbſt ſich befindet, oder doch dahin übertragen würde, damit daſelbſt die Schwere auf ihn wirken könne, weil man zuweilen auch die Körper ohne Schwere betrachten muß) **in Pfunden, oder in Theilen derſelben ausgedrückt, iſt bekannt**. Man bedienet ſich des Wortes **Maſſe** eines Körpers gemeiniglich dazumal, wenn man die Schwere, die Anziehung des Körpers gegen die Erde, auſſer Acht läßt.

§. 12.

Bey **gleichartigen** Körpern, bey Körpern von gleichförmiger Dichtigkeit (§. 3) verhalten ſich die Maſſen auch gegeneinander wie ihre Kubikinhalte; denn es iſt offenbar, daß eines Körpers *A* Maſſe 2, 3, *n*mal gröſſer ſeyn müſſe, als die Maſſe eines andern **gleichförmig dichten** Körpers *B*, wenn der Inhalt des erſten 2, 3, *n*mal gröſſer iſt als der Inhat des zweyten: ein eiſerner gleichſeitiger Cylinder enthält 1½mal ſoviel Maſſe als eine eiſerne Kugel des nämlichen Durchmeſſers; aber ein gleichſeitiger **eiſerner** Cylinder enthält keinesweges 1½mal ſoviel Maſſe als eine **bleyerne** Kugel des nämlichen Durchmeſſers, weil ſie ungleichartig ſind.

§. 13.

Auch iſt es leicht einzuſehen, daß bey **gleichartigen** Körpern ſich die Gewichte gegeneinander verhalten wie ihre Kubikinhalte; denn vermög vorhergehenden verhalten ſich bey ſolchen Körpern die Maſſen gegen einander wie ihre Kubikinhalte; die Maſſen der Körper aber werden durch Gewicht ausgedrückt, durch Gewichte

aus-

ausgemeſſen; folglich verhalten ſich bey ſolchen Körpern auch die Gewichte gegeneinander wie ihre Kubikinhalte. Sind über dieſes die gleichartigen Körper auch **ähnlich**, ſo verhalten ſich ihre Kubikinhalte wie die 3ten Potenzen der gleichnamigen Abmeſſungen (433); es verhalten ſich demnach auch **bey gleichartigen und dabey ähnlichen Körpern** die Gewichte gegen einander wie die 3ten Potenzen der gleichnamigen Abmeſſungen. Aus dieſem erhellet es nun deutlich, daß aus dem gegebenen Gewichte eines Körpers A, aus einer ſeiner Abmeſſungen, und aus dem Gewichte oder aus der gleichnamigen Abmeſſung eines andern gleichartigen und dabey ähnlichen Körpers B, ſich die gleichnamige Abmeſſung oder das Gewicht des zweyten Körpers beſtimmen laſſe; aus dem gegebenen Durchmeſſer einer $m$pfündigen eiſernen Kugel läßt ſich der Durchmeſſer einer $n$pfündigen eiſernen Kugel beſtimmen, und aus dem gegebenen Durchmeſſer einer p löthigen bleyernen Kugel läßt ſich das Gewicht einer bleyernen Kugel finden, deren Durchmeſſer gegeben iſt.

§. 14.

Das Gewicht eines beſtimmten für die Einheit angenommenen Theiles bey einem nämlichen gleichförmig dichten Körper wird ſein **eigenthümliches oder ſpecifiſches Gewicht** genennt; bey einigen Schriftſtellern heißt es **ſpecifiſche Schwere, eigenthümliche Schwere** (gravitas ſpecifica). Es iſt in den mechaniſchen Abhandlungen gewöhnlich für die Einheit des Längenmaaßes den Schuh oder Fuß, und folglich für die Einheit des körperlichen Maaßes den Kubikſchuh anzunehmen; in dieſer Abhandlung iſt allenthalben wo das Gegentheil nicht ausdrücklich angedeutet iſt, für die Einheit des Längenmaaßes der Wienerſchuh angenom-

Fig. men, welcher genau $\frac{100000}{102764}$ Pariſ. Sch. gleich iſt. **Vermög dieſem iſt nun das eigenthümliche Gewicht eines Körpers nichts anders als das wirkliche Gewicht eines Kubikſchuhes deſſelben.**

Das eigenthümliche Gewicht eines gleichförmig dichten Körpers giebt zugleich den Maaßſtab ſeiner Dichtigkeit ab; da z. B. das Gewicht eines Kubikſchuhes Queckſilber 14mal gröſſer iſt als das Gewicht eines Kubikſchuhes Regenwaſſer, nämlich das eigenthümliche Gewicht des Queckſilbers 14mal gröſſer iſt, als das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers, ſo iſt auch die Dichtigkeit des erſten 14mal gröſſer als die Dichtigkeit des zweyten.

§. 15.

Wenn man den Inhalt eines gleichförmig dichten Körpers $= v$ Kub. Sch. ſein ganzes Gewicht $= p$, und ſein eigenthümliches Gewicht $= q$ Pfunde ſetzet, ſo ſind dieſe drey Gröſſen alſo beſchaffen, daß man aus zwey gegebenen jederzeit die dritte finden könne; es iſt nämlich

$$p = qv,\ v = \frac{p}{q},\ q = \frac{p}{v};$$

denn wenn das Gewicht 1 Kub. Sch. allein q Pfunde beträgt, ſo muß das Gewicht von v Kub. Sch. des nämlichen gleichförmig dichten Körpers qv Pfunde betragen.

Die dritte Formel giebt uns ein Mittel an die Hand das eigenthümliche Gewicht von verſchiedenen Körpern zu finden; z. B. das eigenthümliche Gewicht $= q$ des Schießpulvers läßt ſich beſtimmen, wenn man ein Gefäß vom bekannten Inhalte $= v$ Kub. Sch. etwan die Aushöhlung (die Seele) einer Kanone mit Schießpulver voll anfüllet, das ganze Gewicht dieſer

Menge des Schießpulvers = p Pf. mittelſt einer genauen Wage unterſuchet, und endlich die Formel $q = \frac{p}{v}$ entwickelt. Man findet auf dieſe Art, daß 1 Kub. Sch. Schießpulver ziemlich genau 50 Pf. wiege. Aus dem Gewichte und dem Durchmeſſer einer gegoſſenen eiſernen Kugel findet man das Gewicht 1 K. Sch. gegoſſ. Eiſen = 420 Pfunde ziemlich genau. Fig.

§. 16.

Nachdem die eigenthümlichen Gewichte und folglich auch die Dichtigkeiten von verſchiedenen Körpern beſtimmet ſind, ſo kann man die Dichtigkeit eines allerorts gleich dichten, und allerorts leicht zu habenden Körpers, z. B. die Dichtigkeit des Regenwaſſers = 1 ſetzen, und vergleichet ſodann die Dichtigkeiten der übrigen Körper mit dieſer Einheit. Auf dieſe Art läßt ſich eine Tabelle von nachſtehender Geſtalt verfertigen; als

Die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers = 1; 1 Kub. Sch. Regenw. wiegt 56½ Pf.

Die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht des	Goldes	19,640	mal gröſſer als die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht des Regenwaſſers.
	Queckſilbers . .	14,000	
	Bleyes.	11,310	
	Silbers. . . .	11,091	
	Kupfers. . . .	8,784	
	Eiſens(gegoſſ.)	7,434	
	Zinnes	7,320	
	Eichenholzes. .	0,929	
	Tannenholzes .	0,550	

Eine ausführlichere Tafel von der Vergleichung des eigenthümlichen Gewichtes und der Dichtigkeit verſchiedener Körper iſt in meinen **logarithmiſchen Tafeln** anzutreffen. Mittelſt einer ſolchen Tafel läßt ſich das eigenthümliche Gewicht eines jeden darinnen befindlichen

Fig. lichen Körpers finden, wenn man die darneben ſtehende Zahl mit 56,5 multipliciret, weil 1 Kub. Sch. Regenwaſſer 56,5 Pf. wiegt; z. B. das wirkliche eigenthümliche Gewicht des Goldes iſt = 19,640 × 56,5 = 1109,66 Pf. Die Zahlen einer ſolchen Tabelle geben auch zu erkennen, wie ſich die Dichtigkeiten oder die eigenthümlichen Gewichte der dazugehörigen Körper gegeneinander verhalten, z. B. die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht des Zinnes verhält ſich zur Dichtigkeit oder zum eigenthümlichen Gewichte des Bleyes wie 7,320 : 11,310, oder wie 11 : 17 ziemlich genau.

§. 17.

Wenn ein Körper ſeinen Ort verändert, ſo ſagt man er **bewege** ſich; wenn aber ein Körper immer den nämlichen Ort einnimmt, ſo ſagt man er **ruhe**. **Bewegung** iſt alſo nichts anders als die Veränderung des Ortes, und **Ruhe** iſt die Verbleibung an einem nämlichen Orte. Der Ort ſelbſt eines Körpers iſt die Lage deſſelben gegen andere für beſtimmt angenommene Körper, es kann nämlich der Ort eines Körpers nicht anders als durch die Lage deſſelben gegen andere für beſtimmt angenommene Körper oder Punkte erkennet werden.

Wenn man ſich einen unbegränzten Raum, eine unbegränzte geometriſche Ausdehnung vorſtellet, und gewiſſe Punkte darinnen feſtſetzet um dadurch die Orte verſchiedener in dieſem Raume befindlicher Körper zu beſtimmen, ſo heißt die Bewegung in einem ſolchen Raume in Rückſicht der feſtgeſetzten Punkte eine **abſolute** Bewegung, und die Ruhe eines Körpers in Rückſicht dieſer nämlichen feſtgeſetzten Punkte die **abſolute** Ruhe; die Bewegung aber eines Körpers in Rückſicht anderer um ihn her befindlicher Körper, welche letztere zuſamſammen ſelbſt in dem angenommenen unbegränzten Raume in Rückſicht der feſtgeſetzten Punkte ein bewegliches Syſtem ausmachen, heißt eine **relative** Bewegung; und eben ſo läßt ſich die Ruhe in die **abſolute** und **relative** abtheilen. Wenn die Erde in dem unermeßlichen Weltraume ſtillſtünde, ſo wäre die Bewegung eines fortſegelnden Schiffes eine abſolute Bewegung; die Bewegung eines Matroſen in einem ſolchen Schiffe, wenn er ſich z. B. vom Vordertheile zum Hintertheile begiebt, iſt wirklich eine relative Bewegung, und ſeine Ruhe in einem ſolchen Schiffe nur eine relative Ruhe.

§. 18.

Die Bewegung heißt **geradlinigt**, wenn der bewegte Körper immer nach einer nämlichen Richtung fortgeht, und **krumlinigt**, wenn der Körper jeden Augenblick ſeine Richtung ändert.

§. 19.

Die Länge der Linie, welche ein bewegter Körper beſchreibet, wenn man denſelben für einen Punkt anſieht, wird der **zurückgelegte** oder der **durchlaufene Weg**, ſonſt auch der **Raum** (ſpatium) genennt. Wenn alle Theilchen eines zuſammenhangenden Körpers, oder wenn alle Punkte deſſelben nach parallelen Richtungen ſich geradlinigt fortbewegen, ſo iſt offenbar der zurückgelegte Weg eines jeden Punktes einerley mit dem Wege des ganzen Körpers, das iſt der Weg eines jeden Punktes iſt eben ſo lang als der Weg des ganzen Körpers; in einem ſolchen Falle kann man demnach den bewegten Körper **in Rückſicht des zurückgelegten Weges** für einen Punkt anſehen, man kann ſeine Ausdehnung auſſer Acht laſſen.

§. 20.

Fig. Die Zeit, in welcher ein beſtimmter Weg durch die Bewegung zurückgelegt wird, läßt ſich aus der Anzahl gewiſſer gleichförmig auf einander folgender Dinge erkennen. In gegenwärtiger Abhandlung iſt allenthalben, wo das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeiget iſt, für die Einheit der Zeit 1 Sekunde angenommen, deren bekannterweiſe 60 eine Minute, 60 Minuten eine Stunde, und 24 Stunden einen Tag, nämlich diejenige Dauerzeit ausmachen, welche von einem bis zum nächſt darauffolgenden Eintritte der Sonne in einen nämlichen Mittagskreis **bey ihrer vorausgeſetzten mittleren Bewegung** verfließt, ſo daß 1 Sekunde der 86400te Theil dieſer Dauerzeit ſey. Da die Dauerzeiten der aufeinander folgenden Eintritte der Sonne in einen nämlichen Mittagskreis nicht immer gleich ſind, hingegen die Dauerzeiten jeder zwey aufeinander folgender Eintritte was immer für eines Fixſternes in einen nämlichen Mittagskreis oder auch in einen nämlichen Scheitelkreis immer einerley verbleiben, weil die Erde immer gleichförmig ſich um ihre Achſe drehet, ſo kann man die Gröſſe oder die Dauer einer Zeitſekunde dadurch deutlicher beſtimmen, wenn man ſagt; 1 Sekunde iſt der 86164te Theil der Dauerzeit zwiſchen zweyen aufeinander folgenden Eintritten eines nämlichen Fixſternes in einen nämlichen Scheitelkreis, ſo daß dieſe Dauerzeit 23 Stunden 56 Minuten 4 Sekunden = 86164 Sekunden betrage; vollkommen genau iſt die Dauerzeit zwiſchen zweyen auf einander folgenden Eintritten eines nämlichen Fixſternes in einen nämlichen Scheitelkreis = 23 St. 56 M. $4\frac{1}{10}$ Sek. man kann dieſe Erinnerung bey der Prüfung und Berichtigung der Zeitmeſſer, der **Uhren** nämlich, benützen.

Jede Sekunde pflegt man wieder in mehrere gleiche Theile z. B. in 60 Terzien zu theilen, die aber ſchon ſo klein ſind, daß man ſie gar nicht mehr zuverläßig beobachten kann. Zuweilen wird auch eine Sekunde oder eine beliebige Anzahl von Sekunden vermög unſerer Vorſtellung in **unendlich kleine Theile**, nämlich in ſo viele und ſo kleine gleiche Zeittheile zertheilet, daß man einen ſolchen Theil in Rückſicht einer oder mehr Sekunden für 0 anſehen könne, wenn er dazu zu addiren oder davon abzuziehen iſt.

§. 21.

Die Bewegung heißt **gleichförmig**, wenn der bewegte Körper in gleichen Zeittheilen gleiche Wege zurücklegt; im Gegentheile heißt ſie **ungleichförmig**. Die ungleichförmige Bewegung wird eine **beſchleunigte** Bewegung genennt, wenn der bewegte Körper in jedem darauffolgenden gleichen Zeittheile einen gröſſern Weg zurücklegt als in dem nächſtvorhergehenden; im Gegentheile heißt ſie eine **verzögerte** Bewegung.

§. 22.

Bey einer gleichförmigen Bewegung eines nämlichen Körpers verhalten ſich die Dauerzeiten der Bewegung gegen einander wie die zurückgelegten Wege; nämlich wenn ein Körper den Weg $= s$ in der Zeit $= t$, und den Weg $= S$ in der Zeit $= T$ gleichförmig zurücklegt, ſo iſt $t : T = s : S$.

Denn man ſetze der Körper lege bey dieſer Bewegung in 1 Sek. den Weg x zurück, ſo wird er in t Sek. den Weg $tx = s$, und in T Sek. den Weg $Tx = S$ zurücklegen, weil in einer jeden Sekunde der Weg $= x$ zurückgelegt wird, folglich $s : S = tx : Tx$, und endlich $t : T = s : S$.

§. 23.

Fig. Das **Vermögen** oder die **Fähigkeit** (habilitas) eines Körpers in einer beſtimmten Zeit einen beſtimmten Weg gleichförmig zurückzulegen, heißt ſeine **Geſchwindigkeit**. Dieſe wird bey einem **wirklich gleichförmig bewegten** Körper durch den in einem für die Einheit angenommenen Zeittheile z. B. in 1 Sek. durchlaufenen Weg ausgedrückt; wenn nämlich ein Körper A in 1 Sek. einen 2, 3, $n$mal gröſſeren Weg zurücklegt, als ein anderer Körper B, ſo ſagt man, daß der erſte 2, 3, $n$mal geſchwinder ſich bewege als der zweyte, daß der Körper A eine 2, 3, $n$mal gröſſere Geſchwindigkeit habe als der Körper B. Die Geſchwindigkeit eines **ungleichförmig bewegten** Körpers aber in irgend einem Punkte ſeiner Bahn (ſeines Weges) iſt der in einem für die Einheit angenommen Zeittheile z. B. in 1 Sek. **durchlaufbare** Weg, wenn der Körper von dieſem Punkte angefangen gleichförmig fortgienge. Die Geſchwindigkeiten, ſo wie die zurückgelegten Wege werden in gegenwärtiger Abhandlung, wo ſie in Zahlen berechnet vorkommen, durch den Wienerſchuh ausgedrücket ſeyn, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angedeutet iſt.

§. 24.

Die Geſchwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers iſt, ſolang er ſich gleichförmig fortbeweget, immer einerley; und umgekehrt, wenn die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers durch irgend eine Zeit t ungeändert verbleibet, ſo iſt durch dieſe Zeit ſeine Bewegung gleichförmig.

Denn die Geſchwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers iſt nichts anders als der in einem für die Einheit angenommenen Zeittheile wirklich zurückgelegte Weg;

Weg; es iſt aber bey einer ſolchen Bewegung in einem jeden dergleichen Zeittheile der zurückgelegte Weg immer einerley; folglich iſt auch die Geſchwindigkeit immer einerley. Wenn endlich die Geſchwindigkeit, das iſt der in einem für die Einheit angenommenen Zeittheile zurückgelegte Weg durch die Zeit t immer ungeändert verbleibet, ſo wird in einem jeden ſolchen Zeittheile immer ein gleicher Weg zurückgelegt, und folglich iſt die Bewegung gleichförmig (§. 21). Fig.

§. 25.

Die drey Gröſſen **Geſchwindigkeit** $= c$ Schuhen, **Zeit** $= t$ Sekunden, und der in dieſer Zeit zurückgelegte **Weg** $= s$ Schuhen bey einer jeden gleichförmigen Bewegung, ſie möge geradlinigt oder krumlinigt ſeyn, ſind alſo beſchaffen, daß ſich aus zwey gegebenen oder für bekannt angenommenen jederzeit die dritte beſtimmen läßt, es iſt nämlich

$$s = ct, \; c = \frac{s}{t}, \; t = \frac{s}{c};$$

denn da bey einer ſolchen Bewegung die Geſchwindigkeit nichts anders iſt, als der in 1 Sek. zurückgelegte Weg, ſo iſt (§. 22) $1 : t = c : s$, woraus $s = ct$, $c = \frac{s}{t}$, und $t = \frac{s}{c}$ folgt. Wenn z. B. ein Körper 1000 Sch. weit in 3 Minuten gleichförmig fortrücket, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit $= 5\frac{5}{9}$ Schuhen.

Anmerk. In der **wirklichen** Gleichung $s = ct$ bedeutet t eine Abſolutzahl, einen Coefficienten von c, weil s und alſo auch ct nur eine Länge, nur einen lineariſchen Ausdruck vorſtellet. Einige Schriftſteller bilden den bey einer gleichförmigen Bewegung zurückgelegten Weg durch ein Rechteck ab, wovon eine Seite $= c$ und die andere $= t$ iſt, welches aber nur ſoviel zu bedeuten hat, daß bey zweyen mit ungleichen Ge-

Fig. ſchwindigkeiten gleichförmig bewegten Körpern, die in ungleichen Zeiten zurückgelegten Wege ſich gegeneinander verhalten wie die Rechtecke aus den Geſchwindigkeiten und Zeiten, wenn man beyde durch Linien vorſtellet, weil in einem ſolchen Falle wirklich die Wege **wie die Produkte aus den Geſchwindigkeiten in die Zeiten** ſich verhalten; denn da $s = ct$, und für eine andere Geſchwindigkeit $= C$ und Zeit $= T$ ebenfalls $S = CT$ ſtatt findet, ſo iſt auch $s : S = ct : CT$.

§. 26.

Die **bewegende Kraft** heißt alles dasjenige, was den Zuſtand der Ruhe oder Bewegung eines Körpers auf was immer für eine Art zu ändern ſtrebet; als z. B.

I. Die Schwerkraft, welche das Sinken der Körper verurſachet, wenn ſie nicht unterſtützet ſind, und dadurch verſchiedene Maſchinen z. B. die Uhren in Bewegung ſetzet, und in derſelben erhält.

II. Das Anziehen zwiſchen dem Magnete und Eiſen, wodurch verſchiedene künſtliche Bewegungen hervorgebracht werden.

III. Das Vermögen der Menſchen und der übrigen Thiere verſchiedene Laſten theils frey fortzutragen, theils durch künſtliche Rüſtzeuge, durch Maſchinen, zu bewegen.

IV. Das flieſſende Waſſer und die fortſtröhmende Luft (der Wind), wodurch verſchiedene Mühlen und andere Maſchinen beweget werden.

V. Die zuſammengerreßte Luft, wodurch eine Kugel aus einer Windbüchſe fortgetrieben, und das Waſſer bey verſchiedenen Waſſermaſchinen gehoben wird.

IV. Das entzündete Schießpulver, wodurch die Bomben, Grenaden, Kugeln und Kartätſchen, in den Pöllern, Haubitzen und Kanonen, ihre Bewegung erhalten.

VII. Die Elaſticität (das Vermögen eines Körpers ſeine veränderte Geſtalt wieder herzuſtellen) der Federn, wodurch dermalen verſchiedene Uhren und andere Inſtrumente wirklich beweget werden, und vor der Erfindung des Schießpulvers mittelſt der Balliſten und Katapulten ungeheuere Körper fortgeſchleudert wurden.

VIII. Das Feuer, wodurch einige Brattenwender umgedrehet, und verſchiedene andere Maſchinen beweget werden. u. ſ. w.

§. 27.

Jede uns bekannte bewegende Kraft verurſachet in jedem Augenblicke der Dauerzeit ihrer Wirkung eine gewiſſe **Preſſung**, einen gewiſſen **Druck** oder **Zug**, ſo wie die Schwere jeden Körper gegen eine Unterlage preſſet, die ihn unterſtützet, ihn gegen die Erde herab drücket oder zieht; nur durch eine ſolche Preſſung, durch einen ſolchen Druck oder Zug kann das Daſeyn einer bewegenden Kraft erkennet und ihre Gröſſe beſtimmet werden; man ſagt nämlich eine bewegende Kraft A ſey 2, 3, $n$mal gröſſer als eine andere bewegende Kraft B; wenn die erſte **einen nämlichen Körper** 2, 3, $n$mal ſtärker preſſet als die zweyte. Derowegen iſt man berechtiget die Preſſungen von verſchiedenen bewegenden Kräften auf einen nämlichen beſtimmten Körper für die Kräfte ſelbſt anzunehmen; dieſe Preſſungen können durch Gewichte ausgedrücket, durch Gewichte ausgemeſſen werden; es können demnach auch die bewegenden Kräfte durch Gewichte ausgemeſſen werden. In dieſer Bedeutung wird die bewegende Kraft bey einem beſtimmten freyfallenden Körper durch ſein eigenes Gewicht ausgedrückt; und die bewegende Kraft einer ehevor geſpannten und nun loßgelaſſenen elaſtiſchen Feder **in dem erſten Augenblicke ihrer Wirkung** iſt dasjenige Gewicht, welches die Feder in der vorigen Spannung zu erhal-

Fig. ten vermögend iſt. In gegenwärtiger Abhandlung werden allenthalben, wo das Gegentheil nicht angedeutet iſt, die bewegenden Kräfte, ſo wie die Maſſen der Körper, durch Wienerpfunde ausgedrücket ſeyn, wenn ſie in Zahlen berechnet vorkommen. Die Redensart **auf einen Körper wirket nach einer gewiſſen Richtung eine Kraft p = 120 Pf.** hat folgende Bedeutung, die Kraft p preſſet den Körper nach dieſer Richtung ſo ſtark, als ein Gewicht von 120 Pf. eine Unterlage, welche den Fall dieſes Gewichtes gänzlich verhindert, nach einer vertikalen Richtung zu preſſen oder zu drücken vermögend iſt. Die **Richtung** einer bewegenden Kraft iſt nichts anders, als diejenige gerade Linie, nach welcher ſie den Körper zu bewegen **ſtrebet**.

§. 28.

Eine bewegende Kraft heißt **unveränderlich** oder **beſtändig**, wenn ſie den Körper, er möge in Ruhe oder in was immer für einer Bewegung ſeyn, unaufhörlich gleich ſtark preſſet; hingegen heißt ſie **veränderlich**, wenn ſie anders einen ruhenden anders einen bewegten, und zwar einen nämlichen verſchiedentlich bewegten Körper verſchiedentlich preſſet.

§. 29.

Da man die Abnahme der Schwere in nicht gar zu groſſen Erhöhungen über der Erdfläche auſſer Acht laſſen kann (§. 10.), ſo hat man indeſſen bis zur weitern Prüfung einen guten Grund die **bewegende Kraft bey einem freyfallenden Körper** in dergleichen Erhöhungen für eine **unveränderliche Kraft** anzuſehen. Es giebt in der ganzen Natur ſehr wenig unveränderliche Kräfte, die meiſten ſind veränderlich; wenn man z. B. einen Körper, der auf dem Waſſer zu ſchwimmen fähig iſt, in einen Strohm hineinleget, ſo

wird

wird er gleich im Anfange, ſo lange er noch keine Bewegung, keine Geſchwindigkeit nach der Richtung des Strohmes hat, von dem fortflieſſenden Waſſer gepreſſet; durch dieſe Preſſung wird in dem Körper eine Geſchwindigkeit hervorgebracht; ſobald dieſe da iſt, wird die Preſſung ſchwächer, und hört endlich gar auf, ſobald der ſchwimmende Körper mit dem fortflieſſenden Waſſer einerley Geſchwindigkeit hat.

Anmerk. Die unveränderlichen bewegenden Kräfte werden von einigen Schriftſtellern **abſolute**, und die veränderlichen werden **relative** Kräfte genennt. Auch pflegen mehrere Schriftſteller die Kräfte in **lebendige** und **todte** abzutheilen; bey einigen werden die bewegenden Kräfte **todt** genennt, wenn ſie wegen vorliegender Hinderniſſen keine wirkliche Bewegung hervorbringen können, und **lebendig**, wenn ſie wirkliche Bewegung erzeugen. Bey andern Schriftſtellern heißt eine Kraft **lebendig**, wenn ſie einem beſtimmten endlichen Körper in einem Augenblicke oder in einem unendlich kleinen Zeittheile eine beſtimmte endliche Geſchwindigkeit beybringt, und **todt**, wenn ſie nicht vermögend iſt einem beſtimmten endlichen Körper in einem Augenblicke oder in einem unendlich kleinen Zeittheile eine beſtimmte endliche Geſchwindigkeit beyzubringen, ſondern wenn ſie dazu eine beſtimmte endliche Zeit brauchet, und in einem unendlich kleinen Zeittheile nur eine unendlich kleine Geſchwindigkeit erzeuget. Dieſe Abtheilung der bewegenden Kräfte in **lebendige** und **todte** iſt gänzlich entbehrlich, hauptſächlich nach der letztern Erklärung, weil es in der ganzen Natur keine ſolche bewegende Kraft giebt, welche einem beſtimmten endlichen Körper in einem Augenblicke eine beſtimmte endliche Geſchwindigkeit beybringen könnte, ausgenommen die bewegende Kraft wäre unendlich groß, dergleichen es aber in der Natur nicht giebt. Zuweilen wird zwar eine ſehr groſ-

Fig. ſe Geſchwindigkeit in einer ſo kurzen Zeit hervorgebracht, daß man ſie wegen ihrer Kürze auf keine Weiſe zu beobachten im Stande iſt, als z. B. die Geſchwindigkeit einer abgeſchoſſenen Kugel, welche durch die Entzündung des Schießpulvers erzeuget wird; jedoch geben uns verſchiedene Verſuche, und auch die geſunde Vernunft zu erkennen, daß ſo wie jede Wirkung nur in einer beſtimmten Zeit geſchehen könne, auch das Pulver zu ſeiner gänzlichen Entzündung eine gewiſſe, obſchon ſehr kleine, jedoch beſtimmte endliche Zeit brauche, daß es ſich nach und nach entzünde. Selbſt das Licht, obwohl es in eben demjenigen Augenblicke, in dem es entſteht, auch ſchon allenthalben verbreitet zu ſeyn ſcheint, braucht eine gewiſſe beſtimmte Zeit um von einem Orte zu einem andern zu gelangen, pflanzet ſich nur nach und nach fort, ſo wie der Schall, jedoch ohne Vergleich geſchwinder; denn aſtronomiſche Beobachtungen beweiſen, daß das Licht von der Sonne zur Erde beynahe in 8 Minuten gelange, alſo in 8 Minuten einen Weg von beynahe 22000 Erdhalbmeſſern zurücklege; der Schall hingegen legt in 1 Sek. ziemlich genau einen Weg von 1060 Wienerſchuhen zurück, und bewegt ſich ziemlich gleichförmig.

§. 30.

Wenn mehr bewegende Kräfte dergeſtalt auf einen Korper wirken, daß ſie ſich gegeneinander gänzlich aufheben, und wegen dieſem keine Bewegung hervorbringen können, ſo ſagt man, **daß ſie im Gleichgewichte ſind, daß ſie einander das Gleichgewicht halten; Gleichgewicht** iſt demnach der Zuſtand zweyer oder mehrerer Kräfte, die nach entgegengeſetzten Richtungen ſo wirken, daß keine Bewegung erfolgt. Gleichgewicht iſt von bloſſer Ruhe darin unterſchieden, daß bey dieſer ein gänzlich unthätiger Zuſtand aus Man-

gel

gel aller Kräfte ſey; bey jenem hingegen ſind Kräfte in Thätigkeit, die nur deshalb keine Bewegung hervorbringen, weil ſie ſich gegenſeitig aufheben.

§. 31.

Ein Körper wird **feſt** oder **hart** genennt, wenn ſeine Theile ſo ſtark zuſammenhängen, daß ihre Verbindung und Lage gegeneinander durch die bewegenden Kräfte nicht verändert wird, welche auf ihn wirken; hingegen heißt ein Körper **flüſſig**, wenn ſeine Theile gar nicht merklich zuſammenhängen. Ein Körper würde **vollkommen feſt** ſeyn, wenn ſeine Theile mit gar keiner Kraft könnten getrennet werden; dergleichen Körper giebt es aber in der ganzen Natur nicht; dem ohngeachtet können verſchiedene Körper, als Steine, Metalklumpen, verſchiedene Stücke von Holz. u. ſ. w. bey einigen bewegenden Kräften (z. B. bey derjenigen, welche ihren Fall verurſachet, und bey mehr anderen nicht gar zu groſſen bewegenden Kräften) für vollkommen feſt angeſehen werden. Unter allen bisherbekannten Körpern iſt der Diamant der feſteſte; die übrigen nähern ſich ſtuffenweiſe der Flüſſigkeit. In der Folge wird Kürze halber ein **feſter Körper** mit dem bloſſen Worte, **Körper**, hingegen ein **flüſſiger Körper** jederzeit mit dem dazugehörigen Beyworte **flüſſig** bezeichnet werden.

Ferner werden Körper **biegſam**, **weich**, oder **zäh** genennt, wenn von einer angebrachten Kraft (z. B. von dem Schlage eines Hammers) nur ihre Figur geändert, dabey aber nicht ihr Zuſammenhang getrennet wird; **ſpröd** iſt ein Körper, wenn eine Kraft (z. B. der Schlag eines Hammers) eher den Zuſammenhang ſeiner Theile zu trennen, als deſſen Figur zu ändern im Stande iſt. Die biegſamen Körper heiſſen **elaſtiſch**, wenn ſie ihre geänderte Figur wieder von

Fig. ſelbſt herſtellen; im Gegentheile heiſſen ſie **unelaſtiſch**, und zwar die erſteren heiſſen **vollkommen** oder **unvollkommen** elaſtiſch, nachdem ſie ihre geänderte Figur gänzlich oder nur zum Theil wieder herſtellen.

§. 32.

Ein Lehrgebäude von der Bewegung der feſten ſowohl als auch der flüſſigen Körper, und von den bewegenden Kräften, welche auf dieſelben wirken, heißt überhaupt die **Mechanik**. Die Lehre von der Bewegung der feſten Körper, und von den dabey vorkommenden Kräften wird von einigen Schriftſtellern die **Dynamik**, und die Lehre von der Bewegung der flüſſigen Körper und von den dabey vorkommenden Kräften die **Hydrodynamik** genennt. Andere theilen die verſchiedenen Lehren, welche in der Mechanik vorkommen, folgendergeſtalt ab.

I. Die **Statik**, welche von dem Gleichgewichte der Kräfte handelt, die auf feſte Körper wirken.

II. Die **Hydroſtatik**, welche von dem Gleichgewichte der Kräfte handelt, die auf unelaſtiſche flüſſige Körper (z. B. auf das Waſſer) wirken.

III. Die **Aeroſtatik** oder Aerometrie, welche von dem Gleichgewichte der Kräfte handelt, die auf elaſtiſche flüſſige Körper (z. B. auf die Luft) wirken.

IV. Die **eigentliche Mechanik**, oder die Dynamik, welche von der wirklichen Bewegung der feſten Körper handelt.

V. Die **Hydraulik**, welche von der wirklichen Bewegung der flüſſigen unelaſtiſchen Körper handelt.

VI. Die **Pnevmatik**, welche von der wirklichen Bewegung der flüſſigen elaſtiſchen Körper handelt.

VII. Die **Maſchinenlehre**, welche von der Anordnung, Berechnung, und Erbauung verſchiedener künſtlicher Rüſtzeuge handelt, welche verſchiedene Bewegungen hervorzubringen dienlich ſind.

In einigen Abhandlungen kömmt auch der Name **Phoronomie** vor, welcher die Lehre von der Bewegung der bloſſen Punkte bedeutet. Alle dieſe verſchiedene Lehren zuſammen kann man die **mechaniſchen Wiſſenſchaften** nennen. Um die Weitläuftigkeit zu vermeiden iſt in gegenwärtiger Abhandlung nicht ein jeder dieſer Theile **für ſich allein** abgehandelt; man hat das nothwendigſte, das nützlichſte eines jeden Theiles jederzeit an demjenigen Orte beyzubringen geſucht, allwo man es am kürzeſten und am deutlichſten abhandeln zu können glaubte.

§. 33.

Grundſatz. **Keine Wirkung kann ohne dem Daſeyn einer dazu erfoderlichen Urſache geſchehen; gleiche Urſachen bringen unter einerley Umſtänden auch gleiche Wirkungen hervor; und die Wirkungen, welche von verſchiedenen Urſachen auf einerley Art hervorgebracht werden, verhalten ſich gegeneinander, wie ihre Urſachen**; z. B. die Geſchwindigkeiten, welche verſchiedene unveränderliche bewegende Kräfte gleichen Körpern in gleichen Zeittheilen unter einerley Umſtänden beybringen, verhalten ſich gegeneinander wie die bewegenden Kräfte; nämlich wenn eine bewegende Kraft *A* 2, 3, *n*mal gröſſer iſt, als eine andere bewegende Kraft *B*, ſo kann die erſte einem nämlichen Körper in einer nämlichen Zeit unter einerley Umſtänden eine 2, 3, *n*mal gröſſere Geſchwindigkeit beybringen, als die zweyte.

§. 34.

Fig. **Naturgeſetz. Jeder Körper bleibt in ſeinem Zuſtande der Ruhe oder Bewegung ungeändert, wenn keine bewegende Kraft auf ihn wirket;** das iſt ein ruhender Körper bleibt immer unaufhörlich ruhig, wenn keine Kraft vorhanden iſt, die denſelben in Bewegung ſetzet; hingegen ein Körper, der ſich nach einer gewiſſen Richtung mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit beweget (welche Geſchwindigkeit er von irgend einer bewegenden Kraft erhalten hat, die auf ihn nicht mehr wirket) geht mit der nämlichen Geſchwindigkeit immer in der nämlichen Richtung (in einer geradlinigten gleichförmigen Bewegung) unaufhörlich fort, wenn keine Kraft vorhanden iſt, die ſeine Bewegung zu ändern ſtrebet. Wenn die Schwere nicht da wäre, und die Luft nicht widerſtünde, ſo müßte ein Körper, den man mit der Hand nach was immer für einer Richtung von der Erde hinwegwirſt, mit der erhaltenen Geſchwindigkeit unaufhörlich nach der nämlichen Richtung ſich gleichförmig fortbewegen. Dieſes Naturgeſetz iſt eine allgemeine Eigenſchaft aller phyſiſchen Körper; es iſt ſelbes eine Folge des vorigen Grundſatzes; da nämlich in der ganzen Natur keine Aenderung ohne dem Daſeyn einer dazu erforderlichen Urſache geſchehen kann, ſo kann auch ein Körper ſeinen Zuſtand der Ruhe oder Bewegung ohne dem Daſeyn einer dazu erfoderlichen Urſache (ohne dem Daſeyn einer bewegenden Kraft) nicht ändern, und muß folglich bey der Abweſenheit aller bewegenden Kräfte in dieſem Zuſtande ungeändert verbleiben.

§. 35.

Dieſe Eigenſchaft eines jeden Körpers in ſeinem Zuſtande der Ruhe oder Bewegung ungeändert zu verbleiben, wenn keine bewegende Kraft auf ihn wirket, kann man

Trägheit nennen, weil dieſer Name ſchon einmal in allen mechaniſchen Abhandlungen das Bürgerrecht erhalten hat. Aus dieſer Eigenſchaft eines jeden Körpers folgt nun ganz natürlich, **daß bey einem Körper, der einmal von irgend einer bewegenden Kraft nach einer gewiſſen Richtung eine gewiſſe Geſchwindigkeit erhalten hat, gar keine bewegende Kraft weder in dem Körper ſelbſt, noch auſſer ihm erfoderlich ſey um denſelben darauf in der gleichförmigen Bewegung zu erhalten;** nur die Abweſenheit aller bewegenden Kräfte und ſonſt nichts iſt dazu nothwendig. Fig.

Anmerk. Einige Schriftſteller wollen behaupten, daß jeder Körper mit einer gewiſſen **Kraft** verſehen ſey, welche denſelben in ſeinem Zuſtande der Ruhe oder Bewegung ungeändert erhält, und die einer jeden anderen bewegenden Kraft, welche den Zuſtand des Körpers zu ändern ſtrebet, ſich widerſetzet, und zwar deſto ſtärker ſich widerſetzet, je ſtärker die bewegende Kraft auf ihn wirket; ſie nennen dieſe widerſtehende Kraft die **Kraft der Trägheit.** Eine ſolche Behauptung iſt gänzlich irrig; denn nicht das Daſeyn einer Kraft, ſondern die Abweſenheit aller Kräfte iſt erforderlich um einen Körper in ſeinem Zuſtande der Ruhe oder Bewegung ungeändert zu erhalten; auch widerſetzet ſich ein Körper gar nicht der Kraft, die ſeinen Zuſtand zu ändern ſtrebet; jede noch ſo kleine Kraft kann einen noch ſo groſſen Körper in Bewegung ſetzen, kann demſelben in einer gewiſſen Zeit eine gewiſſe Geſchwindigkeit nach einer gewiſſen Richtung beybringen, wenn alle auſſer dem Körper befindliche Hinderniſſe der Bewegung (z. B. die Schwere, die Luft, die Reibung, u. ſ. w.) gehoben ſind. Die einem nämlichen Körper in einer nämlichen Zeit unter einerley Umſtänden beygebrachte Geſchwindigkeit muß zwar deſto kleiner ſeyn je kleiner die

Fig. bewegende Kraft iſt, kann aber nicht = 0 ſeyn, wenn nicht die Kraft ſelbſt = 0 iſt, weil die von verſchiedenen Kräften einem nämlichen Körper auf einerley Art beygebrachten Geſchwindigkeiten ſich gegeneinander verhalten, wie die bewegenden Kräfte (§. 33). Wenn die Trägheit eine Kraft wäre, die ſich einer bewegenden Kraft wirklich widerſetzte, dieſelbe nach einer entgegengeſetzten Richtung wirklich preſſete, drückte, oder zöge, ſo könnte ſie eben ſo wie alle ander Kräfte, durch ein Gewicht ausgedrückt werden, welches ſich aber auf keine Weiſe thun läßt.

II. Vorleſung.

Die gleichförmig beſchleunigte Bewegung.

§. 36.

Die Bewegung eines Körpers heißt eine **beſchleunigte Bewegung**, wenn der bewegte Körper in jedem darauffolgenden gleichen Zeittheile einen gröſſern Weg zurücklegt, als in dem nächſtvorhergehenden (§. 21), oder wenn ſeine Geſchwindigkeit immer gröſſer wird; hingegen heißt ſie eine **verzögerte Bewegung**, wenn die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers immer kleiner wird; jene wird eine **gleichförmig beſchleunigte Bewegung** genennt, wenn die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers in gleichen Zeittheilen gleich groſſe Zuſätze erhält; hingegen heißt dieſe eine ne **gleichförmig verzögerte Bewegung**, wenn Fig. die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers in gleichen Zeittheilen um gleich groſſe Theile abnimmt.

§. 37.

Wenn eine unveränderliche bewegende Kraft (§. 28.) immer nach einerley Richtung auf einen Körper wirket, der ſich frey bewegen kann (der auf ſeinem Wege gar keine Hinderniſſe der Bewegung antrifft), ſo wird ſeine Geſchwindigkeit immer gröſſer, und zwar in gleich groſſen auf einander folgenden Zeittheilen wird ſie gleichgroſſe Zuſätze erhalten, das iſt der Körper wird mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung fortgehen; wenn nämlich eine unveränderliche Kraft einen in A ruhenden Körper Fig. 2. in Bewegung ſetzet, und denſelben 2 immer nach der nämlichen Richtung AQ dergeſtalt treibet, daß er in gleichgroſſen auf einander folgenden Zeittheilen die Wege AB im 1ten, BC im 2ten, CD im 3ten Zeittheile zurückleget, und am Ende des erſten Zeittheiles in B die Geſchwindigkeit $= k$ erlanget, ſo muß ſeine Geſchwindigkeit in C $= 2k$, in D $= 3k$, in E $= 4k$ ſeyn.

Denn da die Kraft unveränderlich iſt, und im erſten Zeittheile dem Körper die Geſchwindigkeit $= k$ beybringet, ſo muß ſie dieſem nämlichen Körper in einem jeden darauffolgenden eben ſo groſſen Zeittheile die nämliche Geſchwindigkeit $= k$ beybringen (§. 33); da über dieſes die Richtung der Kraft immer einerley iſt, und der Körper ſich frey bewegen kann, ſo kann derſelbe vermög (§. 34.) von ſeiner einmal erlangten Geſchwindigkeit gar nichts verlieren, ſondern er muß vermög dieſem Naturgeſetzte **(vermög der Trägheit)** die Geſchwindigkeit, die er in einem Zeittheile erlanget,

Fig. 2 durch den darauffolgenden Zeittheil auch mit beybehalten, ſo daß ſeine Geſchwindigkeit am Ende eines jeden Zeittheiles aus der letzten Geſchwindigkeit des nächſtvorhergehenden Zeittheiles, und aus der Geſchwindigkeit, die er in dieſem Zeittheile von der unveränderlichen Kraft erlanget, zuſammengeſetzt ſey; die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers iſt demnach in C $= k + k = 2k$, in D $= 2k + k = 3k$, in E $= 3k + k = 4k$, u. ſ. w.

§. 38.

Wenn man bey einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung die in der erſten Sekunde erlangte Geſchwindigkeit mit k bezeichnet, ſo läßt ſich daraus die in t Sekunden erlangte Geſchwindigkeit v vom Anfange der Bewegung gerechnet, durch nachſtehende Formel finden $v = kt$.

Denn da vermög vorhergehenden der Körper nach Verlauf von 2, 3, 4, 5.... Sekunden die Geſchwindigkeiten $2k$, $3k$, $4k$, $5k$.... erlanget, ſo muß er nach Verlauf von t Sekunden die Geſchwindigkeit $tk = v$ erlangen, weil man die in der erſten Sekunde erlangte Geſchwindigkeit $= k$ geſetzet hat.

Wenn z. B. eine unveränderliche Kraft einem Körper in einer Sekunde eine Geſchwindigkeit $k = 31$ Schuhe beybringet, ſo muß ſie demſelben in einer Minute nämlich in 60 Sekunden eine Geſchwindigkeit $= 31.60 = 1860$ Schuhe, hingegen in $t = \frac{1}{62}$ Sekunde nur eine Geſchwindigkeit $v = \frac{1}{2}$ Schuh beybringen, das iſt wenn in dem letzten Falle die unveränderliche Kraft auf den nämlichen Körper nicht länger als nur durch $\frac{1}{62}$ Sekunde wirket, ſo muß der Körper von dem Verlauf dieſer $\frac{1}{62}$ Sekunde angefangen darauf in einer jeden Sekunde $\frac{1}{2}$ Schuh gleichförmig zurücklegen vorausgeſetzt, daß er ſich frey bewegen könne. Fig. 2.

§. 39.

Bey der gleichförmig beſchleunigten Bewegung läßt ſich aus der Geſchwindigkeit $= k$ am Ende der erſten Sekunde, der in t Sekunden zurückgelegte Weg AP $= s$ vom Anfange der Bewegung gerechnet durch nachſtehende Formel ausdrücken $s = \frac{1}{2}kt^2$.

Um dieſe Formel zu finden ſtelle man ſich vor, daß die Zeit t in unendlich viele gleiche Theile getheilet ſey; in einem ſolchen unendlich kleinen Zeittheile $= dt$ werde der Theil Pp $= ds$ des Weges zurückgeleget; nun iſt vermög dem vorhergehenden in dem Punkte P die Geſchwindigkeit $v = kt$, und in dem Punkte p iſt die Geſchwindigkeit $v' = k(t+dt) = kt+kdt = kt$, weil kdt in Rückſicht $kt = 0$ iſt; die Geſchwindigkeit iſt demnach in dem unendlich kleinen Zeittheile dt für **unveränderlich** und folglich die Bewegung durch Pp für gleichförmig anzuſehen (§. 24.); es iſt daher vermög (§. 25.) $ds = ktdt$, wenn man ds ſtatt s, kt ſtatt c, und dt ſtatt t in der allgemeinen Formel $s = ct$ ſubſtituiret; und endlich iſt, wenn man dieſe Gleichung $ds = ktdt$ integriret, $s = \frac{1}{2}kt^2 + \text{Conſt}$; es iſt aber für $t = 0$ auch $s = 0$; alſo $\text{Conſt} = 0$, und $s = \frac{1}{2}kt^2$. Wenn man nämlich die Dauerzeit der Bewegung in unendlich viele gleiche Theile zertheilet gedenket, ſo wachſen bey dieſer Bewegung die in einzelnen auf einander folgenden ſolchen Zeittheilen zurückgelegten Wege in einer gewiſſen Reihe, deren allgemeines Glied $ds = ktdt$ iſt, woraus mittelſt der Integralrechnung die Summe der ganzen Reihe, nämlich der ganze zurückgelegte Weg AP vom Anfange der Bewegung gerechnet $s = \frac{1}{2}kt^2$ ſich beſtimmen läßt.

§. 40.

Fig. Wenn man den Weg, der bey einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung in der erſten Sekunde zurückgelegt wird, und welcher die Beſchleunigung der Kraft heißt, mit g bezeichnet, und ſodann dieſen Werth in der Gleichung $s = \frac{1}{2}kt^2$ für s, für t aber 1 Sek. ſetzet, ſo iſt $g = \frac{1}{2}k$, und $k = 2g$. Man ſubſtituire dieſen Werth für k in den zwey gefundenen Gleichungen $v = kt$, und $s = \frac{1}{2}kt^2$, ſo erhält man folgende zwey Fundamentalformeln für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung $v = 2gt$, und $s = gt^2$, allwo g die **Beſchleunigung der unveränderlichen Kraft**, das iſt den in der erſten Sekunde durchlaufenen, s aber den in t Sekunden zurückgelegten Weg, und v die am Ende von t Sekunden, oder am Ende des Weges s erlangte Geſchwindigkeit vom Anfange der Bewegung gerechnet, bedeutet.

§. 41.

Aus dieſen zwey Fundamentalformeln laſſen ſich noch zehn andere herleiten. Wenn man z. B. den Werth für t aus der erſten Gleichung ſuchet, und denſelben in der zweyten ſubſtituiret, ſo iſt $s = \frac{v^2}{4g}$; und eben ſo iſt $s = \frac{vt}{2}$, wenn man den Werth für g aus der erſten Gleichung in die zweyte ſetzet, u. ſ. w. Alle zwölf Formeln laſſen ſich in nachſtehende Tabelle eintragen.

zu ſuchen	gegeben.	Formel	zu ſuchen	gegeben	Formel
v	g, t	I. $v = 2gt$	t	g, v	VII. $t = \frac{v}{2g}$
	g, s	II. $v = \sqrt{4gs}$		g, s	VIII. $t = \sqrt{\frac{s}{g}}$
	t, s	III. $v = \frac{2s}{t}$		v, s	IX. $t = \frac{2s}{v}$
s	g, t	IV. $s = gt^2$	g	s, t	X. $g = \frac{s}{t^2}$
	g, v	V. $s = \frac{v^2}{4g}$		v, t	XI. $g = \frac{v}{2t}$
	v, t	VI. $s = \frac{vt}{2}$		v, s	XII. $g = \frac{v^2}{4s}$

§. 42.

Dieſe zwölf Formeln ſind hinreichend alle mögliche Fälle aufzulöſen, welche bey der gleichförmig beſchleunigten Bewegung vorkommen, wenn die Bewegung von der Ruhe anfängt, allwo aber weder die Maſſe des bewegten Körpers, noch auch die bewegende Kraft in die Rechnung kömmt. Man kann daraus verſchiedene Folgen ableiten; als.

I. Die erlangten Geſchwindigkeiten bey einer nämlichen gleichförmig beſchleunigten Bewegung verhalten ſich wie die verfloſſenen Zeiten; denn es iſt (§. 41. I.) $v = 2gt$, und aus dem nämlichen Grunde $V = 2gT$; folglich $v : V = 2gt : 2gT = t : T$.

II. Bey einer nämlichen gleichförmig beſchleunigten Bewegung verhalten ſich die ganzen zurückgelegten Wege

Fig. wie die Quadrate der verfloſſenen Zeiten, und auch wie die Quadrate der erlangten Geſchwindigkeiten; denn es iſt (§. 41. IV.) $s = gt^2$, und vermög (§. 41. V.) $s = \frac{v^2}{4g}$; aus dem nämlichen Grunde iſt $S = gT^2$, und $S = \frac{V^2}{4g}$; folglich $s : S = gt^2 : gT^2 = t^2 : T^2$, und auch $s : S = \frac{v^2}{4g} : \frac{V^2}{4g} = v^2 : V^2$. Hingegen die Theile des Weges, welche bey dieſer Bewegung in einzelnen auf einander folgenden gleichgroſſen Zeittheilen zurückgelegt werden, verhalten ſich gegen einander wie die ungeraden natürlichen Zahlen; denn man gebe nur in der Formel $s = gt^2$, der Zeit t nach der Ordnung die Werthe $2t$, $3t$, $4t$, $5t$ . . . ſo ſind die ganzen Wege, welche bey dieſer Bewegung vom Anfange gerechnet zurückgelegt werden, folgende

$$gt^2,\ 4gt^2,\ 9gt^2,\ 16gt^2,\ 25gt^2,\ 36gt^2,\ 49gt^2,\ \ldots$$

und folglich ſind die Differenzen nämlich die Theile des Weges, welche nach der Ordnung in einem jedem gleichgroſſen Zeittheile $= t$ zurückgelegt werden, folgende

$$gt^2,\ 3gt^2,\ 5gt^2,\ 7gt^2,\ 9gt^2,\ 11gt^2,\ 13gt^2,\ \ldots$$

welche ſich wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 gegeneinander verhalten.

III. Bey was immer für einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung iſt der ganze zurückgelegte Weg vom Anfange dieſer Bewegung gerechnet nur die Hälfte desjenigen Weges, welchen der nämliche Körper mit der am Ende des Weges erlangten Geſchwindigkeit in der nämlichen Zeit **gleichförmig** zurücklegen könnte; dieſes giebt die Formel VI. (§. 41.) zu erkennen.

IV. Aus der Formel X (§. 41.) iſt es deutlich zu erſehen, wie man bey was immer für einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung aus dem gemeſſenen zurückgelegten Wege $= s$, und aus der beobachteten Dauerzeit $= t$ vom Anfange der Bewegung gerechnet, die Beſchleunigung $= g$ finden könne; u. ſ. w.

§. 43.

Wenn ein Körper ſich dergeſtalt frey beweget, daß die ganzen zurückgelegten Wege ſich gegen einander verhalten, wie die quadrate der dazugehörigen Zeiten vom Anfange der Bewegung gerechnet, ſo wächſt ſeine Geſchwindigkeit in gleichen Zeittheilen um gleich groſſe Zuſätze, das iſt ſeine Bewegung iſt gleichförmig beſchleuniget, und die bewegende Kraft, welche dieſen Körper treibet, iſt unveränderlich.

Um dieſes einzuſehen ſey bey dieſer Bewegung der in der erſten Sekunde zurückgelegte Weg $= g$, und der in t Sekunden durchlaufene Weg $= s$, die in t Sekunden erlangte Geſchwindigkeit aber ſey $= v$, ſo iſt vermög Vorausſetzung $s = gt^2$, und $ds = 2gtdt$ in dem unendlich kleinen Zeittheile dt; dabey iſt durch den nämlichen unendlich kleinen Zeittheil dt die Geſchwindigkeit $= v$ **unveränderlich**, weil keine bewegende Kraft in einem unendlich kleinen Zeittheile die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers um ein endliches Stück zu ändern im Stande iſt (§. 29. Anmerk.); folglich iſt vermög (§. 25.) $ds = vdt$; da nun $ds = 2gtdt$, und $ds = vdt$, ſo iſt auch $vdt = 2gtdt$, woraus $v = 2gt$ folgt. Man ſetze nach der Ordnung für t die Werthe 1, 2, 3, 4, 5 Sekunden, ſo ſind die entſprechenden Geſchwindigkeiten $= 2g, 4g, 6g, 8g, 10g, \ldots.$ und die Differenzen $= 2g, 2g, 2g, \ldots$

Fig. woraus deutlich zu erſehen iſt, daß die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers in gleichen Zeittheilen gleich groſſe Zuſätze erhalte; die Bewegung in der angeführten Vorausſetzung iſt demnach gleichförmig beſchleuniget, und die bewegende Kraft, welche den Körper treibet, und demſelben in gleichen Zeittheilen gleichgroſſe Zuſätze der Geſchwindigkeit beybringet, iſt unveränderlich (§. 33).

§. 44.

Gehörig angeſtellte Verſuche geben zu erkennen, daß allerorts auf unſerer Erdoberfläche, und in allen ſolchen Erhöhungen über derſelben, allwo ſich Verſuche anſtellen laſſen, ein frey fallender Körper in 2 Sekunden Zeit 4mal, in 3 Sekunden 9mal, in 4 Sekunden 16mal, in 5 Sekunden 25mal tiefer falle, als in der erſten Sekunde, mit einem Worte, daß ſich die ganzen zurückgelegten Wege bey einem freyfallenden Körper gegeneinander verhalten wie die Quadrate der dazugehörigen Zeiten vom Anfange der Bewegung gerechnet. **Die Bewegung eines freyfallenden Körpers iſt demnach eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung, und die bewegende Kraft, welche den Körper unterwärts treibet, iſt an denjenigen Erhöhungen über der Erdfläche unveränderlich, an denen ſich noch Verſuche anſtellen laſſen.** Dieſe bewegende Kraft bey einem freyfallenden Körper iſt nichts anders, als das Gewicht des Körpers ſelbſt, weil man übereingekommen iſt alle bewegenden Kräfte durch ihre Preſſungen auszudrücken (§. 27), ſie durch Gewichte abzumeſſen um ſie in Rechnung bringen und unter einander vergleichen zu können. Da über dieſes durch die genaueſten Verſuche ausgemacht iſt, daß noch ſo verſchiedene Körper z. B. ein Stück Gold und ein Stückchen von einer Pflaumfeder **durch den freyen Fall** in einerley Zeit den nämlichen Weg zurücklegen, und folglich in einerley Zeit auch einerley Geſchwindigkeit erlangen, ſo müſſen gleichgroſſe Theilchen der Materie von noch ſo verſchiedenen Körpern auch gleich ſtark beſchleuniget, müſſen von gleichgroſſen bewegenden Kräften getrieben werden; denn ein Stückchen von einer Pflaumfeder und ein Stück Gold können bey dem freyen Falle nur unter der Bedingung in einerley Zeit auch einerley Weg zurücklegen, daß jedes materielle Theilchen der Feder eben ſo ſtark beſchleuniget werde, als jedes eben ſo groſſe materielle Theilchen des Goldes. Denjenigen Theil der bewegenden Kraft, welcher auf ein für die Einheit angenommenes Theilchen der Materie bey einem bewegten Körper wirket, pflegen einige Schriftſteller insbeſondere die **beſchleunigende Kraft** zu nennen; vermög dieſer Benennung iſt demnach bey noch ſo verſchiedenen Körpern die beſchleunigende Kraft des freyen Falles an einem nämlichen Orte der Erde einerley; da hingegen die **ganzen** bewegenden Kräfte verſchiedener freyfallender Körper verſchieden ſind, weil die bewegenden Kräfte freyfallender Körper durch ihre Gewichte ausgedrücket werden.

§. 45.

Da nun die Bewegung eines jeden freyfallenden Körpers eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung iſt, ſo kann man an jedem Orte der Erde alle Fälle, welche bey dem freyen Falle der Körper vorkommen können, ſehr leicht mittelſt der allgemeinen Formeln (§. 41) entwickeln, wenn nur die Beſchleunigung der bewegenden Kraft eines freyfallenden Körpers, das iſt **die Beſchleunigung der Schwere** $= g$ an dieſem Orte bekannt iſt; allhier in **Wien** iſt $g = 15{,}51512$ Wien. Sch. in **Paris** iſt $g = 15{,}09809$ Par. Fuß oder $= 15{,}5154$ Wien. Sch.; in **Quito** ſehr nahe beym Aequator in Amerika iſt $g = 15{,}46364$ W. Sch. hingegen in

Fig. St. Petersburg in der Breite von 59°56′ iſt $g =$ 15,53125 W. Sch. Wir werden Kürze halber gemeiniglich nur $g = 15\frac{1}{2}$ W. Sch. ſetzen, und man kann ohne groſſe Fehler zu befürchten allerorts auf der Erdoberfläche $g = 15\frac{1}{2}$ W. Sch. gelten laſſen. In der Folge ſoll jederzeit dieſer Buchſtab g die Beſchleunigung der Schwere bedeuten.

Mittelſt der allgemeinen Formeln (§. 41), und des bekannten Werthes $g = 15\frac{1}{2}$ W. Sch. findet man nun ſehr leicht, daß z. B. ein Körper durch den freyen Fall in 10 Sekunden $= t$ einen Weg $s = 1550$ Sch. zurücklege; er erlanget am Ende dieſer Zeit eine Geſchwindigkeit $v = 310$ Sch. Läßt man einen Körper durch eine Höhe $s = 1000$ Schuhen frey herabfallen, ſo erlanget er eine Geſchwindigkeit, $v = \sqrt{62000} = 249$ Sch. und braucht dazu ziemlich genau eine Zeit von 8 Sekunden. Damit ein Körper durch den freyen Fall eine Geſchwindigkeit $v = 155$ Sch. erlange, ſo muß er durch eine Höhe $s = 387\frac{1}{2}$ Sch. frey herabfallen, und es wird eine Zeit $t = 5$ Sekunden dazu erfodert. Wenn man von der Spitze eines Thurmes einen Körper frey herunter fallen läßt, und die dazu verwendete Zeit z. B. $5\frac{1}{2}$ Sekunden beobachtet, ſo iſt dieſes Thurmes Höhe $s = 469$ Schuhen. Die Geſchwindigkeit eines freyfallenden Körpers erhält in jeder Sekunde einen Zuſatz von 31 Schuhen, und die in einzelnen auf einander folgenden Sekunden zurückgelegten Wege wachſen in einer arithmetiſchen Reihe der erſten Ordnung, deren Differenz = 31 Sch. iſt; u. ſ. w. Die ganze Lehre von dem freyen Falle der Körper läßt ſich jederzeit ſehr leicht überſehen, wenn man ſich nur an die zwey Fundamentalgleichungen $v = 2gt$, $s = gt^2$, und an den Werth von g erinnert.

§. 46.

Wenn man mit den Fundamentalformeln für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung $v = 2gt$ und $s = gt^2$, auch die Formel $s = ct$ für die gleichförmige Bewegung gehörig verbindet, ſo läßt ſich dadurch auch die Bewegung eines gerade aufwärts oder auch gerade abwärts mit einer gegebenen Geſchwindigkeit geworfenen Körpers beſtimmen, wenn ſich ſolcher frey bewegen könnte. Fig.

Wenn z. B. ein Körper mit der Geſchwindigkeit $= c$ nach einer ſenkrechten Richtung gegen die Erde herabgeworfen wird, ſo iſt nach Verlauf von t Sekunden ſeine Geſchwindigkeit $v = c + 2gt$, und der zurückgelegte Weg $s = ct + gt^2$, wenn der Körper ſich frey bewegen kann. Denn durch den freyen Fall wird die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers in jeder Sekunde um $2g$, und folglich in t Sekunden um $2gt$ vermehret; es iſt demnach nach Verlauf von t Sekunden ſeine Geſchwindigkeit $v = c + 2gt$; da über dieſes der bewegte Körper vermög der anfänglichen Geſchwindigkeit c in der Zeit t, den Weg $= ct$, und vermög der unveränderlichen Kraft des freyen Falles in der nämlichen Zeit den Weg $= gt^2$ zurückleget, und die Richtung der anfänglichen Geſchwindigkeit mit der unveränderlichen Kraft übereinſtimmet, ſo iſt der ganze zurückgelegte Weg $s = ct + gt^2$. Dieſe Formel kann man auch auf folgende Art finden; während dem Zeitelemente dt, worin das Element ds des Weges s durchlaufen wird, findet die Geſchwindigkeit $v = c + 2gt$ ſtatt, die man für unveränderlich anſehen kann, weil ſie während dieſem Zeitelemente um kein angebliches endliches Stück geändert wird; folglich iſt

$ds = (c + 2gt)\,dt = cdt + 2gtdt$, und $s = ct + gt^2$.

Fig. allwo Conſt = 0 ſeyn muß, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ iſt.

Wird hingegen ein Körper mit der Geſchwindigkeit $= c$ nach einer vertikalen Richtung gerade aufwärts geworfen, ſo iſt nach Verlauf von t Sekunden **nach der nämlichen Richtung** ſeine Geſchwindigkeit $v = c - 2gt$, und der zurückgelegte Weg $s = ct - gt^2$, wenn der Körper bey dieſer Bewegung von der Luft keinen Widerſtand auszuſtehen hat, weil in dieſem Falle durch die unveränderliche Kraft der Schwere, wegen der entgegengeſetzten Richtung während der Zeit t die anfängliche Geſchwindigkeit des Körpers um $2gt$, und ſein vermög dieſer anfänglichen Geſchwindigkeit c in der nämlichen Zeit t durchlaufbare Weg $= ct$ um gt^2 vermindert wird; oder kürzer, weil bey dieſer Bewegung $ds = (c - 2gt)dt$, und folglich $s = ct - gt^2$ ſtatt findet. Es iſt aus der Formel $v = c - 2gt$ leicht zu erſehen, daß die freye Bewegung eines gerade aufwärts geworfenen Körpers **eine gleichförmig verzögerte Bewegung** ſey.

Aus der Gleichung $v = c - 2gt$, folgt $t = \frac{c - v}{2g}$, und $t^2 = \frac{c^2 - 2cv + v^2}{4g^2}$; man ſubſtituire dieſe Werthe in der zweyten Gleichung $s = ct - gt^2$, ſo iſt $s = \frac{c^2 - v^2}{4g}$; in dieſer Gleichung ſetze man $v = 0$, ſo zeigt $s = \frac{c^2}{4g}$ die Höhe an, welche ein mit der anfänglichen Geſchwindigkeit c aufwärts geworfener Körper zu erreichen im Stande iſt; und die dazu verwendedete Zeit iſt $t = \frac{c}{2g}$, wenn man in der Gleichung $t = \frac{c-v}{2g}$ die Geſchwindigkeit $v = 0$ ſetzet.

Die Formel $s = \frac{c^2}{4g}$ giebt zu erkennen, daß die ganzen Höhen, welche verſchiedene mit ungleichen Geſchwindigkeiten aufwärts geworfene Körper durch die freye Bewegung zu erreichen im Stande ſind, ſich gegeneinander verhalten, wie die Quadrate der anfänglichen Geſchwindigkeiten. Die Formel $t = \frac{c}{2g}$ aber giebt zu erkennen, daß die dazu verwendeten Zeiten ſich verhalten wie die anfänglichen Geſchwindigkeiten ſelbſt.

Die Formel $s = \frac{c^2}{4g}$, iſt mit (§. 41. V.) einerley; alſo iſt auch die Höhe, welche ein mit der Geſchwindigkeit c frey aufwärts geworfener Körper zu erreichen im Stande iſt, einerley mit derjenigen Höhe, von welcher ein Körper frey herabfallen muß um die anfängliche Geſchwindigkeit c zu erhalten.

§. 47.

Die Höhe, von welcher ein Körper frey herabfallen muß um eine gegebene Geſchwindigkeit zu erhalten, pflegt man **die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe**; oder kürzer die **Geſchwindigkeitshöhe** zu nennen. Da (§. 41) $s = \frac{v^2}{4g}$, und $v = \sqrt{4gs}$, ſo läßt ſich jederzeit aus der gegebenen Geſchwindigkeit auch die Geſchwindigkeitshöhe und umgekehrt finden. Wenn die Luft nicht widerſtünde, nämlich die Bewegung eines fallenden Körper nicht in etwas

Fig. verzögerte, ſo wäre das Fallen eines Körpers von verſchiedenen Höhen ein gutes Hilfsmittel einem Körper verſchiedene Geſchwindigkeiten beyzubringen. Iſt der Körper ſehr dicht als z. B. Bley, Kupfer, oder Eiſen, und die Höhe, von der er herabfällt, nicht gar zu groß, ſo kann man indeſſen ſeinen wirklichen Fall in der Luft immer für eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung anſehen, bey der $g = 15\frac{1}{2}$ W. Sch. iſt, bis man weiter unten auch die Bewegung in einem widerſtehenden Mittel, z. B. in der Luft, zu beſtimmen im Stande ſeyn wird.

§. 48.

Wenn eine einzige unveränderliche bewegende Kraft $= P$ Pfunde auf einen Körper wirket, der ſich frey bewegen kann, und deſſen Maſſe gegeben iſt, das iſt deſſen Gewicht $= M$ Pfunde bekannt wäre, wenn die Schwere an der Erdoberfläche auf ihn wirkte, ſo iſt die Beſchleunigung G, welche dieſe Kraft P in dem Körper M hervorbringet, nämlich der in der erſten Sekunde wirklich zurückgelegte Weg $G = \frac{gP}{M}$, allwo g die Beſchleunigung der Schwere an der Erdoberfläche bedeutet.

Um dieſes einzuſehen ſey die Geſchwindigkeit $= K$, welche die unveränderliche Kraft P dem Körper M in 1 Sek. ertheilet, und die Geſchwindigkeit $= k$, welche eine andere unveränderliche Kraft $= M$ (**die nämlich dem Gewichte dieſes Körpers an der Erdoberfläche gleich iſt**) eben dieſem Körper M auch in 1 Sek. nach der nämlichen Richtung beyzubringen im Stande iſt; die Beſchleunigung aber der erſten unveränderlichen Kraft P auf den Körper

M ſey $= G$, und die Beſchleunigung der zweyten unveränderlichen Kraft M **auf den nämlichen Körper** M ſey $= g$, ſo iſt $G = \frac{1}{2}K$ und $g = \frac{1}{2}k$ vermög (§. 40), oder $K = 2G$ und $k = 2g$; nun verhält ſich die Kraft M zur Kraft $P = k:K$ vermög (§. 33); folglich auch $M:P = 2g:2G = g:G$, nämlich es iſt $G = \frac{gP}{M}$, und zwar g bedeutet die Beſchleunigung der bewegenden Kraft bey einem freyfallenden Körper, nämlich die **Beſchleunigung der Schwere an der Erdoberfläche**, weil man die unveränderliche Kraft M eben ſo groß angenommen hat als das Gewicht des Körpers M an der Erdoberfläche. Fig.

Anmerk. Wenn z. B. in einem luftleeren Raume ein **unſchwerer** Körper (oder auch ein ſchwerer Körper auf einer **vollkommen glatten** horizontalen Fläche, wodurch die Schwere in Rückſicht der Beweglichkeit aufgehoben wird) von einer unveränderlichen Kraft nach der horizontalen Richtung eben ſo ſtark gepreſſet würde, als der ſchwere Körper ſelbſt die horizontale Fläche preſſet, ſo müßte er nach der horizontalen Richtung von dieſer unveränderlichen Kraft in einer jeden Sekunde die nämliche Geſchwindigkeit erlangen, die er von der bewegenden Kraft des freyen Falles nämlich von ſeinem Gewichte nach der ſenkrechten Richtung durch den freyen Fall in jeder Sekunde erhalten kann, weil gleiche bewegende Kräfte gleichen Körpern in einerley Zeit auch gleiche Geſchwindigkeiten beybringen; wäre hingegen in einem ſolchen Falle die Preſſung der unveränderlichen Kraft nach der horizontalen Richtung 2, 3, $n$mal gröſſer oder kleiner als die Preſſung des bewegten Körpers gegen die horizontale Fläche, nämlich wäre in einem ſolchen Falle die unveränderliche Kraft, die den Körper nach der horizontalen Richtung frey forttreibet, 2, 3, $n$mal gröſſer oder kleiner als das Gewicht dieſes Körpers, Fig. pers, ſo müßte auch die in jeder Sekunde nach der horizontalen Richtung erlangte Geſchwindigkeit dieſes Körpers 2, 3, $n$mal gröſſer oder kleiner ſeyn, als die Geſchwindigkeit, welche er in jeder Sekunde durch den freyen Fall erhalten kann, und folglich müßte auch in einem ſolchen Falle die Beſchleunigung der erſten unveränderlichen bewegenden Kraft 2, 3, $n$mal gröſſer oder kleiner ſeyn als die Beſchleunigung der bewegenden Kraft des freyen Falles. Ein nämlicher Körper (z. B. ein W. Kub. Sch. Bley) wird aſtronomiſchen Beobachtungen und Rechnungen zufolge an der Oberfläche des Jupiters $2\frac{1}{2}$mal ſtärker gegen denſelben gepreſſet, als allhier gegen die Erdfläche; derowegen fällt auch ein jeder Körper an Jupitersoberfläche in einerley Zeit $2\frac{1}{2}$mal tiefer gegen denſelben, als allhier gegen die Erde; die Beſchleunigung der **Jupitersſchwere** an ſeiner Oberfläche iſt $2\frac{1}{2}$mal gröſſer als die Beſchleunigung der Erdſchwere an ihrer Oberfläche.

§. 49.

Aufgabe. Auf einen Körper, deſſen Maſſe gegeben iſt, nämlich deſſen Gewicht an der Erdfläche = M Pf. bekannt iſt, wirket eine einzige gegebene unveränderliche Kraft = P Pf. immer nach einerley Richtung; man ſoll die Bewegung dieſes Körpers beſtimmen, wenn er ſich nach der Richtung der Kraft frey bewegen kann.

Auflöſung. Die Bewegung des Körpers iſt eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung (§. 37); ſetzet man nun die Beſchleunigung = G, welche die Kraft P in dem Körper M hervorbringet, die in t Sek. erlangte Geſchwindigkeit = v, und den in eben dieſer Zeit zurückgelegten Weg = s vom Anfange der Bewegung

Fig.

gerechnet, ſo iſt $v = 2Gt$, und $s=Gt^2$ vermög (§. 40); es iſt aber $G = \frac{gP}{M}$ vermög (§. 48); folglich auch $v = \frac{2gPt}{M}$, und $s = \frac{gPt^2}{M}$, allwo g die Beſchleunigung der Schwere an der Erdfläche bedeutet.

§. 50.

Aus dieſen zwey gefundenen Fundamentalgleichungen

$$v=\frac{2gPt}{M}, \text{ und } s=\frac{gPt^2}{M}$$

für die freye Bewegung des Körpers M, wenn die unveränderliche Kraft P auf ihn wirket, laſſen ſich ſo wie (§. 41) noch viele andere Formeln ableiten, wenn man ſie mit einander verbindet; wenn man z. B. aus der zweyten Gleichung den Werth für t in die erſte ſetzet, ſo iſt $v^2 = \frac{4gPs}{M}$.

Auch iſt es leicht einzuſehen, daß $v = c + \frac{2gPt}{M}$, und $s = ct + \frac{gPt^2}{M}$ ſeyn müſſe, wenn in demjenigen Augenblicke, von welchem man die Dauerzeit der Bewegung zu zählen anfängt, der Körper nach der Richtung der unveränderlichen Kraft ſchon eine anfängliche Geſchwindigkeit $= c$ hat; daß hingegen $v = c - \frac{2gPt}{M}$, und $s = ct - \frac{gPt^2}{M}$ ſtatt finde, wenn die Richtung der unveränderlichen Kraft der Richtung der anfänglichen Geſchwindigkeit c gerade entgegengeſetzet iſt.

§. 51.

Fig. Wir wollen dieſe entwickelten Formeln durch einige Beyſpiele erläutern, um ihren vortrefflichen Nutzen durch den Gebrauch einigermaaßen einzuſehen; als

3. I. Wenn auf einer vollkommen glatten horizontalen Fläche AB Fig. 3 ein Körper $a = 998$ Pfunde von einem Gewichte $b = 2$ Pfunde mittelſt einer horizontalen Schnur fortgezogen wird, die über die Rolle Q geführet iſt, und man läßt die **Reibung** des Körpers a auf der horizontalen Fläche, das Gewicht und die Steifigkeit der Schnur, und auch die Reibung und das Gewicht der Rolle, mit einem Worte alle Hinderniſſe der Bewegung gänzlich bey Seite, ſetzet über dieſes den in der Zeit t zurückgelegten Weg AB $= s$, und die Geſchwindigkeit in dieſem Punkte $= v$, ſo läßt ſich die freye Bewegung des Körpers auf folgende Art beſtimmen. Es iſt in dieſem Falle die bewegende Kraft $P = b$, und die bewegte Maſſe $M = a + b$, weil beyde Körper a und b durch die bewegende Kraft b müſſen beweget werden; folglich iſt $v = \frac{2gbt}{a+b}$, $s = \frac{gbt^2}{a+b}$, und $v^2 = \frac{4gbs}{a+b}$, wenn man in den allgemeinen Fundamentalgleichungen (§. 50.) für P und M ihre gehörigen Werthe ſetzet, nämlich es iſt $s = 0{,}031t^2$, $v = 0{,}062t$, und $v^2 = 0{,}124s$; ſetzet man nun $t = 10$ Sek. ſo iſt $s = 3{,}1$ Sch. und $v = 0{,}62$ Sch. Setzet man AB $= 27{,}9$ Sch. ſo iſt die dazu erforderliche Zeit $t = 30$ Sek. und die in B erlangte Geſchwindigkeit $v = 1{,}86$ Sch. u. ſ. w. Kurz wenn man in (§. 41) $g = 0{,}031$ gelten läßt, ſo kann man alle daſelbſt befindliche Formeln für den gegenwärtigen Fall gebrauchen. Es iſt aus dieſer Unterſuchung auch zu

erſehen, daß *eine ſehr kleine Kraft einen ungemein groſſen Körper wirklich in Bewegung ſetzen könnte, wenn alle auſſer dem Körper befindliche Hinderniſſe der Bewegung gehoben wären*, und daß die Trägheit eines Körpers (§. 35. Anmerk.) der bewegenden Kraft ſich gar nicht widerſetze, ſo wie die Reibung ſich der bewegenden Kraft wirklich widerſetzet; denn ſonſt könnte man ein Gewicht finden, welches der Trägheit des Körpers das Gleichgewicht hielte, gleichwie man ein Gewicht finden kann, welches der Reibung das Gleichgewicht hält, und ſelbe gänzlich aufhebt. Wenn z. B. AB ein rein abgehobeltes hölzeenes Brett, und auch die untere Fläche des Körpers a ziemlich glatt iſt, ſo iſt durch verſchiedene Verſuche ausgemacht, daß man bey b noch ein Gewicht $= \frac{1}{3}a$ anhängen müſſe um die Reibung gänzlich aufzuheben; der Ueberſchuß des Gewichts b über $\frac{1}{3}a$ iſt ſodann die wirkliche bewegende Kraft. Wenn man nun in dieſem Falle die Reibung auch mit in Erwägung zieht, und ſetzet z. B. $a = 72$ Pfunde, und $b = 28$ Pfunde, ſo iſt $P = b - \frac{1}{3}a = 4$ Pfunde, und $M = a+b = 100$ Pfunde, folglich iſt $s = 0{,}62t^2$, $v = 1{,}24t$, und $v^2 = 2{,}48s$; oder allgemein $s = \frac{g(b-f t^2}{a+b}$, $v = \frac{2g(b-f)t}{a+b}$, und $v^2 = \frac{4g(b-f)s}{a+b}$, wenn man die ſämmtliche Reibung mit f bezeichnet. Die Formel $s = \frac{g(b-f)t^2}{a+b}$ wäre ſehr geſchickt die ſämmtliche Reibung in dieſem Falle zu berechnen, wenn die Schnur kein Gewicht hätte; man müßte in dieſer Abſicht den zurückgelegten Weg AB $= s$ genau ausmeſſen, die dazu erfoderliche Zeit t zuverläſſig beobachten, und ſodann für a, b, g, s und t die entſprechenden Werthe in der an-

Fig. 3 angeführten Formel ſetzen um daraus die Reibung = f berechnen zu können.

In der nämlichen Vorausſetzung, daß die Schnur kein Gewicht habe, lieſſe ſich auch die Beſchleunigung der Schwere = g finden, wenn ſie nicht ſchon zum voraus aus andern richtigern Verſuchen bekannt wäre; man müßte in dieſer Abſicht den nämlichen Körper a durch zwey verſchiedene bewegende Kräfte b auf die angeführte Art Fig. 3 in Bewegung ſetzen, und bey einer jeden bewegenden Kraft, ſowohl den zurückgelegten Weg als auch die dazu verwendete Zeit genau beobachten; es ſey z. B. bey einem Verſuche $a = 72$ Pf. $b = 28$ Pfunde, $s = 22{,}32$ W. Sch. und $t = 6$ Sek. bey einem anderen Verſuche ſey ebenfalls $a = 72$ Pfunde, hingegen $b = 27$ Pfunde, $s = 30\frac{2}{33}$ W. Sch. und $t = 8$ Sek. ſo finden vermög der Formel $s = \frac{g(b-f)t^2}{a+b}$ folgende zwey Gleichungen ſtatt,

$$\left.\begin{array}{l} 22{,}32 = \dfrac{g(28-f)36}{100} \text{ aus dem erſten} \\ 30\frac{2}{33} = \dfrac{g(27-f)64}{99} \ldots\ldots \text{zweyten} \end{array}\right\} \text{Verſuche}$$

woraus $g = 15\frac{1}{2}$ W. Sch. uvd $f = 24$ Pfunde, $= \frac{1}{3}a$ fließt.

II. Wenn man eine Schnur ohne Ende, deren Gewicht = p Loth iſt, über die Rolle Q gehen läßt 4. Fig. 4. und befeſtiget daran beyderſeits gleich ſchwere Körper, ſo halten ſolche einander offenbar das Gleichgewicht, weil ſie die Rolle nach entgegengeſetzten Richtungen gleich ſtark zu drehen ſtreben; wenn man hingegen an der linken Seite einen Körper = a Loth, und an der rechten Seite einen Körper $b = a + f + c$ Loth anbringt, allwo f dasjenige Gewicht, welches genau die Reibung aufzuheben im Stande iſt, und c die eigentliche bewegen-

Fig. 4 gende Kraft (die wirkliche Ueberwucht) bedeutet, ſo wird der Körper a in die Höhe gehoben werden, er wird in einer gewiſſen Zeit t den Weg AB $= s$ zurücklegen, und in dieſer Zeit die Geſchwindigkeit $= v$ erlangen; ſeine Bewegung läßt ſich auf folgende Art beſtimmen; es iſt in dieſem Falle die unveränderliche bewegende Kraft $P = c$, und die zu bewegende Maſſe $M = a + a + f + c + p$, wenn man das Gewicht der Rolle indeſſen noch bey Seite ſetzt, nämlich es iſt $P = b - a - f$, und $M = a + b + f$, weil $a + f + c = b$ iſt; folglich iſt auch

$$s = \frac{g(b-a-f)t^2}{a+b+p}, \quad v = \frac{2g(b-a-f)t}{a+b+p}, \text{ und}$$

$$v^2 = \frac{4g(b-a-f)s}{a+b+p}.$$

C. G. Schober (Verſuch einer Theorie von der Ueberwucht Leipzig 1751) hat mit einer ſolchen Vorrichtung Verſuche gemacht, die mit der Rechnung ſehr genau übereinſtimmen.

III. Wenn ein Körper z. B. eine eiſerne Kugel in einen Erdhaufen mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit hineingeſchoſſen wird, ſo dringt ſie nur bis auf eine gewiſſe Tiefe ein, und verliert endlich ihre anfängliche Geſchwindigkeit gänzlich, weil durch den Zuſammenhang der Theile des Erdhaufens die Geſchwindigkeit der eindringenden Kugel, ſo wie durch die Anziehung der Erde die anfängliche Geſchwindigkeit eines gerade aufwärts geworfenen Körpers, nach und nach getilget wird. Wenn man annimmt, daß die Geſchwindigkeit der eindringenden Kugel in gleich groſſen auf einander folgenden Zeittheilen um gleich viel abnimmt, ſo läßt ſich das Eindringen der Kugel auf folgende Art beſtimmen. Es ſey die Maſſe der eindringenden Kugel $= M$, und die Kraft $= P$, welche die Geſchwindigkeit der eindringenden Kugel gleichförmig vermindert, die anfängliche

Fig. Geſchwindigkeit der Kugel, mit der ſie nämlich den Erdhaufen berühret, ſey = c, und die Geſchwindigkeit = v, nachdem ſie eine gewiſſe Tiefe = s in einer gewiſſen Zeit = t erreichet, ſo iſt $v = c - \frac{2gPt}{M}$, und $s = ct - \frac{gPt^2}{M}$, woraus durch die Verbindung auch $t = \frac{M(c-v)}{2gP}$, und $s = \frac{M(c^2-v^2)}{4gP}$ folget; nun ſetze man $v = 0$, ſo iſt $s = \frac{Mc^2}{4gP}$ die Tiefe des Loches, welches die Kugel mit der anfänglichen Geſchwindigkeit c hervorzubringen im Stande iſt, und $t = \frac{Mc}{2gP}$ iſt die dazu verwendete Zeit; und eben ſo iſt für eine andere anfängliche Geſchwindigkeit = C der nämlichen Kugel M bey der nämlichen widerſtehenden Kraft P des nämlichen Erdreichs die Tiefe des Loches $S = \frac{MC^2}{4gP}$: folglich $s : S = \frac{Mc^2}{4gP} : \frac{MC^2}{4gP} = c^2 : C^2$; das iſt, **die Tiefen, auf welche eine nämliche Kugel in ein nämliches Erdreich mit verſchiedenen anfänglichen Geſchwindigkeiten einzudringen im Stande iſt, verhalten ſich gegeneinander, wie die Quadrate der anfänglichen Geſchwindigkeiten, vorausgeſetzt daß bey einer nämlichen Kugel die widerſtehende Kraft immer einerley ſey.** Bey einem gleichförmig dichten Erdreiche und bey kleinen Geſchwindigkeiten eines eindringenden Körpers ſtimmet dieſes dem Vorgeben nach mit der Erfahrung beynahe überein, welches man durch einen leichten Verſuch prüfen kann, wenn man eine nämliche Kugel, **oder noch beſſer einen Cylinder** (z. B.

ei-

einen bleyernen) von verſchieden beſtimmten Höhen auf einen weichen Thon herab fallen läßt. Wenn man bey einem ſolchen Verſuche die Tiefe des Loches ausmißt, ſo läßt ſich daraus auch die widerſtehende Kraft P berechnen, vorausgeſetzet daß P unveränderlich ſey. Fig.

Bey dem Eindringen verſchiedener gleichartiger Kugeln in ein nämliches gleichförmig dichtes Erdreich kann man ſich die widerſtehenden Kräfte durch Cylinder vorſtellen, welche mit den Kugeln einerley Materie enthalten, mit ihnen einerley Durchmeſſer und dabey die gemeinſchaftliche Höhe $= f$ haben; ſetzet man daher den Durchmeſſer einer Kugel $= a$, und das eigenthümliche Gewicht (§. 14) ihrer Materie $= q$, ſo iſt in der Formel für die Tiefe des Loches $s = \frac{Mc^2}{4gP}$, die Maſſe der Kugel $M = \frac{1}{6}a^3\pi q$, und die widerſtehende Kraft $P = \frac{1}{4}a^2 f\pi q$; folglich $\frac{M}{P} = \frac{2a}{3f}$, und $s = \frac{ac^2}{6fg}$; es iſt aus dieſem zu erſehen, **daß die Tiefen auf welche verſchiedene gleichartige Kugeln in ein nämliches gleichförmig dichtes Erdreich mit gleichen anfänglichen Geſchwindigkeiten eindringen, ſich gegeneinander verhalten, wie die Durchmeſſer der Kugeln, oder wie die 3ten Potenzwurzeln ihrer Gewichte**; eine 24 pfündige Kanonkugel kann demnach in der angeführten Vorausſetzung doppelt ſo tief eindringen, als eine 3 pfündige. Die Höhe f heißt bey einigen Schriftſtellern die **Feſtigkeit** des Erdreiches; ſie läßt ſich aus der gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit c, aus dem Durchmeſſer der Kugel a, aus der gemeſſenen Tiefe des Loches s, und aus dem bekannten Werthe g ſehr leicht berechnen; jedoch nur unter der angenommenen Vorausſetzung, daß die widerſtehende Kraft des Erdreichs

Fig. bey einem nämlichen eindringenden Körper immer unveränderlich ſey; dieſe Vorausſetzung findet aber in der Natur nicht ſtatt, obwohl ſie in allen bisher bekannten mechaniſchen Abhandlungen für richtig angenommen wird; es iſt vielmehr im Gegentheile ganz richtig, daß dieſe widerſtehende Kraft mit der Tiefe des Loches nach einem gewiſſen Geſetze immer zunehme, ſo lange der eindringende Körper noch eine Geſchwindigkeit hat. Siehe weiter unten (§. 59. I.).

§. 52.

Wenn man die Geſchwindigkeit $= C$ ſetzet, welche eine unveränderliche Kraft P dem Körper M in der Zeit t ertheilet, hingegen die Geſchwindigkeit mit c bezeichnet, welche eine andere unveränderliche Kraft p dem Körper m in der nämlichen Zeit beybringt, ſo iſt vermög (§. 50) $C = \frac{2gPt}{M}$, und $c = \frac{2gpt}{m}$; daraus folgt $P = \frac{MC}{2gt}$, und $p = \frac{mc}{2gt}$; es iſt demnach für einerley Zeit $P : p = MC : mc$, **nämlich die Kräften verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen in die einfachen Geſchwindigkeiten, welche ſie in einerley Zeit hervorbringen** (dieſes iſt das ſogenannte **Carteſiſche** Kräftenmaaß), allwo aber die in einerley Zeit zurückgelegten Wege verſchieden, und zwar den Geſchwindigkeiten proportional ſind; denn es iſt in dieſem Falle $S = \frac{gPt^2}{M}$, und auch $s = \frac{gpt^2}{m}$, wenn man die in einerley Zeit t zurückgelegten Wege mit S und s bezeichnet;

folglich $S : s = \frac{P}{M} : \frac{p}{m}$

es iſt aber auch $P : p = MC : mc$
folglich auch $S : s = C : c$ durch die Multipl.

Sind hingegen C, c die Geſchwindigkeiten, welche die Körper M, m von den unveränderlichen Kräften P, p am Ende eines nämlichen zurückgelegten Weges $= s$ erhalten, ſo iſt vermög (§. 50) $C^2 = \frac{4gPs}{M}$ und $c^2 = \frac{4gps}{m}$; daraus folgt $P = \frac{MC^2}{4gs}$, und $p = \frac{mc^2}{4gs}$; es iſt demnach **für einerley zurückgelegten Weg $P : p = MC^2 : mc^2$; nämlich die Kräften verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten, welche ſie am Ende eines nämlichen zurückgelegten Weges hervorbringen** (dieſes iſt das ſogenannte **Leibnitziſche** Kräftenmaaß), allwo aber die Zeiten, in welchen die Geſchwindigkeiten C, c hervorgebracht werden, verſchieden und zwar den Geſchwindigkeiten verkehrt genommen proportional ſind; denn es iſt in dieſem Falle $s = \frac{gPT^2}{M}$, und auch $s = \frac{gpt^2}{m}$, wenn man die Zeiten, in welchen beyde Körper einerley Weg $= s$ zurücklegen, mit T und t bezeichnet; folglich auch $\frac{gPT^2}{M} = \frac{gpt^2}{m}$;

daraus folgt $T^2 : t^2 = \frac{p}{m} : \frac{P}{M}$

es iſt aber auch $p : P = mc^2 : MC^2$
folglich auch $T^2 : t^2 = c^2 : C^2$ durch die Multipl.
und endlich $T : t = c : C$.

I. An-

I. **Anmerk.** Die zwey entwickelten Sätze von dem ſogenannten **Carteſiſchen** und **Leibnitziſchen** Kräftenmaaße, (oder beſſer zu reden **Kräftenvergleichung**) werden in der Folge gar nicht gebraucht werden; ſie ſtehen nur hier, damit man daraus erſehe, wie leicht der bekannte Streit zwiſchen **Cartes** und **Leibnitz** von der Kräftenvergleichung mittelſt der angeführten Formeln zu entſcheiden iſt. **Cartes** nämlich und ſeine Anhänger behaupteten, man müſſe eine Kraft P nur mit dem einfachen Produkte MC vergleichen, welches ſie **Gröſſe der Bewegung** nannten, und widerſprachen der Leibnitziſchen Vergleichung gänzlich. **Leibnitz** hingegen und ſeine Anhänger behaupteten, man müſſe zuweilen eine Kraft P mit dem zuſammengeſetzten Produkte MC^2 vergleichen, welches ſie auch **Gröſſe der Bewegung** nannten, und ſprachen der Carteſiſchen Vergleichung die Allgemeinheit ab. Die angeführten Formeln geben zu erkennen, daß bey unveränderlichen Kräften beyde Vergleichungen allgemein richtig ſind, nur jede unter einer anderen Bedingung. Dermalen ſind beyde Vergleichungen gänzlich entbehrlich. Siehe weiter unten (§. 58. IV.) und (§. 59).

II. **Anmerkung.** Wenn man die Gleichungen

$$\text{I} : v = \frac{2gPt}{M}, \text{ II. } s = \frac{gPt^2}{M}, \text{ III. } v^2 = \frac{4gPs}{M}$$

verzeichnet, allwo man bey der erſten und zweyten Gleichung t, und bey der dritten s für die Abſciſſen annimmt, v aber in der erſten, s in der zweyten, und v in der dritten Gleichung durch ſenkrechte Ordinaten vorſtellet, ſo heiſſen die Linien, welche auf dieſe Art zum Vorſchein kommen, bey einigen Schriftſtellern, **die Scalen, Stufenleitern, oder Maaßſtäbe der Bewegung**; die Scale der Geſchwindigkeiten auf der Zeit iſt alſo nach dieſer Benennung vermög der Formel I. ein rechtwink-

lich-

lichtes Dreyeck, deſſen Flächeninhalt zugleich den zurückgelegten Weg abbildet. Die Scale der zurückgelegten Wege auf der Zeit hingegen iſt vermög der Formel II. eine Parabel, welche die erhabene Seite des einen Schenkels der Abſciſſenlinie zeiget, die Abſciſſenlinie ſteht in dieſem Falle in dem Scheitel ſenkrecht auf der Achſe; die Scale der Geſchwindigkeiten auf dem zurückgelegten Wege iſt vermög der Formel III. auch eine Parabel, die Abſciſſenlinie iſt in dieſem Falle ſelbſt die Achſe, und $\frac{4gP}{M}$ der Parameter der Parabel.

Bey der gleichförmigen Bewegung iſt vermög der Formel $s = ct$, die Scale der Wege auf der Zeit ein rechtwinklichtes Dreyeck; u. ſ. w.

III. Vorleſung,

Die veränderliche Bewegung.

§. 53.

Wenn eine bewegende Kraft einen Körper forttreibet, welche nicht, wie die Schwere nahe an der Erdfläche, immer einerley Gröſſe behält, ſondern in jedem folgenden Zeittheile ſtärker oder ſchwächer als in dem vorigen den bewegten Körper beſchleuniget, ſo muß ſie in der Rechnung als eine **veränderliche Gröſſe** betrachtet werden, die entweder von der Zeit, oder von der Gröſſe des zurückgelegten Weges, oder auch von der Ge-

Fig. ſchwindigkeit des bewegten Körpers abhängt, die er von irgend einer anderen Kraft erhielt. Die Bewegung eines Körpers, wenn eine veränderliche Kraft auf ihn wirket, kann man eine **veränderliche Bewegung** nennen, um ſie ſowohl von der gleichförmigen als auch von der gleichförmig beſchleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegung zu unterſcheiden.

§. 54.

Jede veränderliche Kraft kann während einem unendlich kleinen Zeittheile (Zeitelemente) für unveränderlich angeſehen werden.

Um dieſes einzuſehen ſetze man, eine veränderliche Kraft hänge von der Dauerzeit der Bewegung dergeſtalt ab, ſie ſey eine ſolche **Funktion** der Zeit, daß nach Verlauf der Zeit t ihre Gröſſe $P = p + qt^m$ ſey, ſo muß nach Verlauf der Zeit $t + dt$ dieſe veränderliche Kraft die Gröſſe $P' = p + q(t + dt)^m = p + qt^m$

$$+ mqt^{m-1}dt + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2} qt^{m-2}dt^2 + \ldots\ldots$$ haben,

und es iſt $P' - P = mqt^{m-1}dt$ eine unendliche kleine Gröſſe, und $P' = P + mqt^{m-1}dt$; eine veränderliche Kraft, die eine Funktion der Zeit iſt, kann demnach während einen Zeitelemente dt ſich nur um ein unendlich kleines Stück verändern; nun iſt ein ſolches unendlich kleines Stück in Rückſicht der ganzen Kraft für 0 anzuſehen; folglich iſt $P' = P$, das iſt während dem Zeitelemente dt kann eine veränderliche Kraft für unveränderlich angeſehen werden, wenn ſie eine Funktion der Zeit iſt. Eben ſo läßt ſich darthun, daß man eine veränderliche Kraft während einem Zeitelemente für unveränderlich anſehen könne, wenn ſie eine Funktion des zurückgelegten Weges, oder auch eine Funktion der Geſchwindigkeit des bewegten Körpers ſeyn ſollte.

Eben

Fig. 5. Eben dieſes erhellet auch aus folgender Betrachtung. Es ſey die krumme Linie HG Fig. 5. **die Scale der veränderlichen Kraft entweder auf der Zeit, oder auf dem zurückgelegten Wege, oder auch auf der Geſchwindigkeit des bewegten Körpers**, nämlich die auf einander folgenden Abſciſſen AB, AC, AD dieſer krummen Linie ſollen entweder die Dauerzeiten t, oder die zurückgelegten Wege s, oder auch die Geſchwindigkeiten v des bewegten Körpers vorſtellen, die veränderliche Kraft aber werde durch die dazugehörigen ſenkrechten Ordinaten BE, CF, DG, abgebildet, ſo iſt es offenbar, daß man $BE = CF$ ſetzen könne, wenn entweder $BC = dt$, oder $BC = ds$, oder auch $BC = dv$ bedeutet, weil überhaupt bey einer jeden krummen Linie zwey unendlich nahe bey einander liegende Ordinaten um kein angebliches endliches Stück verſchieden ſeyn können.

§. 55.

Aufgabe. **Auf einen Körper von gegebener Maſſe, der ſich frey bewegen kann, wirket eine veränderliche Kraft immer nach einerley Richtung; man ſoll ſeine Bewegung beſtimmen.**

6 Auflöſung. Es ſey die gegebene Maſſe des Körpers nämlich ſein Gewicht an der Erdfläche $= M$; AQ Fig. 6. die Richtung der bewegenden veränderlichen Kraft; in der Zeit t werde der Weg $AB = s$ zurückgelegt, und nach Verlauf dieſer Zeit ſey in dem Punkte B des bewegten Körpers Geſchwindigkeit $= v$; in dem nächſt darauffolgenden Zeitelemente dt werde der Weg $Bb = ds$ zurückgelegt, und während dieſem Zeitelemente ſey die Gröſſe der veränderlichen bewegenden Kraft $= P$, welche die Geſchwindigkeit v des beweg-

ten

Fig. 6 ten Körpers um dv verändert, nämlich die Geſchwindigkeit ſey $= dv$ welche die Kraft P dem Körper M in dem Zeitelemente dt ertheilet; nun kann vermög dem vorhergehenden P während dem Zeitelemente dt **für unveränderlich** angeſehen werden; folglich iſt $dv = \frac{2gPdt}{M}$, wenn man in der allgemeinen Formel $v = \frac{2gPt}{M}$ für unveränderliche Kräften (§. 50), dv ſtatt v, und dt ſtatt t ſubſtituiret. Dieſe Veränderung der Geſchwindigkeit $\frac{2gPdt}{M}$ iſt **poſitiv**, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung des bewegten Körpers einerley iſt; im Gegentheile iſt $\frac{2gPdt}{M}$ **negativ**, welches man allgemein alſo bezeichnen kann $dv = \pm \frac{2gPdt}{M}$.

Da nun in dem Punkte B die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers $= v$ iſt, und ſolche während dem Zeitelemente dt wegen der Wirkung der Kraft nur um $\frac{2gPdt}{M}$ verändert wird, ſo iſt in dem Punkte b des bewegten Körpers Geſchwindigkeit $= v \pm \frac{2gPdt}{M} = v$, weil $\frac{2gPdt}{M}$ in Rückſicht v unendlich klein iſt; die Geſchwindigkeit v iſt demnach während dem Zeitelemente dt für unveränderlich und die Bewegung für gleichförmig anzuſehen (§. 24); folglich iſt $ds = vdt$, wenn man ds ſtatt s, v für c, und dt ſtatt t in der Formel $s = ct$ (§. 25) ſetzet.

§. 56.

Die zwey gefundenen Formeln

$$\text{I. } dv = \pm \frac{2gPdt}{M},$$

$$\text{II. } ds = vdt,\ dt = \frac{ds}{v},\ v = \frac{ds}{dt},$$

ſind die zwey Fundamentalgleichungen einer jeden veränderlichen Bewegung, woraus ſich mittelſt der Integralrechnung die ganze Bewegung beſtimmen läßt, wenn P eine bekannte Funktion der Zeit oder der Geſchwindigkeit, oder auch v eine bekannte Funktion der Zeit oder des zurückgelegten Weges iſt. Aus dieſen Fundamentalgleichungen flieſſen auch nachſtehende Formeln.

$$\text{III. } vdv = \pm \frac{2gPds}{M}, \text{ oder } v^2 = \pm 4g \int \frac{Pds}{M} + \text{Conſt.}$$

$$\text{IV. } dds = \pm \frac{2gPdt^2}{M}, \text{ oder } d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \pm \frac{2gPdt}{M}.$$

Die Gleichung III. wird erhalten wenn, man den Werth für dt aus der zweyten Gleichung in die erſte ſetzet; hingegen gelanget man zu der Formel IV. wenn man die Gleichung II. noch einmal differenziret um $dds = dvdt$ zu erhalten, und darauf in dieſer Differenzialgleichung der zweyten Ordnung den Werth für dv aus der erſten Gleichung ſubſtituiret; bey dieſer Differenzialgleichung der zweyten Ordnung wird dt für **unveränderlich** angeſehen, weil man ſich vorſtellet, die Dauerzeit t ſey in unendlich viele **gleiche** Theile zertheilet, oder ſie wachſe immer um **gleich groſſe** Zeitelemente.

In der Gleichung IV. iſt dds eine unendlich kleine Gröſſe der zweyten Ordnung, und zeigt an, um wie viel der Weg, welcher in einem darauffolgenden Zeitelementen zurückgelegt wird, von dem vorigen ds

ver-

Fig. 5 verſchieden ſey, welchen der Körper in dem nächſtvorhergehenden **eben ſo groſſen** Zeitelemente dt zurückleget. Wenn man z. B. HG Fig. 5. **für die Scale der Geſchwindigkeiten auf der Zeit** annimmt, $AB = t$, $BC = CD = dt$, und $BE = v$ ſetzet, ſo iſt $eF = dv$, $BEFC = BEeC = vdt = ds$ der Weg, welcher in dem Zeitelemente dt, und $CEGD = CFfD$ der Weg, welcher in dem darauffolgenden eben ſo groſſen Zeitelemente dt zurückgelegt wird, und endlich $Cf - Be = ef = dds$, oder auch $CG - BF = ef = dds$, weil man den unendlich kleinen Bogen EFG von einer geraden Linie nicht unterſcheiden kann. Es iſt nämlich in dieſer Figur $Be = vdt$ die Bezeichnung des Weges, welchen der Körper vermög der in B ſchon erlangten Geſchwindigkeit v in dem Zeitelemente dt zurückleget, und $EeF = \frac{1}{2}dvdt$ iſt die Bezeichnung des Weges, welchen der Körper in eben dieſem Zeitelemente vermög der unaufhörlichen Wirkung der bewegenden Kraft zurückleget, welches EeF aber nur eine unendlich kleine Gröſſe der zweyten Ordnung iſt. Da nun die bewegende Kraft während dem Zeitelemente dt für unveränderlich anzuſehen iſt, ſo iſt ihre Beſchleunigung $G = \frac{EeF}{dt^2}$, vermög (§. 41. X.) weil EeF den Weg vorſtellet, durch welchen die während dem Zeitelemente dt **unveränderliche** Kraft P den Körper M für ſich allein forttreibet, nämlich es iſt $\frac{gP}{M} = \frac{\frac{1}{2}dvdt}{dt^2}$, welches mit der Formel I übereinſtimmet; oder weil $EeF = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2}dds$, ſo iſt auch $\frac{gP}{M} = \frac{\frac{1}{2}dds}{dt^2}$, welches mit der Formel IV übereinkömmt. $\frac{gP}{M}$ bedeutet näm-

nämlich **die Beſchleunigung** der Kraft P auf den Fig. Körper M (den in 1 Sek. durchlaufbaren Weg); **wenn dieſe Kraft P während einer ganzen Sekunde unveränderlich bliebe.**

§. 57.

Es ſey z. B. die veränderliche Kraft eine ſolche Funktion der Zeit, daß die **Abſolutzahl** $\frac{P}{M} = at^m$ ſey, und die Richtung der Kraft ſey mit der Richtung des bewegten Körpers einerley, ſo iſt vermög der Formel I. $dv = 2agt^m dt$, und $v = \frac{2agt^{m+1}}{m+1}$; man ſubſtituire dieſen Werth in der Formel II, ſo iſt $ds = \frac{2agt^{m+1}dt}{m+1}$, woraus $s = \frac{2agt^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + C$ folgt.

Iſt hingegen die veränderliche Kraft eine ſolche Funktion der Geſchwindigkeit v, daß $\frac{P}{M} = av^n$ ſey, und dabey die Richtung der Kraft der Richtung des bewegten Körpers entgegengeſetzt, ſo iſt vermög Formel III $vdv = -2agv^n ds$; daraus folgt $ds = -\frac{v^{1-n}dv}{2ag}$, und $s = -\frac{v^{2-n}}{(2-n)2ag} + C$; es iſt aber auch vermög der Formel II. $ds = vdt$; folglich auch $-\frac{v^{1-n}dv}{2ag} = vdt$, nämlich $dt = -\frac{v^{-n}dv}{2ag}$, und $t = -\frac{v^{1-n}}{(1-n)2ag} + C'$;

Fig. iſt nun für $s = 0$ oder $t = 0$ der Werth für v, nämlich die anfängliche Geſchwindigkeit des bewegten Körpers bekannt, ſo iſt dadurch auch C und C' beſtimmet.

Es ſey $v = 2gt$, wie bey dem freyen Falle der Körper, ſo iſt vermög der Formel II $ds = 2gtdt$; daraus folgt $s = gt^2$; aus der Gleichung $v = 2gt$ folgt auch $dv = 2gdt$; es iſt aber auch nach der Formel I. $dv = \frac{2gPdt}{M}$, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der Bewegung einerley iſt; folglich iſt auch $2gdt = \frac{2gPdt}{M}$, und $\frac{P}{M} = 1$, welches einleuchtend iſt, weil bey dem freyen Falle eines jeden Körpers die bewegende Kraft eben ſo groß iſt, als die Maſſe oder das Gewicht des bewegten Körpers. Setzen wir nun in der Formel IV $\frac{P}{M} = 1$, ſo iſt $dds = 2gdt^2$, ferner nach der erſten Integration $ds = 2gtdt$, und nach der zweyten $s = gt^2$.

§. 58.

Die (§. 56.) entwickelten Formeln kann man indeſſen auf folgende wirkliche Beyſpiele anwenden, damit man ihren ungemein groſſen Nutzen, der ſich über alle Theile der mechaniſchen Wiſſenſchaften erſtrecket, alſogleich durch den Gebrauch einigermaſſen kennen lerne.

I. Wenn ein Körper in einer beträchtlichen Erhöhung
1 DC Fig. 1 über der Erdfläche, allwo die Abnahme der Schwere ſchon merklich iſt, frey ausgelaſſen wird, ſo läßt ſich ſein Fall gegen die Erde auf folgende Art be-

beſtimmen. Es ſey der Erdhalbmeſſer AD $= a$, die Fig. 1
Erhöhung DC $= b$, der in t Sek. zurückgelegte Weg
CB $= x$, ſo iſt AB $= a+b-x$; ferner ſey die in
B erlangte Geſchwindigkeit $= v$, die Maſſe des fallenden Körpers **(das iſt ſein Gewicht an der Erdfläche)** ſey $= M$, und ſein Gewicht nämlich ſeine bewegende Kraft in B ſey $= P$, ſo iſt vermög (§. 9.)
$\frac{1}{\mathrm{AD}^2}\Big(\frac{1}{a^2} : \frac{1}{\mathrm{AB}^2}\Big(\frac{1}{(a+b-x)^2} = M : P$; folglich $\frac{P}{M} = a^2(a+b-x)^{-2}$; man ſubſtituire dieſen Werth für $\frac{P}{M}$, und dx ſtatt ds in (§. 56. III), ſo iſt
$v^{2*} = 4a^2g(a+b-x)^{-1}+\mathrm{C}$; nun iſt für $x = 0$ auch $v = 0$, weil vermög der Vorausſetzung der Körper frey ausgelaſſen, und nicht mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit herabgeworfen wird; folglich iſt $\mathrm{C} = -4a^2g(a+b)^{-1}$, und $v^2 = 4a^2g(a+b-x)^{-1} - 4a^2g(a+b)^{-1}$; daraus folgt $v = \frac{2ag^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+b-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. II.),
ſo iſt $\mathrm{d}t = \left(\frac{a+b}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$;
man ſetze $a + b = c$,
ſo iſt $t = \left(\frac{c}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}} \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(c-x)^{\frac{1}{2}}$;
nun entwickle man $\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(c-x)^{\frac{1}{2}}$ mittelſt der allgemeinen Formeln (625) durch Hilfe des bekannten Integrals (621. XI.) $\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(c-x)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{8}c^2 . \arccos\left(1 - \frac{2x}{c}\right) - \frac{1}{8}(2c-4x)\sqrt{(cx-x^2)}$,

Fig. 1 ſo iſt nach vorgenommener Reduktion

$$t=\left(\frac{c}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sqrt{(cx-x^2)}+\tfrac{1}{2}c.\mathrm{arccos}(1-\frac{2x}{c})\right]+C;$$

es iſt aber für $t=0$ auch $x=0$; folglich $C = \left(\frac{c}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\tfrac{1}{2}c.\ \mathrm{arc\ cos}\ (1)=0$,

$$\text{und } t=\left(\frac{c}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sqrt{(cx-x^2)}+\tfrac{1}{2}c.\mathrm{arccos}(1-\frac{2x}{c})\right];$$

nun ſetze man wieder für c ſeinen Werth, ſo iſt endlich

$$t=\left(\frac{a+b}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\left[x^{\frac{1}{2}}(a+b-x)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(a+b)\times \mathrm{arc\ cos}(\frac{a+b-2x}{a+b})\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\mathfrak{A}.$$

die Zeit, in welcher der Weg $x = CB$ zurückgelegt wird.

Setzet man nun $x = b$, ſo iſt

$$t=\left(\frac{a+b}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sqrt{ab}+\tfrac{1}{2}(a+b).\mathrm{arc\ cos}(\frac{a-b}{a+b})\right]$$

die Zeit, welche der Körper braucht um von C an die Oberfläche der Erde zu kommen, oder weil allgemein

arc cos u = arc ſin $(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$ für ſintot = 1 iſt, ſo iſt auch

$$t=\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{4g}}\cdot\left[\sqrt{ab}+\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\mathrm{arcſin}(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b})\right]..\mathfrak{B}$$

Nun ſetze man $b = 60000$ und $a = 20163000$ W. Sch. (es iſt nämlich für Deutſchland der Halbmeſſer der Erde ziemlich genau = 20163000 W. Sch.), ſo wird um t in Zahlen zu finden die Rechnung auf folgende Art angelegt.

$$\begin{array}{r|r} a = 20163000 & \log a = 7{,}3045552 \\ b = 60000 & \log b = 4{,}7781513 \\ \cline{1-1} a+b = 20223000 & \log(a+b) = 7{,}3058456 \\ g = 15{,}5;\ 4g = 62 & \log 4g = 1{,}7923917 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log a &= 3{,}6522776 \\ \tfrac{1}{2}\log b &= 2{,}3890756 \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{ab} &= 6{,}0413532 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \text{D. E.} \log(a+b) &= 2{,}6941544 \end{aligned} \begin{aligned} &\sqrt{ab} = 1099900 \\ &\text{addirt} \end{aligned}$$

$$\log \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \left\{\begin{aligned} &0{,}0365376-1 \\ &9{,}0365376 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für l.s.t.} = 0 \\ &\quad\ \ .\ .\ = 10 \end{aligned}$$

zu dieſem log ſin gehören 6° 14′ 41,38″;

$$\left.\begin{aligned} \text{nun iſt arc } 6^\circ &= 0{,}1047197 \\ \cdot\cdot \quad 14' &= 0{,}0040724 \\ \cdot\cdot \quad 41'' &= 0{,}0001988 \\ \cdot\cdot \quad 0{,}38'' &= 0{,}0000018 \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$\text{folgl. arc ſin}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right) = 0{,}1089927 = A$$

$$\left.\begin{aligned} \log A &= 0{,}0373975-1 \\ \log(a+b) &= 7{,}3058456 \\ \text{D. E.} \log 2 &= 9{,}6989700 \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$\text{Summa} = 6{,}0422131$$

$$\left.\begin{aligned} \text{die zugehör. Zahl} &= 1102080 \\ \sqrt{ab} &= 1099900 \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$\text{Summe} = 2201980 = B$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \log B = 6{,}3428134 \\ \frac{1}{2}\log(a+b) = 3{,}6529228 \end{array}\right\} \text{addirt} \\ \text{Summe} = 9{,}9957362 = C \\ \left.\begin{array}{r} \log a = 7{,}3045552 \\ \frac{1}{2}\log 4g = 0{,}8961958 \end{array}\right\} \text{add.} \\ \text{Summe} = 8{,}2007510 = D \end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

$$C - D = 1{,}7949852 = \log t$$

und endlich $t = 62{,}37136$ Sekunden.

Wenn man in dieſem Falle die Abnahme der Schwere nicht in Erwägung zieht, ſo iſt $t = \sqrt{\frac{b}{g}}$;

$$\text{nun iſt } \frac{1}{2}\log b = 2{,}3890756$$

$$\frac{1}{2}\log g = 0{,}5951658$$

$$\log t = 1{,}7939098$$

folglich $t = 62{,}2171$ Sekunden.

Es iſt aus dieſem Beyſpiele zu erſehen, was für einen unbedeutenden Einfluß die Abnahme der Schwere in nicht gar zu groſſen Erhöhungen über der Erdfläche auf den freyen Fall der Körper habe.

Bey der Formel B. iſt wohl zu merken, daß der zum Sinus $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ zugehörige Bogen gröſſer als 90° ſey, wenn $b > a$ iſt, weil in einem ſolchen Falle der Coſinus $\frac{a-b}{a+b}$ dieſes nämlichen Bogens **negativ** iſt.

Wenn man bey dieſer nämlichen Formel B. die Erhöhung b ſo klein ſetzet, daß man b in Rückſicht a für 0 anſehen könne, ſo iſt ſodann arc ſin $\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}, \text{ und } t = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{4g}}(\sqrt{ab} + \sqrt{ab}) =$$

(a+b)

$\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{a}\cdot\sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{a}\cdot\sqrt{\frac{b}{g}} = \sqrt{\frac{b}{g}}$, welches mit (§. 41.) vollkommen übereinſtimmt.

Wenn man die Differenzialgleichung $dt = \left(\frac{a+b}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$ durch eine unendliche Reihe integriret, ſo erhält man nach vorgenommener Reduktion

$$t = \frac{(a+b)x^{\frac{1}{2}}}{ag^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(1 - \frac{x}{2.3(a+b)} - \frac{1.x^2}{2.4.5(a+b)^2} - \frac{1.3.x^3}{2.4.6.7(a+b)^3} - \frac{1.3.5x^4}{2.4.6.8.9(a+b)^4} - \ldots\right)$$

ſetzt man nun $x = b$, ſo iſt

$$t = \frac{(a+b)b^{\frac{1}{2}}}{ag^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(1 - \frac{b}{2.3.(a+b)} - \frac{1.b^2}{2.4.5(a+b)^2} - \right)$$

eine Reihe, die ungemein ſchnell zuſammenläuft, ſolang b um vieles kleiner als a iſt. Das ehevor angeführte Beyſpiel läßt ſich mittelſt dieſer Reihe berechnen, wenn man nur ein einziges negatives Glied inner den Klammern entwickelt; als

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}\log(a+b) = 7{,}3058456\\ \frac{1}{2}\log b = 2{,}3890756\end{array}\right\}\text{addirt}\\
\left.\begin{array}{r}\text{Summe} = 9{,}6949212 = A\\ \left.\begin{array}{r}\log a = 7{,}3045552\\ \frac{1}{2}\log g = 0{,}5951658\end{array}\right\}\text{add.}\\ \text{Summe} = 7{,}8997210 = B\end{array}\right\}\text{ſubtr.}\\
A - B = 1{,}7952002 = C
\end{array}$$

$$
\left.\begin{array}{r}
A-\mathrm{B} = \underline{1,7952002} = C \\
+4 \qquad\qquad -4 \\
\left.\begin{array}{r}\log \tfrac{1}{8}b = 4,0000000 \\ \log (a+b) = \underline{7,3058456}\end{array}\right\}\text{ſubtr.} \\
\log \dfrac{b}{2.3.(a+b)} = 0,6941544-4 \\
\text{die zugehör. Zahl} = 0,00049449 = D \\
1-D = \underline{0,99950551} = E \\
\log E = \underline{0,9997852-1}=F
\end{array}\right\}\text{addirt.}
$$

$$C+F = 1,7949854 = \log t$$

und endlich $t = 62,37139$ Sekunden.

So lange b kleiner als a iſt, läßt ſich t mittelſt dieſer Reihe ſehr leicht entwickeln; ſobald aber b beträchtlich gröſſer als a iſt, ſo muß man zu der Formel 𝔅 die Zuflucht nehmen. Die Zeit müßte nach der Formel 𝔅 berechnet werden, welche der Mond brauchete von ſeiner mittleren Entfernung = 60 Erdhalbmeſſern auf die Erde frey herabzufallen, wenn ſeine Tangentialgeſchwindigkeit plötzlich getilget würde.

Man ſetze $x = a + b$ in der Formel 𝔄, ſo iſt

$$t=\left(\frac{a+b}{4a^2g}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\tfrac{1}{2}(a+b)\text{arc}\cos(-1)\right]=\frac{\frac{1}{4}\pi(a+b)^{\frac{3}{2}}}{ag^{\frac{1}{2}}}$$

die Zeit, in welcher der Körper den Mittelpunkt der Erde erreichen würde, wenn er ſich auch durch die Erde hindurch frey bewegen könnte, **und wenn das angeführte Geſetz von der Veränderung der Schwere (§. 9.) auch inner der Erdkugel ſtatt fände;** bey dieſer nämlichen Vorausſetzung müßte, da der Körper eben den Mittelpunkt erreichet, ſeine Geſchwindigkeit $v = \frac{2ag^{\frac{1}{2}}}{0}$ **unendlich** groß ſeyn. Das angeführte Geſetz von der Veränderung der Schwere findet Fig. inner der Erdkugel nicht ſtatt, weil ein Körper nicht von dem bloſſen Mittelpunkte der Erdkugel, ſondern vielmehr von einem jeden Elementartheilchen derſelben im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe angezogen wird; wenn man dieſes annimmt, ſo läßt ſich allgemein erweiſen, daß inner einer jeden gleichförmig dichten Kugel von der Oberfläche ſelbſt angefangen in verſchiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte gerechnet die Anziehungen auf einen nämlichen Körper, und folglich auch die Gewichte eines nämlichen Körpers den Entfernungen vom Mittelpunkte proportional ſind; das Gewicht eines nämlichen Körpers, welches er an der Erdfläche in dem Abſtande a vom Mittelpunkte gerechnet hat, verhält ſich zu ſeinem Gewichte inner der Erdkugel in dem Abſtande b, gleichwie a zu b; und ſein Gewicht in dem Mittelpunkte ſelbſt iſt $= 0$. Wenn nun die Erde nach der Richtung eines Durchmeſſers durchlöchert wäre, ſo lieſſe ſich mittelſt dieſes Geſetzes, und mittelſt der allgemeinen Formeln (§. 56.) die freye Bewegung eines Körpers in einem ſolchen Loche beſtimmen.

II. Wenn man Fig. 3. das Gewicht der ganzen Schnur $= p$, die ganze Länge $aQb = m$; und die Länge $aQ = n$ ſetzet, ſo läßt ſich die Bewegung des Körpers a auf folgende Art beſtimmen, wenn man auch das Gewicht der Schnur in Erwägung zieht, aber dabey das Gewicht der Rolle, und den Widerſtand der Luft auf die vordere Fläche des bewegten Körpers indeſſen noch bey Seite ſetzt. 3

Es ſey $AB = s$, in B die Geſchwindigkeit $= v$, von A bis B die Dauerzeit der Bewegung $= t$, ſo beſteht in B die bewegende Kraft P **erſtens** aus $b-f$, allwo f einen Theil des Gewichtes b bedeutet, der die Reibung aufhebt, und **zweytens** aus dem Gewichte

Fig. 3 der Schnur von Q bis b′, die bewegte Maſſe aber iſt $M = a + b + p$; nun iſt das Gewicht der Schnur $Qb' = \frac{p}{m}(m - n + s)$; folglich iſt $P = b - f + \frac{p}{m}(m - n + s)$, und $\frac{P}{M} = \frac{m(b-f)+p(m-n+s)}{m(a+b+p)}$.

Man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. III), ſo iſt $v^2 = 4g.\int ds(\frac{m(b-f)+p(m-n+s)}{m(a+b+p)})$,

$$\text{nämlich } v^2 = \frac{4g}{m(a+b+p)}.\int(mbds - mfds + mpds - npds + psds)$$

$$= \frac{4g}{m(a+b+p)}.(mbs - mfs + mps - nps + \tfrac{1}{2}ps^2)$$

$$= \frac{2gp}{m(a+b+p)}.\left(s^2 + [\frac{2m}{p}(b-f) + 2(m-n)]s\right),$$ allwo Conſt = 0 ſeyn muß, weil für $s = 0$ auch $v = 0$ iſt;

$$\text{folglich } v = \left(\frac{2gp}{m(a+b+p)}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(s^2 + [\frac{2m}{p}(b-f) + 2(m-n)s]\right)^{\frac{1}{2}};$$

man ſetze $[\frac{2m}{p}(b-f) + 2(m-n)] = A$

und $\left(\frac{m(a+b+p)}{2gp}\right)^{\frac{1}{2}} = B$,

ſo iſt $v = B^{-1}(s^2 + As)^{\frac{1}{2}}$ die Geſchwindigkeit, welche der Körper am Ende des Weges AB = s erlanget;

man

man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. II),

ſo iſt $dt = \frac{Bds}{\sqrt{(s^2+As)}}$;

endlich integrire man dieſe Gleichung nach (623. III.) dergeſtalt, daß für $s = 0$ auch $t = 0$ wird, ſo iſt $t = B.[\text{Lognat}(s+\frac{1}{2}A+\sqrt{(s^2+As)}) - \text{Lognat}\frac{1}{2}A]$ die geſuchte Zeit, in welcher der Weg AB $= s$ zurückgelegt wird.

Für ein gegebenes t läßt ſich aus dieſer Gleichung auch s unmittelbar finden; hingegen läßt ſich in dem vorigen Falle **I.** für ein gegebenes t das entſprechende x nicht anders, als durch die Umwendung der gefundenen unendlichen Reihe für t durch x ausgedrückt, beſtimmen.

Wenn in Fig. 4. die Schnur nicht wieder in ſich ſelbſt zurückgeht, ſondern beyderſeits nur bis an die daran befeſtigten Körper reichet, ſo läßt ſich die Bewegung auf die nämliche Art wie im gegenwärtigen Falle beſtimmen.

7 **III.** Es ſey **AD** Fig. 7. eine zuſammengepreßte elaſtiſche Feder, deren Länge in dem natürlichen freyen Zuſtande = **DC** iſt; wenn man nun auf einer vollkommen glatten horizontalen Ebene einen Körper m der Feder vorſetzt, und darauf ſolche loßſchnellen läßt, ſo ſetzt ſie den Körper m in Bewegung, und bringt ihm am Ende des Weges **AC** eine gewiſſe Geſchwindigkeit bey, womit er ſodann immer nach einerley Richtung gleichförmig fortgienge, wenn keine bewegende Kraft ſeine Bewegung zu ändern ſtrebte. Die Geſchwindigkeit am Ende des Weges **AC** läßt ſich auf folgende Art beſtimmen.

Man trachte vorläufig durch gehörig angeſtellte Verſuche das Geſetz zu entdecken, nach welchem die Länge der Feder bey verſchiedenen zuſammendrückenden Gewich-

Fig. 7 wichten abnimmt; wir wollen indeſſen annehmen, man habe bey der Feder DC gefunden, daß ein Gewicht $= p$ dieſelbe nach einer vertikalen Richtung in dem zuſammengepreßten Zuſtande AD zu erhalten vermögend ſey, und daß diejenigen Theile, um welche die Feder bey verſchiedenen zuſammendrückenden Gewichten verkürzet wird, ſich gegeneinander ziemlich genau verhalten, wie die 3ten Potenzwurzeln der dazugehörigen zuſammendrückenden Gewichte, nämlich $\mathrm{CA} : \mathrm{CB} = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$, wenn P ein anderes Gewicht bedeutet, wodurch die Feder nach einer vertikalen Richtung in dem zuſammengepreßten Zuſtande BD kann erhalten werden.

Nun ſetze man die Maſſe des Körpers m, der mittelſt der Feder zu bewegen iſt, und die Maſſe der Feder $= n$, weil auch die Feder in Bewegung geſetzt wird, ſo iſt $M = m + n$; ferner ſey $\mathrm{AC} = a$; $\mathrm{AB} = s$, die in B erlangte Geſchwindigkeit $= v$, und die bewegende Kraft daſelbſt $= P$, ſo iſt vermög dem vorhergehenden $\mathrm{CA} : \mathrm{CB} = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$, nämlich $a : a - s = \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$; folglich $P = \frac{(a-s)^3 p}{a^3}$, und $\frac{P}{M} = \frac{(a-s)^3 p}{a^3(m+n)}$; man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. III.),

ſo iſt $v^2 = \frac{4gp}{a^3(m+n)} . \int ds(a-s)^3 + \text{Conſt};$

daraus folgt $v^2 = \frac{agp}{m+n} - \frac{gp}{a^3(m+n)} . (a-s)^4$ . . A weil für $s = 0$ auch $t = 0$ iſt.

Setzt

Setzt man nun $s = a$, ſo iſt $v = \sqrt{\frac{agp}{m+n}}$ Fig. 7.
die in C erlangte Geſchwindigkeit.

Wenn in einem ſolchen Falle die anfängliche Kraft p durch die ganze Länge AC unverändert bliebe, ſo wäre vermög (§. 50.) die in B erlangte Geſchwindigkeit $v' = \sqrt{\frac{4agp}{m+n}}$, und es iſt $v' : v = 2 : 1$.

Es iſt aus dieſem einigermaſſen zu erſehen, wie man die Geſchwindigkeiten berechnen könnte, welche die vor Erfindung des Schießpulvers üblichen **Wurfmaſchinen** (Balliſten, Katapulten u. ſ. w.) den geworfenen Körpern ertheilten. Die einzige Schwierigkeit beſteht in der Erfindung des Geſetzes, nach welchem die Länge der Feder bey verſchiedenen zuſammendrückenden Gewichten abnimmt; dieſes Geſetz läßt ſich ohngefähr auf folgende Art entdecken. Nachdem einmal das Gewicht p und die entſprechende Länge CA $= a$ bekannt iſt, ſo drücke man die Feder mit einem anderen bekannten Gewichte q zuſammen, und meſſe die entſprechende Länge CB $= b$; darauf ſetze man folgende Proportion an; $a : b = p^z : q^z$, ſo folgt daraus $z = \frac{\log a - \log b}{\log p - \log q}$, ſetzt man aber $a^k : b^k = p : q$, ſo iſt $k = \frac{\log p - \log q}{\log a - \log b}$.

Aus der Gleichung A folgt

$$v = \left(\frac{gp}{a^3(m+n)}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(a^4 - (a-s)^4\right)^{\frac{1}{2}};$$

man ſetze $\left(\frac{a^3(m+n)}{gp}\right)^{\frac{1}{2}} = A$,

ſo iſt $v = A^{-1} . [a^4 - (a-s)^4]^{\frac{1}{2}}$;

man

Fig. man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. II.)
7 ſo iſt $dt = A ds\,[a^4 - (a-s)^4]^{-\frac{1}{2}}$;

Setzet man nun $(a-s)^4 = z$, ſo iſt $ds = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} dz$, und $dt = -\frac{1}{4} A z^{-\frac{3}{4}} dz (a^4 - z)^{-\frac{1}{2}}$ die verwandelte Gleichung, die ſich aber doch nicht anders als durch eine unendliche Reihe integriren läßt, wenn man auch was immer für eine andere Verwandlung vornimmt.

Wenn man bey gegenwärtiger Unterſuchung folgendes Geſetz allgemein annimmt; $CA^k : CB^k = p : P$, nämlich $a^k : (a-s)^k = p : P$, ſo iſt $P = \frac{p(a-s)^k}{a^k}$,

und $\frac{P}{M} = \frac{p(a-s)^k}{a^k(m+n)}$;

folglich $v^2 = \frac{4gp}{a^k(m+n)} . \int ds (a-s)^k + \text{Conſt}$;

nämlich $v = \left(\frac{4gp}{a^k(k+1)(m+n)}\right)^{\frac{1}{2}} . [a^{k+1} - (a-s)^{k+1}]^{\frac{1}{2}}$

die Geſchwindigkeit in dem Punkte B;

und $v = \sqrt{\frac{4gpa}{(k+1)(m+n)}}$ die am Ende des Weges $AC = a$ erlangte Geſchwindigkeit.

IV. Nun ſetze man Fig. 7. der Körper, deſſen Maſſe $= m$ iſt, bewege ſich von F gegen C gleichförmig mit der Geſchwindigkeit $= c$, ſo wird bey der ferneren Bewegung von C gegen A dieſe anfängliche Geſchwindigkeit c des bewegten Körpers durch die Gegenwirkung der Feder immer vermindert, und endlich gänzlich getilget. Es ſey in dieſem Falle $CB = s$, in B die Geſchwindigkeit $= v$ nach der Richtung von B gegen A, und die bewegende Kraft der Feder in

dieſem Punkte $P = \frac{ps^k}{a^k}$, es verhalte ſich nämlich Fig. 7
$CA^k : CB^k = p : P$, ſo iſt $\frac{P}{M} = \frac{ps^k}{a^k(m+n)}$, wenn n die Maſſe der Feder bedeutet.

Man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. III.), ſo iſt $v^2 = - \frac{4gps^{k+1}}{a^k(k+1)(m+n)} + \text{Conſt}$, weil in dieſem Falle die bewegende Kraft nach einer entgegengeſetzten Richtung wirket;
nun iſt für $s = 0$, das Quadrat der Geſchwindigkeit $= c^2$;
folglich $v^2 = c^2 - \frac{4gps^{k+1}}{a^k(k+1)(m+n)}$;
daraus folgt $s^{k+1} = \frac{(k+1)(m+n)a^k(c^2-v^2)}{4gp}$;
ſetzet man nun $v = 0$,
ſo iſt $s = \left(\frac{(k+1)(m+n)a^k c^2}{4gp}\right)^{\frac{1}{k+1}}$
die Länge des Weges von C gegen A gerechnet, an deſſen Endpunkte der Körper ſeine anfängliche Geſchwindigkeit gänzlich verliert; darauf kehret der Körper wegen der unaufhörlichen Wirkung der Feder wieder zurück, und erlanget in dem Punkte C wieder eine Geſchwindigkeit nach der Richtung von C gegen F, die der anfänglichen Geſchwindigkeit c von C gegen A, der Gröſſe nach vollkommen gleich iſt, vorausgeſetzt, daß das Elaſticitätsgeſetz dieſer Feder immer das nämliche verbleibet. Um ſich davon zu überzeugen ſetze man, die anfängliche Geſchwindigkeit c werde in dem Punkte E gänzlich getilget, ſo iſt $CE = \left(\frac{(k+1)(m+n)a^k c^2}{4gp}\right)^{\frac{1}{k+1}} = b$

und

Fig. 7 und die bewegende Kraft der Feder in E iſt $= \frac{b^k p}{a^k} = q$; nun ſey EB $= s$, in B die Geſchwindigkeit $= v$ nach der Richtung von B gegen C, und die bewegende Kraft daſelbſt $= P$,

ſo iſt $P = \frac{\mathrm{CB}^k . q}{\mathrm{CE}^k} = \frac{q(b-s)^k}{b^k}$,

und $\frac{P}{M} = \frac{q(b-s)^k}{b^k(m+n)}$;

man ſubſtituire dieſen Werth in (§. 56. III.),

ſo iſt $v^2 = \left(\frac{4gq}{b^k(k+1)(m+n)}\right)\left(b^{k+1} - (b-s)^{k+1}\right)$,

weil für $s = 0$, auch $v^2 = 0$ ſeyn muß;

folglich iſt $v = \sqrt{\frac{4gqb}{(k+1)(m+n)}}$ für $s = b$ die Geſchwindigkeit in dem Punkte C nach der Richtung von C gegen F; nun ſetze man für q und ſodann für b wieder ihre Werthe, ſo iſt endlich $v = c$.

Da nun im gegenwärtigen Falle $s = \left(\frac{(k+1)(m+n)a^k c^2}{4gp}\right)^{\frac{1}{k+1}}$, und für eine andere anfängliche Geſchwindigkeit $= C$ einer anderen bewegten Maſſe $= M$ ebenfalls $S = \left(\frac{(k+1)(M+n)a^k C^2}{4gp}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ ſtatt findet, ſo iſt auch

$$s : S = \left((m+n)c^2\right)^{\frac{1}{k+1}} : \left((M+n)C^2\right)^{\frac{1}{k+1}},$$

oder $s : S = (mc^2)^{\frac{1}{n+1}} : (MC^2)^{\frac{1}{k+1}}$, wenn man in Rückſicht m und M die Maſſe der Feder $n = 0$ ſetzen kann; es muß alſo $mc^2 = MC^2$ ſeyn, damit auch $s = S$ wird, obwohl $s : S$

=

$= mc^2 : MC^2$ gar nicht ſtatt finden kann, wenn s und S verſchieden ſind. Fig.

§. 59.

Weil bey dem angeführten Falle (IV.) die in ihrem freyen Zuſtande ruhende Feder, da der bewegte Körper auf dieſelbe ſtöſſet, ihren Zuſtand verändert, ſo muß nothwendig eine bewegende Kraft vorhanden ſeyn, welche dieſe Veränderung des Zuſtandes bey der Feder hervorbringt. Dieſe bewegende Kraft entſpringt aus der **Undurchdringlichkeit** der Materie; wenn nämlich entweder die Materie der Feder oder auch die Materie des bewegten Körpers durchdringlich wäre, ſo könnte der bewegte Körper von C gegen D Fig. 7. ſeine Bewegung 7 **ungeändert** fortſetzen, ſo daß dabey weder ſeine Geſchwindigkeit, noch auch der Zuſtand der Feder eine Aenderung litte. Nach dem berühmten Syſteme des H. **Boſcovich** hat eben dieſe Kraft ihren Urſprung **in der Elementarkraft der Materie, vermög welcher die Elemente der Materie in den kleinſten Entfernungen einander abſtoſſen und zwar deſto ſtärker je näher ſie an einander gerückt werden; bey wachſenden Entfernungen, ſolange ſie noch ſehr klein ſind, ändert ſich die Abſtoſſung in die Anziehung; dieſe wächſt mit den Entfernungen bis auf eine gewiſſe Gröſſe, nimmt ſodann ab, wird null, und ändert ſich wieder in die Abſtoſſung; ſolcher ſehr verſchiedener Abwechslungen der Abſtoſſung mit der Anziehung bey wachſenden aber dabey noch immer ſehr kleinen Entfernungen giebt es mehrere; bey gröſſeren Entfernungen, die ſchon in unſere Sinne fallen, bleibt endlich die Elementarkraft der Materie**

Fig. 8 **immer anziehend, und nimmt im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernungen beſtändig ab.** Die Scale der Elementarkraft der Materie auf den Entfernungen iſt ohngefähr durch die krumme Linie Fig. 8. abgebildet, allwo die kleinſten Entfernungen durch die Abſciſſen von A bis B, die etwas gröſſeren, aber dabey doch immer ſehr kleinen Entfernungen durch die Abſciſſen von A bis C, und die noch gröſſern ſchon in die Sinne fallenden Entfernungen zweyer Elemente eines phyſiſchen Körpers durch die Abſciſſen von A über C hinausgerechnet, die Abſtoſſungen aber durch die **oberen**, und die Anziehungen durch die **unteren** ſenkrechten Ordinaten vorgeſtellet werden. Durch die Durchſchnittspunkte B, P, Q, R, S, u. ſ. w. wird der **Kräftenwechſel** (der Uebergang aus den abſtoſſenden in die anziehenden Kräfte, und umgekehrt) vorgeſtellet. Die Durchſchnittspunkte an den ungeraden Stellen B, Q, S heiſſen **Verbindungsgränzen** (limites cohæſionis), und die Durchſchnittspunkte an den geraden Stellen P, R, T werden **Trennungsgränzen** (limites non cohæſionis) genennt, und zwar aus Urſache, weil an den ungeraden Stellen beyderſeits Kräfte vorhanden ſind, die einer jeden Kraft entgegen wirken, welche ein daſelbſt befindliches Elementartheilchen der Materie zu dem in A befindlichen Elementartheilchen hinzuzunähern oder davon zu entfernen ſtrebet, an den geraden Stellen aber keine ſolche widerſetzende Kräfte ſich befinden. Die Verbindungsgränzen heiſſen **ſtark** oder **ſchwach**, je nachdem die Neigung der Tangente in dem Durchſchnittspunkte gegen die Abſciſſenlinie einem rechten Winkel ſehr nahe iſt, oder davon beträchtlich abweicht, und die Ordinaten bey dem Durchſchnittspunkte ſtark oder ſchwach zunehmen. Die Elementartheilchen bey dem Diamante müſſen in ſehr ſtarken Verbindungsgrängränzen ſich befinden, weil ihr Zuſammenhang ſo ſchwer zu trennen iſt; die Elementartheilchen des Federharzes und anderer elaſtiſcher Körper hingegen befinden ſich in Verbindungsgränzen von mittlerer Stärke von der Beſchaffenheit, daß beyderſeits die anliegenden Kräftenwechſel ſehr weit davon entfernet ſind. Aus dieſem **Boſcovichiſchen** Syſteme von der Elementarkraft der Materie laſſen ſich alle phyſiſchen Eigenſchaften eines jeden Körpers ſehr deutlich ableiten; ſiehe Boſcovich Theoria philoſophiæ naturalis redacta ad unicam legem virium in natura exiſtentium; Viennæ.

Die Kraft, die ſich nur dazumal äuſſert, wenn ein **bewegter** Körper auf einen anderen **ſtößet**, ſich demſelben ſo ſehr nähert, daß die abſtoſſenden Kräfte der Elementartheilchen gegeneinander wirken können, pflegt man gemeiniglich die **Kraft des Stoſſes** zu nennen; 7 in Fig. 7. läßt ſich füglich die Kraft des Stoſſes, wodurch die Feder von dem bewegten Körper in den Zuſtand ED gebracht wird, durch ein Gewicht ausmeſſen, wodurch nach einer vertikalen Richtung die Feder in dem nämlichen Zuſtande kann erhalten werden; ſetzen wir daher dieſe Kraft des Stoſſes $= q$, ſo iſt nach der oben feſtgeſetzten Bezeichnung $q = \frac{p}{a^k}\left(\frac{(k+1)(m+n)a^k c^2}{4gp}\right)^{\frac{k}{k+1}}$, eben ſo iſt für eine andere anfängliche Geſchwindigkeit $= C$ einer anderen bewegten Maſſe $= M$ bey der nämlichen Feder die Kraft des Stoſſes

$$Q = \frac{p}{a^k}\left(\frac{(k+1)(M+n)a^k C^2}{4gp}\right)^{\frac{k}{k+1}};$$

folglich $q : Q = (mc^2 + nc^2)^{\frac{k}{k+1}} : (MC^2 + nC^2)^{\frac{k}{k+1}}$;

oder $q : Q = (mc^2)^{\frac{k}{k+1}} : (MC^2)^{\frac{k}{k+1}}$, wenn $n = 0$ iſt in Rückſicht m und M;

Fig. **Leibnitz** und ſeine Anhänger behaupteten allgemein die Vergleichung $q : Q = mc^2 : MC^2$, welche im gegenwärtigen Falle nur unter der ungereimten Bedingung ſtatt finden kann, daß k **unendlich groß ſey**, obſchon ganz richtig $q = Q$ ſeyn muß, wenn $mc^2 = MC^2$ iſt, und umgekehrt.

I. Wenn das Geſetz bekannt wäre, nach welchem die widerſtehende Kraft eines gleichförmig dichten Erdreichs die Bewegung eines eindringenden Körpers verzögert, ſo lieſſe ſich dadurch mittelſt der allgemeinen Formeln (§. 56.) das Eindringen viel richtiger beſtimmen, als es im (§. 51. III.) vermög einer unächten Vorausſetzung geſchehen iſt; dieſes Geſetz muß man, ſo wie bey einer elaſtiſchen Feder im vorigen Falle (III), durch gehörig angeſtellte Verſuche zu entdecken trachten. Wenn man nun bey dem Eindringen der Kugeln in ein nämliches Erdreich annimmt, daß die widerſtehenden Kräfte nicht **beſtändig**, ſondern **veränderlich**, und zwar was immer für Potenzfunktionen von dem zurückgelegten Wege ſind, ſo findet man nach vorgenommener Unterſuchung, daß dergleichen Kugeln von einerley Materie gleich tief eindringen, wenn ihre Produkte aus den Durchmeſſern in die Quadrate der anfänglichen Geſchwindigkeiten einander gleich ſind, und daß bey verſchiedenen Tiefen der Satz, **die Tiefen der Löcher verhalten ſich gegeneinander wie die Produkte aus den Quadraten der Geſchwindigkeiten in die Durchmeſſer der Kugeln**, gänzlich irrig ſey, obſchon ſolcher von allen denjenigen für richtig angenommen wird, welche bisher das Eindringen der abgeſchoſſenen Kugeln unterſuchet haben; als H. **Robin** und **Euler** in den neuen Grundſätzen der Artill. Seite 719; Pap. d'Antoni und **Tempelhof** in den phyſ. mathem. Grundſ. der Artill. Seite 405; **Karſten** im 4ten Theile des Lehrbegriffs §. 252; Hennert curſus mathes. adplic. p. VI.

Um ſich davon zu überzeugen ſey ſo wie §. 51. Fig. III. der Durchmeſſer einer Kugel $= a$, welche in ein gleichförmig dichtes Erdreich hineingeſchoſſen wird, ihr eigenthümliches Gewicht $= q$, ihre anfängliche Geſchwindigkeit $= c$, womit ſie den Erdhaufen berühret; nachdem die Kugel bis zu einer Tiefe $= s$ eingedrungen, ſey daſelbſt ihre Geſchwindigkeit nur noch $= v$, und in dieſer Tiefe die widerſtehende Kraft $= P$, ſo iſt vermög (§. 56. III.) $v\mathrm{d}v = -\dfrac{2gP\mathrm{d}s}{\frac{1}{6}a^3\pi q}$, weil die Maſſe der bewegten Kugel $M = \frac{1}{6}a^3\pi q$ iſt, und die Kraft P nach entgegengeſetzter Richtung wirket. Nimmt man nun aus Verſuchen für bekannt an, daß in der Tiefe $= b$ die widerſtehende Kraft $p = \frac{1}{4}a^2\pi fq$ nämlich dem Gewichte eines Cylinders gleich ſey, welcher mit der Kugel einerley Durchmeſſer, einerley ſpecifiſches Gewicht, und die Höhe $= f$ hat, und daß dabey die widerſtehenden Kräfte in verſchiedenen Tiefen ſich gegen einander verhalten, wie die *k*ten Potenzen der Tiefen, ſo iſt $P : p = s^k : b^k$, nämlich $P = \dfrac{ps^k}{b^k} = \dfrac{\frac{1}{4}a^2\pi fqs^k}{b^k}$, und folglich $v\mathrm{d}v = -\dfrac{3gfs^k\mathrm{d}s}{ab^k}$, wenn man in obiger Formel ſtatt P ſeinen Werth ſetzet; daraus folgt $v^2 = -\dfrac{6gfs^{k+1}}{(k+1)ab^k} + C$; und zwar $v^2 = c^2 - \dfrac{6gfs^{k+1}}{(k+1)ab^k}$, weil $v^2 = c^2$ für $s = 0$ iſt; und endlich fließt aus der gefunden Gleichung der Werth $s = \left(\dfrac{(k+1)ab^k(c^2 - v^2)}{6gf}\right)^{\frac{1}{k+1}}$.

Setzet man nun in dieſer letzten Gleichung $v = 0$, ſo iſt $s = \left(\dfrac{(k+1)ac^2b^k}{6gf}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ die ganze Tiefe des

Fig. Loches, welches die Kugel mit der anfänglichen Geſchwindigkeit $= c$ hervorzubringen im Stande iſt.

Setzet man bey dem nämlichen Erdreiche den Durchmeſſer einer anderen eindringenden Kugel $= A$ von der nämlichen Materie, ihre anfängliche Geſchwindigkeit $= C$, und bey der nämlichen Tiefe $= b$ die widerſtehende Kraft $= \frac{1}{4}A^2\pi fq$, ſo iſt aus dem nämlichen Grunde bey dieſer Kugel die ganze Tiefe

$$S = \left(\frac{(k+1)AC^2b^k}{6gf}\right)^{\frac{1}{k+1}};$$

folglich iſt $s : S = (ac^2)^{\frac{1}{k+1}} : (AC^2)^{\frac{1}{k+1}}$,
und auch $s^{k+1} : S^{k+1} = ac^2 : AC^2$,
keineswegs aber $s : S = ac^2 : AC^2$, obſchon $s = S$ ſeyn muß, wenn $ac^2 = AC^2$ iſt, ausgenommen es iſt $k = 0$, welches aber der Erfahrung gänzlich widerſpricht, indem zuweilen ſogar $k > 1$ iſt; wenn z. B. eine feſte Scheibe durch ein gewiſſes Gewicht in einem gleichförmig dichten Thone bis zu einer gewiſſen Tiefe kann eingedrücket werden, ſo iſt ein doppeltes Gewicht zuweilen noch nicht hinreichend die nämliche Scheibe bis auf eine doppelte Tiefe einzudrücken, und folglich iſt in einer doppelten Tiefe die widerſtehende Kraft keineswegs eben ſo groß als in der einfachen Tiefe, ſie iſt im Gegentheile öfters mehr als doppelt ſo groß.

Wir haben im gegenwärtiger Unterſuchung bey verſchiedenen Kugeln von der nämlichen Materie in einerley Tiefe des nämlichen Erdreichs die widerſtehenden Kräfte durch Cylinder vorgeſtellet, welche **einerley Höhe** haben, und dieß zwar aus Urſache **weil in einerley Tiefe des nämlichen Erdreichs die widerſtehenden Kräfte gegen verſchiedene eindringende ebene Flächen ſich eben ſo verhalten wie die eindringenden Flächen**; wenn z. B. eine Scheibe $= a$ Quadratſchuhen durch ein Gewicht $= p$

Pfunden bis zu einer gewiſſen Tiefe kann eingedrücket werden, ſo wird eine andere Scheibe $= 2a$ durch ein Gewicht $= 2p$ in dem nämlichen Erdreiche bis zur nämlichen Tiefe können eingedrücket werden; wenn man nun die eindrückenden Gewichte p, $2p$, welche den widerſtehenden Kräften in der nämlichen Tiefe gleich ſind, durch Cylinder von einerley Materie vorſtellet, welche zu ihren Grundflächen die Schreiben a, $2a$ haben, ſo müſſen offenbar dieſe zwey Cylinder gleich hoch ſeyn. Die Höhe $= f$ eines ſolchen Cylinders, welcher in einer gewiſſen Tiefe die widerſtehende Kraft einer eindringenden Kugel vorſtellet, läßt ſich aus obiger Gleichung $p = \frac{1}{4}a^2\pi fq$ beſtimmen, allwo p das durch Verſuche gefundene Gewicht, womit die Kugel bis zur Tiefe b eingedrückt wird, a den Durchmeſſer der Kugel, und q das eigenthümliche Gewicht derſelben bedeutet. Fig.

Man kann die Formeln für das Eindringen auch ohne der Cylinderhöhe f ausdrücken; es ſey z. B. das Eindringen eines gleichſeitigen Cylinders nach der Richtung ſeiner Achſe a in einem Erdreiche zu beſtimmen, allwo es durch abgeführte Verſuche bekannt iſt, daß eine gegebene Fläche $= c$ mit einem gegebenen Gewichte $= p$ beſchweret bis zu einer gegebenen Tiefe $= b$ eingedrücket wird. Nachdem der Cylinder bis zu einer gewiſſen Tiefe $= s$ eingedrungen, ſey daſelbſt ſeine Geſchwindigkeit nur noch $= v$, und die widerſtehende Kraft $= P$, ſo iſt $vdv = -\frac{2gPds}{M} = -\frac{2gPds}{\frac{1}{4}a^3\pi q}$, wenn q des Cylinders eigenthümliches Gewicht bedeutet; die widerſtehende Kraft läßt ſich auf folgende Art ausdrücken: da die Fläche c in der Tiefe b den Widerſtand p leidet, ſo muß die nämliche Fläche c in der Tiefe s vermög dem Satze $p' : p = s^k : b^k$ den Widerſtand $p' = \frac{ps^k}{b^k}$ empfinden; da nun die Fläche e in der Tiefe s den Widerſtand $p' = \frac{ps^k}{b^k}$ leidet, ſo muß in der nämlichen Tiefe s die Grundfläche des Cylinders $\frac{1}{4}a^2\pi$ vermög dem Satze $P : p' = \frac{1}{4}a^2\pi : e$ den Widerſtand $P = \frac{a^2p\pi s^k}{4eb^k}$ empfinden; folglich iſt $vdv = -\frac{2gps^k ds}{aeqb^k}$, woraus ſich ferner alles nothwendige beſtimmen läßt. Der Widerſtand $\frac{a^2p\pi s^k}{4eb^k}$, kann auch durch eine einzige Proportion nach dem Satze gefunden werden, **daß er dem Produkte aus der vorderen auf die Richtungslinie ſenkrechten Fläche in die kte Potenz der Tiefe proportional ſey**, nämlich $P : p = \frac{1}{4}a^2\pi.s^k : e.b^k$.

Wenn der Cylinder nach einer vertikalen Richtung entweder abwärts, oder aufwärts eindringet, ſo iſt

$$vdv = \frac{2gds}{\frac{1}{4}a^3\pi q}.\left(\frac{1}{4}a^3\pi q - \frac{a^2p\pi s^k}{4eb^k}\right)$$

$= 2gds - \frac{2gps^k ds}{aeqb^k}$ im erſten Falle, und im zweyten $vdv = -2gds - \frac{2gps^k ds}{aeqb^k}$, weil das wirkliche Gewicht des Cylinders $\frac{1}{4}a^3\pi q$ im erſten Falle das Eindringen befördert, im zweyten aber gemeinſchaftlich mit dem Widerſtande ſelbes verzögert.

Eben ſo wie bey dem gleichſeitigen Cylinder läßt ſich das Eindringen bey allen ſenkrecht priſmatiſchen, pyramidaliſchen, und conoidaliſchen Körpern beſtimmen, wenn ſie mit der ebenen Grundfläche nach der Richtung ih-

ihrer Achſen eindringen. Dieſes läßt ſich auch noch ohne merklicher Abirrung auf das Eindringen der Kugeln anwenden, wenn nur ſolche auf eine beträchtliche Tiefe, als z. B. die Kanonkugeln auf eine Tiefe von 5 bis 20 Schuhen nach verſchiedenheit des Mittels, des Durchmeſſers, und der anfänglichen Geſchwindigkeit eindringen; es wird aber bey einem ſolchen Eindringen für die Tiefe des Loches die Entfernung vom Anfange des Loches bis zum Mittelpunkte der Kugel, und für die eindringende Fläche die größte Kreisfläche der Kugel genommen; dabey muß man um b, e, p zu beſtimmen, nicht eine ebene Fläche ſondern eine Kugel, deren größte Kreisfläche $= e$ bekannt iſt, mit einem Gewichte $= p$ in eine Tiefe $= b$ bis zum Mittelpunkte gerechnet eindrücken. Wäre hingegen die ganze Tiefe des Loches bis an den Endpunkt des Durchmeſſers der eingedrungenen Kugel nicht viel gröſſer, oder gar noch kleiner als der Durchmeſſer der Kugel, ſo muß auch noch die krumme Oberfläche der Kugel beſonders in Rechnung gebracht werden, welches in der Folge mittelſt der Lehre von der zuſammengeſetzten Bewegung geſchehen kann.

Endlich kömmt es darauf an, den Exponenten k nämlich das Geſetz ausfindig zu machen, nach welchem die widerſtehende Kraft in verſchiedenen Tiefen ſich richtet; dieſer Exponent k kann durch Verſuche beſtimmet werden; wenn z. B. die Grundfläche eines Cylinders durch ein bekanntes Gewicht $= p$ bis zur einer bekannten Tiefe $= b$, und die nämliche Grundfläche durch ein anderes Gewicht $= P$ bis zu einer anderen bekannten Tiefe $= B$ nach der Richtung der Achſe des Cylinders eingedrücket wird, ſo kann man ſetzen $b^k : B^k = p : P$, woraus $k = \frac{\log P - \log p}{\log B - \log b}$ folgt; man kann mittelſt

Fig. mehrerer Tiefen und der dazugehörigen Gewichte den Exponenten k beſtimmen, und aus allen das Mittel nehmen.

Da die widerſtehende Kraft bey dem Eindringen, nach der obangeführten Boſcovichiſchen Lehre von der Elementarkraft der Materie, ihren Urſprung in den abſtoſſenden Kräften hat, welche bey den kleinſten Entfernungen ſich verkehrt wie die Abſtände verhalten, und da zugleich bey dem Eindringen eines Körpers die Elemente der vorderen Fläche des eindringenden Körpers mit den Elementen des Mittels immer näher zuſammenkommen, je tiefer der Körper eindringet, ſo kann man mit vieler Wahrſcheinlichkeit vermuthen, daß in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit $k = 1$ ſey, nämlich **daß in verſchiedenen Tiefen die widerſtehenden Kräfte ſich wie die Tiefen verhalten.**

Setzet man nun $k = 1$, ſo iſt bey dem Eindringen einer Kugel vermög vorhergehenden
$$v dv = -\frac{2g ds}{M} \cdot P = -\frac{2g ds}{\frac{1}{6}a^3\pi q} \cdot \frac{\frac{1}{4}a^2\pi p s}{be}$$
$$= -\frac{3gpsds}{abeq}$$; daraus folgt $v^2 = c^2 - \frac{3gps^2}{abeq}$; es ſey $v = 0$, ſo iſt $s^2 = \frac{abeqc^2}{3gp}$; eben ſo iſt bey einem anderen Durchmeſſer $= A$ einer Kugel von der nämlichen Materie, und bey einer anderen anfänglichen Geſchwindigkeit $= C$, das Quadrat der Tiefe $S^2 = \frac{AbeqC^2}{3gp}$; folglich $s^2 : S^2 = ac^2 : AC^2$, nämlich **die Quadrate der Tiefen** (keineswegs aber die einfachen Tiefen; wie es andere Schriftſteller behaupten) **verhalten ſich gegeneinander wie die**

Pro-

Produkte aus den Quadraten der anfänglichen Geſchwindigkeiten multiplicirt mit den Durchmeſſern der Kugeln; iſt nun $c = C$, ſo iſt $s:S = \sqrt{a}:\sqrt{A}$; iſt aber $a = A$, ſo iſt $s:S = c:C$. Fig.

In Herrn Lamberts Beyträgen zur Mathemat. IV. Th. Seite 470, und auch S. 350 ſind einige zuverläſſige vom H. L. ſelbſt abgeführte Verſuche über das Eindringen anzutreffen, welche mit gegenwärtiger Theorie und zwar mit der angeführten Vermuthung, daß $k = 1$ ſey, ſo genau übereinſtimmen, als man es in einer ſolchen Sache nur wünſchen kann, dabey aber der ſonſt gewöhnlichen Theorie des Eindringens offenbar widerſprechen. Die Verſuche ſind folgende: ein ſenkrechtes Priſma fiel auf einen lockeren Sand von den Höhen 1, 2, 3, 4, 5 Schuhen vertikal herunter, und drang bey dieſen Fall- oder Geſchwindigkeitshöhen auf folgende Tiefen ein, 7, 10, 12, 14, $15\frac{1}{2}$ Linien. Die Grundfläche von 15 Quadratlinien eines anderen ſenkrechten Priſma nach einander mit 3, 6, 9, 12, 15, 18 Lothen beſchweret drang ohne anfänglicher Geſchwindigkeit nach der Ordnung bis 1, 2, 3, 4, 5, 6 Linien in einen andern feineren Sand.

Mittelſt des Erfahrungsſatzes $k = 1$ bey einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit läßt ſich in der Folge, nach abgehandelter Lehre von der Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte, das Eindringen der ſpitzigen Körper, der Kugeln und anderer runden Körper, die mit einer krummen Oberfläche eindringen, auch in dem beſondern Falle beſtimmen, wenn dergleichen Körper nur auf eine geringe Tiefe eindringen.

IV. Vorleſung.

Die zuſammengeſetzte Bewegung.

§. 60.

Wenn mehrere Kräfte zugleich auf einen Körper wirken, ſo heißt die Bewegung, welche ſie hervorbringen, eine **zuſammengeſetzte Bewegung**; und die Kräfte, welche zugleich auf einen Körper wirken, kann man **zuſammenſetzende Kräfte**, oder auch **Seitenkräfte** nennen, wenn ihre Richtungen unter verſchiedenen Winkeln gegen einander geneigt ſind; der Winkel aber, welchen die Richtungen zweyer dieſer Kräfte einſchlieſſen, wird ihr **Richtungswinkel** genennt; eine andere Kraft endlich, welcher für ſich allein mit den zuſammenſetzenden Kräften, oder mit den Seitenkräften einerley Wirkung hervorbringen kann, heißt die **mittlere Kraft**.

§. 61.

9 Grundſatz. Wenn zwey gleichgroſſe Kräfte, *a*, *p* Fig. 9. nach gerade entgegengeſetzten Richtungen auf einen nämlichen in A ruhenden Körper *m* zugleich wirken, ſo iſt die mittlere Kraft = 0, nämlich der Körper bleibt in A eben ſo ruhen, als wenn gar keine Kraft auf ihn wirkte, das heißt die zwey Kräfte *a*, *p* **heben einander gänzlich auf, halten einander das Gleichgewicht** (§. 30.). Wenn aber zwey

oder

oder mehr zuſammenſetzende Kräfte a, b, c alle nach Fig. einerley Richtung CAB auf einen in A befindlichen 9 Körper m zugleich wirken, ſo iſt die mittlere Kraft gleich der Summe der zuſammenſetzenden Kräfte, nämlich die mittlere Kraft $= a + b + c$, und ihre Richtung iſt einerley mit der Richtung der zuſammenſetzenden Kräfte. Wenn endlich einige der zuſammenſetzenden Kräfte a, b, c nach der Richtung CAB, und einige p, q nach der gerade entgegengeſetzten Richtung BAC auf den nämlichen Körper m zugleich wirken, ſo iſt die mittlere Kraft gleich der Differenz der Summen aus den entgegengeſetzten Kräften, nämlich die mittlere Kraft iſt $= (a+b+c) - (p+q)$, oder $= (p+q) - (a+b+c)$, nachdem $(a+b+c)$ gröſſer oder kleiner iſt als $(p+q)$, und die Richtung der mittleren Kraft iſt einerley mit der Richtung der gröſſern Summe der zuſammenſetzenden Kräfte. Es kann demnach in dergleichen Fällen die Bewegung mittelſt der allgemeinen Formeln (§. 56.) beſtimmet werden, wenn man nur die bewegende Kraft P, und die bewegte Maſſe M gehörig ausdrücket.

§. 62.

Grundſatz. Wenn eine Kraft a einen Körper m Fig. 9. nach einer Richtung CAB beweget, welche mit einer Geraden PQ parallel läuft, ſo kann dieſe Kraft die Annäherung des Körpers m zu der Geraden PQ oder auch ſeine Entfernung von derſelben, weder befördern noch hindern. Wenn demnach der Körper m, auf den die Kraft a nach der Richtung CAB unaufhörlich wirket, auch eine Geſchwindigkeit hat ſich der Parallele PQ zu nähern, oder ſich davon zu entfernen, ſo wird nach Verlauf der Zeit t ſeine Annäherung zu der Parallele PQ oder auch ſeine Entfernung von derſelben eben

ſo

Fig. 9 ſo viel betragen, als wenn die Kraft a während dieſer Zeit gar nicht gewirket hätte. Wenn z. B. der Körper m eine ſolche Geſchwindigkeit hat ſich der Parallele PQ zu nähern, daß er in der Zeit t einen Weg = AP = BQ zurücklegen könnte, ſo würde ſich derſelbe am Ende der Zeit t auf der Parallele PQ in P befinden, wenn die Kraft a auf ihn gar nicht gewirket hätte; wenn hingegen während dieſer Zeit die Kraft a auf den Körper m immer nach geraden Richtungen wirket, die mit PQ parallel lauffen, ſo befindet ſich der Körper am Ende der Zeit t auch auf der Parallele PQ jedoch nicht in P, ſondern irgendwo in Q, ſo daß QB = PA ſey, weil während dieſer Zeit die Kraft a den Körper m von AP hinweggetrieben hat. Dieſes läßt ſich auch aus dem Satze des zureichenden Grundes darthun. Es iſt nämlich keine Urſache vorhanden, warum durch die Wirkung der Kraft a nach der Richtung CAB, die Geſchwindigkeit des Körpers m ſich der Parallele PQ zu nähern oder davon zu entfernen, vielmehr vermehret als vermindert, oder aber vielmehr vermindert als vermehret würde; folglich hat die Wirkung der Kraft a nach der Richtung CAB keinen Einfluß auf die Annäherung des Körpers m zu der Parallele PQ, oder auf ſeine Entfernung von derſelben,

§. 63.

10 **Wenn ein in A ruhender Körper** Fig. 10. **von zwey Kräften a, b nach verſchiedenen Richtungen, welche was immer für einen Winkel BAC mit einander einſchlieſſen, zugleich in Bewegung geſetzt wird, und die erſte Kraft a iſt vermögend in einer gewiſſen Zeit = t durch den Weg AC, und die zweyte Kraft b in der nämlichen Zeit durch**

den

den Weg AB für ſich allein den Körper fortzutreiben, ſo wird der Körper nach Verlauf eben dieſer Zeit in dem Endpunkte D der Diagonale AD des Parallelograms CB ſich befinden, wenn man aus B und C die Parallen BD zu AC, und CD zu AB zieht. Fig. 10

Denn weil die Kraft *a* nach einer zu BD parallelen Richtung AC auf den Körper wirket, welcher vermög der Wirkung der Kraft *b* nach einer zu CD parallelen Richtung, der Geraden BD in der Zeit *t* ſich um AB nähert, ſo kann die Kraft *a* die Annäherung des Körpers A zur Geraden BD weder befördern noch hindern (§. 62.); der Körper muß alſo nach Verlauf der Zeit *t* wegen der Wirkung der Kraft *b* ſich in der Geraden BD befinden, wenn ſchon während dieſer Zeit die Kraft *a* nach einer zu BD parallelen Richtung zugleich auf ihn wirket (§. 62); eben ſo muß der Körper A vermög der Wirkung der Kraft *a* nach Verlauf der Zeit *t* in der Geraden CD ſich befinden, wenn ſchon während dieſer Zeit die Kraft *b* nach einer zu CD parallelen Richtung zugleich auf ihn wirket, weil ſolcher vermög der einzigen Wirkung der Kraft *a* in der Zeit *t* der Geraden CD nach einer zu BD parallelen Richtung ſich um AC nähert, und dieſe Annährung von der Wirkung der Kraft *b* weder befördert noch gehindert wird (§. 62); der Körper muß alſo nach Verlauf der Zeit *t* in den beyden Geraden CD und BD zugleich ſich befinden, wenn beyde Kräfte *a* und *b* zugleich auf ihn wirken, das iſt er muß in einem Punkte ſich befinden, der beyden Geraden CD und BD gemein iſt; nun iſt der Endpunkt D der Diagonale AD des Parallelograms CB ganz allein alſo beſchaffen, daß er beyden Geraden CD und BD gemein iſt; folglich muß nach Verlauf der Zeit *t* der Körper A am Endpunkte

Fig. 10 D der Diagonale AD des Parallelogrems CB ſich befinden, wenn zwey Kräfte *a*, *b* zugleich auf ihn wirken, deren die erſte *a* in der Zeit *t* nach der Richtung AC durch den Weg AC, und die zweyte Kraft *b* in der nämlichen Zeit nach der Richtung AB durch den Weg AB für ſich allein den Körper fortzutreiben vermögend iſt.

§. 64.

Und zwar der Körper A verbleibet immer auf der Diagonale AD, wenn die zwey Kräfte *a* und *b* beyde unveränderlich ſind.

Denn es iſt in einem ſolchen Falle vermög (§. 50)

$$AB = \frac{gbt^2}{M},\ AE = \frac{gb\tau^2}{M},\ \text{und}\ AC = \frac{gat^2}{M} = BD,$$

$$AF = \frac{ga\tau^2}{M} = EG,$$ wenn man die Maſſe des bewegten Körpers mit M und die Zeiten mit t, τ bezeichnet, worinen die Wege AB, AE vermög der Kraft b, und AC, AF vermög der Kraft a zurückgelegt werden;

aus den zwey letzten Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} BD = \frac{gat^2}{M} \\ EG = \frac{ga\tau^2}{M} \end{array}\right.$

folgt nun . . . . $\left\{\begin{array}{l} t^2 = \frac{M.BD}{ga} \\ \tau^2 = \frac{M.EG}{ga} \end{array}\right.$

man ſubſtituire dieſe Werthe in den zwey vorhergehenden Gleichungen, ſo iſt $AB = \frac{b}{a}.BD$, und $AE = \frac{b}{a}.EG$;

folg-

folglich AB : AE = $\frac{b}{a}$. BD : $\frac{b}{a}$. EG, Fig. 10

oder AB : BD = AE : EG;

über dieſes iſt wegen den Parallelen EG, BD der Winkel ABD = AEG; folglich iſt das Dreyeck AGE ∽ ADB (301), und der Winkel GAE = DAB; der Punkt G liegt demnach in der Diagonale AD, das iſt nach Verlauf des Zeittheiles τ befindet ſich der Körper in der Diagonale; und eben dieſes läßt ſich von einem jeden anderen Zeittheile erweiſen; folglich verbleibet während der ganzen Zeit t der Körper in der Diagonale, wenn während dieſer Zeit beyde Kräfte a und b unveränderlich ſind.

§. 65.

Eben ſo läßt ſich erweiſen, daß der Körper zuweilen auch bey veränderlichen Kräften beſtändig auf der Diagonale verbleiben müſſe, z. B. dazumal, wenn die zwey Kräfte a, b beyde **gleichartig** ſind, das iſt wenn jede für ſich allein den Körper dergeſtalt fortreibet, daß in beyden Fällen die zurückgelegten Wege durch einerley Potenzfunktionen der Dauerzeit ausgedrückt ſind, nämlich daß AB = At^k, und AC oder BD = Bt^k ſtatt finde. Wenn aber die zurückgelegten Wege AB und AC Fig. 11. verſchiedene Funktionen der Dauerzeit 11 t ſind, ſo verbleibt der Körper in der Zeit t nicht beſtändig in der Diagonale, ſondern gelanget während dieſer Zeit in einer krumliniaten Bewegung AGD an den Endpunkt D derſelben; es ſey z. B. AC = At^k, und AB = Bt^q, ſo läßt ſich der Ort G des Körpers nach Verlauf des Zeittheiles τ, oder die Gleichung für die Linie AGD auf folgende Art allgemein beſtimmen; es ſey die Abſciſſe AE = x auf der Richtungslinie

Fig. 11 AB, und die Ordinate EG = AF = y, parallel zu der Richtungslinie AC, ſo iſt vermög dem angenommenen Geſetze $x = B\tau^{q}$, und $y = A\tau^{k}$; ſubſtituiret man nun den Werth für τ aus der erſten Gleichung in die zweyte, ſo iſt endlich $y = AB^{-\frac{k}{q}} x^{\frac{k}{q}}$ die Gleichung für die Linie AGD, welche nur dazumal eine gerade Linie ſeyn kann, wenn $q = k$ iſt, weil ſich nur in einem ſolchen Falle die Ordinaten EG, BD gegeneinander verhalten, wie die dazugehörigen Abſciſſen AE, AB.

Man kann gegenwärtige Unterſuchung von der zuſammengeſetzten Bewegung indeſſen bloß auf unveränderliche Kräfte einſchränken, weil man jede veränderliche Kraft während einem Zeitelemente für unveränderlich anſehen kann (§. 54), und weil aus der bekannten Eigenſchaft der Bewegung in einem Zeitelemente auch die Bewegung in jeder endlichen Zeit mittelſt der Integralrechnung ſich beſtimmen läßt.

§. 64.

Aufgabe. **Es ſind zwey unveränderliche**
12 **Seitenkräfte a, b Fig. 12. nebſt dem Neigungswinkel BAC = Φ ihrer Richtungen AC, AB gegeben; man ſoll die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft finden;** das iſt man ſoll eine Kraft = p finden, welche für ſich allein auf den Körper A eben ſo wirket, als die zwey Seitenkräfte a, b beyde zugleich, und ſoll den Neigungswinkel DAB oder DAC der Richtung von der geſuchten mittleren Kraft mit der Richtung von einer der zwey Seitenkräfte beſtimmen.

Auflöſung. Die unveränderliche Kraft a ſey für ſich allein vermögend den Körper A, deſſen Maſſe $= M$ iſt, in der Zeit t durch den Weg AF = EG, und b durch AE fortzutreiben, ſo iſt vermög (§. 50) Fig. 12 $EG = \frac{gat^2}{M}$, und $AE = \frac{gbt^2}{M}$; man ziehe die Parallelen EG, FG zu AF, AE, ſo iſt AG der Weg des Körpers A in der Zeit t (§. 64), wenn beyde Kräfte a, b zugleich auf ihn wirken; folglich iſt AGD die Richtung der geſuchten mittleren Kraft p, und es iſt $AG = \frac{gpt^2}{M}$, weil die geſuchte mittlere Kraft p für ſich allein in der Zeit t den Körper A durch den nämlichen Weg AG zu bewegen vermögend ſeyn muß; nun iſt (460) $AG^2 = AE^2 + EG^2 - 2AE.EG.\cos.AEG$ für den ganzen Sinus $= 1$, oder $AG^2 = AE^2 + EG^2 + 2AE.EG.\cos\varphi$, weil $AEG + \varphi = 180°$ vermög (262, III.), und folglich $\cos AEG = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ iſt; man ſubſtituire ſtatt AG, AE, EG ihre Werthe, ſo iſt $\frac{g^2p^2t^4}{M^2} = \frac{g^2b^2t^4}{M^2} + \frac{g^2a^2t^4}{M^2} + \frac{2g^2abt^4}{M^2}.\cos\varphi$; und daraus folgt endlich $p = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab.\cos\varphi)}$.

Der Winkel DAB läßt ſich auf folgende Art finden. Es iſt $AG : FG = \sin AEG : \sin GAE$, nämlich $\sqrt{(AE^2 + EG^2 + 2AE.EG.\cos\varphi)} : FG = \sin\varphi : \sin DAB$; folglich $\sin DAB = \frac{EG \sin\varphi}{\sqrt{(AE^2 + EG^2 + 2AE.EG.\cos\varphi)}}$, und $\cos DAB = \sqrt{(1 - \sin^2 DAB)}$
$= \sqrt{(1 - \frac{FG^2.\sin^2\varphi}{AE^2 + EG^2 + 2AE.EG.\cos\varphi})}$

Fig. 12 $= \sqrt{\left(1 - \frac{EG^2(1-\cos^2\varphi)}{AE^2+EG^2+2AE.EG.\cos\varphi}\right)}$ $= \frac{AE+EG.\cos\varphi}{\sqrt{(AE^2+EG^2+2AE.EG.\cos\varphi}}$; es iſt demnach $\frac{\text{ſin}\,DAB}{\cos DAB} = \frac{EG.\text{ſin}\varphi}{AE+EG.\cos\varphi}$, nämlich tang DAB $= \frac{EG.\text{ſin}\varphi}{AE+EG.\cos\varphi}$, und endlich tang DAB $= \frac{a.\text{ſin}\varphi}{b+a\cos\varphi}$, wenn man ſtatt AE, EG ihre Werthe $\frac{gbt^2}{M}$, $\frac{gat^2}{M}$ ſetzet. Eben ſo findet man tang DAC $= \frac{b.\text{ſin}\varphi}{a+b\cos\varphi}$.

§. 67.

Es iſt aus der gefundenen Gleichung $p = \sqrt{(a^2+b^2+2ab.\cos\varphi)}$ zu erſehen, daß die Diagonale AR eines Parallelograms PQ die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft p vorſtellen könne, wenn man die Seitenkräfte a, b durch die zwey Seiten AP, AQ dieſes Parallelograms bezeichnet; wenn man nämlich AP $= b$, AQ $= a$ ſetzet, und das Parallelogram PQ verzeichnet, ſo iſt die Diagonale AR $= \sqrt{(a^2+b^2+2ab.\cos\varphi)}$ $= p =$ der mittleren Kraft, und tang PAR $= \frac{a.\text{ſin}\varphi}{b+a.\cos\varphi}$ = tang DAB. Wenn man z. B. die Kraft $a = 8$ Pfunde, $b = 15$ Pfunde, und den Neigungswinkel ihrer Richtungen $\varphi = 120°$ ſetzet, ſo iſt die mittlere Kraft $p = \sqrt{(64+225-2.8.15.\frac{1}{2})} = 13$ Pfunde, und tang DAB $= \frac{8.\text{ſin}\,120°}{15-8.\cos 120°} = \frac{4}{11}\sqrt{3} =$ 0,6298.., tang DAC $= \frac{15.\text{ſin}\,120°}{8-15.\cos 120°} = 15\sqrt{3}$

=

Fig. 12 $= 25{,}98..$, woraus DAB $= 32° 12'$, und DAC $= 87° 48'$ folgt. Wenn man auf die Richtungslinien AB, AC der zwey Seitenkräfte b, a vorwärts oder auch rückwärts beliebige gleiche Theile, und zwar $b = 15$ auf die erſte Linie von A bis P, und $a = 8$ auf die zweyte Linie von A bis Q aufträgt, und darauf das Parallelogram PQ verzeichnet, ſo wird die Diagonale AR dieſes Parallelograms 13 ſolcher Theile enthalten, und folglich die mittlere Kraft p vorſtellen, wenn PAQ $= 120°$ iſt; auch wird bey dieſer Verzeichnung PAR $= 32° 12' =$ DAB, und QAR $= 87° 48' =$ DAC ſeyn. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß man die mittlere Kraft ſowohl durch Rechnung als auch durch Zeichnung finden könne.

Wenn man in der gefundenen Gleichung für die mittlere Kraft, den Winkel $\phi = 90°$ ſetzet, ſo iſt $p = \sqrt{(a^2 + b^2)} =$ der Hypothenuſe eines rechtwinklichten Dreyeckes, deſſen Katheten durch a, b vorgeſtellet ſind, es iſt nämlich in einem ſolchen Falle das Dreyeck APR in P rechtwinklicht. Setzet man aber $\phi = 0$, ſo iſt $p = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)} = a + b$. Hingegen iſt $p = b - a$, oder $p = a - b$, wenn $\phi = 180°$ iſt; in dieſem letzten Falle iſt $p = 0$, wenn $a = b$ iſt, welches mit (§. 61) vollkommen übereinſtimmet.

Das Parallelogram PQ, bey dem nämlich die Seitenlinien AP, AQ zwey Seitenkräfte, und die Diagonale AR die mittlere Kraft vorſtellet, heißt das **Kräftenparallelogram**.

§. 68.

Wenn man nun die zwey Seitenkräfte a, b, oder AQ, AP Fig. 12. gänzlich hinwegnimmt, und dafür die Kraft $p = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\,.\cos\phi)}$ nämlich AR

Fig. 12 nach der Richtung AD anbringt, ſo wird dieſe mittlere Kraft AR ganz allein auf den Körper A nach der Richtung AD eben ſo wirken, als wie die übrigen zwey AP, AQ gemeinſchaftlich beyde zugleich. Oder umgekehrt, wenn man die mittlere Kraft AR gänzlich hinwegnimmt, und dafür zwey andere Seitenkräfte AP, AQ anbringt, welche durch die zwey Seiten eines Parallelograms vorgeſtellet ſind, wovon die mittlere Kraft AR die Diagonale iſt, ſo werden dieſe zwey Seitenkräfte zugleich auf den Körper A nach der Richtung AD gemeinſchaftlich eben ſo wirken, als die Kraft AR ganz allein; und dieſes Verfahren heißt **die Kraft AR auflöſen oder zerlegen**; es bedeuten nämlich die Worte, **eine Kraft auflöſen, oder eine Kraft in mehr andere zerlegen**, nichts anders als **ſtatt einer einzigen Kraft zwey oder mehr Kräfte nach verſchiedenen Richtungen dergeſtalt anbringen, daß alle dieſe letzteren Kräfte gemeinſchaftlich auf einen gegebenen Körper nach der Richtung der erſten Kraft zugleich eben ſo wirken, als die erſte Kraft für ſich ganz allein.** Das Zerlegen einer gegebenen Kraft in zwey andere Seitenkräfte kann auf unzählige Arten geſchehen, weil ſich einer einzigen Diagonale, wodurch man die gegebene mittlere Kraft bezeichnet, unzählige Parallelograme umſchreiben laſſen, durch deren Seitenlinien die Seitenkräfte abgebildet werden. Wenn hingegen nebſt der Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft auch die Richtungen der Seitenkräfte gegeben ſind, ſo laſſen ſich daraus die Seitenkräfte ſelbſt ſehr leicht beſtimmen, entweder durch die Verzeichnung des Kräftenparallelogrames, oder durch eine trigonometriſche Berechnung, wie es aus folgenden zu erſehen iſt.

§. 69.

Fig.

12 **Aufgabe. Es iſt die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft nebſt der Richtung der zwey Seitenkräfte gegeben, man ſoll daraus die Seitenkräfte beſtimmen;** das iſt in Fig. 12. iſt die Kraft p gegeben, welche den Körper A in der Zeit t von A bis G beweget, auch iſt die Lage der zwey Linien AB, AC gegen AGD, nämlich der Winkel DAB = PAR = m, und DAC = QAR = n bekannt; man ſoll auf dieſen Richtungslinien AC, AB zwey Kräfte a, b finden, welche beyde zugleich auf den Körper A eben ſo wirken, als die gegebene Kraft p für ſich allein auf denſelben zu wirken vermögend iſt.

Auflöſung. Durch Verzeichnung. Man mache AR = p = der gegebenen mittleren Kraft, und ziehe durch R die Parallelen RP zu AC, und RQ zu AB, ſo iſt vermög (§. 67.) AQ oder PR = a die erſte, und AP = b die zweyte geſuchte Seitenkraft.

Durch Rechnung. Es iſt ſin APR : AR = ſin PAR : PR, und ſin APR : AR = ſin PRA : AP, nämlich ſin $(m + n) : p =$ ſin $m : a$, und ſin $(m + n) : p =$ ſin $n : b$; folglich

$$a = \frac{p\,.\,\text{ſin}\,m}{\text{ſin}(m+n)},\ \text{und}\ b = \frac{p\,.\,\text{ſin}\,n}{\text{ſin}(m+n)}.$$

Man kann a und b auch auf folgende Art finden; die gegebene unveränderliche Kraft p bewege den Körper A, deſſen Maſſe = M ſey, in der Zeit t durch AG, ſo iſt AG = $\frac{gpt^2}{M}$; man ziehe aus G die Parallelen GE, GF zu AC, AB, ſo muß die geſuchte Kraft a durch AF, und b durch AE in eben dieſer Zeit für ſich allein den Körper A bewegen, damit die-

Fig. ſe zwey Kräfte a, b beyde zugleich nach der Richtung
12 AD mit der gegeben Kraft p in der Zeit t einerley Wirkung hervorbringen; folglich iſt AF $= \frac{gat^2}{M} =$ EG, und AE $= \frac{gbt^2}{M}$; nun iſt ſin AEG : AG = ſin GAE : EG, und ſin AEG : AG = ſin EGA : AE, nämlich ſin $(m + n) : \frac{gpt^2}{M} =$ ſin $m : \frac{gat^2}{M}$, und ſin $(m + n) : \frac{gpt^2}{M} =$ ſin $n : \frac{gbt^2}{M}$; folglich $a = \frac{p . \sin m}{\sin(m+n)}$, und $b = \frac{p . \sin n}{\sin(m+n)}$ wie ehevor.

Es folgt daraus $a : p =$ ſin m : ſin$(m+n)$, $b : p =$ ſin n : ſin$(m+n)$, $a : b =$ ſin m : ſin n, und $a : b : p =$ ſin m : ſin n : ſin$(m+n)$, nämlich **bey zwey wie immer gegeneinander geneigten Seitenkräften und der mittleren Kraft verhält ſich jede wie der Sinus des Richtungswinkels der beyden übrigen Kräfte.**

§. 70.

Wenn mehrere unveränderliche Kräfte AB, AC, AD
13 AE Fig. 13. nach gegebenen Richtungen zugleich auf einen Körper A wirken, ſo läßt ſich die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft AH auf folgende Art beſtimme. Aus AB, AC und aus dem Winkel BAC ſuche man nach (§. 66) die mittlere Kraft AF nebſt dem Winkel FAC, woraus ſich auch der Winkel FAD ergiebt, weil der Winkel CAD gegeben iſt; ſodann beſtimme man aus AF, AD und aus dem Winkel FAD die mittlere Kraft AG nebſt dem Winkel GAD, woraus auch der Winkel GAE bekannt wird; und endlich

beſtimme man aus AG, AE und aus dem Winkel GAE die geſuchte mittlere Kraft AH nebſt dem Winkel EAH. Wenn die Richtungen der Seitenkräfte alle in einer nämlichen Ebene liegen, ſo hat die Beſtimmung der Gröſſe und Richtung der geſuchten mittleren Kraft weiter keine Schwierigkeit, ſie kann ſehr leicht entweder mittelſt der ebenen Trigonometrie oder auch durch die bloſſe Verzeichnung gefunden werden. Fig. 13

Wenn hingegen die Seitenkräfte in verſchiedenen Ebenen liegen, und ihre Richtungen alle in einem Punkte zuſammen ſtoſſen, ſo kann die mittlere Kraft durch die ſphäriſche Trigonometrie berechnet werden; wenn z. B. Fig. 14. die drey Seitenkräfte AB, AC, AD in verſchiedenen Ebenen liegen, ſo läßt ſich aus AB, AC, AD und aus den Winkeln BAC, CAD, BAD die mittlere Kraft auf folgende Art finden. Man ſuche zuerſt nach (§. 66.) AE und den Winkel CAE; ſodann gedenke man aus A mit einem beliebigen Halbmeſſer eine Kugelfläche, ſo entſteht ein ſphäriſches Dreyeck pqm, worin alle drey Seiten bekannt ſind; in dieſem ſphäriſchen Dreyecke berechne man nach (478. I.) den Winkel pmq, ſo hat man darauf in dem ſphäriſchen Dreyecke nqm die zwey Seiten nm, mq nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel m bekannt, und daraus läßt ſich nach (478. IV.) oder (479) der Bogen nq, nämlich der Winkel EAD finden; und endlich läßt ſich nun aus AE, AD, und aus dem Winkel EAD die geſuchte mittlere Kraft AF beſtimmen. 14

Es iſt aus dieſem auch zu erſehen, daß man eine einzige Kraft AH Fig. 13., oder AF Fig. 14. nicht bloß in zwey Seitenkräfte wie (§. 69.), ſondern in mehrere z. B. Fig. 13. in AE, AC, AD, AB, und Fig. 14. in AD, AC, AB zerlegen könne, die mit der mittleren Kraft entweder in einer nämlichen, oder auch in verſchiedenen Ebenen liegen.

Fig. 15

§. 71.

Das Zerlegen einer gegebenen Kraft in zwey oder mehr Seitenkräfte kömmt in den mechaniſchen Unterſuchungen ſehr oft vor. Z. B. auf einer **undurchdringliche** Ebene PQ Fig. 15. befinde ſich ein Körper in A, auf den zwey Kräfte AB, AC zugleich wirken, wovon die erſte AB in der Ebene PQ nach der Richtung BAF, hingegen die zweyte Kraft AC nach der Richtung CAR, die mit der Ebene PQ den Winkel CAG einſchließt, den Körper A zu bewegen ſtrebet, ſo läßt ſich die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft auf folgende Art beſtimmen, womit dieſer Körper A auf der Ebene PQ wirklich fortgetrieben wird. Aus dem Punkte C laſſe man die Senkrechte CG auf die Ebene PQ, und verzeichne das Parallelogram GH, oder auch nur das Dreyeck CGA, ſo iſt dadurch die Kraft CA in zwey Seitenkräfte CG und GA, oder AG und AH zerlegt, wovon die erſte CG oder HA auf der Ebene PQ ſenkrecht ſteht, und von der Undurchdringlichkeit der Ebene PQ gänzlich aufgehoben wird, die zweyte Seitenkraft AG aber wirket auf den Körper A nach der Richtung GAE in der Ebene PQ; endlich mache man AF = der Kraft AB, AE = der Kraft AG, und verzeichne das Parallelogram EF, ſo iſt AD die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft. Die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft AD in der Ebene PQ läßt ſich aus AB = a, AC = b, und aus den Winkeln CAG = m, GAF = n, auch trigonometriſch berechnen. Wenn die Länge CA den ganzen Druck vorſtellet, welchen dieſe Kraft nach einer **ſenkrechten Richtung** gegen eine Unterlage zu äuſſern vermögend iſt, ſo zeigt CG, oder AH den Druck an, welchen die Kraft CA bey dieſer ſchiefen Lage gegen die Ebene ne PQ äuſſert; wenn z. B. die Kraft CA nach einer ſenkrechten Richtung gegen eine Unterlage einen Druck $CA = 17$ Pfunde zu äuſſern im Stande iſt, ſo preſſet ſie unter dem Neigungswinkel $CAG = 30°$ die Ebene PQ nur mit dem Drucke $CG = CA . \sin CAG = 8\frac{1}{2}$ Pfunde, weil ſin G ($\sin tot : CA = \sin CAG : CG$ oder HA ſtatt findet. Fig. 15

§. 71.

Die Wirkungen der Seitenkräfte ſowohl als auch der mittleren Kraft ſind durch die in der Zeit *t* zurückgelegten Wege ausgedrücket worden; dieſe zurückgelegten Wege und auch die Zeit *t* ſind in den (§. 66. und 69.) entwickelten Formeln nicht mehr vorfindig; ſetzet man nun die Zeit *t* unendlich klein, ſo erſtrecken ſich dieſe gefundenen Formeln auch auf veränderliche Kräfte, weil man jede veränderliche Kraft während einem unendlich kleinen Zeittheile für unveränderlich anſehen kann, allwo man unter den Wirkungen der Seitenkräfte und auch der mittleren Kraft ihre Preſſungen verſtehen kann. Die Bedeutung, **die Seitenkräfte wirken zugleich nach der Richtung der mittleren Kraft eben ſo ſtark, als die mittlere Kraft für ſich allein**, kann man kürzer ſo ausdrücken: **die Seitenkräfte ſind mit der mittleren Kraft äquipollent**, oder auch **die mittlere Kraft iſt mit den Seitenkräften äquipollent** (auf deutſch **gleichgeltend**).

§. 72.

Wenn man Fig. 12. 13. 14. eine Kraft, welche der gefundenen mittleren Kraft gleich iſt, nach der entgegengeſetzten Richtung anbringt, ſo wird dieſe Kraft

mit

Fig. mit den Seitenkräften im Gleichgewichte ſeyn. Denn
eine ſolche Kraft iſt vermög (§. 61) mit der gefunde-
nen mittleren Kraft im Gleichgewichte; nun aber iſt die
mittlere Kraft mit den Seitenkräften **gleichgeltend**;
folglich iſt auch eine ſolche Kraft mit den Seitenkräften
im Gleichgewichte. Es kann demnach aus zwey oder
mehr gegebenen Seitenkräften und aus den Neigungs-
winkeln ihrer Richtungen, die Gröſſe und Richtung ei-
ner Kraft, welche den gegebenen Seitenkräften das
Gleichgewicht hält, eben ſo wie die mittlere Kraft ge-
funden werden, und umgekehrt. Z. B. an einem Punk-
16 te A Fig. 16. ſind zwey Kräfte a, b angebracht, wel-
che denſelben noch den Richtungen AC, AB zu bewe-
gen ſtreben; verzeichnet man nun unter dem Winkel
CAB ein Parallelogram von der Beſchaffenheit, daß
$AC = a$, $AB = b$ vorſtelle, ſo wird EAD die Rich-
tung und AE = AD die Gröſſe der Kraft p anzei-
gen, welche nach dieſer Richtung den zwey Kräften a,
b das Gleichgewicht zu halten im Stande iſt. Auch
wird in dieſem Falle $a : b : p = \sin DAB : \sin DAC :$
$\sin BAC$ ſo wie (§. 69.) ſtatt finden; nämlich **von
drey Kräften, deren Richtungen in einer Ebe-
ne zuſammenlaufen, verhält ſich im Stande
des Gleichgewichts eine jede Kraft, wie der
Sinus des Richtungswinkels der beyden üb-
rigen Kräfte.**

§. 73.

Gleichwie man eine gegebene Kraft in mehrere Seitenkräfte zerlegen kann, die mit der gegebenen gleichgeltend ſind, eben ſo läßt ſich auch die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers in mehrere **Seitengeſchwindigkeiten** zerlegen. Man ſetze z. B. ein Körper M Fig. 17. bewege ſich **gleichförmig** in der Linie AR,

wel-

Fig. 17 welche ſich in einer nämlichen Ebene mit AB und AC gemeinſchaftlich in A durchſchneidet; der Körper ſey im Anfange der Zeit t in A, in 1 Sek. rücke ſolcher bis E, und in t Sek. bis M, ſo entfernet ſich derſelbe von AC nach der Richtung AB in 1 Sek. um $GE = AF$, und in t Sek. um $QM = AB$; nach der Richtung AC aber entfernet ſich derſelbe von AB in 1 Sek. um $FE = AG$, und in t Sek. um $PM = AQ$, wenn man die Parallelograme GF, QP gedenket; es iſt demnach nach der Richtung AR des bewegten Körpers Geſchwindigkeit $= AE$, nach der Richtung AB aber iſt ſeine Geſchwindigkeit $= AF = GE$, und nach der Richtung AC iſt ſeine Geſchwindigkeit $= AG = FE$ (§. 22), weil die Bewegung nach den Richtungen AB, AC gleichförmig ſeyn muß, wenn die Bewegung nach der Richtung AR gleichförmig iſt; denn es iſt $AF : FP = AE : EM = AG : GQ$, folglich iſt $AF = FP$, $AG = GQ$, wenn man $AE = EM$ ſetzet; es ſind demnach die in gleichen Zeittheilen zurückgelegten Wege nach den Richtungen AB, AC einander gleich, wenn nach der Richtung AR ſolche einander gleich ſind; und auch umgekehrt.

§. 74.

Setzet man nun die Geſchwindigkeit $AE = v$, $AF = x$, und $AG = y$, ſo iſt $x = \frac{v.\sin n}{\sin(m+n)}$, und $y = \frac{v \sin m}{\sin(m+n)}$; nämlich es iſt $v : x : y = \sin(m+n) : \sin n : \sin m$ ſo wie (§. 69.); ſetzet man über dieſes $m + n = 90°$, ſo iſt $x = v . \cos m$, und $y = v . \sin m$, oder $x = v . \sin n$, und $y = v . \cos n$.

Wenn

Fig. 17 Wenn man umgekehrt weiß, daß der Körper M nach der Richtung AB mit der Geſchwindigkeit AF $= x$, und nach der Richtung AC mit der Geſchwindigkeit AG $= y$ fortgehe, deren Neigungswinkel $m + n = \phi$ ebenfalls bekannt iſt, ſo iſt ſeine eigentliche Geſchwindigkeit $v = \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \,.\, \cos\phi)}$, und die Richtung ſeiner wirklichen Bewegung iſt gegen AB unter einem Winkel m geneigt, der ſich aus der Gleichung $\text{tang}\, m = \frac{y \sin\phi}{x + y.\cos\phi}$ finden läßt. Man kann die eigentliche Geſchwindigkeit (die mittlere Geſchwindigkeit) und Richtung des bewegten Körpers aus den Seitengeſchwindigkeiten und ihren Richtungen auch durch die Verzeichnung eines Parallelograms beſtimmen. Setzet man nun $\phi = 90°$, ſo iſt $v = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, und $\text{tang}\, m = \frac{y}{x}$.

§. 75.

Die Zerlegung einer gegebenen Geſchwindigkeit in die Seitengeſchwindigkeiten, und auch die Beſtimmung der mittleren Geſchwindigkeit aus den gegebenen Seitengeſchwindigkeiten findet auch bey der ungleichförmigen Bewegung eines Körpers ſtatt. Man ſetze z. B. ein Körper M bewege ſich in einer krummen Linie AMB 18 Fig. 18. die in einer vertikalen Ebene CAB liegt; in eben dieſer Ebene ſey AB eine horizontale und AC eine vertikale Linie; in der Zeit t rücke der Körper von A bis M, ſo entfernet ſich ſolcher in dieſer Zeit von AC um AP = QM, und von AB um PM = AQ; in dem Zeitelemente dt rücke ſolcher um Mm weiter fort, ſo iſt während eben dieſem Zeitelemente nach der Richtung AB ſeine Bewegung = Pp = MR, und nach der Richtung AC iſt ſeine Bewegung = Qq = Rm = MS; Mm kann für eine gerade Linie und die Bewegung durch Mm für gleichförmig angeſehen werden, weil ſich die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers während einem Zeitelemente um kein angebliches endliches Stück verändern kann; es kann demnach auch die Bewegung durch MR und MS für gleichförmig angeſehen werden. Setzet man nun AM = s, AP = x, PM = y, ſo iſt Pp = MR = dx, Rm = MS = Qq = dy, und Mm = ds = $\sqrt{}(dx^2 + dy^2)$ $= dx(1 + \frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}}$; ſetzet man ferner in dem Punkte M nach der Richtung der Tangente TM des bewegten Körpers Geſchwindigkeit = v, nach der Richtung AB oder MR die Geſchwindigkeit = V, und nach der Richtung MS oder AC die Geſchwindigkeit = U, ſo iſt Fig. 18

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{}(dx^2 + dy^2)}{dt} = \frac{dx}{dt}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$V = \frac{dx}{dt}$, und $U = \frac{dy}{dt}$; oder $V = v.\cos\mathrm{RMm}$, und $U = v.\sin\mathrm{RMm}$, nämlich $V = \frac{vdx}{ds}$, und $U = \frac{vdy}{ds}$, weil Mm(ds : ſintot (1 = MR (dx : cos RMm $= \frac{dx}{ds}$, und Mm(ds : 1 = Rm(dy : ſin RMm $= \frac{dy}{ds}$ ſtatt findet. Wenn man aus der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ den Werth für dt in die zwey darauffolgende Gleichungen ſetzet, ſo erhält man eben dieſe Formeln für V und U. Die Richtung der Bewegung in dem Punk-

Fig. 18 Punkte M iſt gegen den Horizont unter einem Winkel RMm = MTP geneigt, der ſich aus der Gleichung tang RMm $= \frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT}$ beſtimmen läßt, allwo die Subtangente PT $= \frac{ydx}{dy}$ iſt; u. ſ. w.

V. Vorleſung.

Die freye Bewegung geworfener ſchwerer Körper.

§. 76.

19 Aufgabe. Es ſey die Gerade AB Fig. 19. horizontal, und CAR vertikal; einem ſchweren Körper A werde in der vertikalen Ebene CAB nach der Richtung AQ, welche gegen den Horizont AB unter dem Winkel QAB$=m$ geneigt iſt, durch irgend eine Kraft die Geſchwindigkeit $= c$ mitgetheilet; von A angerechnet wirke auf den bewegten Körper gar keine andere Kraft als die Schwere, deren Richtungen AR, QP, TB in nicht gar zu groſſen Entfernungen für parallel anzuſehen ſind (§. 6.); man ſoll die Bewegung des geworfenen Körpers beſtimmen.

Fig. 19 **Auflöſung.** I. Vermög der anfänglichen Geſchwindigkeit c lege der Körper in der Zeit $= t$ den Weg AQ, und vermög der Wirkung der Schwere den Weg AR = QM zurück, ſo befindet ſich der Körper am Ende der Zeit t in M, wenn man das Parallelogram QR gedenket (§. 63); nun iſt vermög der anfänglichen Geſchwindigkeit die Bewegung nach der Richtung AQ gleichförmig, und nach der Richtung AR gleichförmig beſchleuniget; folglich iſt $AQ = ct$ (§. 25), und AR oder $QM = gt^2$ (§. 40). Aus der Gleichung $AQ = ct$ folgt $t = \frac{AQ}{c}$; ſubſtituiret man dieſen Werth für t in der zweyten Gleichung, ſo iſt $QM = \frac{g.AQ^2}{c^2}$, und $AQ^2 = \frac{c^2}{g}.QM$, oder $RM^2 = \frac{c^2}{g}.AR$, nämlich das **Quadrat jeder Ordinate RM, welche mit der Tangente AT parallel läuft, iſt gleich dem Produkte aus der dazu gehörigen Abſciſſe** AR **in die unveränderliche Linie** $\frac{c^2}{g}$; folglich iſt AMB eine Parabel (528); AR iſt ein Durchmeſſer derſelben, und $\frac{c^2}{g}$ iſt der Parameter dieſes Durchmeſſers. Das Stück AB der Horizontallinie AF von dem Wurforte A bis an den Ort B gerechnet, wo die Gerade AF von der Bahn AMB wieder geſchnitten wird, heißt die **Wurfweite**. Wenn man die Wurfweite AB im Punkte K durch die Senkrechte KH halbiret, ſo iſt HK die Achſe der Parabel (529. IV.); halbiret man ferner HK in L, ſo iſt L der Scheitel derſelben, weil die Subtangente der doppelten Abſciſſe gleich iſt. KL iſt demnach die größte Erhöhung, welche der geworfene Kör-

Fig. per unter den angeführten Umſtänden erreichet; dieſe
19 größte Erhöhung KL iſt dem vierten Theile der Geraden BT gleich, welche von einigen die **Falllinie** genennt wird. Aus der Wurfweite AB und aus dem Erhöhungswinkel BAT läßt ſich BT berechnen. Z. B. durch die Kraft des Pulvers iſt man im Stande unter einem Erhöhungswinkel von 75° eine Wurfweite AB = 500 Klafter zu erreichen; daraus folgt die Falllinie BT = 1866, und folglich die größte Erhöhung unter dieſen Umſtänden KL = $\frac{1}{4}$BT = 466 Klafter.

II. Man nehme AF für die Abſciſſenlinie an, ſetze AP = x, und PM = y, ſo iſt ſin Q (cos m : AP (x = ſintot (1 : AQ = $\frac{x}{\cos m}$; es iſt aber vermög vorhergehenden AQ = ct; folglich auch $ct = \frac{x}{\cos m}$; **daraus folgt die Gleichung für die Zeit** $t = \frac{x}{c.\cos m}$.

III. Ferner iſt 1 : tang $m = x$: PQ = x.tang m, und vermög vorhergehenden QM = gt^2, oder wenn man für t ſeinen Werth $\frac{x}{c.\cos m}$ ſetzet, QM = $\frac{gx^2}{c^2.\cos^2 m}$; nun iſt PM = PQ — QM; es iſt demnach auch $y = x.\text{tang}\, m - \frac{gx^2}{c^2.\cos^2 m}$, oder wenn man für tang m ſeinen Werth $\frac{\text{ſin} m}{\cos m}$ ſetzet, $y = \frac{c^2.x.\text{ſin} m.\cos m - gx^2}{c^2.\cos^2 m}$, und endlich iſt, wenn man für ſin m . cos m den Werth $\frac{1}{2}$ſin$2m$ (443. I.), und für cos$^2 m$ den Werth $\frac{1+\cos 2m}{2}$ (443. II.) ſubſtituiret, **die Fundamentalglei-**

gleichung für die Bahn des geworfenen Körpers $y = \frac{c^2x.\text{ſin}2m - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2m)}$. Fig. 19

IV. In dem Punkte M iſt nach der Richtung MP vermög (§. 41. II.) des bewegten Körpers Geſchwindigkeit $= \sqrt{(4g.\mathrm{QM})} = \sqrt{(4g.\frac{gx^2}{c^2.\cos^2 m})} = \frac{2gx}{c.\cos m}$, und nach der Richtung MN iſt ſeine Geſchwindigkeit $= c$; aus dieſen zwey Seitengeſchwindigkeiten, und aus dem Neigungswinkel ihrer Richtungen PMN = RAT $= 90 + m$ ergiebt ſich nach (§. 74.) **die eigentliche Geſchwindigkeit** $= v$ **des bewegten Körpers in dem Punkte M, es iſt nämlich**

$$v = \sqrt{\left(c^2 + \frac{4g^2x^2}{c^2.\cos^2 m} + \frac{2c.2gx.\cos(90+m)}{c.\cos m}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(c^4\cos^2 m + 4g^2x^2 - 4c^2gx.\text{ſin}m.\cos m)}}{c.\cos m}.$$

§. 77.

Aus der gefundenen Fundamentalgleichung für die Bahn des geworfenen Körpers $y = \frac{c^2x.\text{ſin}2m - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2m)}$ läßt ſich nun die Wurfweite AB $= b$ gar leicht ableiten; es iſt nämlich für $x = b$ die entſprechende Ordinate $y = 0$; folglich $0 = \frac{c^2b.\text{ſin}2m - 2gb^2}{c^2(1+\cos 2m)}$; daraus folgt die Wurfweite $b = \frac{c^2.\text{ſin}2m}{2g}$.

Fig. 19

§. 78.

Setzet man in der gefundenen Gleichung für die Zeit $t = \frac{x}{c.\cos m}$, die Abſciſſe $x = b$, ſo iſt für die ganze Bahn AMB die Zeit $t = \frac{b}{c.\cos m}$.

§. 79.

Aus den zwey entwickelten Gleichungen

I. $b = \frac{c^2.\sin 2m}{2g}$, $c^2 = \frac{2gb}{\sin 2m}$, $\sin 2m = \frac{2gb}{c^2}$;

II. $t = \frac{b}{c.\cos m}$, $c = \frac{b}{t.\cos m}$, $b = ct.\cos m$;

folgt durch die Verbindung

III. $t^2 = \frac{b\,\text{tang}\,m}{g}$, $b = gt^2.\cot m$;

IV. $t = \frac{c.\sin m}{g}$, $c = \frac{gt}{\sin m}$.

§. 80.

Aus dieſen Gleichungen laſſen ſich nun verſchiedene Folgen ableiten, als;

I. **Bey einerley anfänglichen Geſchwindigkeit unter verſchiedenen Elevationswinkeln verhalten ſich die Wurfweiten gegeneinander wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel.** Denn es iſt unter dem Elevationswinkel m die Wurfweite $b = \frac{c^2.\sin 2m}{2g}$, und bey der nämlichen anfänglichen Geſchwindigkeit unter einem anderen Elevationswinkel M die Wurfweite $B = \frac{c^2.\sin 2M}{2g}$; folglich $b : B = \sin 2m : \sin 2M$. Fig. 19

Dieſer Satz findet auch noch ſtatt, wenn man die Elevationswinkel von der Vertikallinie zählet; man ſetze z. B. den Winkel CAQ $= n$, ſo iſt der Winkel von der Horizontallinie $m = 90 - n$; und folglich die Wurfweite $b = \frac{c^2.\sin(180-2n)}{2g} = \frac{c^2.\sin 2n}{2g}$.

II. Unter einem nämlichen Elevationswinkel verhalten ſich bey verſchiedenen anfänglichen Geſchwindigkeiten die Wurfweiten gegeneinander, wie die Quadrate der anfänglichen Geſchwindigkeiten. Denn es iſt $b = \frac{c^2.\sin 2m}{2g}$, und bey einer anderen anfänglichen Geſchwindigkeit $= C$ unter dem nämlichen Elevationswinkel die Wurfweite $B = \frac{C^2\sin 2m}{2g}$; folglich $b : B = c^2 : C^2$.

Wenn es nun wahr wäre, daß ſich bey einerley geworfenen Körpern unter dem nämlichen Elevationswinkel die anfänglichen Geſchwindigkeit gegeneinander verhalten wie die Ladung des nämlichen Pulvers, womit die Körper in Bewegung geſetzet werden, ſo müßten ſich auch die Wurfweiten gegeneinander verhalten, wie die Quadrate der Ladungen, welches aber mit der Erfahrung gar nicht übereinſtimmet; gehörig angeſtellte Verſuche geben zu erkennen, daß nur bey kleinen Ladungen ſich die Wurfweiten beynahe gegeneinander verhalten, wie die Quadrate der Ladungen; bey mittleren Ladungen verhalten ſich die Quadrate der Wurfweiten beynahe gegeneinander wie die 3ten Potenzen der Ladungen;

Fig. 19 bey groſſen Ladungen endlich verhalten ſich die Wurfweiten beynahe wie die Ladungen; nur beynahe, und zwar nur bey Bombenpöllern ſtimmen dieſe Verhältniſſe mit Erfahrungen überein.

Dieſe Bemerkung iſt aus einem Verſuche abgeleitet, der allhier am 20 und 21ten Tage des Auguſtmonates im Jahre 1781 abgeführet wurde; hier ſind die Reſultate davon.

Erreichte Wurfweiten in Wien. Kl. unter dem Elevationswinkel = 60° vom Horizonte bey dem												
60pfündigen Pöller.					30pfündigen Pöller.					10pfündigen Pöller.		
mit einer Ladung von												
40 L.	60 L.	80 L.	100 L.	120 L.	20 L.	30 L.	40 L.	50 L.	60 L.	10 L.	15 L.	20 L.
171	350	513	599	767	102	283	439	545	628	163	386	562
184	363	500	621	803	107	256	410	548	669	161	387	570
180	343	495	664	800	97	256	420	520	646	151	362	573
187	360	489	582	758	99	266	414	520	630	147	392	584
173	368	498	658	798	90	285	406	540	640	138	389	566
daraus ſind die mittleren Wurfweiten.												
179	357	499	625	785	99	271	418	535	642	154	383	571

$$\text{Durchm. der} \left\{ \begin{matrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{matrix} \right\} \text{pfündig. Bomb.} = \left\{ \begin{matrix} 11\,\text{Z.}\;3\,\text{L.} \\ 8\;\;11\tfrac{1}{5} \\ 6\;\;2\tfrac{1}{4} \end{matrix} \right\} \text{u. Gewicht.} = \left\{ \begin{matrix} 102 \\ 54 \\ 19 \end{matrix} \right\} \text{Pf.}$$

Der ganze Spielraum ware der 21te Theil des Bombendurchmeſſers, nämlich der Durchmeſſer des Fluges ware = $\frac{22}{21}$ Bombendurchmeſſer, ſeine Höhe aber = $1\frac{38}{84}$ Bombendurchmeſſer; der Keſſel des Fluges ware beynahe eine Halbkugel. Die Pöllerkammer beſtund bey je-

jedem Pöller aus einem Cylinder, mit einer daran befindlichen Halbkugel; des Cylinders Durchmeſſer wäre $= \frac{35}{64}$ und ſeine Höhe $= \frac{23}{64}$ des Bombendurchmeſſers. Fig. 19

Das dabey gebrauchte Pulver, wovon 50 Pfunde einen Kubikfuß füllen, wäre ſehr ſtark; es hat ſelbes auf der bey uns gebräuchlichen Pulverprobe 76 Grade geſchlagen. Man ließ bey vertikaler Stellung des Pöllers das Pulver durch einen Trichter in die Kammer laufen, ſetzte ſodann, nachdem das Pulver verglichen wurde, die Bombe ein, *ohne vorher das Pulver zu bedecken,* und gab dem Pöller die gehörige Neigung.

Bey der nämlichen Gattung des Pulvers wurden aus dem 60pfündigen Pöller mit 60 Loth Ladung in der Elevation von 75° mit drey auf einander folgenden Würfen die Wurfweiten 187, 212, 202 Klafter erreichet; daraus folgt die mittlere Wurfweite = 200; in der Elevation von 45° aber mit der nämlichen Ladung wären die Wurfweiten = 380, 381, 366 Klafter, woraus die mittlere Wurfweite = 376 folgt.

III. **Die größte Wurfweite giebt der Elevationswinkel** $m = 45°$, weil bey der Gleichung $b = \frac{c^2.\sin 2m}{2g}$ in dieſem Falle $\sin 2m = \sin 90° = 1$, in *allen übrigen Fällen aber* $\sin 2m$ *ein eigentlicher Bruch iſt.*

IV. **Unter zwey verſchiedenen Elevationswinkeln, die einander zu 90° ergänzen, oder die von 45° nach entgegengeſetzten Seiten gleichweit abſtehen, wird bey der nämlichen anfänglichen Geſchwindigkeit einerley Wurfweite erhalten.** Denn man ſetze nur den Elevationswinkel $= 90° - m$, ſo iſt die Wurfweite $b = \frac{c^2.\sin(180 - 2m)}{2g} = \frac{c^2.\sin 2m}{2g}$, ſo wie bey dem Elevationswinkel $= m$.

Fig. 19 V. **Die Wurfweite unter 15° und 75° iſt der Hälfte von der größten Wurfweite gleich.** Denn man ſetze nur $m = 15°$, oder $m = 75°$, ſo iſt $\sin 2m = \frac{1}{2}$, und die Wurfweite $b = \frac{c^2}{4g}$; hingegen iſt bey $m = 45°$ die größte Wurfweite $b = \frac{c^2}{2g}$.

VI. **Unter dem nämlichen Elevationswinkel bey verſchiedenen anfänglichen Geſchwindigkeiten verhalten ſich die Wurfweiten gegeneinander wie die Quadrate der Zeiten.** Denn vermög (§. 78. III.) iſt $t^2 = \frac{b.\text{tang}m}{g}$, und unter dem nämlichen Elevationswinkel für eine andere Wurfweite $T^2 = \frac{B.\text{tang}m}{g}$; folglich $t^2 : T^2 = b : B$.

Nun verhalten ſich die Längen der Brandröhren l, L, wenn ſie gut gearbeitet ſind, ziemlich genau wie die Zeiten t, T, in denen ſie ausbrennen, nämlich $l : L = t : T$, oder $t^2 : T^2 = l^2 : L^2$; folglich auch $b : B = l^2 : L^2$, **das iſt unter einem nämlichen Elevationswinkel verhalten ſich die Wurfweiten gegeneinander, wie die Quadrate der dazu erforderlichen Längen der Brandröhren.**

VII. **Bey einerley Wurfweite unter verſchiedenen Elevationswinkeln verhalten ſich die Quadrate der Zeiten, wie die Tangenten der Elevationswinkel, und folglich verhalten ſich auch die Quadrate der Brandröhrenlängen für einerley Wurfweite gegen einander, wie die Tangenten der Elevationswinkel.** Denn es iſt $t^2 = \frac{b.\text{tang}m}{g}$, und für die nämliche

Wurf-

Wurfweite unter einem anderen Elevationswinkel M iſt $T^2 = \frac{b.\mathrm{tang} M}{g}$; folglich $t^2 : T^2 = \mathrm{tang}\, m : \mathrm{tang}\, M$; es iſt aber auch $t^2 : T^2 = l^2 : L^2$; folglich auch $l^2 : L^2 = \mathrm{tang}\, m : \mathrm{tang}\, M$. Fig. 19

VIII. **Bey einerley anfänglichen Geſchwindigkeit unter verſchiedenen Elevationswinkeln verhalten ſich die Dauerzeiten der Bewegung, und auch die erforderlichen Längen der Brandröhren gegeneinander, wie die Sinus der Elevationswinkel.** Dieſes giebt die Formel $t = \frac{c.\sin m}{g}$ zu erkennen.

IX. Es iſt vermög (§. 76. I.) die größte Erhöhung $KL = \frac{1}{4}BT = \frac{1}{4}b.\mathrm{tang} m$, oder $KL = \frac{c^2.\sin^2 m}{4g}$, wenn man ſtatt b den Werth $\frac{c^2.\sin 2m}{2g}$ ſetzet. Eben dieſen Ausdruck für die größte Erhöhung findet man, wenn man das Differenziale der Fundamentalgleichung $y = \frac{c^2 x \sin m.\cos m - g x^2}{c^2.\cos^2 m}$ entwickelt, und ſelbes $= 0$ ſetzet, es iſt nämlich $dy = \frac{c^2 dx.\sin m.\cos m - 2 g x dx}{c^2.\cos^2 m} = 0$ bey dem größten Werthe der Ordinate y; daraus folgt $x = \frac{c^2.\sin m.\cos m}{2g}$; ſubſtituiret man nun dieſen Werth für x in der vorigen Gleichung, ſo iſt die größte Ordinate y, nämlich die größte Erhöhung

$$KL = \frac{c^4.\sin^2 m.\cos^2 m}{2c^2 g.\cos^2 m} - \frac{c^4 g \sin^2 m.\cos^2 m}{4c^4 g^2.\cos^2 m} = \frac{c^2.\sin^2 m}{4g}.$$

Fig. 19 **Anmerkung.** Nach der Formel $KL = \frac{1}{4}b.\tan m$, läßt ſich die größte Erhöhung der Kanonkugeln bey dem K. K. Feldgeſchütze für die Richtung über die zwey höchſten Punkte des Metalles beſtimmen; denn es iſt bey dieſer Richtung die Achſe der Kanone um $0°36'$ gegen die Richtungs- oder Ziellinie aufwärts geneigt, nämlich $m = 0°36'$, und $\tan m = \tan 0°36' = 0{,}01018$; ferner iſt in dieſem Falle die Schußweite $b = 200$ Klafter aus Verſuchen bekannt; folglich iſt die größte Erhöhung $= \frac{1}{4}.200.0{,}01018 = 0{,}509$ Klafter $= 3$ Fuß beynahe, wozu man noch die Erhöhung der Kanone $= 3\frac{1}{4}$ Fuß addiren muß, um die größte Erhöhung über die horizontale Fläche, worauf die Kanone ſtehet, zu erhalten; dieſe ganze Erhöhung beträgt demnach nicht mehr als $6\frac{1}{2}$ Fuß, und zwar auf der Hälfte der Schußweite. In der widerſtehenden Luft beträgt in einem ſolchen Falle dieſe Erhöhung etwas weniges mehr als $6\frac{1}{2}$ Fuß, auch iſt die zur größten Ordinate zugehörige Abſciſſe etwas gröſſer als die Hälfte der horizontalen Schußweite, wie es weiter unten zu erſehen ſeyn wird.

§. 81.

Die Formel $c^2 = \frac{2bg}{\sin 2m}$ zeigt an, wie man aus der Wurfweite und aus dem Elevationswinkel die anfängliche Geſchwindigkeit berechnen könne. Da nun bey einer nämlichen anfänglichen Geſchwindigkeit, oder bey einerley Ladung, unter $45°$ die möglichſt größte Wurfweite erreichet wird, und dabey $\sin 2.45°$ rational iſt, ſo iſt eine ſolche Wurfweite ſehr bequem um dadurch die anfängliche Geſchwindigkeit des geworfenen Körpers auszudrücken. Es ſey z. B. bey einer gewiſſen Ladung die anfängliche Geſchwindigkeit $= c$, und unter $45°$

die dazugehörige Wurfweite $= a$, ſo iſt $c^2 = 2ag$; man ſubſtituire dieſen Werth in den bereits entwickelten Formeln, ſo iſt bey der nämlichen Ladung Fig. 19

I. Unter jedem Elevationswinkel der Parameter des Durchmeſſers in dem Wurforte $p = 2a$, weil vermög (§. 76. I.) der Parameter $p = \frac{c^2}{g}$ iſt.

II. Unter dem Elevationswinkel m die Fundamentalgleichung für die Bahn $y = x.\text{tang}m - \frac{x^2}{2a.\cos^2 m}$,

oder $y = \frac{ax.\sin 2m - x^2}{a(1 + \cos 2m)}$,

III. Die Wurfweite $b = a.\sin 2m$,

IV. Die Dauerzeit $t = \sin m.\sqrt{\frac{2a}{g}}$,

V. Die größte Erhöhung $= \frac{1}{2}a.\sin^2 m$.

§. 82.

Aufgabe. **Es iſt die horizontale Entfernung AD eines Gegenſtandes E von dem Orte des Pöllers A nebſt der Abweichung ED dieſes Gegenſtandes von der Horizontallinie AB, oder der Abweichungswinkel DAE bekannt; dieſer Gegenſtand iſt mit einer gegebenen Ladung, die nämlich unter 45° eine bekannte Wurfweite $= a$ giebt, zu bewerfen; man ſoll den dazugehörigen Elevationswinkel BAT $= m$ beſtimmen.**

Erſte Auflöſ. Es ſey die horizontale Entfernung AD $= b$, und der Abweichungswinkel DAE $= n$, ſo iſt die Abweichung DE $= b.\text{tang}n$ für ſintot $= 1$; man ſubſtituire nun b für x, und $b.\text{tang}n$ für y in

der

Fig. 19 der Fundamentalgleichung $y = \frac{ax.\sin 2m - x^2}{a(1+\cos 2m)}$, ſo iſt

$$b.\text{tang}\,n = \frac{ab.\sin 2m - b^2}{a(1+\cos 2m)};$$

daraus folgt $\sin 2m.\cos n - \cos 2m.\sin n = \frac{b.\cos n}{a} + \sin n$,

und endlich $\sin(2m-n) = \frac{b.\cos n}{a} + \sin n$,

eine Formel, wodurch ſich der geſuchte Elevationswinkel ſehr leicht berechnen läßt. Die Rechnung iſt in dergleichen Fällen hinlänglich genau, wenn man die Sinus nur mit 3 oder höchſtens mit 4 Ziffern in die Rechnung nimmt.

Es ſey. z. B. die horizontale Entfernung AD $= b = 345$ Klafter, der Abweichungswinkel DAE $= n = 4°58'$, und die Ladung von der Beſchaffenheit, daß ſie unter 45° eine horizontale Wurfweite $a = 410$ Klafter gebe,

ſo iſt $\frac{b.\cos n}{a} = \frac{345 \times 0{,}9962}{410} = 0{,}8382$

dazu addirt $\sin n = \sin 4°58' = 0{,}0866$

$\sin(2m-n) = 0{,}9248$

folglich $2m-n = 67°\ 38'$, oder $2m-n = 112°\ 22'$

dazu addirt $n = 4\ \ 58$ $\quad$ $4\ \ 58$

giebt $2m = 72\ \ 36$ oder $2m = 117\ \ 20$

und endlich $m = 36\ \ 18$ oder $m = 58\ \ 40$

man muß demnach mit der gegebenen Ladung den Gegenſtand E unter dem Elevationswinkel BAT $= 36°18'$, oder BAT $= 58°40'$ = bewerfen.

Wenn der zu bewerfende Gegenſtand unter dem Horizonte AB z. B. in G ſich befindet, ſo iſt ſeine Abweichung FG negativ, alſo iſt auch der Abweichungswin-

Fig. 19 winkel **FAG** $= n$, und auch ſin n negativ, hingegen $\cos n$ poſitiv; es iſt demnach in einem ſolchen Falle die Formel für den Elevationswinkel folgende; $\sin(2m+n) = \frac{b \,.\, \cos n}{a} - \sin n$, welche man auch findet, wenn man ſo wie ehevor in der Fundamentalgleichung b für x, und $- b \operatorname{tang} n$ für y ſetzet, allwo b die horizontale Entfernung **AF** bedeutet. Setzet man $n = 0$, ſo iſt $\sin 2m = \frac{a}{b}$, ſo wie es die Formel für die horizontale Wurfweite $b = a . \sin 2m$ giebt. Wenn bey dergleichen Rechnungen $\sin(2m \mp n)$, oder im Horizonte $\sin 2m$ gröſſer als ſintot ausfällt, ſo iſt dieſes ein Zeichen, daß die gegebene Ladung zu klein ſey.

Zweyte Auflöſung. Es ſey die horizontale Entfernung **AD** $= b$, und die Abweichung **DE** $= + c$, wenn ſie eine Erhöhung iſt, oder die Abweichung **FG** $= - c$, wenn ſie eine Vertiefung iſt, und die zur gegebenen Ladung zugehörige gröſte Wurfweite im Horizonte ſey $= a$, der geſuchte Elevationswinkel **BAT** aber ſey $= m$; man ſubſtituire nun $\pm c$ für y, und b für x in der Fundamentalgleichung

$$y = x \operatorname{tang} m - \frac{x^2}{2a.\cos^2 m},$$

ſo iſt $\pm c = b . \operatorname{tang} m - \frac{b^2}{2a.\cos^2 m}$,

oder $\pm 2ac = 2ab . \operatorname{tang} m - b^2 . \sec^2 m$,

oder auch $\pm 2ac = 2ab . \operatorname{tang} m - b^2 . (1 + \operatorname{tang}^2 m)$;

folglich $\operatorname{tang} m = \frac{a \pm \sqrt{[a^2 - (b^2 \pm 2ac)]}}{b}$,

die Gleichung, woraus ſich der geſuchte Elevationswinkel berechnen läßt. Wenn bey der Erhöhung die Gröſſe $(b^2 + 2ac)$, oder bey der Vertiefung die Gröſſe $(b^2 - 2ac)$

Fig. 20 gröſſer als a^2 ausfällt, ſo iſt tang m unmöglich, und zeiget an, daß die gegebene Ladung zu klein ſey.

Dritte Auflöſ. Durch Verzeichnung. Fig. 20.

Man verzeichne nach einem beliebigen Maaßſtabe eine Gerade AD = der horizontalen Entfernung des zu bewerfenden Gegenſtandes, errichte in D eine Senkrechte DE = der Abweichung eben dieſes Gegenſtandes von dem Horizonte AB, errichte auch aus A eine Senkrechte AC = der Hälfte der größten Wurfweite, welche der gegebenen Ladung entſpricht, führe aus C eine Parallele CL zu AB, und verlängere DE bis L; ſodann ziehe man aus A mit AC den Kreisbogen CFf, und aus E mit EL den Kreisbogen LFf; endlich halbire man CF in T, oder Cf in t, ſo iſt AT oder At die geſuchte Richtungslinie, nämlich der Winkel BAT oder BAt iſt der geſuchte Elevationswinkel von der Horizontallinie gerechnet, und CAT oder CAt iſt der Neigungswinkel gegen die vertikallinie AC, deſſen Anzahl der Grade ſich nun mittelſt eines Transporteurs abzählen läßt.

Folgende Betrachtung führet zu dieſer ſehr einfachen Verzeichnung, und giebt ihre Richtigkeit zu erkennen. Es ſey AME die Bahn, welche der geworfene Körper nehmen muß um nach E zu kommen; dieſe Bahn iſt eine Parabel, AP ein Durchmeſſer derſelben, und die geſuchte Richtungslinie AT berühret ſolche in A. Bey der Beſtimmung des geſuchten Elevationswinkels BAT kömmt es nun bloß darauf an, daß man aus den bekannten Dingen die Lage der Tangente AT beſtimme; wäre der Brennpunkt F der Parabel AME bekannt, ſo könnte die Tangente gar leicht gezogen werde; wenn man nämlich die Gerade CF zieht, und den Winkel CAF oder den Bogen CF durch die Gerade AT halbiret, ſo wird ſelbe vermög (526) in dem Punkte A die Parabel AME berühren. Der Brennpunkt F der Parallel AME läßt ſich

Fig. 20 ſich auf folgende Art beſtimmen; der Parameter des Durchmeſſers AP iſt vermög (§. 81. I.) $p = 2a$, und $\frac{1}{4}p = \frac{1}{2}a$, nämlich der vierte Theil dieſes Parameters iſt gleich der Hälfte der größten Wurfweite, welche zu der gegebenen Ladung gehöret; nun iſt vermög (529) der 4te Theil des Parameters eines Durchmeſſers dem Abſtande des Brenpunktes F von dem Scheitel A des Durchmeſſers, und auch dem Abſtande des Punktes A von der Leitlinie gleich; es iſt alſo der Abſtand des Brennpunktes, und auch der Abſtand der Leitlinie von dem Punkte A der halben größten Wurfweite gleich; wenn man demnach aus A mit dem Halbmeſſer AC, welcher der halben größten Wurfweite gleich iſt, einen Kreisbogen AFf zieht, ſo liegt der Brennpunkt in dieſem Kreisbogen, und eine aus C auf AC ſenkrecht geführte Gerade CL iſt die Leitlinie der Parabel, welche der geworfene Körper zu beſchreiben hat, um von A nach E zu gelangen: E iſt auch ein Punkt dieſer nämlichen Parabel, und iſt folglich von dem Brennpunkte eben ſo weit als von der Leitlinie CL entfernet; wenn man demnach aus E mit dem Halbmeſſer EL, welcher dem Abſtande des Punktes E von der Leitlinie gleich iſt, wieder einen Kreisbogen LFf beſchreibet, ſo wird der Brennpunkt auch in dieſem Kreisbogen ſich befinden; der Brennpunkt befindet ſich alſo in beyden Kreisbögen CFf und LFf zugleich, und iſt folglich in ihrem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte anzutreffen. Ergeben ſich nun bey einer ſolchen Verzeichnung zwey verſchiedene Durchſchnittspunkte F und f, ſo ſind zwey Parabeln möglich, welche beyde durch A und E gehen; die obere hat F zum Brennpunkte, und AT berühret ſolche in A, die untere aber hat f zum Brennpunkte, und At berühret ſolche in A, wenn die Winkel CAF und CAf, oder die Bögen CF und Cf in T und t halbiret ſind; der Körper kann demnach mit der gegebenen Ladung unter den zwey verſchiedenen

Ele-

Fig. 20 Elevationswinkeln BAT und BAt nach E geworfen werden. Wenn die zwey gezogenen Kreisbögen einander gar nicht durchſchneiden, ſo iſt dieſes ein Zeichen, daß die angenommene Ladung zu klein ſey.

Durch eben dieſe Verzeichnung läßt ſich auch der Elevationswinkel finden, wenn ein Gegenſtand im Horizonte des Wurfortes mit der gegebenen Ladung zu bewerfen iſt. Es iſt nicht ſchwer verſchiedene Inſtrumente anzugeben, wodurch dieſe Verzeichnung noch um ein merkliches erleichtert wird; das weſentlichſte bey dergleichen Inſtrumenten beſteht darin, daß man (um das Halbiren zu vermeiden und den Transporteur entbehrlich zu machen) einen Viertheil Kreis CFG nicht in 90° ſondern in 45 gleiche Theile theilet, und ein um A bewegliches Lineal anbrigt.

§. 83.

Bey der Auflöſung der angeführten Aufgabe iſt es erforderlich aus einer Wurftafel, worinen für verſchiedene horizontale Wurfweiten die dazu erforderlichen Ladungen anzutreffen ſind, eine ſolche Ladung anzunehmen, daß die dazugehörige größte Wurfweite die Auflöſung möglich mache. Man kann in dergleichen Fällen auch den Elevationswinkel für bekannt annehmen, **und zwar einen hohen**, wenn mit den Bomben Gewölbe einzuwerfen ſind, **hingegen einen niedrigen**, wenn die geborſtenen Bomben die feindliche Mannſchaft beunruhigen oder einige verbrennliche Dinge in Brand ſetzen ſollen, und ſuchet ſodann zu dem angenommenen Elevationswinkel die zugehörige Ladung auf folgende Art.

Aus dem angenommenen Elevationswinkel BAT Fig. 20, **aus der horizontalen Entfernung** AD, **und aus der Erhöhung oder Ver-**

tie-

tiefung des zu bewerfenden Gegenſtandes DE Fig. berechne man die ganze horizontale Wurf- 20 weite AB, und ſehe in den Wurftafeln nach, welche Ladung unter dem angenommenen Elevationswinkel zu dieſer berechneten Wurfweite gehöre.

Aus dem angenommenen Elevationswinkel BAT $= m$, aus der Entfernung AD $= b$, und aus der Abweichung des Zieles DE $= \pm c$, läßt ſich die horizontale Wurfweite AB $= u$ mittelſt nachſtehenden Formel berechnen $u = \frac{b.\operatorname{tang} m \times b}{b.\operatorname{tang} m \mp c}$.

Denn vermög (§. 81. II. u. III.) iſt $\pm c = b.\operatorname{tang} m - \frac{b^2}{2a.\cos^2 m}$, und die horizontale Wurfweite $u = a.\sin 2m$; aus der 2ten Gleichung folgt $2a = \frac{2u}{\sin 2m} = \frac{u}{\sin m.\cos m}$; ſubſtituiret man nun dieſen Werth in der erſten Gleichung für $2a$, ſo findet man nach vorgenommener Reduktion $u = \frac{b^2}{b \mp c.\cot m} = \frac{b.\operatorname{tang} m \times b}{b.\operatorname{tang} m \mp c}$, allwo das obere Zeichen — bey einem erhöheten, und das untere + bey einem geſenkten Ziele zu gebrauchen iſt.

Es ſey z. B. $b = 400$, $c = 50$ Klafter eine Vertiefung, und $m = 30^\circ$, ſo iſt $\operatorname{tang} m = 0{,}577$; folglich $u = \frac{400.0{,}577 \times 400}{400.0{,}577 + 50} = 328$ Klafter.

Wenn der angenommene Elevationswinkel gröſſer als 45° und dabey die Abweichung des zu bewerfenden Gegenſtandes in Rückſicht ſeiner horizontalen Entfernung

Fig. ziemlich klein iſt, ſo iſt die geſuchte horizontale Wurfweite der bekannten horizontalen Entfernung des Zieles ziemlich genau gleich; es ſey z. B. $b = 500$, $c = 30$ Klafter eine Erhöhung, und der angenommene Elevationswinkel $m = 60°$, ſo iſt $\tan m = 1{,}732$, und folglich $u = 501{,}7$ Klafter; man kann demnach in dergleichen Fällen ſelbſt die horizontale Entfernung des Zieles für die Wurfweite anſehen, und in den Wurftafeln unter dem angenommenen Elevationswinkel die entſprechende Ladung ſuchen; eben dieſes giebt die gefundene Gleichung für u deutlich zu erkennen, wenn man ſie alſo anſchreibet $u = \frac{b}{1 + \frac{c}{b}.\cot m}$, nämlich $u = b$, weil in der angeführten Vorausſetzung $\frac{c}{b}.\cot m$ ein unbedeutender Bruch iſt.

I. Wenn man c in der gefundenen Formel $u = \frac{b^2}{b - c.\cot m}$ durch den Abweichungswinkel n ausdrückt, nämlich ſtatt c den Werth $b.\tan n$ ſetzet, ſo iſt

$$u = \frac{b}{1 - \tan n.\cot m} = \frac{b.\sin m.\cos n}{\sin m.\cos n - \cos m.\sin n}.$$

$$= \frac{b[\sin(m+n) + \sin(m-n)]}{2\sin(m-n)} = \frac{b.\sin m.\cos n}{\sin(m-n)}$$

bey einem erhöheten, und $u = \frac{b.\sin m.\cos n}{\sin(m+n)}$ bey einem geſenkten Ziele; wenn man aber den Richtwinkel von der Vertikallinie mit m bezeichnet, ſo iſt $u = \frac{b.\cos m.\cos n}{\cos(m \mp n)}$, oder $u = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b.\frac{\cos(m \mp n)}{\cos(m \pm n)}$.

Es

II. Es kann auch der Fall vorkommen, daß auſſer dem Wurforte noch zwey Punkte gegeben ſind, durch welche die Bahn eines geworfenen Körpers durchgehen ſoll, wozu der Elevationswinkel zu beſtimmen iſt. Z. B. beym Ricoſchettiren iſt die horizontale Entfernung $= b$ des höchſten Punktes der Bruſtwehre, die Erhöhung dieſes Punktes $= c$ über den Horizont der Kanone, ferner die Erhöhung der Bruſtwehre über den Wallgang $= q$, und die Entfernung eines Punktes auf dem Wallgange hinter der Bruſtwehre $= p$ gegeben; man ſoll den Elevationswinkel $= m$ derjenigen Bahn finden, welche durch den höchſten Punkt der Bruſtwehre, und durch den gegebenen Punkt des Wallganges durchgeht. Dieſer Elevationswinkel läßt ſich auf folgende Art beſtimmen; für die horizontale Entfernung $= b$ und für die Erhöhung $= c$ bey dem Elevationswinkel $= m$ iſt die horizontale Wurfweite vermög vorhergehenden $u = \frac{b^2}{b - c.\cot m}$; ferner iſt für die horizontale Entfernung $= (b + p)$, und für die Erhöhung $= (c - q)$ bey dem nämlichen Elevationswinkel die nämliche horizontale Wurfweite Fig.

$$u = \frac{(b+p)^2}{(b+p) - (c-q).\cot m};$$ folglich iſt

$$\frac{b^2}{b - c.\cot m} = \frac{(b+p)^2}{b + p - (c-q).\cot m};$$ daraus folgt

$$\text{tang}\, m = \frac{cp^2 + b^2q + 2bcp}{bp^2 + b^2p},$$ und ferner durch die Diviſion $\text{tang}\, m = \frac{c}{b} + \frac{q}{p} + \frac{c-q}{b+p}$; ſetzet man aber den Richtwinkel von der Vertikallinie $= m$, ſo iſt

$$\text{tang}\, m = 1 : (\frac{c}{b} + \frac{q}{p} + \frac{c-q}{b+p}).$$

Fig. Nun ſetze man in der vorigen Formel

$$u = \frac{b^2}{b - c.\cot m} = \frac{b^2.\mathrm{tang}\, m}{b.\mathrm{tang}\, m - c},$$ wo m vom Horizont gezählet wird, für tang m den gefundenen Werth, ſo iſt nach vorgenommener Reduktion die ganze horizontale Wurfweite

$$u = b + p + \frac{(c - q)}{(\frac{c}{b} + \frac{q}{p})}.$$

§. 84.

Die Lehre von der freyen Bewegung geworfener ſchwerer Körper heißt insgemein **die paraboliſche Theorie**; dieſe müßte mit der Erfahrung genau übereinſtimmen, wenn die geworfenen Körper wirklich ſich frey bewegen könnten, das iſt wenn die Luft ihre Bewegung nicht verzögerte, und wenn es dabey möglich wäre mehreren vollkommen gleichen Körpern vollkommen einerley anfängliche Geſchwindigkeit nach beliebigen Richtungen beyzubringen.

Der Widerſtand der Luft hat auf die Bewegung geworfener Körper einen ſo gewaltigen Einfluß, daß man bey der ungemein ſchnellen Bewegung abgeſchoſſener Kanonkugeln die paraboliſche Theorie gar nicht anwenden kann. Man hat z. B. durch genaue Verſuche zu la Fere in Frankreich im Jahr 1740 mit einer 24pf. Kanone eine Schußweite = 1675 Klafter mit 15°, und eine Schußweite = 820 Klafter mit 4° Elevation bey einerley Ladung erreichet; wenn man nun aus der Schußweite unter 15° jene unter 4° nach (§. 80. I.) berechnet, ſo findet man nur 467 Klafter, welche man für gar keine Annäherung zu der beobachteten Schußweite 820 Klafter anſehen kann.

Auf

Auf die Bewegung der Bomben, die um vieles langſamer iſt als jene der abgeſchoſſenen Kanonkugeln, hat der Widerſtand der Luft keinen ſo gewaltigen Einfluß. Die Sätze (§. 80 und 82) lieſſen ſich beym Bombenwerfen mit guten Nutzen gebrauchen, wenn nur die Wurfweiten bey einerley Bomben, unter einerley Richtung, bey einerley Ladung des nämlichen Pulvers, bey einerley Zuſtande der Luft, nicht ſo gewaltig von einander verſchieden wären. Dieſe Verſchiedenheit ſowohl der Wurfweiten der Bomben als auch der Schußweiten der Kanonkugeln unter einerley Umſtänden können theils von der ungleichförmigen innerlichen Beſchaffenheit des Pulvers, theils von der ungleichen Entzündung deſſelben, theils auch und zwar hauptſächlich von dem groſſen Spielraume herrühren. Die Bomben und Kugeln werden nämlich im Herausfahren aus verſchiedenen zufälligen Urſachen an die eine Wand der Seele (der Aushöhlung) angeſchleudert, und dadurch nach der entgegengeſetzten Seite von ihrer wahren Richtung abgetrieben, welches die am Geſchütze öfters zurückgelaſſene ſehr ſichtbare Streifen an dem Metalle augenſcheinlich beſtätigen. Eben dieſes An- und Abprellen der Kanonkugeln und Bomben iſt die Haupturſache ihrer Abweichung von der Vertikalebene, worin die Bewegung geſchehen ſollte; dieſe Abweichung ſteigt zuweilen auf einen 15ten, auch ſogar auf einen 10ten Theil der Entfernung. Die allzugroſſen Unterſchiede in den Wurf- und Schußweiten bey einerley Ladung und Richtung, und die Abweichungen von der Vertikalebene können durch die Verminderung des gemeiniglich allzugroſſen Spielraumes einigermaſſen vermieden werden, wie es bey der franzöſiſchen Artillerie bereits geſchehen iſt. Bey langſamen Kanonenfeuer auf ſehr groſſe Entfernungen von 600 bis 1000 Klafter kann durch gehörige **Pflaſterung** der Kugeln Fig.

Fig. (ohngefähr ſo wie bey gezogenen Röhren) die Richtigkeit und Wirkſamkeit der Schüſſe um vieles befördert werden.

Wenn man beym Bombenwerfen aus mehreren Wurfweiten bey einerley Ladung und Elevation unter verſchiedenen Richtungen die mittleren Wurfweiten herauszieht, ſo ſtimmen ſolche Wurfweiten mit jenem aus der paraboliſchen Theorie abgeleiteten, und in der ausübenden Artillerie beym Bombenwerfen wirklich brauchbaren Satze (**daß ſich die Wurfweiten gegeneinander verhalten, wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel**) ziemlich überein, obſchon die Bahn eines geworfenen Körpers wegen dem Widerſtande der Luft niemals eine Parabel ſeyn kann, wie es in der Folge bey der Bewegung der feſten Körper in einem widerſtehenden Mittel zu erſehen ſeyn wird; man kann z. B. aus der bekannten **mittleren** Wurfweite unter einem bekannten Elevationswinkel durch dieſen Satz den Elevationswinkel berechnen, worunter ein Gegenſtand in einer gegebenen Entfernung mit der nämlichen Ladung zu bewerfen iſt; die Rechnung wird gar nicht merklich von der Erfahrung abweichen, wenn der berechnete Elevationswinkel von dem Elevationswinkel des Probwurfes nicht gar zu weit, etwann nicht über 20° verſchieden iſt. Auch kann man aus der Entfernung des Zieles, und aus dem Elevationswinkel, die Dauerzeit der Bahn hinlänglich zuverläſſig beſtimmen, um im erfoderlichen Falle die Länge der Brandröhre darnach einrichten zu können. Jedoch weil die Bahn eines geworfenen Körpers wegen dem Widerſtande der Luft keine Parabel ſeyn kann, ſo iſt man keineswegs aus der paraboliſchen Theorie berechtiget die zwey erwähnten Sätze in der ausübenden Artillerie für brauchbar anzunehmen, ſondern es muß erſt durch Verſuche ausgemacht werden, ob dieſe zwey Sätze durchaus in der Ausübung zu verwerfen, oder vielleicht in einigen Fällen mit Nutzen anzuwenden ſind. Fig.

§. 85.

Nachſtehende Tafel enthält die Vergleichung des aus der paraboliſchen Theorie abgeleiteten Satzes (**bey einerley Ladung und verſchiedener Richtung verhalten ſich die Wurfweiten gegen einander wie die Sinus der doppelten Elevationswinkel**) und die Vergleichung der Zeitberechnung mit der Erfahrung beym Bombenwerfen. Die Verſuche ſind aus Bezout Cours de Mathemat. Tom. IV. genommen; dieſe Verſuche wurden zu la Fere im Oktober 1771. auf Befehl des damaligen franz. Kriegsminiſters Marquis de Monteynard, unter der Oberaufſicht des Hrn. von Beauvoir Brigadier und oberſten Befehlshaber der Artillerieſchule, mit der möglichſten Sorgfalt und Genauigkeit angeſtellet. Die Bomben, deren man ſich bey dieſen Verſuchen bediente, hatten 11 Zoll 10 Linien des Pariſer Fußes im Durchmeſſer; das Gewicht derſelben die Erde dazu gerechnet, womit ſie gefüllet waren, betrug 142 Pfunde, und die Pulverladung $3\frac{3}{4}$ Pf. des Pariſer Gewichtes. Die Wurfweiten ſind in Pariſ. Klaftern ausgedrückt.

Die Wurfweiten in der 4ten Spalte ſind aus der mittleren Wurfweite 515 unter dem Elevationswinkel von 45° nach der Formel $b = 515 . \sin 2m$ berechnet. Die mittlere Wurfweite wird erhalten, wenn man alle einzelnen Wurfweiten bey einerley Ladung und Elevation zuſammen addiret, und dieſe Summe durch die Anzahl der Wurfweiten dividiret; man pflegt bey der Beſtimmung der mittleren Wurfweite die gar zu viel abweichenden Wurfweiten gänzlich auſſer Acht zu laſſen, und nur aus den am meiſten übereinſtimmenden das Mittel zu nehmen.

Fig. Die Wurfweiten in der 5ten Spalte hat H. **Bezout** nach der Theorie des Widerſtandes der Luft berechnet, die ſich allhier noch nicht vortragen läßt. Die Wurfweiten in der 6ten Spalte ſind aus der Bezoutiſchen Wurfweite 547 unter 45° nach der Formel $b = 547 \cdot \sin 2m$ berechnet. Und endlich ſind die Dauerzeiten in der 8ten Spalte aus der Dauerzeit 15,2 Sek. unter 45° nach der Formel $t = \frac{15,2}{\sin 45^\circ} \cdot \sin m$ beſtimmet (§. 80. VIII.); die Dauerzeiten aber in der letzten Spalte ſind aus den dazugehörigen mittleren Wurfweiten, und aus den Elevationswinkeln mittelſt der Formel $t = \sqrt{\frac{b . \operatorname{tang} m}{g}}$ abgeleit (§. 79. III.), allwo man $g = 15,1$ Pariſ. Fuß geſetzet hat.

Ver-

Vergleichung der zwey vorerwähnten aus der paraboliſchen Theorie abgeleiteteten Sätze mit der Erfahrung beym Bombenwerfen.

Fig.

Elevation vom Horizonte.	Wurfweiten.					Dauerzeiten.		
	beobachtete		berechnete			beobachtete	berechnete	
	bey den Verſuchen.	mittlere.	aus der mittleren unter 45°.	in der widerſt Luft v. Bezout	aus der Bezoutiſchen unt. 45°	bey den Verſuchen.	aus der Zeit unter 45°.	aus der eigenen Wurfweite.
10°	257 249 221 228	239	176	227	187	4 Sek.	$3\frac{3}{4}$ Sek.	4 Sek.
20	440 424 394 398	414	331	396	351	$7\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{5}$	$7\frac{3}{4}$
30	451 516 537 492	499	446	500	474	$10\frac{3}{4}$	$10\frac{3}{4}$	$10\frac{5}{7}$
40	569 575 574 544 577	568	507	547	539	$14\frac{2}{5}$	$13\frac{5}{8}$	$13\frac{3}{4}$
45	490 536 505 498 554	515	515	547	547	$15\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{5}$	$14\frac{1}{5}$
50	481 512 488 507	497	507	534	539	16	$16\frac{2}{3}$	$15\frac{4}{11}$
60	457 424 457 448	446	446	467	474	$19\frac{1}{3}$	19	$17\frac{1}{2}$
70	349 297 349 328	331	331	348	351	22	$20\frac{1}{5}$	19
75	298 265 261 256	270	258	*277	274	22	$20\frac{3}{4}$	20

§. 86.

Es iſt aus dieſer Vergleichungstafel zu erſehen, daß die Wurfweiten bey den Elevationswinkeln, welche kleiner ſind als 45°, von der paraboliſchen Theorie beträchtlich abweichen; die Abirrungen werden bey zunehmenden Elevationswinkeln immer kleiner, ſo daß über 45° die nach dem angeführten Satze berechneten Wurfweiten mit der Erfahrung beynahe genau übereinſtimmen. **Ja ſelbſt die vom Herrn Bezout nach der Theorie des Widerſtandes ungemein beſchwerlich berechneten Wurfweiten über 45° ſtehen mit den Sinuſen der doppelten Elevationswinkel in einem ſo genauen Verhältniſſe, daß die von der Rechnung herrührenden Abirrungen um vieles kleiner ſind, als die gewöhnlichſten Unterſchiede der Wurfweiten bey einerley Ladung und Elevation.** Die Berechnung der Zeit bey den Elevationswinkeln unter 45° ſtimmet mit den Verſuchen beynahe vollkommen überein; über 45° iſt die Uebereinſtimmung nicht mehr ſo genau, ſie iſt aber doch noch alſo beſchaffen, daß ſich im erforderlichen Falle die Länge der Brandröhre ſo ziemlich darnach einrichten läßt.

Es iſt allerdings daran gelegen, daß man genau unterſuche, ob beym Bombenwerfen die Abirrungen der paraboliſchen Theorie von der Erfahrung bey kleinen Ladungen noch unbeträchtlicher werden, oder ob ſie vielleicht noch gröſſer anwachſen, als in der angeführten Vergleichungstafel. Jene, die den Widerſtand der Luft kennen, aber dabey auf die Lage und Entzündung des Pulvers und auf andere Umſtände nicht denken, würden das erſte behaupten; allein die Erfahrung zeigt oft das Gegentheil. Vermög einem allhier im Auguſtmonath

1783

1783 abgeführten Verſuche hat man mit einem 60pfündigen Pöller bey einer Ladung von $1\frac{1}{2}$ Pf. Wienergew. unter dem Elevationswinkel von 45° mit 4 auf einander folgenden Würfen die Wurfweiten 146; 152; 142; 145 Wienerklafter erhalten; daraus folgt die mittlere Wurfweite = 146; bey der nämlichen Ladung unter dem Elevationswinkel von 65° (vom Horizonte gezählet) waren bey 4 auf einander folgenden Würfen die Wurfweiten 156; 135; 158; 140; daraus iſt das Mittel = 147; und endlich waren unter 75° (auch vom Horizonte gezählet) die Wurfweiten = 88; 95; 99; 95; woraus die mittlere Wurfweite = 94 Wienerklafter folgt; bey dem erſten Elevationswinkel ware die beobachtete mittlere Dauerzeit = $7\frac{1}{2}$, bey dem 2ten = $11\frac{1}{2}$, und bey dem 3ten = 12 Sek. die Bombe hatte im Durchmeſſer 11 Zoll 3 Linien des W. F. und wog ſamt der Erde, womit ſie gefüllet ware, 102 Pfunde Wien. Gew. Die Ladung wurde auf das genaueſte abgewogen; das Pulver ſchlug auf der bey uns gebräuchlichen Pulverprobe 57 Grade; man ließ ſelbes bey vertikaler Stellung des Pöllers durch einen Trichter in die Kammer laufen, ſetzte ſodann die Bombe ein, ohne vorher des Pulver zu bedecken, und gab dem Pöller die gehörige Neigung. Die Pöllerkammer beſtund aus einem Cylinder mit einer daran befindlichen Halbkugel; des Cylinders Durchmeſſer ware = 6 Zoll 2 Linien, und ſeine Höhe = 4 Zoll 1 Lin.

Ich würde es nicht glauben, daß die Wurfweite unter 65° gröſſer ſeyn könnte als unter 45°, wenn ich nicht ſelbſt ein Augenzeuge bey dem Verſuche, und der daran verwendeten möglichſten Sorgfalt geweſen wäre, indem dieſes ſowohl der paraboliſchen als auch der Theorie des Widerſtandes, und zwar der letztern noch mehr als der erſteren widerſpricht; denn es wird weiter unten zu erſehen ſeyn, daß bey der Theorie des Widerſtan-

Fig. des der Elevationswinkel der größten Wurfweite kleiner als 45° ſey. In der Folge bey der Bewegung der Körper in einem widerſtehenden Mittel wird es zu erſehen ſeyn, daß die Theorie des Widerſtandes auf das Bombenwerfen ſich gar nicht anwenden laſſe; die Anwendung dieſer Theorie weichet von der Erfahrung noch mehr ab als die Anwendung der paraboliſchen; denn nach der Theorie des Widerſtandes iſt bey einerley Ladung die Wurfweite unter 45° **gröſſer** als die doppelte Wurfweite unter 75°; (in vorſtehender Vergleichungstafel iſt zwar die Bezoutiſche Wurfweite = 547 unter 45° kleiner als die doppelte Wurfweite = 2.277 = 554 unter 75°, welches aber von einem Rechnungsfehler herrühret); nach der paraboliſchen Theorie iſt die Wurfweite unter 45° **gleich** der doppelten Wurfweite unter 75°; und bey allen oft und genau wiederholten Verſuchen iſt die Wurfweite unter 45° gemeiniglich **kleiner** als die doppelte Wurfweite unter 75°. Die Urſache liegt darin: die Anwendung der Theorie ſetzet voraus, daß eine nämliche Ladung einer nämlichen Bombe bey einem nämlichen Zuſtande der Luft unter verſchiedenen Elevationswinkeln immer eine nämliche anfängliche Geſchwindigkeit beybringe; dieſe Vorausſetzung findet bey den Bombenpöllern nicht ſtatt; bey den Pöllern iſt die von einer nämlichen Ladung bey einerley Zuſtande der Luft einer nämlichen Bombe unter verſchiedenen Elevationswinkeln ertheilte anfängliche Geſchwindigkeit veränderlich; dieſe Geſchwindigkeit wächſt nach einem unbekannten, bey jeder Ladung verſchiedenen Geſetze, bey wachſenden Elevationswinkeln; ſie iſt gröſſer unter 65° als unter 45°, und noch gröſſer unter 75°, wovon man ſich in der Folge überzeugen kann, wenn man aus den unter verſchiedenen Elevationswinkeln mit einerley Ladung durch Verſuche beſtimmten mittleren

Wurfweiten die erlangten anfänglichen Geſchwindigkeiten nach der Theorie des Widerſtandes berechnet. Die Urſache der angeführten Veränderung der anfänglichen Geſchwindigkeit unter verſchiedenen Elevationswinkeln mag zum Theil in der bey verſchiedenen Elevationswinkeln auch verſchiedenen Lage der nämlichen Ladung liegen, und könnte vielleicht durch irgend eine andere Art der Ladung zum Theil gehoben werden. So auſſerordentliche Abirrungen, als die vorerwähnten waren, der Theorie von der Erfahrung bey kleinen Ladungen und ſo weiten Pöllerkammern, wie die unſrigen ſind, werden größten Theils gehoben, wenn man das Pulver nicht ganz entblöſſet in die Kammer giebt, wie es bey uns vormals geſchah, ſondern ſelbes mit einem ziemlich ſtarken Deckel von Kühehaaren bedecket, damit es bey der Neigung des Pöllers ſeine erſte Lage nicht verändern könne, oder noch beſſer, wenn man das Pulver in eine Patrone von Leinwand ſchüttet, und den Ueberreſt der Patrone entweder mit Sägſpänen, oder mit Kühehaaren, oder ſonſt mit einer ſchicklichen Materie dergeſtalt ergänzet, daß die ganze Kammer davon erfüllet wird; dergleichen Patronen befördern den Trieb der kleinen Ladungen in weiten Pöllerkammern auf eine ganz unglaubliche Art; man hat allhier im Auguſtmonath 1784 bey den Lagerübungen mit einem 30pfündigen Pöller unter dem Elevationswinkel von 60° mit einer Ladung von 24 Loth **ohne Patronen** nur eine Wurfweite = 44 Wienerklafter erreichet; bey dem nämlichen Pöller unter dem nämlichen Elevationswinkel bey der Ladung von 22 Loth des nämlichen ziemlich ſchwachen Pulvers **jedoch mit Patronen** ware die Wurfweite = 145 Wienerklafter. Fig.

Vielleicht würden runde Scheiben von Pappendeckel, die etwas ſtrenge in die Pöllerkammer paſſen, den Trieb bey kleinen Ladungen eben ſo gut befördern, als die

Fig. angeführten Patronen. Bey erforderlicher Abänderung der Ladung könnten die Scheiben einen merklichen Vorzug vor den Patronen haben.

§. 87.

Unſere Pöller ſind alſo beſchaffen, daß man ſie auf einer horizontalen Bettung von der vertikalen Lage nicht weiter als bis 45° herabſenken kann; unſere Elevationswinkel ſind zwiſchen 45° und 75°, oder von der Vertikallinie zwiſchen 15° und 45° beſchränket; denn es iſt nicht rathſam unter einem Elevationswinkel über 75° Bomben zu werfen, weil ſie ſonſt gar zu hoch ſteigen, und auf dieſe Art von der vertikalen Richtungsebene ſehr oft gar zu weit abweichen. Vermög der angeführten Vergleichungstafel ſtimmet bey den Elevationswinkeln über 45° die paraboliſche Theorie im Bombenwerfen mit der Erfahrung ziemlich genau überein; die Abirrungen dieſer Theorie von der Erfahrung ſind von der Beſchaffenheit, daß ſie ſich gar nicht durch Rechnung, am wenigſten durch jene vom Widerſtande der Luft, heben laſſen. Man kann demnach bey unſeren Pöllern die paraboliſche Theorie zum Grunde legen, und muß den Bedacht dahin nehmen, auf was für eine Art ſehr geſchmeidige Hilfstafeln einzurichten wären, wodurch die Rechnung beym Bombenwerfen auf das möglichſte abgekürzet würde. Ich will darüber meine Gedanken eröffnen, die in folgenden beſtehen.

Erſtens müßten die Hilfstafeln zum Bombenwerfen eine Tafel enthalten, wodurch man mit Beyhilfe eines kleinen Winkelmeſſers (Aſtrolabium) die Entfernungen des zu bewerfenden Gegenſtandes ſehr geſchwind, und dabey zum Artilleriegebrauch mit der erforderlichen Genauigkeit beſtimmen könnte. Die erſte von folgenden Hilfstafeln iſt zu dieſem Gebrauche gewidmet; die dazu

noth-

Fig.

nothwendigen Aſtrolabien verfertiget der hieſige Mechanicus Voigtlænder in groſſer Vollkommenheit; ſie ſind ſehr geſchmeidig, haben nicht mehr als 7 Zoll im Durchmeſſer, und zeigen durch Beyhilfe des Verniers die Winkel von 5 zu 5 Minuten. Mittelſt eines ſolchen Winkelmeſſers, den man allenthalben ohne Beſchwerde bey ſich führen kann, und mittelſt der folgenden erſten Tafel laſſen ſich durch eine leicht abzumeſſende Grundlinie, z. B. nur von 50 Klafter, die größten Entfernungen, die beym Artilleriegebrauch vorkommen, beynahe eben ſo geſchwind und dabey um vieles genauer beſtimmen, als mit dem beſten ungemein koſtbaren **Diſtanztubus.**

Zweytens müßten die Hilfstafeln zum Bombenwerfen eine **eigentliche Wurftafel** enthalten, worin für die gebräuchlichen Pöller die zu verſchiedenen Ladungen gehörigen Wurfweiten bey einer mittleren Gattung des Pulvers unter drey oder vier verſchiedenen Richtwinkeln, z. B. 15°, 20°, 30°, 45° von der Vertikallinie gerechnet, anzutreffen wären. Die 2te von folgenden Hilfstafeln zeiget die Geſtalt und Einrichtung einer ſolchen Wurftafel an; ſie entſteht auf folgende Art. Bey jeder Gattung der gebräuchlichen Pöller müſſen wenigſtens unter zwey verſchiedenen Richtwinkeln z. B. unter 15° und 45° von der Vertikallinie, zu fünf oder ſechs verſchiedenen Ladungen eines nämlichen Pulvers die zugehörigen Wurfweiten durch genaue Verſuche beſtimmet werden, als z. B. bey dem 60pfündigen Pöller zu 1 Pf. 8 L., 1 Pf. 28 L., 2 Pf. 16 L., 3 Pf. 4 L., 3 Pf. 24 L., und 4 Pf. 12 L.; aus den durch Verſuche beſtimmten Wurfweiten, und aus den dazugehörigen Ladungen werden ſodann unter dem nämlichen Richtwinkel die Wurfweiten zu den übrigen

zwi-

Fig. zwiſchenliegenden Ladungen nach (§. 212.) oder durch ſonſt eine ſchickliche Einſchaltungsmethode berechnet, und in die Tafel eingetragen; die Wurfweiten unter den übrigen Richtwinkeln z. B. unter 20° und 30° können nach der paraboliſchen Theorie berechnet werden, daraus wird das Mittel genommen, und in die Tafel gehörig eingetragen; wenn nämlich unter 15° die mittlere Wurfweite $= a$, und unter 45° ſolche $= b$ geſetzet wird, ſo iſt unter dem Richtwinkel m ohne merklichen Fehler die mittlere Wurfweite $x = (a + \frac{1}{2}b).\sin 2m$.

Es ſey z. B. bey dem 60pfündigen Pöller unter 45° die erreichte mittlere Wurfweite mit 1 Pf. 8 Loth Pulver = 100, mit 1 Pf. 28 Loth = 325, mit 2 Pf. 16 Loth = 516, mit 3 Pf. 4 Loth = 687, mit 3 Pf. 24 Loth = 846, und mit 4 Pf. 12 Loth = 992 Klafter, ſo können für die übrigen Ladungen etwan von 4 zu 4 Loth von 1 Pf. 8 Loth angefangen unter dem nämlichen Elevationswinkel die entſprechenden Wurfweiten auf folgende Art berechnet werden. Man nehme im gegenwärtigen Falle 20 Lothe für die Einheit an, und ſetze die zu n 20fachen Lothen zugehörige Wurfweite $x = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5 + Fn^6$.

Die Coefficienten A, B, C, D, E, F laſſen ſich aus folgenden ſechs Gleichungen beſtimmen.

$$\begin{aligned}
100 &= 2A + 4B + 8C + 16D + 32E + 64F\\
325 &= 3A + 9B + 27C + 81D + 243E + 729F\\
516 &= 4A + 16B + 64C + 256D + 1024E + 4096F\\
687 &= 5A + 25B + 125C + 625D + 3125E + 15625F\\
846 &= 6A + 36B + 216C + 1296D + 7776E + 46656F\\
992 &= 7A + 49B + 343C + 2401D + 16807E + 117649F
\end{aligned}$$

weil vermög dem angenommenen Verſuche bey den Ladungen $n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$ die Wurfweiten 100; 325; 516; 687; 846; 992 ſtatt finden.

Man

Man findet nach vorgenommener Reduktion

$$A = -\frac{1121952}{2520},$$

$$B = +\frac{1223090}{2520},$$

$$C = -\frac{427965}{2520},$$

$$D = +\frac{77330}{2520},$$

$$E = -\frac{7083}{2520},$$

$$F = +\frac{260}{2520};$$

und folglich iſt die zu n 20fachen Lothen zugehörige Wurfweite

$$x = +\left(\frac{260n^6 + 77330n^4 + 1223090n^2}{2520}\right)$$

$$-\left(\frac{1121952n + 427965n^3 + 7083n^5}{2520}\right).$$

Setzet man nun in dieſer Formel nach der Ordnung $n = 2; 3; 4; 5; 6; 7$; ſo erhält man für die Wurfweiten x die nämlichen Zahlen, welche bey dem angenommenen Verſuche gefunden worden. Um die übrigen Wurfweiten von 1 Pfund 8 Loth, bis 4 Pfund 16 Loth von 4 zu 4 Loth zu erhalten, ſetze man in

Fig. dieſer Formel nach der Ordnung $n =$ 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8;...... 7,2.

Will man hingegen die Wurfweiten von 2 zu 2 Loth von 1 Pf. 8 Loth angefangen berechnen, ſo muß man in eben dieſer Formel nach der Ordnung $n =$ 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5;........7,1; 7,2; ſetzen, und die entſprechenden Werthe für x gehörig entwickeln.

Man kann in dieſem Falle auch die zu verſchiedenen Ladungen zugehörigen Wurfweiten gar leicht ohne merklichen Fehler mittelſt des Satzes einſchalten, **daß ſich die Differenzen der Ladungen gegeneinander verhalten wie die Differenzen der Wurfweiten.**

Drittens iſt eine Tafel für die Längen der Brandröhren erforderlich; die 3te Tafel iſt ein Muſter davon; ſie läßt ſich aus einem abgeführten Verſuche mittelſt der Rechnung ſehr leicht ableiten. Wenn man z. B. aus einem Verſuche für bekannt annimmt, daß für eine horizontale Wurfweite = 1000 Klafter unter 45° eine Brandröhre = 9 Zoll lang erforderlich ſey, ſo läßt ſich daraus für jede andere Wurfweite unter dem nämlichen Richtwinkel die Länge der Brandröhre nach dem Satze berechnen, **daß ſich unter einerley Richtwinkel die Wurfweiten gegeneinander verhalten, wie die Quadrate der Längen der Brandröhren von der nämlichen Gattung** (§. 80. VI.). Aus den Brandröhrenlängen unter einem Elevationswinkel werden für die übrigen Elevationswinkel die Längen der Brandröhren mittelſt des Satzes abgeleitet, **daß für einerley Wurfweite unter verſchiedenen Elevationswinkeln die Quadrate der Längen der Brand-**

röh-

röhren ſich gegeneinander verhalten, wie die Tangenten der Elevationswinkel vom Horizonte gezählet (§. 80. VII.). Fig.

Viertens endlich iſt noch eine Tafel erforderlich um aus der bekannten Wurfweite und aus dem Richtwinkel eines Wurfes den Richtwinkel für eine andere gegebene Weite, wie auch für einen anderen gegebenen Richtwinkel die entſprechende Weite zu finden. Die 4te und 5te Tafel ſind zu dieſer Abſicht eingerichtet. Es wäre überflüſſig die 4te Tafel weiter auszudehnen, weil ein Unterſchied von vielen Minuten bey den Richtwinkeln, hauptſächtlich nahe bey 45°, keinen merklichen Unterſchied in der Wurfweite hervorbringt. Nun folgen die

Hilfstafeln zum Bombenwerf. für die K. K. Artillerie.

1te Tafel. Entfernungen für eine ſenkrechte Grundlinie = 1, oder Tangenten für den ganzen Sinus = 1.

Winkel.	Entfernung oder Tang.	Winkel		Entfernung oder Tang.	Winkel		Entfernung oder Tang.	Winkel		Entfernung oder Tang.	Winkel		Entfernung oder Tang.
Gr.		Gr.	M.		Gr.	M.		Gr.	M.		Gr.	M.	
45	1,00	77	0	4,33	80	0	5,67	83	0	8,14	86	0	14,30
46	1,04	—	5	4,36	—	5	5,72	—	5	8,24	—	5	14,61
47	1,07	—	10	4,39	—	10	5,77	—	10	8,34	—	10	14,92
48	1,11	—	15	4,42	—	15	5,82	—	15	8,45	—	15	15,26
49	1,15	—	20	4,45	—	20	5,87	—	20	8,56	—	20	15,60
50	1,19	—	25	4,48	—	25	5,92	—	25	8,66	—	25	15,97
51	1,23	77	30	4,51	80	30	5,98	83	30	8,78	86	30	16,35
52	1,28	—	35	4,54	—	35	6,03	—	35	8,89	—	35	16,75
53	1,33	—	40	4,57	—	40	6,08	—	40	9,01	—	40	17,17
54	1,38	—	45	4,61	—	45	6,14	—	45	9,13	—	45	17,61
55	1,43	—	50	4,64	—	50	6,20	—	50	9,26	—	50	18,07
56	1,48	—	55	4,67	—	55	6,25	—	55	9,38	—	55	18,56
57	1,54	78	0	4,70	81	0	6,31	84	0	9,51	87	0	19,08
58	1,60	—	5	4,74	—	5	6,37	—	5	9,65	—	5	19,63
59	1,66	—	10	4,77	—	10	6,43	—	10	9,79	—	10	20,21
60	1,73	—	15	4,81	—	15	6,50	—	15	9,93	—	15	20,82
61	1,80	—	20	4,84	—	20	6,56	—	20	10,08	—	20	21,47
62	1,88	—	25	4,88	—	25	6,63	—	25	10,23	—	25	22,16
63	1,96	78	30	4,92	81	30	6,69	84	30	10,39	87	30	22,90
64	2,05	—	35	4,95	—	35	6,76	—	35	10,55	—	35	23,69
65	2,14	—	40	4,99	—	40	6,83	—	40	10,71	—	40	24,54
66	2,25	—	45	5,03	—	45	6,90	—	45	10,88	—	45	25,45
67	2,36	—	50	5,07	—	50	6,97	—	50	11,06	—	50	26,43
68	2,48	—	55	5,10	—	55	7,04	—	55	11,24	—	55	27,49
69	2,61	79	0	5,14	82	0	7,12	85	0	11,43	88	0	28,64
70	2,75	—	5	5,18	—	5	7,19	—	5	11,62	—	5	29,88
71	2,90	—	10	5,23	—	10	7,27	—	10	11,83	—	10	31,24
72	3,08	—	15	5,27	—	15	7,35	—	15	12,03	—	15	32,73
73	3,27	—	20	5,31	—	20	7,43	—	20	12,25	—	20	34,37
74	3,49	—	25	5,35	—	25	7,51	—	25	12,47	—	25	36,18
75	3,73	79	30	5,40	82	30	7,60	85	30	12,71	88	30	38,19
76	4,01	—	35	5,44	—	35	7,68	—	35	12,95	—	35	40,44
76¼	4,09	—	40	5,48	—	40	7,77	—	40	13,20	—	40	42,96
76½	4,17	—	45	5,53	—	45	7,86	—	45	13,46	—	45	45,83
76¾	4,25	—	50	5,58	—	50	7,95	—	50	13,73	—	50	49,10
77	4,33	—	55	5,62	—	55	8,05	—	55	13,01	—	55	52,88

2te Tafel. Wurfweiten für verſchiedene Ladungen eines Pulvers von mittlerer Güte unter verſchiedenen Richtwinkeln von der Vertikallinie.

60pfündiger Pöller						30pfündiger Pöller					
Ladung.		Richtung				Ladung.		Richtung			
		15°	20°	30°	45°			15°	20°	30°	45°
		Wurf-weite.	Wurf-weite.	Wurf-weite.	Wurf-weite.			Wurf-weite.	Wurf-weite.	Wurf-weite.	Wurf-weite.
Pf	Loth	Kl.	Kl	Kl.	Kl.	Pf	Loth	Kl.	Kl.	Kl.	Kl.
1	8	62	72	97	100	—	20	20	24	32	34
1	12	86	104	140	152	—	22	44	53	72	78
1	16	109	134	181	200	—	24	67	82	111	121
1	20	131	163	219	243	—	26	90	110	149	164
1	24	152	189	255	284	—	28	112	138	186	206
1	28	172	215	290	325	—	30	133	165	223	248
2	—	191	241	325	366	1	—	154	192	259	290
2	4	210	266	358	405	1	2	174	218	294	331
2	8	228	289	390	442	1	4	194	243	327	370
2	12	246	312	421	479	1	6	211	267	359	407
2	16	264	335	452	516	1	8	228	289	389	442
2	20	281	358	482	551	1	10	244	310	417	475
2	24	298	380	512	586	1	12	259	330	444	506
2	28	315	402	542	621	1	14	274	350	470	537
3	—	331	423	570	654	1	16	288	368	495	566
3	4	347	444	598	687	1	18	302	386	520	595
3	8	363	465	626	720	1	20	316	404	544	624
3	12	379	486	654	753	1	22	330	422	568	652
3	16	394	506	681	784	2	24	343	439	592	680
3	20	409	526	708	815	1	26	356	456	615	707
3	24	424	545	734	846	1	28	369	473	638	734
3	28	439	564	760	877	1	30	382	490	661	761
4	—	454	583	786	908	2	—	395	507	683	787
4	4	468	602	811	936	2	2	407	523	705	813
4	8	482	620	835	964	2	4	419	539	726	838
4	12	496	638	859	992	2	6	431	554	746	862
4	16	510	656	883	1020	2	8	443	569	766	886

3te Tafel. Längen der Brandröhren für verſchiedene Wurfweiten unter verſchiedenen Richtwinkeln von der Vertikallinie.

Wurfweite.	Richtung				Wurf. weite.	Richtung			
	15°	20°	30°	45°		15°	20°	30°	45°
Klafter.	Zoll	Zoll	Zoll	Zoll	Klafter.	Zoll	Zoll	Zoll	Zoll
80	4	3¾	3	2	550	—	10	8	6½
120	5	4¾	3¾	2½	600	—	10¼	8½	7
160	6	5½	4¼	3	650	—	10½	8¾	7¼
200	6¾	6	4¾	3¼	700	—	—	9	7½
250	7¾	6¾	5¼	3¾	750	—	—	9½	7¾
300	8½	7½	5¾	4¼	800	—	—	9¾	8
350	9¼	8	6	4¾	850	—	—	10	8¼
400	10	8½	6½	5¼	900	—	—	—	8½
450	10½	9	7	5¾	950	—	—	—	8¾
500	11	9½	7½	6	1000	—	—	—	9

4te Tafel. Winkelzeiger der Richtwinkel.

R.W.		W.Z.	R.W.		W.Z.	R.W.		W.Z.	R.W.		W.Z.	R.W.		W.Z.	R.W.		W.Z.
°	′		°	′		°	′		°	′		°	′		°	′	
15	0	0	19	0	90	23	0	158	27	0	209	31	0	247	35	0	274
—	10	4	—	10	94	—	10	160	—	10	211	—	10	248	—	20	275
—	20	9	—	20	97	—	20	163	—	20	213	—	20	250	—	40	276
—	30	13	—	30	100	—	30	165	—	30	214	—	30	251	—	0	277
—	40	17	—	40	103	—	40	167	—	40	216	—	40	252	—	20	278
—	50	21	—	50	106	—	50	170	—	50	218	—	50	253	—	40	278
16	0	25	20	0	109	24	0	172	28	0	220	32	0	255	36	0	279
—	10	29	—	10	112	—	10	174	—	10	221	—	10	256	—	20	281
—	20	33	—	20	115	—	20	177	—	20	223	—	20	257	—	40	282
—	30	37	—	30	118	—	30	179	—	30	225	—	30	258	37	0	284
—	40	41	—	40	121	—	40	181	—	40	226	—	40	259	—	20	285
—	50	45	—	50	124	—	50	183	—	50	228	—	50	261	—	40	287
17	0	49	21	0	127	25	0	185	29	0	229	33	0	262	38	0	288
—	10	52	—	10	129	—	10	187	—	10	231	—	10	263	—	20	289
—	20	56	—	20	132	—	20	189	—	20	233	—	20	264	—	40	290
—	30	60	—	30	135	—	30	192	—	30	234	—	30	265	39	0	291
—	40	63	—	40	138	—	40	194	—	40	236	—	40	266	—	30	293
—	50	67	—	50	140	—	50	196	—	50	237	—	50	267	40	0	294
18	0	70	22	0	143	26	0	198	30	0	239	34	0	268	—	30	296
—	10	74	—	10	145	—	10	200	—	10	240	—	10	269	41	0	297
—	20	77	—	20	148	—	20	201	—	20	241	—	20	270	42	0	299
—	30	80	—	30	151	—	30	203	—	30	243	—	30	271	43	0	300
—	40	84	—	40	153	—	40	205	—	40	244	—	40	272	44	0	301
—	50	87	—	50	156	—	50	207	—	50	246	—	50	273	45	0	301

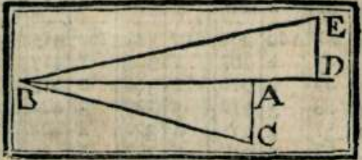
5te Tafel. Diſtanzzeiger der Wurfweiten.

Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.	Wurf-weite.	D. Z.
100	0	150	176	200	301	250	398	300	477	350	544	400	602	450	653
1	4	1	179	1	303	1	400	1	479	1	545	1	603	1	654
2	9	2	132	2	305	2	401	2	480	2	547	2	604	2	655
3	13	3	185	3	307	3	403	3	481	3	548	3	605	3	656
4	17	4	188	4	310	4	405	4	483	4	549	4	606	4	657
5	21	5	190	5	312	5	407	5	484	5	550	5	607	5	658
6	25	6	193	6	314	6	408	6	486	6	551	6	609	6	659
7	29	7	196	7	316	7	410	7	487	7	553	7	610	7	660
8	33	8	199	8	318	8	412	8	489	8	554	8	611	8	661
9	37	9	201	9	320	9	413	9	490	9	555	9	612	9	662
110	41	160	204	210	322	260	415	310	491	360	556	410	613	460	663
1	45	1	207	1	324	1	417	1	493	1	558	1	614	1	664
2	49	2	210	2	326	2	418	2	494	2	559	2	615	2	665
3	53	3	212	3	328	3	420	3	496	3	560	3	616	3	666
4	57	4	215	4	330	4	422	4	497	4	561	4	617	4	667
5	61	5	217	5	332	5	423	5	498	5	562	5	618	5	667
6	64	6	220	6	334	6	425	6	500	6	563	6	619	6	668
7	68	7	223	7	336	7	427	7	501	7	565	7	620	7	669
8	72	8	225	8	338	8	428	8	502	8	566	8	621	8	670
9	76	9	228	9	340	9	430	9	504	9	567	9	622	9	671
120	79	170	230	220	342	270	431	320	505	370	568	420	623	470	672
1	83	1	233	1	344	1	433	1	507	1	569	1	624	1	673
2	86	2	136	2	346	2	435	2	508	2	571	2	625	2	674
3	90	3	238	3	348	3	436	3	509	3	572	3	626	3	675
4	93	4	240	4	350	4	438	4	511	4	573	4	627	4	676
5	97	5	243	5	352	5	439	5	512	5	574	5	628	5	677
6	100	6	246	6	354	6	441	6	513	6	575	6	629	6	678
7	104	7	248	7	356	7	442	7	515	7	576	7	630	7	679
8	107	8	250	8	358	8	444	8	516	8	577	8	631	8	679
9	111	9	253	9	360	9	446	9	517	9	579	9	632	9	680
130	114	180	255	230	362	280	447	330	519	380	580	430	633	480	681
1	117	1	258	1	364	1	449	1	520	1	581	1	634	1	682
2	121	2	260	2	365	2	450	2	521	2	582	2	635	2	683
3	124	3	262	3	367	3	452	3	522	3	583	3	636	3	684
4	127	4	265	4	369	4	453	4	524	4	584	4	637	4	685
5	130	5	267	5	371	5	455	5	525	5	585	5	638	5	686
6	134	6	270	6	373	6	456	6	526	6	587	6	639	6	687
7	137	7	272	7	375	7	458	7	528	7	588	7	640	7	688
8	140	8	274	8	377	8	459	8	529	8	589	8	641	8	688
9	143	9	276	9	378	9	461	9	530	9	590	9	642	9	689
140	146	190	279	240	380	290	462	340	531	390	591	440	643	490	690
1	149	1	281	1	382	1	464	1	533	1	592	1	644	1	691
2	152	2	283	2	384	2	465	2	534	2	593	2	645	2	692
3	155	3	286	3	386	3	467	3	535	3	594	3	646	3	693
4	158	4	288	4	387	4	468	4	537	4	595	4	647	4	694
5	161	5	290	5	389	5	470	5	538	5	597	5	648	5	695
6	164	6	292	6	391	6	471	6	539	6	598	6	649	6	695
7	167	7	294	7	393	7	473	7	540	7	599	7	650	7	696
8	170	8	297	8	394	8	474	8	542	8	600	8	651	8	697
9	173	9	299	9	396	9	476	9	543	9	601	9	652	9	698

§. 88.

Folgende Aufgaben ſollen den Gebrauch der angeführten Hilfstafeln zum Bombenwerfen erläutern.

I. Aufgabe. Die horizontale Entfernung des zu bewerfenden Gegenſtandes (des Zieles) zu beſtimmen.



Aufloͤſ. Es ſey A der Wurfort, und B das Ziel; man errichte in A mittelſt des Aſtrolobiums eine Senkrechte Grundlinie AC auf AB, und gebe dieſer Senkrechten AC entweder mit bloſſen Schritten oder mittelſt einer Meßſchnur eine ſchickliche Länge z. B. höchſtens von 125 Schritten = 50 Klafter; ſodann ſtelle man den Winkelmeſſer in C, und beobachte den Winkel ACB; es ſey z. B. ACB = 82° 35′; endlich multiplicire man die in der 1ten Tafel zu dieſem beobachteten Winkel 82° 35′ zugehörige Entfernung 7,68 mit der gemeſſenen Grundlinie = 50, ſo iſt das Produkt die geſuchte Entfernung AB = 7,68 × 50 = $\frac{1}{2}$(768) = 384 Klafter; **nämlich bey der ſenkrechten Grundlinie = 50 wird die geſuchte Entfernung aus dem beobachteten ſchiefen Winkel gefunden, wenn man die zugehörige Entfernung in der erſten Tafel für eine ganze Zahl anſieht, und von ihr die Hälfte nimmt.**

Wenn ſich in A weder rechts noch links eine ſenkrechte Grundlinie meſſen läßt, ſo verlängere man AB um ein Stück AD, beſtimme ſodann nach der angeführten Vorſchrift mittelſt der ſenkrechten Grundlinie DE die Entfernung DB, und ſubtrahire von dieſer gefundenen Entfernung DB das bekannte Stück AD um AB zu erhalten.

Entfernungen unter 300 Klaftern können auch mittelſt einer Grundlinie von 25 Klaftern für den Artillerie-Gebrauch hinlänglich genau beſtimmet werden; **bey der ſenkrechten Grundlinie von 25 Klaftern ergiebt ſich aus dem beobachteten ſchiefen Winkel ſehr leicht die geſuchte Entfernung, wenn man die zugehörige Entfernung in der 1ten Tafel für eine ganze Zahl anſieht, und von ihr den 4ten Theil nimmt.** Fig.

II. Aufgabe. **Den ſenkrechten Abſtand des Zieles von der Horizontallinie des Wurfortes zu beſtimmen.**

Auflöſung. Es ſey B der Wurfort, BAD die Horizontallinie deſſelben, und E oder C das Ziel; man beſtimme nach der vorigen Aufgabe die horizontale Entfernung BD oder BA, des Zieles E oder C; ſodann beobachte man in B den Höhenwinkel DBE bey dem erhöheten Ziele E, oder den Tiefenwinkel ABC bey dem geſenkten Ziele C; den beobachteten Höhen- oder Tiefenwinkel ſubtrahire man von 90°, um den Winkel E oder C zu erhalten, und dividire mit ſeiner entſprechenden Tangente aus der erſten Tafel, die ſchon bekannte horizontale Entfernung des Zieles, ſo iſt der Quotient der geſuchte ſenkrechte Abſtand des Zieles von dem Horizonte des Wurfortes.

Es ſey z. B. BD = 512 Klafter, und der Höhenwinkel DBE = 5° 15', ſo iſt 90° — 5° 15' = 84° 45', wozu in der erſten Tafel die Tangente 10,88 gehört; folglich iſt die geſuchte Erhöhung

$$DE = \frac{512}{10{,}88} = 47 \text{ Klafter.}$$

Und umgekehrt aus der bekannten horizontalen Entfernung und aus der Abweichung des Zieles wird der Abweichungswinkel deſſelben gefunden, **wenn man**

Fig. **die horizontale Entfernung mit der Abweichung dividiret, zu dieſem Quotienten als zu einer Tangente in der erſten Tafel den zugehörigen Winkel aufſuchet, und ſolchen von 90° abzieht**

Die Auflöſungen von den zwey angeführten Aufgaben ſind in dem Satze gegründet, daß im rechtwinklichten ebenen Dreyecke ſich der ganze Sinus zur Tangente eines ſchiefen Winkels verhalte, wie die anliegende Kathete ſich zu der anderen Kathete verhält.

III. Aufgabe. **Für eine gegebene Entfernung des Zieles, welches mit dem Wurforte in einerley Horizonte liegt, die Richtung, Ladung, und Brandröhre zu beſtimmen.**

Auflöſung. 1) Aus der Beſchaffenheit des Zieles ergiebt ſich der Rechtwinkel von ſelbſt; es ſey z. B. in einer Entfernung von 435 Klaftern das Gewölbe eines Pulversmagazins mit dem 60pfündigen Pöller einzuſchlagen; man erwähle dazu den Richtwinkel 15° oder auch 20° von der Vertikallinie; ſodann ſehe man in der 2ten Tafel nach, mit welcher Ladung bey dem 60pfündigen Pöller unter dem angenommenen Richtwinkel = 20° eine Wurfweite = 435 Klafter erreichet wird, ſo ergiebt ſich die am nächſten zugehörigen Ladung = 3 Pf. 4 Loth, wenn das vorräthige Pulver mit jenem beynahe von gleicher Güte iſt, worauf ſich die 2te Tafel gründet. Sollte aber das vorräthige Pulver beträchtlich (nämlich ſchon über 10 Grade der Kaiſ. Pulverprobe) ſtärker oder ſchwächer ſeyn, als jenes der 2ten Tafel, ſo muß man die in der Tafel gefundene Ladung im erſten Falle um etwas vermindern, und im 2ten Falle um etwas vermehren. Die Erfahrung lehret uns, **daß man bey einem Unterſchied von 10 Graden der Kayſerl. Pulverprobe bey 1**

Pfund

Pfund Pulverladung ohngefähr 1 Loth bey dem ſchwächern Pulver zuſetzen, oder 1 Loth bey dem ſtärkern Pulver abbrechen könne; und daß folglich bey einer gröſſeren Ladung, wie auch bey einem gröſſeren Unterſchiede der Grade des Pulvers verhältnißmäſſig etwas mehr zuzuſetzen oder davon abzubrechen ſey.

Die Länge der Brandröhre ergiebt ſich aus der 3ten Tafel.

2) Nachdem einmal die Richtung, Ladung, und Brandröhre vorläufig beſtimmet iſt, ſo macht man einen oder zwey Probwürfe in einer ſolchen Gegend, daß man die Weiten der Probwürfe meſſen kann; kurz vor dem Anfange einer wirklichen Bombardirung werden die Probwürfe gemeiniglich bey der Reſerve gemacht. Es iſt in aller Rückſicht am vortheilhafteſten den Probwurf unter demjenigen Richtwinkel zu machen, worunter das Ziel zu bewerfen iſt; nur läßt zuweilen die Beſchaffenheit des Ortes dieſes nicht zu, man iſt zuweilen mit der Ausmeſſung der Probwurfweite allzuſehr beſchränket; in einem ſolchen Falle muß man mit der gefundenen Ladung die Probwürfe unter dem Richtwinkel von 15° machen, wenn ſchon das Ziel unter einem niederen Richtwinkel von 30° bis 45° zu bewerfen iſt. Aus der nun bekannten Weite des Probwurfes (wofür man die mittlere Wurfweite nimmt, wenn zwey Probwürfe gemacht worden), aus dem Richtwinkel deſſelben, und aus der bekannten Zielweite wird nun der wahre erforderliche Richtwinkel nach folgender Aufgabe geſucht, wodurch der bey Beſtimmung der Ladung etwan begangene Fehler verbeſſert wird.

IV. Aufgabe. **Aus der zu erreichenden Wurfweite, aus dem Richtwinkel, und**

Fig. **aus der erreichten Weite des Probwurfes den gehörigen Richtwinkel zu beſtimmen.**

Aufloͤſung. Dieſes geſchieht mittelſt der 4ten und 5ten Tafel durch folgende **arithmetiſche** Proportion; der Diſtanzzeiger der erreichten Weite (aus der 5ten Tafel) verhält ſich zum Diſtanzzeiger der zu erreichenden Weite (aus der 5ten Tafel), gleichwie der Winkelzeiger des gegebenen Richtwinkels (aus der 4ten Tafel) zum Winkelzeiger des geſuchten Richtwinkels; **nämlich man addire zu dem Diſtanzzeiger der zu erreichenden Weite den Winkelzeiger des gegebenen Richtwinkels, und ſubtrahire von dieſer Summe den Diſtanzzeiger der erreichten Weite, ſo iſt der Ueberreſt der Winkelzeiger des geſuchten Richtwinkels, wozu man die entſprechenden Grade und Minuten in der 4ten Tafel findet**

Es ſey z. B. die zu erreichende Weite = 435, und die erreichte Wurfweite = 490 Klafter unter dem Richtwinkel = 20°,

ſo iſt aus der 5ten Tafel D.Z. 435 = 638 } addirt.
4ten..... W.Z. 20° = 109 }

Summe = 747 } ſubtr.
5ten..... D.Z. 490 = 690 }

in der 4ten Tafel W.Z. x = 57 = W.Z. 17° 20′
folglich iſt der geſuchte Richtwinkel x = 17° 20′, oder noch genauer x = 17° 22′, weil der gefundene Winkelzeiger 57 des geſuchten Richtwinkels zwiſchen 17° 20′ und 17° 30′ fällt.

Sollte eine oder auch beyde Wurfweiten (die erreichte nämlich und die zu erreichende) unter 100 Klafter fallen, ſo dupplire man ſie beyde, das iſt man drücke ſie in halben Klaftern aus, ſuche zu dieſen in halben Klaftern ausgedrückten Wurfweiten in der 5ten Tafel die

Diſtanzzeiger auf, und verfahre übrigens wie bey dem vorigen Beyſpiele. Es ſey z. B. unter 18^{v} eine Wurfweite = 97 Klafter erreichet worden; wie groß ſoll der Richtwinkel x für die zu erreichende Weite = 150 Klafter ſeyn; dieſer wird auf folgende Art gefunden; Fig.

$$\begin{array}{rr} 2 \times 150 = 300;\ \text{D.Z. } 300 & = 477 \\ \text{W.Z. } 18^{v} & = 70 \\ \hline \text{Summe} & = 547 \\ 2 \times 97 = 194;\ \text{D.Z. } 194 & = 288 \\ \hline \text{W.Z. } x & = 259 \\ \text{folglich } x & = 32^{v}\ 40'. \end{array}$$

Sollte aber eine oder auch beyde Wurfweiten über 500 Klafter fallen, ſo halbire man ſie beyde, und verfahre übrigens wie beym vorigen Beyſpiele. Es ſey z. B. unter dem Richtwinkel 45^{v} die erreichte Wurfweite = 750, und die zu erreichende Wurfweite = 521 Klafter, ſo iſt

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2}.521 = 260;\ \text{D.Z. } 260 & = 415 \\ \text{W.Z. } 45^{v} & = 301 \\ \hline \text{Summe} & = 716 \\ \frac{1}{2}.750 = 375;\ \text{D.Z. } 375 & = 574 \\ \hline \text{W.Z. } x & = 142 \\ \text{folglich } x & = 21^{v}\ 55'. \end{array}$$

Wenn bey dieſer Rechnung der Winkelzeiger des geſuchten Richtwinkels gröſſer als 301 ausfällt, ſo iſt dies ein Zeichen, daß man mit der gegebenen Ladung das Ziel auch mit 45^{v} nicht erreichen könne, und daß folglich die gegebene Ladung zu klein ſey. Fällt aber der Winkelzeiger des geſuchten Richtwinkels negativ heraus, ſo iſt dies ein Zeichen, daß der geſuchte Richtwinkel kleiner als 15^{v} ſeyn müſſe, und da es nicht ge-

wöhn-

wöhnlich iſt einen Richtwinkel, der kleiner iſt als 15°, anzunehmen, ſo zeigt der negative Winkelzeiger zugleich an, daß die gegebene Ladung zu groß ſey, und folglich vermindert werden müſſe; auch wenn die Rechnung einen niederen Richtwinkel giebt, die Beſchaffenheit des Zieles aber einen hohen fordert, iſt die Ladung zu klein, und muß folglich vermehret werden; im Gegentheile wenn die Rechnung einen hohen Richtwinkel giebt, die Beſchaffenheit des Zieles aber einen niederen fordert, ſo iſt die Ladung zu groß, und muß folglich vermindert werden. Wie viel man nun im erforderlichen Falle von einer zu ſtarken Ladung abbrechen, oder bey einer zu ſchwachen zuſetzen müſſe, läßt ſich durch keine Rechnung allgemein zuverläſſig beſtimmen. Es ſcheint zwar beym erſten Anblicke, daß man durch die Differenzen der Ladungen und durch die Differenzen der zugehörigen Wurfweiten, die Vermehrung oder Verminderung der Ladung mittelſt der 2ten Tafel jederzeit gar leicht berechnen könnte; allein die Erfahrung zeigt das Gegentheil, weil niemals alle Umſtände beym Bombenwerfen eben ſo zuſammentreffen können, als ſie bey dem Verſuche beyſammen waren, worauf ſich die zweyte Tafel gründet. Soviel lehret indeſſen doch die Erfahrung, 1) daß bey mittleren Ladungen und mittleren Richtungen 4 Loth bey dem 60pfündigen, 2 Loth bey dem 30pfündigen, und 1 Loth bey dem 10pfündigen Pöller die Wurfweite beyläufig um 30 bis 40 Klafter verändern; 2) daß durch eben dieſe 4, 2, 1 Lothe bey Ladungen unter der halben Kammer um etwas mehr, und über der halben Kammer um etwas weniger die Wurfweite geändert wird; 3) endlich daß durch eben dieſe 4, 2, 1 Lothe in der hohen Richtung zwiſchen 15° und 30° um etwas weniger, und in

der niederen Richtung zwiſchen 15° und 45° um etwas mehr die Wurfweite geändert wird. Fig. Mittelſt dieſer Erfahrung läßt ſich durch eine vernünftige Beurtheilung beyläufig beſtimmen, wie viel man im erforderlichen Falle von einer zu ſtarken Ladung abzubrechen, oder bey einer zu ſchwachen zu zuſetzen habe.

Bey der Aenderung der Ladung ſowohl als auch der Elevation wird die erreichte Wurfweite für bekannt angenommenen; ſie muß entweder ſo wie die Zielweite nach der I. Aufgabe beſtimmet, oder zuweilen auch, und zwar während einer wirklichen Bombardirung meiſtens nach bloſſen Augenmaſſe geſchätzet werden. Man muß nicht nach einer jeden zu kurz oder zu lang ausgefallenen Wurfweite alſogleich die Ladung oder Elevation ändern; wenn die Abirrung der erreichten Weite nicht viel über $\frac{1}{20}$ der Zielweite beträgt, ſo kann man die gebrauchte Ladung und Elevation noch ferner beybehalten, weil ſich vielleicht die folgenden Würfe dem Ziele mehr nähern können; denn es giebt bey einerley Ladung und Elevation gar oft Abirrungen in den Wurfweiten, die über $\frac{1}{20}$ der mittleren Wurfweite betragen, und die ſo beſchaffen ſind, daß ſie ſich durch gar keine Rechnung heben laſſen.

V. Aufgabe. Aus der bekannten Richtung und Weite eines Wurfes, die Weite unter einem anderen gegebenen Richtwinkel zu finden.

Auflöſung. Die geſuchte Weite läßt ſich durch die in der vorigen Aufgabe angeführte **arithmetiſche** Proportion finden, daß ſich die Winkelzeiger der Richtwinkel (aus der 4ten Tafel) gegeneinander verhalten wie die Diſtanzzeiger der dazugehörigen Wurfweiten (aus der 5ten Tafel); **nämlich man addire zu dem**

Fig. **Diſtanzzeiger der bekannten Wurfweite den Winkelzeiger des neuen zu gebenden Richtwinkels, und Subtrahire von dieſer Summe den Winkelzeiger des Probwurfwinkels, ſo iſt der Ueberreſt der Diſtanzzeiger der geſuchten Weite, wozu man in der 5ten Tafel die Weite ſelbſt in eben jenem Maſſe findet, womit die Probwurfweite ausgedrücket iſt.** Wenn die Wurfweiten kleiner als 100, oder gröſſer als 500 ſeyn ſollten, ſo muß man ſie im erſten Falle dupliren, im 2ten aber halbiren. Wenn man z. B. mit 17° 30′ eine Wurfweite = 487 Klaſter erreichet, ſo findet man die Weite unter 36° 20′ auf folgende Art

$\frac{1}{2} \cdot 487 = 243$; D.Z.$243 = 386$

W.Z.$36°20' = 281$

Summe $= 667$

W.Z.$17°30' = 60$

D.Z. $x = 607$

Es wird in dieſem Falle die gegebene Wurfweite 487 halbiret, weil man gar leicht ohne Rechnung im voraus einſieht, daß die geſuchte Weite gröſſer als 500 ſeyn müſſe.

folglich $x = 405$ doppelten Klaftern $= 810$ Klafter.

Anmerkung. Die Auflöſung der IVten und Vten Aufgabe iſt in dem Satze gegründet, daß bey einerley Ladung unter verſchiedenen Richtwinkeln ſich die Wurfweiten gegeneinander verhalten wie die Sinus der doppelten Richtwinkel. Die Winkelzeiger der Richtwinkel in der 4ten Tafel ſind nichts anders als die Logarithmen der Sinuſe von den doppelten Richtwinkeln, wenn man ſie alle um den log ſin 30° vermindert, und dabey die vier letzten von den gewöhnlichen 7 Decimalziffern nebſt der Kennziffer gänzlich hinwegläßt; die Diſtanzzeiger der 5ten Tafel aber ſind nichts anders als die gewöhnlichen Logarithmen der dazugehörigen Zahlen mit Hin-

weg-

weglaſſung der vier letzten Decimalziffern und der gemeinſchaftlichen Kennziffer, ſo daß nun bey dieſer Einrichtung der 4ten und 5ten Tafel, bey einerley Ladung die Diſtanzzeiger der Wurfweiten mit den Winkelzeigern der Richtwinkel in einer arithmetiſchen Proportion ſtehen.

VI. Aufgabe. **Es iſt die horizontale Entfernung und die Abweichung des Zieles von dem Horizonte des Wurfortes gegeben; man ſoll die Richtung, Ladung, und Brandröhre beſtimmen**

Auflöſung. Aus der Beſchaffenheit des Zieles ergiebt ſich der Richtwinkel von ſelbſt. Wenn nun die Abweichung des Zieles von dem Horizonte des Wurfortes in Rückſicht ſeiner horizontalen Entfernung ſehr klein iſt, das iſt wenn der nach der II. Aufgabe beobachtete Höhen- oder Tiefenwinkel nur einige wenige Grade beträgt, z. B. kleiner als 5° iſt, ſo kann man bey unſerer Einrichtung der Pöller eben ſo verfahren, als wenn das Ziel im Horizonte des Wurfortes ſelbſt befindlich wäre, man muß nämlich alles in Erwägung ziehen, was bey der III. und IV. Aufgabe vorgeſchrieben iſt.

Wenn aber die Abweichung des Zieles von dem Horizonte des Wurfortes zu ſeiner horizontalen Entfernung ein beträchtliches Verhältniß hat, wenn nämlich der Abweichungswinkel des Zieles ziemlich groß iſt, und die Beſchaffenheit des Zieles einen Richtwinkel nahe bey 45° erfordert, ſo muß man aus dem einmal feſtgeſetzten Richtwinkel, aus der horizontalen Entfernung des Zieles, und aus dem Abweichungswinkel deſſelben, die Länge der horizontalen Wurfweite unter dem angenommenen Richtwinkel berechnen, und zu dieſer berechneten Wurfweite unter dem angenommenen Richtwinkel in der 2ten Tafel nach der III. Aufgabe die erforderliche Ladung aufſuchen.

Fig. Aus dem angenommenen Richtwinkel $= m$, aus dem beobachteten Abweichungswinkel des Zieles $= n$, und aus der horizontalen Entfernung deſſelben $= b$ läßt ſich die horizontale Wurfweite $= u$ mittelſt der 4ten und 5ten Tafel durch folgende Formel ſehr leicht und geſchwind berechnen,

Diſt. Zeig. $x =$ D. Z. $b +$ W. Z. $[45 - \frac{1}{2}(m \mp n)]$ $-$ W. Z. $[45 - \frac{1}{2}(m \pm n)]$, und ferner $\frac{1}{2}(b + x) = u$;

nämlich die halbe Differenz, und auch die halbe Summe des angenommenen Richtwinkels und des Abweichungswinkels wird von 45° ſubtrahirt, und ſodann zu jedem Reſte in der 4ten Tafel der zugehörige Winkelzeiger aufgeſucht; der erſte Winkelzeiger wird bey einem erhöheten Ziele zu dem Diſtanzzeiger der horizontalen Entfernungen addirt, und davon der zweyte Winkelzeiger ſubtrahiret; bey einem geſenkten Ziele aber wird der zweyte Winkelzeiger zu dem Diſtanzzeiger der horizontalen Entfernung addirt, und davon der erſte Winkelzeiger ſubtrahiret; zu dem letzten Ueberreſte als zu einem Diſtanzzeiger wird in der 5ten Tafel die Wurfweite aufgeſuchet, und ſolche zu der Entfernung des Zieles addiret, ſo iſt endlich die Hälfte dieſer letzten Summe die geſuchte horizontale Entfernung. Dieſe Berechnung iſt aus der Formel $u = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \cdot \frac{\cos(m \mp n)}{\cos(m \pm n)}$ (§. 83. I.) abgeleitet.

Wenn z. B. aus einer Bergfeſtung am Meere in einer horizontalen Entfernung $b = 863$ Klafter feindliche Schiffe mit 60pfündigen Pöllern unter dem Richtwinkel $m = 30°$ zu beunruhigen wären, und die Bettungen der Pöller um 194 Klafter über die Meeresfläche erhöhet ſind, nämlich wenn der nach der Aufgabe Fig. II. beobachtete oder berechnete Tiefenwinkel $n = 12^\circ 40'$ iſt, ſo wird, um die horizontale Wurfweite u zu finden, die Rechnung auf folgende Art angelegt.

$$\begin{array}{rrr} m = & 30^\circ & 0' \\ n = & 12 & 40 \\ \hline m - n = & 17 & 20 \\ m + n = & 42 & 40 \\ \hline \end{array}$$

ſubtr. v. **45**

$$\begin{array}{rrr} \tfrac{1}{2}(m-n) = & 8 & 40 \\ \tfrac{1}{2}(m+n) = & 21 & 20 \\ \hline \end{array}$$

$b = 863$ Kl. $= 431\tfrac{1}{2}$ dopp. Kl.

Reſt $\begin{cases} \text{1ter } 36\ \ 20 \\ \text{2ter } 23\ \ 40 \end{cases}$

Diſt. Zeig. $431\tfrac{1}{2} = 635$ } addirt

W. Z. $23^\circ 40' = 167$ }

Summe $= 802$

W. Z. $36.20 = 281$ ſubtrahirt

$521 =$ D. Z. x

folglich $x = 332$ } dopp. Kl.

dazu addirt $b = 431\tfrac{1}{2}$ }

giebt die geſ. hor. Wurfw. $= 763$ einf. Kl.

Aus der horizontalen Entfernung $= b$ des Zieles aus ſeiner Abweichung $= c$ von dem Horizonte, und aus dem nach Beſchaffenheit des Zieles angenommenen Elevationswinkel **von der Horizontallinie gezähler**, läßt ſich die horizontale Wurfweite $= u$ auch mittelſt der erſten Tafel durch folgende Formel berechnen $u = \dfrac{(b.\text{tang}m).b}{b.\text{tang}m \mp c}$ (vermög §. 83.).

Die Tangente des Elevationswinkels von der Horizontallinie gezählet wird aus der erſten Tafel genommen; das obere Zeichen — iſt bey einem erhöheten, und das untere Zeichen + bey einem geſenkten Ziele zu brauchen.

Fig. Wenn z. B. ſo wie ehevor aus einer Bergfeſtung am Ufer des Meeres in einer horizontalen Entfernung $b = 863$ Klafter feindliche Schiffe mit 60pfündigen Pöllern unter einem Richtwinkel 30° von der Vertikallinie, nämlich unter dem Elevationswinkel $m = 60^\circ$ vom Horizonte gezählet zu beunruhigen wären, und die Bettungen der Pöller um $c = 194$ Klafter über die Meeresfläche erhöhet angenommen werden, ſo wird um die horizontale Wurfweite u zu finden die Rechnung auf folgende Art angelegt:

$$\begin{array}{r|r}
b = 863 & \left.\begin{array}{r} b\,\text{tang}\,m = 1493 \\ \text{mult. } b = \underline{863} \end{array}\right\}\text{Dividend} \\
\text{mult. tang}\,60^\circ = \underline{1{,}73} & 4479 \\
2589 & 8958 \\
6041 & \underline{11944} \\
\underline{863} & \\
b\,\text{tang}\,m = 1492{,}99 & u = \dfrac{1288459}{1687} = 763\text{ Kl.} \\
\text{addirt } c = \underline{194} & \\
1687\text{ Diviſ.} &
\end{array}$$

Nachdem die horizontale Wurfweite u berechnet iſt, ſo läßt ſich nun nach der III. Aufgabe die erforderliche Ladung gar leicht beſtimmen; im gegenwärtigen Falle müßte ſolche 3 Pfund 28 Loth ſeyn, wenn das vorräthige Pulver mit jenem der 2ten Tafel von einerley Güte iſt; iſt aber das vorräthige Pulver von jenem der zweyten Tafel in Rückſicht ſeiner Grade verſchieden, ſo muß man die in der 2ten Tafel gefundene Ladung nach der Vorſchrift der III. Aufgabe verbeſſern.

Mit der vorläufig beſtimmten Ladung macht man unter dem angenommenen Richtwinkel auf einem nicht zu ſehr geneigten Boden einen oder zwey Probwürfe; iſt nun die gemeſſene Probwurfweite beynahe eben ſo groß, als die ehevor berechnete horizontale Wurfweite (bey groſſen Wurfweiten iſt ein Unterſchied von 10 bis 15

Klaf-

Klaftern für nichts anzuſehen) ſo iſt die beſtimmte Ladung unter dem angenommenen Richtwinkel dem Ziele angemeſſen; iſt aber die gemeſſene Probwurfweite von der berechneten Wurfweite merklich verſchieden, ſo muß entweder mit Beybehaltung der Richtung nach der Vorſchrift bey der Aufgabe IV. die Ladung verbeſſert, oder aber mit Beybehaltung der Ladung nach der Vorſchrift, die auf der folgenden Seite befindlich iſt, die Richtung geändert werden. Wenn die Beſchaffenheit des Bodens nicht zuläßt beym Probwurfe denjenigen Richtwinkel zu nehmen, welchen das Ziel erfordert, ſo muß man den Probwurf unter einem kleineren Richtwinkel machen (etwan unter 15°) und muß daraus zu dem erforderlichen ſchon beſtimmten Richtwinkel die zugehörige Wurfweite nach der Aufgabe V. berechnen, woraus ſodann zu erſehen iſt, ob bey der beſtimmten Richtung die gefundene und angenommene Ladung dem Ziele angemeſſen, oder aber nach der Vorſchrift bey der Aufgabe IV. zu verbeſſern ſey. Fig.

Es ſey z. B. bey der angeführten horizontalen Entfernung des Zieles = 863, und Vertiefung = 194 Klafter mit der angenommenen Ladung 3 Pfund 28 Loth bey dem erſten Probwurfe unter 15° die erreichte Weite = 439 Klafter und bey dem 2ten = 421, woraus das Mittel 430 folgt; aus dieſer Probwurfweite 430 unter 15° folgt ferner unter dem feſtgeſetzten Richtwinkel von 30° die Wurfweite = 743 Klafter; da nun dieſe Wurfweite 743 nur um 20 Klafter von der oben berechneten horizontalen Wurfweite 763 verſchieden iſt, ſo iſt bey dem feſtgeſetzten Richtwinkel von 30° die angenommene Ladung dem Ziele angemeſſen, ſie kann höchſtens nur um ein paar Lothe vermehret werden.

Bey der Beſtimmung der Brandröhre wird man in dergleichen Fällen nicht merklich fehlen, wenn man zu der bekannten horizontalen Entfernung des Zieles mit-

Fig. telſt der 3ten Tafel die Brandröhre ſo einrichtet, als wenn das Ziel in dem Horizonte des Wurfortes ſich befände.

Es iſt bey gegenwärtiger Aufgabe am natürlichſten den Richtwinkel aus der Beſchaffenheit des Zieles zu beſtimmen, ſodann nach der gegebenen Vorſchrift die zugehörige Ladung zu ſuchen. und endlich nach gemachten Probwurfe ſolche zu verbeſſern Wenn man hingegen die angenommene und beym Probwurfe gebrauchte Ladung ungeändert laſſen, und dabey die Richtung ändern will, ſo läßt ſich der erforderliche Richtwinkel $= x$ **von der Horizontallinie** durch nachſtehenden Formel berechnen, tang $x = \frac{a + \sqrt{[a^2 - (b^2 \pm 2ac)]}}{b}$ vermög (§.82).

Es bedeutet in dieſer Formel a die zur feſtgeſetzten Ladung unter 45° zugehörige Wurfweite, b die horizontale Entfernung, und c die Abweichung des Zieles; das obere Zeichen $+$ iſt bey einem erhöheten, und das untere — bey einem geſenkten Ziele zu brauchen; dieſe Formel in Zahlen verwandelt iſt die Tangente des geſuchten Elevationswinkels vom Horizonte gezählet, wozu man die entſprechenden Grade in der erſten Tafel findet.

Es ſey z. B. in einer horizontalen Entfernung $b = 360$ Klafter ein um $c = 40$ Klafter erhöhetes Ziel mit einer Ladung zu bewerfen, mit der unter 25° eine Wurfweite $= 314$ Klafter erreichet wird, ſo läßt ſich der geſuchte Elevationswinkel auf folgende Art finden. Aus der unter 25° bekannten Wurfweite 314 ſuche man zu erſt nach der V. Aufgabe unter 45° die Wurfweite $a = 410$ Klaftern, und nun wird die fernere Rechnung folgendermaſſen angelegt:

$$\begin{array}{r|l} a^2=410\times410=168100 & \sqrt{5700}=75 \\ \left.\begin{array}{r} b^2=360\times360=129600 \\ 2ac=2.40.410=32800 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} \quad a=410 \\ \hline \text{Divid.}=485 \end{array} \\ \hline b^2+2ac=162400 & \text{Diviſ.}=360 \\ \hline a^2-(b^2+2ac)=5700 & \text{tang}\, x=\frac{485}{360}=1{,}35 \end{array}$$

folglich $x = 53^\circ$, oder noch genauer $x = 53^\circ\ 24'$, wenn man die Differenzen in Erwägung zieht; und endlich $x = 90^\circ - 53^\circ\ 24' = 36^\circ\ 36'$ von der Vertikallinie.

Wenn man die Sinustafel, oder einen Auszug davon bey der Hand hat, so läßt ſich in einem ſolchen Falle aus der horizontalen Entfernung des Zieles $= b$, aus dem Abweichungswinkel deſſelben $= n$, und aus der zur angenommenen Ladung unter 45° zugehörigen Wurfweite $= a$ der erforderliche Richtwinkel $= \mathfrak{z}$ von der Vertikallinie viel leichter nach (§. 82.) mittelſt der Formel beſtimmen

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2} \left[\text{Winkel des Sinus} \left(\frac{b.\cos n}{a} \pm \sin n \right) \mp n \right].$$

Wer lieber zeichnet als rechnet, kann im gegenwärtigen Falle den geſuchten Elevationswinkel nach (§. 82) durch die geometriſche Verzeichnung finden. Bey dieſer Auflöſung kann zuweilen der geſuchte Elevationswinkel unmöglich ſeyn, und zwar dazumal, wenn $(b^2 \pm 2ac) > a^2$ oder $\frac{b}{a} > \frac{1 \mp \sin n}{\cos n}$ iſt; auch kann der geſuchte Elevationswinkel zwar möglich aber dabey anders ausfallen, als es die Beſchaffenheit des Zieles erfordert; und dieſes iſt ein Zeichen, daß die Ladung dem Ziele nicht angemeſſen, und folglich mit Beybehaltung des Richtwinkels nach voriger Vorſchrift ſolche zu verändern ſey.

Die gegebene Vorſchrift für die Beſtimmung der Richtung und Ladung zum Probwurfe, und für die Verbeſſerung derſelben nach dem Probwurfe wird nur im Anfange befolget; wenn in der Folge während der wirklichen Bombardirung einige Würfe nach einander zu kurz oder zu weit reichen, ſo muß man den Fehler, durch eine angemeſſene Vermehrung oder Verminderung entweder der Ladung oder der Elevation, auf eine eben nicht mathematiſche Art zu verbeſſern ſuchen; bey unſeren Pöllern kann man in dergleichen Fällen eben ſo verfahren, als wenn das Ziel in der Ebene wäre.

VII. Der 2ten und 3ten Tafel kann man auch nachſtehende Geſtalt geben;

Wurftafel, worin für verſchiedene horizontale Wurfweiten unter verſchiedenen Richtwinkeln die erforderlichen Ladungen, und auch die Längen der Brandröhren anzutreffen ſind.

Wurfweite.	60pfündiger Pöller									30pfündiger Pöller								
	Richtung									Richtung								
	15°			30°			45°			15°			30°			45°		
	Ladung		Brandröhre	Ladung		Brandröhre	Ladung		Brandröhre	Ladung		Brandröhre	Ladung		Brandröhre	Ladung		Brandröhre
Kl.	Pf	L.	Z.	Pf	L.	Z.	Pf	L.	Z.	Pf	L.	Z.	Pf	L.	Z.	Pf	L.	Z.
80	1	10	4	1	6	3	1	5	2	—	25	3½	—	23	2¾	—	22	2
120	1	18	5	1	10	3¾	1	9	2½	—	29	4½	—	25	3½	—	24	2½
160	1	26	6	1	14	4¼	1	12	3	1	—	5¼	—	27	4	—	26	3
200	2	2	6¾	1	18	4¾	1	16	3¼	1	4	6	—	29	4¼	—	28	3¼
250	2	12	7¾	1	24	5¼	1	20	3¾	1	12	6¾	1	—	4¾	—	30	3¾
300	2	24	8½	1	30	5¾	1	25	4¼	1	18	7½	1	3	5¼	1	—	4¼
350	3	4	9¾	2	4	6	1	30	4¾	1	25	8	1	6	5¾	1	3	4½
400	3	18	10	2	10	6½	2	4	5¼	2	—	8½	1	9	6	1	6	4¾
450	4	—	10½	2	16	7	2	9	5¾	2	8	9	1	12	6½	1	9	5
500	4	16	11	2	22	7½	2	14	6	—	—	—	1	16	7	1	12	5¼
550	—	—	—	2	29	8	2	20	6½	—	—	—	1	20	7¼	1	15	5½
600	—	—	—	3	4	8½	2	26	7	—	—	—	1	24	7½	1	18	5¾
650	—	—	—	3	12	8¾	3	—	7¼	—	—	—	1	29	7¾	1	22	6
700	—	—	—	3	20	9	3	6	7½	—	—	—	2	2	7¾	1	26	6¼
750	—	—	—	3	28	9½	3	12	7¾	—	—	—	2	8	8	1	29	6½
800	—	—	—	4	4	9¾	3	18	8	—	—	—	—	—	—	2	1	6¾
850	—	—	—	4	12	10	3	24	8¼	—	—	—	—	—	—	2	5	6¾
900	—	—	—	—	—	—	4	—	8½	—	—	—	—	—	—	2	8	7
950	—	—	—	—	—	—	4	8	8¾	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1000	—	—	—	—	—	—	4	14	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Die Ladungen für verſchiedene Wurfweiten in dieſer Tafel können entweder aus der vorigen 2ten Tafel abgeleitet, oder aus einigen durch genaue Verſuche bekannten Wurfweiten, und aus ihren zugehörigen Ladungen eben

Fig. eben ſo mittelſt der Einſchaltungsmethode berechnet werden, wie ſich bey der 2ten Tafel für verſchiedene Ladungen die zugehörigen Wurfweiten beſtimmen laſſen. Bey der obangeführten 2ten Tafel, oder auch in gegenwärtiger Wurftafel könnten auch für die üblichen Feuerwerkskörper bey den gebräuchlichen Richtwinkeln zu verſchiedenen Entfernungen die zugehörigen Ladungen angemerket werden, z. B. daß Feuerballen und auch Brandkugeln aus den 30pfündigen Bombenpöllern unter 45° mit 1 Pfund 12 Loth Pulver beyläufig auf eine Entfernung von 300 bis 320 Klaftern getrieben werden; daß Würfe mit Handgrenaden, und auch mit Pulverſäcken aus den 60pfündigen Bombenpöllern unter 45° mit 1 Pfund 16 Loth ohngefähr auf 140 bis 160 Klafter reichen; daß gemeine Kieſel- oder Feldſteiner aus dem 60pfündigen eiſernen Pöller unter 35° mit 1 Pfund 16 L. Pulverladung geworfen in einer Entfernung von 120 bis 140 Klaftern niederfallen; daß Feuerballen und auch Brandkugeln aus den 60pfündigen Bombenpöllern unter 45° auf eine Entfernung von 300 Klaftern zu treiben ohngefähr 3 Pfund Pulver erforderlich ſind u. ſ. w.

Es ſey fern von mir weder dieſe letzte Wurftafel, noch auch die vorhergehende 2te und 3te Tafel als eine ächte und unverbeſſerliche Richtſchnur zum Bombenwerfen aufdringen zu wollen; die darinen befindlichen Zahlen ſind nicht aus genauen wirklich abgeführten Verſuchen, ſondern nur aus einigen bey den Lagerübungen gemachten Beobachtungen mittelſt der Rechnung abgeleitet. Dieſe Tafeln ſollen nur zum Muſter dienen, wie man aus genau angeſtellten Verſuchen geſchmeidige Hilfstafeln zum Bombenwerfen einrichten könne.

Es wäre für die Ausübung ſehr vortheilhaft, wenn für jede Gattung der gebräuchlichſten Pöller eine dreyfache Wurftafel eingerichtet würde, wovon die eine Tafel auf ein ſchwaches, die andere auf ein mittleres, und die dritte auf ein ſtarkes Pulver bey der vorgeſchriebenen Art der Ladung gegründet wäre. Fig.

VIII. Die erſte von den angeführten Hilfstafeln kann auch beym Ricochettiren gebrauchet werden; dazu aber iſt noch eine eigentliche **Ricochettafel** erforderlich, worin unter vier oder mehr Elevationswinkel z. B. unter 8°, 10°, 12°, 14°, 16°, oder wenigſtens 6°, 9°, 12°, 15°, für verſchiedene Entfernungen etwann von 130 bis 400 von 30 zu 30 Klaftern **im Horizonte des Kanonenrohres** die erforderlichen Ladungen anzutreffen wären. Mittelſt einer ſolchen Ricochettafel lieſſe ſich ſodann aus der bekannten horizontalen Entfernung und aus der Abweichung des Wallganges vom Horizonte der Kanone, die erforderliche Ladung gar leicht beſtimmen, wenn es aus gehörig angeſtellten Verſuchen dargethan würde, daß man auch beym Ricochettiren den Widerſtand der Luft ohne merklicher Abirrung auſſer Acht laſſen könne.

Bey dem Ricoſchettiren kann der Richtwinkel nicht nach Belieben angenommen werden, ſondern er muß aus der horizontalen Entfernung der vorliegenden Bruſtwehre $= b$ des zu ricoſchettirenden Wallganges, aus der Erhöhung der höchſten Kante dieſer Bruſtwehre über den Horizont des Kanonrohres in der Ricoſchetbatterie $= c$, aus dem Abſtande desjenigen Punktes auf dem Wallgange von der inneren Seite der vorliegenden Bruſtwehre $= p$, wo die Kugel zum erſtenmal aufſchlagen ſoll, und aus der Vertiefung dieſes Punktes unter der höchſten Kante der Bruſtwehre $= q$ beſtimmet werden; dieſer Richtwinkel $= n$ **von der Vertikallinie gerechnet** läßt ſich vermög (§. 83. II.) mittelſt der erſten Tafel durchfolgende Formel ſehr leicht berechnen

Fig.

$$\tan g\, n = 1 : \left(\frac{c}{q} + \frac{q}{p} + \frac{c-q}{b+p}\right);$$

jeder dieſer drey Brüche $\frac{c}{b}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{c-q}{b+p}$ wird nämlich in einen Decimalbruch von drey Decimalziffern verwandelt; darauf werden dieſe drey Decimalbrüche in eine Summe zuſammen addiret; ſodann wird mit dieſer Summe die Einheit ſo dividiret, daß im Quotienten die zwey erſten Decimalziffern zuverläſſig ſind, ſo iſt dieſer Quotient die Tangente des geſuchten Richtwinkels von der Vertikallinie, wozu man die zugehörigen Grade und Minuten in der erſten Tafel findet; zieht man endlich dieſe gefundenen Grade und Minuten von 90° ab, ſo erhält man den geſuchten Elevationswinkel von der Horizontallinie gerechnet.

Auf dieſe Art findet man den möglichſt kleinſten Elevationswinkel, damit der gegebene Punkt auf dem Wallgange könne getroffen werden; kleiner darf der Elevationswinkel nicht ſeyn, ſonſt ſchlägt die Kugel in die Bruſtwehre ein; etwas gröſſer aber kann er immer genommen werden, damit die Kugel um ſo gewiſſer über die Bruſtwehre wegſtreiche ohne ſolche zu berühren. Wenn z. B. nach der gegebenen Formel der geſuchte Elevationswinkel = 10° 25′ ausfällt, und in der vorgeſchlagenen Ricoſchettafel die zu verſchiedenen horizontalen Schußweiten zugehörigen Ladungen nur bey den Elevationswinkeln 6°, 9°, 12°, 15° anzutreffen wären, ſo müßte man den Elevationswinkel = 12° erwählen.

Nachdem auf dieſe Art der Elevationswinkel vorläufig beſtimmet iſt, zieht man ſolchen von 90° ab, um den Richtwinkel von der Vertikallinie zu erhalten. Sodann berechnet man aus dieſem feſtgeſetzten Richtwinkel $= N$, aus der horizontalen Entfernung desjenigen Punktes auf dem Wallgange $= B = b + p$, wo die Kugel den erſten Aufſchlag machen ſoll, und aus

der

der Erhöhung dieſes Punktes über den Horizont des Kanonrohres $= C = c - q$, die ganze horizontale Schußweite $= u$ mittelſt der erſten Tafel durch nachſtehende Formel $u = \frac{B}{1 - \frac{C}{B} \text{tang} N}$; und endlich ſuchet man zu dieſer berechneten horizontalen Schußweite in der vorgeſchlagenen Ricoſchettafel bey der feſtgeſetzten Elevation die zugehörige Ladung, welche um etwas vermehret oder vermindert werden muß, wenn das vorräthige Pulver ſchwächer oder ſtärker iſt als jenes, worauf ſich die Ricoſchettafel gründet.

Fig.

Nachdem nun auf dieſe Art die Elevation und Ladung beſtimmet iſt, ſo giebt man gleich auf den zu ricoſchettirenden Wallgang einen oder zwey Schüſſe. Sollten die Schüſſe zu kurz ausfallen, ſo kann mit Beybehaltung der Ladung, der Fehler auf eine eben nicht mathematiſche Art mit einer etwas gröſſeren Elevation verbeſſert werden; ſollten aber die Schüſſe zu weit reichen, ſo muß mit Beybehaltung der feſtgeſetzten Elevation der Fehler durch die Verminderung der Ladung verbeſſert werden; denn wollte man auch in dieſem 2ten Falle mit Beybehaltung der Ladung den Fehler durch die Verminderung der Elevation verbeſſern, ſo könnte der Elevationswinkel kleiner ausfallen, als der nach vorſtehender Vorſchrift berechnete möglichſt kleinſte Elevationswinkel iſt, und die Kugeln würden ſodann in die Bruſtwehre einſchlagen, ausgenommen man hat gleich im Anfange den Elevationswinkel beträchtlich gröſſer angenommen, wo man nun in beyden Fällen mit Beybehaltung der Ladung den Fehler durch die Veränderung der Elevation verbeſſern kann, jedoch ſo daß man im zweyten Falle auf den möglichſt kleinſten Elevationswinkel Acht giebt.

Fig. Es ſey z. B. die horizontale Entfernung eines Traverſes (Querwalles) auf einem zu ricoſchettirenden Wallgange $b = 324$ Klafter.

Die Erhöhung der höchſten Kante dieſes Traverſes über den Horizont des Kanonenrohres in der Ricoſchetbatterie $c = 6$ Klafter.

Der Abſtand eines Geſchützes hinter dem Travers von der inwendigen Seite deſſelben $p = 4$ Klafter.

Und die Vertiefung dieſes Geſchützes unter der höchſten Kante des Traverſes $q = 4$ Schuh $= \frac{2}{3}$ Klafter,

ſo wird der Elevationswinkel auf folgende Art geſucht;

$$\frac{c}{b} = \frac{6}{324} = \frac{1}{54} = 0{,}018$$

$$\frac{q}{p} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

$$\frac{c-q}{b+p} = \frac{16}{3 \cdot 328} = \frac{2}{123} = 0{,}016$$

Summe $= 0{,}201$

ferner $\frac{1}{0{,}201} = \frac{1000}{201} = 4{,}98 = \text{tang}\,n$,

nämlich $n = 78^\circ\ 40'$

und folglich der möglichſt kleinſte Elevationw. $= 11^\circ\ 20'$, daraus folgt der ſchickliche Elevationwinkel $= 12^\circ$; und ferner der Richtwinkel von der Vertikallinie $N = 78^\circ$.

Aus der Tangente des feſtgeſetzten Richtwinkels tang $N =$ tang $78^\circ = 4{,}70$,

Aus der horizontalen Entfernung des Geſchützes hinter dem Traverſe von der Ricoſchetbatterie gerechnet $B = b + p = 328$ Klafter,

und

Und aus der Erhöhung deſſelben über den Horizont des Kanonrohres in der Ricoſchetbatterie $C = c - q = 1\frac{6}{8}$ Klafter, wird nun die ganze horizontale Schußweite nach der Formel berechnet Fig.

$$u = \frac{B}{1 - \frac{C}{B} . \operatorname{tang} N} = \frac{B}{D}$$

nämlich tang N = tang 78° = 4,70

multipl. mit $\frac{C}{B} = \frac{c - q}{b + p} = 0{,}016$

Produkt = 0,075

von 1 ſubtr. = 0,925 = D

und endlich $\frac{B}{D} = \frac{328}{0{,}925} = \frac{328000}{925} = 355$ Kl. iſt die ganze horizontale Schußweite, wozu man nun in der vorgeſchlagenen Ricoſchettafel bey dem feſtgeſetzten Elevationswinkel = 12° die zugehörige Ladung aufſuchet, und ſolche dergeſtalt einrichtet, daß ſie eher zu ſchwach als zu ſtark ſey, weil der feſtgeſetzte Elevationswinkel 12° von dem berechneten möglichſt kleinſten Elevationswinkel $11^\circ\,20'$ nicht viel verſchieden iſt.

Wäre aber $b = 162$ Klafter, und dabey $c = 6$, $p = 4$, $q = \frac{4}{8}$ Klafter, wie im vorigen Beyſpiele, ſo iſt der möglichſt kleinſte Elevationswinkel = $13^\circ 15'$. Dieſer möglichſt kleinſte Elevationswinkel wird noch gröſſer, wenn man mit der Ricoſchetbatterie näher an die Feſtung rücket, oder wenn die Traverſen höher ſind, oder endlich wenn das Geſchütz denſelben näher anliegt. Aus dieſer Urſache hat man vorgeſchlagen die Elevationswinkel in der Ricoſchettafel wenigſtens bis 15° anzunehmen, damit auch die Kugeln der Ricoſchetſchüſſe, die erſte Kanone hinter einem Travers, welche nicht gar 2 Klaſter davon abſteht, und die dabey angeſtellte Mann-

Mannſchaft treffen können, weil man nicht allezeit Grenaden genug hat, um ſolche zwiſchen die Traverſen hineinzujagen. Der Widerſtand der Luft verurſachet zwar, daß der niederſteigende Aſt der Bahn eines geworfenen Körpers etwas mehr gekrümet iſt als der aufſteigende Aſt, und daß dadurch der möglichſt kleinſte Elevationswinkel des Ricoſchetſchuſſes etwas kleiner ausfällt, als nach der angeführten Berechnung; allein der Unterſchied iſt bey den ſchwachen Ladungen der Ricoſchetſchüſſe unbedeutend, wie es in der Folge bey der Bewegung in einem widerſtehenden Mittel zu erſehen ſeyn wird.

VI. Vorleſung.

Von der Bewegung ſchwerer Körper auf einer ſchiefen Ebene, und in einigen krummen Linien.

§. 89.

Eine ebene Fläche, welche gegen eine horizontale Fläche unter einem ſchiefen Winkel geneigt iſt, heißt eine **ſchiefe Ebene** (planum inclinatum). Wenn
21 man auf einer ſchiefen Ebene PQ Fig. 21. einen **ſchweren** Körper M frey ausläßt, ſo verbleibt derſelbe nicht in Ruhe, weil ſein Gewicht wegen der ſchiefen Richtung von der Ebene nicht ganz getragen, nicht ganz aufgehoben wird, ſondern er ſinket längſt der ſchie-

ſen Ebene gegen den Horizont herab, wenn nicht etwan die Reibung, oder ſonſt ein Widerſtand ſeine Bewegung hindert. Fig. 21

§. 90.

Die bewegende Kraft und die Richtung der Bewegung bey einem ſchweren Körper auf einer vollkommen glatten und dabey undurchdringlichen und unbeweglichen ſchiefen Ebene läßt ſich auf folgende Art beſtimmen.

Der ſchwere Körper M wird nach der vertikalen Richtung NM von einer bewegenden Kraft gepreſſet, die ſeinem eigenen Gewichte gleich iſt; man gedenke nun aus einem beliebigen Punkte N der Geraden NM eine Senkrechte NF auf die ſchiefe Ebene PQ, und aus M die Parallele MD zu FN, das iſt die Senkrechte MD auf die nämliche ſchiefe Ebene PQ; und endlich gedenke man das Parallelogram FD, ſo zerfällt die Kraft nach der Richtung NM in zwey andere Seitenkräfte nach den Richtungen DM und FM, welche beyde zuſammen der erſten Kraft **äquipollent** ſind (§. 71.). Wenn man das Gewicht des Körpers nämlich die gegebene Kraft nach der Richtung NM mit q, die eine geſuchte Kraft nach der Richtung FM mit p, und die andere nach der Richtung DM mit r bezeichnet, ſo iſt $p = q . \sin NMD$, und $r = q . \cos NMD$ vermög (§. 69.) Die Kraft $r = q . \cos NMD$, weil ſie nach einer gegen die ſchiefe Ebene ſenkrechten Richtung DM oder NF auf den Körper wirket, wird von der Undurchdringlichkeit der Ebene gänzlich aufgehoben, ſo wie die bewegende Kraft eines ſchweren Körpers auf einer horizontalen Fläche; dieſe Kraft $r = q . \cos NMD$ zeigt an, wie ſtark die Ebene PQ bey den angeführten Umſtänden von dem Körper gepreſſet werde, ſie iſt der ſenkrechte **Druck**, welchen die ſchiefe Ebene wirk-

Fig. 21 lich leidet. Hingegen die Kraft $p = q$. ſin NMD, weil ſie nach der Richtung FM oder ND mit der ſchiefen Ebene parallel auf den Körper wirket, und bey dieſer Richtung keine Hinderniſſe der Bewegung antrift, wird den Körper nach der Richtung FMB wirklich fortbewegen. Dieſe Richtung FMB iſt nichts anders als die Durchſchnittslinie der erweiterten vertikalen Ebene FD mit der ſchiefen Ebene PQ. Wenn man die Ebene FD ſo weit ausdehnet, daß ſie auch die horizontale Ebene SR durchſchneidet, ſo iſt es leicht einzuſehen, daß ſowohl CB als auch AB auf der Durchſchnittslinie RQ ſenkrecht ſtehe, und daß folglich ABC der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene, und dabey der Winkel NMD = ABC ſey; denn ſowohl PQ als auch SR iſt ſenkrecht auf FD oder auf ACB, weil NM auf SR, und DM auf PQ ſenkrecht iſt; folglich iſt auch RQ ſenkrecht auf ACB (371), nämlich CBR = 90°, und auch ABR = 90°. Gedenket man nun CA ſenkrecht auf AB, ſo iſt in den Dreyecken ACB, DNM nebſt dem rechten Winkel auch der Winkel ACB = DNM, weil beyde dem Winkel CMN gleich ſind; es iſt demnach auch der Winkel ABC = NMD. Setzet man nun den Neigungswinkel ABC = m, ſo iſt auf der ſchiefen Ebene PQ nach der Richtung FMB die bewegende Kraft $p = q$. ſin m, und der Druck gegen die ſchiefe Ebene iſt $r = q$. cos m für den ganzen Sinus = 1, das iſt **die bewegende Kraft eines ſchweren Körpers auf der ſchiefen Ebene iſt gleich dem Gewichte des Körpers multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene gegen den Horizont, und die Richtung ſeiner Bewegung iſt die Durchſchnittslinie der ſchiefen Ebene mit der Ebene des Neigungswinkels; der Druck aber, welchen die ſchiefe Ebene wirklich leidet, iſt gleich**

dem

dem Gewichte des Körpers multipliciret mit dem Koſinus des Neigungswinkel der ſchiefen Ebene gegen den Horizont. Fig. 21

§. 91.

Die Kraft, welche den Körper längſt der ſchiefen Ebene herabzuſinken nöthiget, nennt man das **relative** oder **reſpektive** Gewicht des Körpers um es von ſeinem **abſoluten** Gewichte zu unterſcheiden, deſſen Richtung lothrecht oder vertikal iſt. Die Gerade BC heißt die **Länge**, die Senkrechte AC die **Höhe**, und AB die **Grundlinie** der ſchiefen Ebene. Es iſt vermög vorhergehenden das relative Gewicht $p = q . \text{ſin}\, m$, wenn q das abſolute Gewicht des Körpers, und m den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene bedeutet; daraus folgt $p : q = \text{ſin}\, m : \text{ſintot}$; es iſt aber auch $AC : BC = \text{ſin}\, m : \text{ſintot}$; folglich auch $p : q = AC : BC$, **nämlich das relative Gewicht des Körpers auf der ſchiefen Ebene verhält ſich zu ſeinem abſoluten Gewichte wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge.**

Der Druck gegen die ſchiefe Ebene iſt $r = q . \cos m$; daraus folgt $r : q = \cos m : \text{ſintot} = AB : BC$, das iſt **der Druck gegen die ſchiefe Ebene verhält ſich zum Gewichte des Körpers wie die Grundlinie der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge.**

§. 92.

Aufgabe. **Die Bewegung eines ſchweren Körpers auf der ſchiefen Ebene zu beſtimmen.**

Aufloͤſ. Der Körper M befinde ſich im Anfange der Bewegung in C, in der Zeit t rücke ſolcher bis M, nämlich es ſey der Weg $CM = s$, und die in M

Fig. 21 nach der Richtung MB erlangte Geſchwindigkeit $= v$; ferner ſey nach der Richtung MB die bewegende Kraft $= P$, und die Maſſe des bewegten Körpers $= M$, ſo iſt $v = \frac{2gPt}{M}$, $s = \frac{gPt^2}{M}$, und $v^2 = \frac{4gPs}{M}$ (§. 50.), weil vermög vorhergehenden die bewegende Kraft nach der Richtung MB auf einer nämlichen ſchiefen Ebene **unveränderlich** iſt; es iſt nämlich $P = q . \text{ſin}\, m$, wenn man das abſolute Gewicht des Körpers mit q, und den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene mit m bezeichnet; über dieſes iſt auch die Maſſe des Körpers $M = q$; folglich iſt $\frac{P}{M} = \text{ſin}\, m$, und ferner $v = 2gt . \text{ſin}\, m$, $s = gt^2 . \text{ſin}\, m$, $v^2 = 4gs . \text{ſin}\, m$, woraus ſich folgende Tabelle verfertigen läßt.

zu ſuchen	gegeben.	Formel	zu ſuchen	gegeben	Formel
v	g, t	I. $v = 2gt . \text{ſin}\, m$	t	g, v	VII. $t = \frac{v}{2g . \text{ſin}\, m}$
	g, s	II. $v = \sqrt{4gs . \text{ſin}\, m}$		g, s	VIII. $t = \sqrt{\frac{s}{g . \text{ſin}\, m}}$
	t, s	III. $v = \frac{2s}{t}$		v, s	IX. $t = \frac{2s}{v}$
s	g, t	IV. $s = gt^2 . \text{ſin}\, m$	g	s, t	X. $g = \frac{s}{t^2 . \text{ſin}\, m}$
	g, v	V. $s = \frac{v^2}{4g . \text{ſin}\, m}$		v, t	XI $g = \frac{v}{2t . \text{ſin}\, m}$
	v, t	VI. $s = \frac{vt}{2}$		v, s	XII. $g = \frac{v^2}{4s . \text{ſin}\, m}$

Die-

Fig. 21

Dieſe XII. Formeln ſind mit (§. 41.) einerley, wenn man daſelbſt $g.\sin m$ ſtatt g ſubſtituiret. Die Formel X wäre ſehr geſchickt um die Beſchleunigung der Schwere $= g$ zu beſtimmen, wenn durch die Reibung die Bewegung nicht verzögert würde. **Galiläus** hat der erſte mittelſt der ſchiefen Ebene die Beſchleunigung der Schwere zu beſtimmen geſucht; er ließ eine wohlpollirte metallene Kugel auf einer hölzernen mit Pergament überzogenen Ebene herabrollen, die eine beträchtliche Länge hatte, und gegen den Horizont unter einem kleinen Winkel geneigt war; er entdeckte durch dieſen Verſuch das eine Geſetz der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, daß ſich nämlich die zurückgelegten Wege gegen einander verhalten wie die Quadrate der Zeiten, woraus er ſodann die Unveränderlichkeit der Schwerkraft, und die Geſetze des freyen Falles der Körper abgeleitet hat.

Anmerk. Das bisher Vorgetragene von der Bewegung ſchwerer Körper auf einer ſchiefen Ebene hat nicht bloß allein in der Vorausſetzung ſeine Richtigkeit, daß man den bewegten Körper für einen phyſiſchen Punkt, das iſt für ein Elementartheilchen der Materie ohne angeblicher Ausdehnung, anſehe; der ſchwere Körper auf der ſchiefen Ebene möge was immer für eine Geſtalt haben, ſo iſt jederzeit ſein relatives Gewicht $= q.\sin m$, wenn man ſein abſolutes Gewichte mit q, und den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene mit m bezeichnet; denn wenn ein Körper M, deſſen Gewicht $= q$ iſt, aus n gleichen materiellen Elementartheilchen beſteht, wovon eines jeden abſolutes Gewicht $= z$ iſt, ſo iſt $q = nz$ vermög (§. 11.); über dieſes iſt eines jeden ſolchen Elementartheilchens relatives Gewicht $= z.\sin m$, und folglich iſt von n ſolchen Elementartheilchen zuſammengenommen das relative Gewicht $= nz.\sin m$, nämlich es

Fig. 21 iſt des Körpers M relatives Gewicht $= nz \sin m$, oder $= q.\sin m$, wenn man wieder q für nz ſubſtituiret.

§. 93.

Es ſey die Länge der ſchiefen Ebene BC $= c$, und ihre Höhe AC $= a$, ſo iſt BC (c : AC (a = ſintot (1 : ſin ABC (m; folglich $\sin m = \frac{a}{c}$; ferner bedeute nun t die Zeit des ſchiefen Falles durch die ganze Länge CB, und v die in B am Ende der ſchiefen Ebene nach der Richtung CB erlangte Geſchwindigkeit, ſo iſt $s = c$. Man ſubſtituire in den vorhergehenden Formeln c für s, und $\frac{a}{c}$ für $\sin m$, ſo erhält man auch nachſtehende brauchbare Formeln,

$$1)\ v = \frac{2agt}{c},\ 2)\ v = \sqrt{4ga};\ 3)\ t = \frac{vc}{2ga};$$

$$4)\ t = \sqrt{\frac{c^2}{ag}};\ 5)\ g = \frac{c^2}{at^2}.$$

Daraus laſſen ſich verſchiedene Folgen ableiten, als z. B.

I. **Die auf der ſchiefen Ebene erlangte Geſchwindigkeit verhält ſich zur Geſchwindigkeit, welche in eben der Zeit durch den freyen Fall erlanget wird, wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge.** Denn auf der ſchiefen Ebene iſt $v = \frac{2agt}{c}$, hingegen iſt durch den freyen Fall in eben dieſer Zeit die erlangte Geſchwindigkeit $V = 2gt$; folglich $v : V = \frac{2agt}{c} : 2gt = a : c$.

II.

II. **Die auf der ſchiefen Ebene erlangte Geſchwindigkeit iſt eben ſo groß, als wenn der Körper durch die Höhe a dieſer ſchiefen Ebene frey herabgefallen wäre.** Dieſes zeigt die Formel 2) $v = \sqrt{4ga}$.

III. **Die Zeit t des ſchiefen Falles verhält ſich zur Zeit T des ſenkrechten Falles von der nämlichen Höhe, wie die Länge der ſchiefen Ebene zu ihrer Höhe.** Denn die Zeit T des ſenkrechten Falles durch die Höhe a iſt $T = \sqrt{\frac{a}{g}}$, und die Zeit des ſchiefen Falles iſt $t = \sqrt{\frac{c^2}{ag}}$; folglich $t : T = \sqrt{\frac{c^2}{ag}} : \sqrt{\frac{a}{g}} = c : a$.

IV. **Auf verſchiedenen ſchiefen Ebenen von einerley Höhe verhalten ſich die Dauerzeiten T, t des ſchiefen Falles, wie die Längen C, c der ſchiefen Ebenen.** Denn es iſt in ſolchen Fällen $T = \sqrt{\frac{C^2}{ag}}$, und $t = \sqrt{\frac{c^2}{ag}}$; folglich $T : t = C : c$; u. ſ. w.

§. 94.

Auf der ſchiefen Ebene CB Fig. 22. iſt der in der Zeit t zurückgelegte Weg $CM = gt^2 . \sin B$, oder $CM = gt^2 . \frac{AC}{BC}$; durch den freyen Fall wird in eben dieſer Zeit ein Weg $x = gt^2$ zurückgelegt; aus dieſen zwey Gleichungen folgt $CM = \frac{x . AC}{BC}$, das iſt. $AC : BC = CM : x$; wenn man aus M die Senkrechte MG 22

auf

Fig. auf CB führet, ſo iſt AC : BC = CM : CG; folglich
22 iſt x = CG. Es ſind demnach CM und CG Wege,
welche in gleichen Zeiten beſchrieben werden, **gleichdauerende Wege** (ſpatia iſochrona).

§. 95.

Wenn CG ein vertikaler Durchmeſſer eines Kreiſes iſt, ſo ſind alle aus C, und auch aus G gezogene Sehnen mit dem vertikalen Durchmeſſer CG **gleichdauerende Wege.** Denn zieht man aus den Endpunkten D, E, F der Sehnen CD, CE, CF die Geraden DG, EG, FG, ſo ſind D, E, F rechte Winkel; die aus C geführten Sehnen CD, CE, CF ſind demnach vermög vorhergehenden als ſchiefe Ebenen betrachtet mit CG, und folglich auch unter einander gleichdauerende Wege. Zieht man aus C die Parallele CM zu DG, ſo iſt CM = DG, und beyde ſind gegen den Horizont unter einerley Winkel geneigt; folglich ſind CM und DG, und deßwegen auch CD und DG gleichdauerende Wege. Die Zeit, in welcher durch den freyen Fall der vertikale Durchmeſſer CG = a zurückgelegt wird, iſt $=\sqrt{\frac{a}{g}}$; eben ſo groß iſt demnach auch die Zeit des ſchiefen Falles durch was immer für eine aus C oder aus G geführte Sehne CE oder FG, wenn ſolche auch unendlich klein iſt.

§. 96.

21 Da auf einer ſchiefen Ebene PQ Fig. 21. welche den Winkel ABC = m mit dem Horizonte einſchließt, ein ſchwerer Körper M mit der Kraft $p = q . \sin m$ herabzuſinken ſtrebet, wenn ſein Gewicht = q iſt, ſo muß

nach der entgegengeſetzten Richtung eine eben ſo groſſe Kraft angebracht werden um denſelben in Ruhe zu erhalten. Wenn aber die Richtung der Kraft, welche den ſchweren Körper auf der ſchiefen Ebene im Gleichgewichte erhält, nicht mit der Länge der ſchiefen Ebene übereinkömmt, ſondern mit derſelben einen Winkel einſchließt, ſo iſt ſie nicht mehr dem relativen Gewichte des Körpers gleich; auch iſt der ſenkrechte Druck gegen die ſchiefe Ebene ſodan nicht $= q . \cos m$. Man kann den Zuſtand des Gleichgewichtes in einem ſolchen Falle auf folgende Art unterſuchen.

§. 97.

Aufgabe. **Aus dem gegebenen Gewichte $= q$ einer ſchweren Laſt M, die auf einer ſchiefen Ebene CB liegt Fig. 23. aus dem Neigungswinkel ABC $= m$ der ſchiefen Ebene, und aus der gegebenen Richtung einer geſuchten Kraft $= p$, welche den Körper M von M gegen E zu bewegen ſtrebet, nämlich aus dem gegebenen Winkel FMN $= n$, welchen die Richtung der Kraft p mit der Vertikallinie einſchließt, die Gröſſe der Kraft p, und des ſenkrechten Druckes $= r$ gegen die ſchiefe Ebene im Zuſtande des Gleichgewichtes zu finden.** 23

Auflöſ. Man gedenke durch den Körper M die Vertikallinie MN, und die Senkrechte MD auf die ſchiefe Ebene; ſodann ziehe man aus einem beliebigen Punkte N der Geraden MN die Parallelen ND, NF zu MF, MD, ſo wird die Kraft p, welche nach der Richtung FME den Körper M auf dieſer ſchiefen Ebene im Gleichgewichte zu erhalten vermögend iſt, durch FM, und der ſenkrechte Druck $= r$ gegen die ſchiefe Ebene

Fig. durch MD vorgeſtellet ſeyn, wenn man das Gewicht des
23 Körpers oder der Laſt M durch MN bezeichnet (§. 69); nun iſt $\text{ſin}\, MFN : MN\ (q = \text{ſin}\, MNF : FM\ (p$; und $\text{ſin}\, MDN : MN(q = \text{ſin}\, MND : MD\ (r$;

folglich $p = \frac{q.\text{ſin}MNF}{\text{ſin}MFN}$, und $r = \frac{q.\text{ſin}MND}{\text{ſin}MDN}$;

es iſt aber $MNF = ABC = m$, $MND = FMN = n$, und $MFN = MDN = 180^\circ - m - n$, nämlich $\text{ſin}\, MNF = \text{ſin}\, m$, $\text{ſin}\, MND = \text{ſin}\, n$, und $\text{ſin}\, MFN = \text{ſin}\, MDN = \text{ſin}(180 - m - n) = \text{ſin}(m + n)$;

folglich iſt $p = \frac{q.\text{ſin}m}{\text{ſin}(m+n)}$, und $r = \frac{q.\text{ſin}n}{\text{ſin}(m+n)}$.

§. 98.

Aus dieſen zwey Formeln kann man nun verſchiedene Folgen ableiten; als

I. Wenn eine Laſt q auf einer ſchiefen Ebene von einer Kraft p nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung im Gleichgewichte zu erhalten iſt, **ſo verhält ſich dieſe Kraft p zur Laſt q, wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Grundlinie.** Denn es iſt in einem ſolchen Falle $FMN = 90^\circ$; nämlich $n = 90^\circ$, folglich $p = q.\frac{\text{ſin}\, m}{\cos m} = q.\text{tang} m$ und $p : q = \text{tang}\, m : \text{ſintot} = AC : AB$.

II. Iſt hingegen die Richtung der Kraft p mit der Länge der ſchiefen Ebene einerley, ſo iſt $FMN = BCA$, nämlich $n = 90^\circ - m$; folglich $p = q.\text{ſin}\, m$, und $p : q = \text{ſin}\, m : \text{ſiatot} = AC : BC$, **nämlich die Kraft zur Laſt wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge.**

Fig. 23 **III. Jn eben dieſem Falle verhält ſich der ſenkrechte Druck r zu Laſt q, wie die Grundlinie der ſchiefen Ebene zu ihrer Länge**, ſo wie (§. 91). Denn da in dieſem Falle $n = 90° - m$, ſo iſt $r = q . \cos m$, nämlich $r : q = \cos m : \text{ſintot} = AB : BC$. **Hingegen im vorigen Falle I. verhält ſich der ſenkrechte Druck r zur Laſt q wie die Länge der ſchiefen Ebene zu ihrer Grundlinie**; denn es iſt in dieſem Falle $r = \frac{q}{\cos m} = \frac{q . BC}{AB}$.

IV. Bey einerley Laſt und einerley Neigungswinkel der ſchiefen Ebene iſt im Zuſtande des Gleichgewichtes die Kraft p am kleinſten wenn $n = 90° - m$ iſt, das iſt wenn die Richtung der Kraft p mit der ſchiefen Ebene parallel läuft. Denn $p = \frac{q . \sin m}{\sin(m+n)}$ erhält bey unveränderlichem Zähler den kleinſten Werth, wenn der Nenner am größten wird, welches ſich zuträgt, wenn man $m + n = 90°$, nämlich $n = 90° - m$ ſetzet. Daher iſt es immer gut, wenn eine Laſt mittelſt einer ſchiefen Ebene zu erheben iſt, die Richtung der Kraft mit der ſchiefen Ebene parallel anzubringen.

§. 99.

Wenn eine gegebene Laſt $= q$ von einem gegebenen vertikalhangenden Gewichte $= p$ auf einer ſchiefen Ebene CD Fig. 24. mittelſt einer Schnur, die mit der ſchiefen Ebene parallel über die Rolle E geführet iſt, im Gleichgewichte zu erhalten wäre, ſo läßt ſich aus p, q, und aus der Höhe der ſchiefen Ebene $AC = a$ ver- 24

mög

Fig. mög vorhergehenden (§. 98. II.) die Länge derſelben
24 CD $= x$ durch folgende Proportion finden; $p : q$ $=$ AC (a : CD (x, nämlich es iſt $x = \frac{aq}{p}$.

Auf dieſer ſchiefen Ebene CD, deren Länge $= \frac{aq}{p}$ iſt, wird die Laſt q von der Kraft p nur im Gleichgewichte erhalten, es erfolgt aber noch keine Bewegung, wenn man ſchon die Reibung gänzlich auſſer Acht läßt. Soll nun eine wirkliche Bewegung erfolgen, ſo muß nothwendig die Länge der ſchiefen Ebene gröſſer ſeyn als CD. Hier kann die Frage aufgeworfen werden, **wie groß muß die Länge der ſchiefen Ebene BC ſeyn, damit die Laſt q auf die Höhe AC $= a$ von dem Gewichte p in der möglichſt kürzeſten Zeit gehoben werde?** Dieſe Länge läßt ſich auf folgende Art beſtimmen.

Es ſey die **geſuchte** Länge CB $= c$, die Zeit, worin BC von der aufſteigenden Laſt zurückgelegt wird, ſey $= t$, ſo iſt BC $= \frac{gPt^2}{M} = c$ (§. 50.); die Kraft, womit die Laſt q längſt der Ebene herabzuſinken ſtrebet, iſt $= \frac{q.\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{aq}{c}$ (§. 98. II.); eben dieſe Laſt q wird von der Kraft p nach entgegengeſetzter Richtung gezogen; folglich iſt nach der Richtung von B gegen C die bewegende Kraft $P = p - \frac{aq}{c}$ $= \frac{cp - aq}{c}$, die bewegte Maſſe aber iſt $M = p + q$, wenn man das Gewicht der Schnur auſſer Acht läßt; es iſt demnach $c = \frac{g(cp - aq)t^2}{c(p+q)}$; daraus folgt

gt^2

Fig. 24

$\frac{gt^2}{p+q} = \frac{c^2}{cp-aq}$, und dieſes $\frac{gt^2}{p+q}$ muß bey dem kleinſten Werthe von t auch ein kleinſtes ſeyn; davon iſt das Differenziale weil c veränderlich iſt, $d(\frac{gt^2}{p+q})$ $= \frac{2cdc(cp-aq)-pc^2dc}{(cp-aq)^2}$; ſetzet man nun den Zähler dieſes Differenzials $2cdc(cp-aq)-pc^2dc = 0$, weil der Nenner $= 0$ geſetzt nur die Länge für das Gleichgewicht giebt, ſo findet man endlich die geſuchte Länge $c = \frac{2aq}{p}$, nämlich CB = 2CD; **die Länge der ſchiefen Ebene muß demnach doppelt ſo groß ſeyn als im Zuſtande des Gleichgewichtes, wenn mittelſt derſelben eine gegebene Laſt durch ein gegebenes Gewicht auf eine gegebene Höhe in der möglichſt kürzeſten Zeit zu erheben iſt**; dieſe möglichſt kürzeſte Zeit iſt $t = \sqrt{(\frac{4aq(p+q)}{gp^2})}$, wenn man in der vorigen Gleichung ſtatt c den gefundenen Werth ſetzet.

Wenn man in dieſem Falle auch die Reibung in Erwägung zieht, die bey ebenen über einander glitſchenden Flächen gemeiniglich dem dritten, zuweilen auch nur dem vierten Theile des ſenkrechten Druckes gleich iſt, ſo fällt die geſuchte Länge der ſchiefen Ebene anders aus; ſie läßt ſich auf folgende Art beſtimmen. Der Druck gegen die ſchiefe Ebene iſt vermög (§. 98. III.) in einem ſolchen Falle $r = \frac{q.AB}{BC} = \frac{q(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$; $\frac{1}{3}r$ oder $\frac{1}{4}r$ iſt die Reibung, allgemein iſt die Reibung

=

Fig. 24 $= kr = \frac{kq(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$, allwo nach Beſchaffenheit der Umſtände entweder $k = \frac{1}{3}$, oder auch nur $= \frac{1}{4}$, oder noch kleiner iſt; die Reibung $= \frac{kq(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$ iſt für eine Kraft anzuſehen, die bey der wirklichen Bewegung eines Körpers denſelben nach entgegengeſetzter Richtung preſſet; es iſt demnach nach der Richtung von B gegen C die wirkliche bewegende Kraft $P = p - \frac{aq}{c} - \frac{kq(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$

$$= \frac{cp-aq-kq(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{c},$$

und die bewegte Maſſe $M = p + q$, wenn man das Gewicht der Schnur noch immer auſſer Acht läßt; vermög der Formel $BC = \frac{gPt^2}{M}$ iſt demnach $c = \frac{g[cp-aq-kq(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]t^2}{c(p+q)}$, daraus folgt $\frac{p+q}{gt^2} = c^{-1}p - c^{-2}aq - kq(c^{-2}-a^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}$, welches bey dem kleinſten Werthe von t ein **Größtes** ſeyn muß; derowegen iſt

$$\mathrm{d}\left(\frac{p+q}{gt^2}\right) = - c^{-2}p\mathrm{d}c + 2c^{-3}aq\mathrm{d}c$$

$$+ \frac{c^{-3}kq\mathrm{d}c + 2c^{-5}a^2kq\mathrm{d}c}{\sqrt{(c^{-2}-a^2c^{-4})}} = 0,$$ nämlich

$(p^2 - k^2q^2).c^4 - 4apq.c^3 + (4a^2q^2 - a^2p^2 - 4a^2k^2q^2).c^2 + 4a^3pq.c - 4a^4q^2(k^2 + 1) = 0$ iſt die Gleichung, woraus die geſuchte Länge c zu entwickeln iſt.

Fig. 24

Aus der vorigen Gleichung

$$c = \frac{g[cp - aq - kq(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]t^2}{c(p+q)}$$

folgt $p = \dfrac{q[c^2 + agt^2 + gkt^2(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]}{c(gt^2 - c)}$

eine Formel für die Kraft p, womit ſich eine gegebene Laſt auf einer gegebenen ſchiefen Ebene in einer gegebenen Zeit durch eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung hinaufſchaffen läßt, allwo jederzeit $t^2 > \frac{c}{g}$ ſeyn muß, weil ſonſt die Bewegung längſt der ſchiefen Ebene hinaufwärts unmöglich iſt.

§. 100.

Das relative Gewicht der Laſt und die Reibung ſind die zwey Kräfte, welche bey der Erhebung einer Laſt auf einer ſchiefen Ebene nach der entgegengeſetzten Richtung wirken, ſie ſind der Widerſtand oder **das Hinderniß der Bewegung.** Das relative Gewicht iſt $= q.\sin m$, und die Reibung iſt $= kq.\cos m$, wenn man die Laſt $= q$, den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene $= m$, und nach Beſchaffenheit der reibenden Flächen entweder $k = \frac{1}{3}$, oder $= \frac{1}{4}$ oder noch kleiner ſetzet; es iſt demnach auf der ſchiefen Ebene das Hinderniß der Bewegung $R = q.\sin m + kq.\cos m$, wenn die Richtung der bewegenden Kraft mit der ſchiefen Ebene parallel iſt. Es iſt ein Winkel möglich, bey dem dieſes Hinderniß ein **Größtes** wird; er läßt ſich auf folgende Art beſtimmen; es iſt $dR = qdm.\cos m - kqdm.\sin m = 0$ bey dem größten Werthe von R; folglich $\cos m = k.\sin m$, oder $\frac{\cos m}{\sin m} = k$, nämlich $\cot m = k$. Iſt nun $k = \frac{1}{3}$, ſo iſt der Neigungs-

win-

Fig. 24 winkel des größten Hindernißes $m = 71^\circ\ 34'$; iſt aber $k = \frac{1}{4}$, ſo iſt $m = 75^\circ\ 57'$.

Da nun bey dem Neigungswinkel des größten Hindernißes $\cos m = k.\sin m$ iſt, oder $1 - \sin^2 m = k^2.\sin^2 m$, ſo iſt $\sin m = \frac{1}{\sqrt{(k^2+1)}}$ und $\cos m = \frac{k}{\sqrt{(k^2+1)}}$; folglich iſt das größte Hinderniß $R = \frac{q}{\sqrt{(k^2+1)}} + \frac{k^2 q}{\sqrt{(k^2+1)}} = q.\sqrt{(k^2+1)}$ **größer als die Laſt q ſelbſt.**

Der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene, bey dem das Hinderniß der Bewegung dem Gewichte der Laſt gleich iſt, läßt ſich auch beſtimmen; denn es iſt in einem ſolchen Falle $q.\sin m + kq.\cos m = q$, nämlich $\sin m + k \cos m = 1$; man ſetze $k = \text{tang}\, e$, ſo iſt $\sin m + \text{tang}\, e\, .\cos m = 1$, oder $\sin m\, .\, \cos e + \sin e\, .\, \cos m = \cos e$; daraus folgt $\sin(m+e) = \cos e$, oder $\sin(m+e) = \sin(90^\circ - e)$, nämlich $m+e = 90^\circ - e$, und endlich $m = 90^\circ - 2e$; iſt nun $k = \frac{1}{3}$, ſo iſt $\text{tang}\, e = \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots.$, und $e = 18^\circ\ 26'$, folglich iſt der geſuchte Winkel $m = 53^\circ\ 8'$.

Wenn die Richtung der Kraft, welche eine Laſt q
23 längſt der ſchiefen Ebene BC Fig. 23. hinaufbeweget, nicht mit der ſchiefen Ebene parallel angebracht iſt, ſondern mit der Vertikallinie den Winkel FMN $= n$ einſchließt, ſo iſt vermög (§. 97.) das Hinderniß der Bewegung $R = \frac{q.\sin m + kq.\sin n}{\sin(m+n)}$. Es iſt bey einer **nämlichen ſchiefen Ebene** ein Winkel n möglich, bey dem dieſes Hinderniß ein **kleinſtes** wird; dieſer Winkel läßt ſich beſtimmen; denn es iſt $\frac{dR}{q}$

=

$$= \frac{k dn.\cos n.\sin(m+n) - dn.\cos(m+n).(\sin m + k \sin n)}{\sin^2(m+n)}$$ Fig.

$= 0$ bey dem kleinſten Werthe von R; daraus folgt $k.[\sin(m+n).\cos n - \cos(m+n).\sin n] = \sin m.\cos(m+n)$ nämlich $k.\sin m = \sin m.\cos(m+n)$, und endlich $\cos(m+n) = k$ iſt die Gleichung, woraus ſich der geſuchte Winkel n ergiebt.

§. 101.

Die Reibung iſt ein Widerſtand, welchen ein wirklich bewegter Körper leidet, da er auf einer nicht vollkommen glatten Fläche fortbeweget wird; ſie iſt eine Kraft, welche den bewegten Körper während ſeiner Bewegung nach entgegengeſetzter Richtung preſſet. Kein phyſiſcher Körper iſt ſo vollkommen glatt, daß er nicht auf ſeinen Seitenflächen einige Hervorragungen und Vertiefungen haben ſollte. Wenn ein ſchwerer Körper mit einer Seitenfläche auf der Fläche eines anderen Körpers z. B. auf einem horizontalen Tiſche oder auch auf einer geneigten Fläche liegt, ſo werden von dem Gewichte des Körpers ſeine Hervorragungen in die Vertiefungen der Fläche, worauf er liegt, etwas eingedrückt. Soll nun der ſchwere Körper auf der Fläche, worauf er ruhet, von einer bewegenden Kraft fortgeſchoben werden, ſo muß dieſe bewegende Kraft ihn entweder immer aus den Vertiefungen ausheben, oder die Hervorragungen niederbeugen, oder endlich ſolche abbrechen. Wenn man die ſchiebende, oder **glitſchende**, **gleitende** Bewegung in eine **rollende** verwandelt, ſo wird dadurch die Reibung ungemein vermindert; eine pollirte **Kugel** rollet bey der geringſten Neigung auf einer ſchiefen Ebene herab, da man hingegen die Ebene 12° bis 18° Grade erheben muß, bis ein pollirter Würfel, wenn er

Fig. auch mit der Kugel aus einerley Materie beſteht, herabzuglitſchen anfängt. Die Reibung wird auch vermindert, wenn man die reibenden Flächen mit Oel oder mit einer anderen fetten Materie einſchmieret, weil dadurch die Vertiefungen etwas ausgefüllet werden. Körper von einerley Materie z. B. Stahl auf Stahl reiben ſich ſtärker, als Körper von verſchiedener Materie z. B. Stahl auf Meſſing; denn die Vertiefungen und Hervorragungen der gleichartigen Körper greifen tiefer in einander, paſſen genauer zuſammen, als jene der ungleichartigen.

Man hat durch Verſuche gefunden, daß bey mittelmäſſig pollirten Flächen die Reibung faſt niemals gröſſer ſey als $\frac{1}{3}$ des ſenkrechten Druckes, welchen der Körper gegen die Fläche äuſſert, worauf er fortgeſchoben wird. Ob im Anfange der Bewegung die Reibung gröſſer oder kleiner ſey als während der Bewegung ſelbſt, ob ſie bey veränderter Geſchwindigkeit des bewegten Körpers immer einerley verbleibe, oder ob ſie ſich mit der Geſchwindigkeit zugleich verändere, ſind die Schriftſteller nicht einig; einige behaupten durch Verſuche die **Reibung der Ruhe** (die anfängliche Reibung) gröſſer als die **Reibung der Bewegung**, andere hingegen gerade das Gegentheil gefunden zu haben. Herr **L. Euler** Theoria motus corp. rigid. Roſtochii 1763 und mit ihm mehr andere halten die Reibung der Ruhe mit der Reibung der Bewegung für gleich groß, welches bey nicht gar zu ſchnellen Bewegungen gemeiniglich zutrift.

Mittelſt der ſchiefen Ebene laſſen ſich über die Reibung verſchiedene Verſuche anſtellen. Dazu iſt eine ziemlich lange ſchiefe Ebene nothwendig, die ſich um beliebige Winkel über den Horizont erheben läßt. Wenn man nun einen Körper, deſſen Gewicht = q iſt, auf eine ſolche ſchiefe Ebene leget, ſo iſt bey dem Neigungswinkel = m der ſchiefen Ebene die bewegende

Kraft

Kraft = $q.\sin m$, welche den Körper längſt der ſchiefen Ebene herunter treibet, ſein Druck aber gegen die ſchiefe Ebene iſt = $q.\cos m$, und folglich iſt die Reibung = $kq.\cos m$, welche die Bewegung hindert. So lang $q.\sin m < kq.\cos m$ iſt, kann keine Bewegung erfolgen, ſobald aber $q.\sin m > kq \cos m$ wird, ſinket der Körper längſt der ſchiefen Ebene wirklich herab; die Kraft, welche ſeine Bewegung beſchleuniget, iſt $= q.\sin m - kq.\cos m$. Wenn man die ſchiefe Ebene immer mehr und mehr, und zwar um ſehr kleine Unterſchiede ſolang über den Horizont erhebet, bis endlich der Körper zu ſinken anfängt, ſo kann man bey demjenigen Neigungswinkel der ſchiefen Ebene, bey dem der Körper eben zu ſinken anfängt, ohne merklichen Fehler das relative Gewicht des Körpers ſeiner Reibung gleich ſetzen; wenn z. B. bey dem Neigungswinkel $m = 15^\circ$ der Körper auf der ſchiefen Ebene noch ruhig verbleibet, bey dem Neigungswinkel $m = 15^\circ\ 10'$ aber ſchon zu ſinken anfängt, ſo iſt in dem erſten Falle zwar die Reibung $kq.\cos 15^\circ > q.\sin 15^\circ$, in dem zweyten Falle aber iſt ſchon $kq.\cos 15^\circ\ 10' < q.\sin 15^\circ\ 10'$; weil nun die Gränzen 15° und 15° 10′, zwiſchen denen der Reibungswinkel liegt, ſchon ſehr nahe an einander liegen, ſo kann man ohne merklichen Fehler $kq.\cos 15^\circ 10' = q.\sin 15^\circ 10$ ſetzen, das iſt **man kann für den Reibungswinkel** (bey dem das relative Gewicht des Körpers ſeiner Reibung gleich iſt) **ohne merklichen Fehler denjenigen Neigungswinkel der ſchiefen Ebene nehmen, bey dem der Körper eben zu ſinken anfängt**, der ſich nun bey verſchiedenen Körpern ſehr leicht durch Verſuche beſtimmen läßt. Man ſetze den Reibungswinkel = e, ſo iſt bey dem Körper, deſſen Gewicht = q iſt, die Reibung $kq.\cos e = q.\sin e$; daraus folgt die Rei-

Fig. **bungszahl** $k = \text{tang}\, e$. Findet man z. B. bey irgend einer Gattung der Körper durch Verſuche $e = 18^{\circ} 26'$ ſo iſt $k = \text{tang}\, 18^{\circ}\, 26' = 0{,}333 \ldots\ldots = \frac{1}{3}$, **nämlich die Reibung der Ruhe = dem dritten Theile des ſenkrechten Druckes;** ergiebt ſich bey einer anderen Gattung der Körper durch Verſuche der Reibungswinkel $e = 14^{\circ}$, ſo iſt $k = \text{tang}\, 14^{\circ} = 0{,}249 \ldots\ldots = \frac{1}{4}$ ziemlich genau'

Iſt nun der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene etwas gröſſer, als der Reibungswinkel, ſo erfolgt eine Bewegung, und zwar eine deſto ſchnellere je gröſſer der Neigungswinkel iſt. Setzet man den Neigungswinkel $= m$, das Gewicht des Körpers $= q$, und den in der Zeit t zurückgelegten Weg $= s$, ſo iſt $s = \frac{(q.\text{ſin}m - kq.\cos m)gt^2}{q}$ $= (\text{ſin}m - k.\cos m)gt^2$ vermög der allgemeinen Formel $s = \frac{gPt^2}{M}$, weil allhier die unveränderliche Kraft $P = q.\text{ſin}m - kq.\cos m$, und die bewegte Maſſe $M = q$ iſt; daraus folgt $k = \text{tang}m - \frac{s}{gt^2.\cos m}$ eine Formel wodurch ſich aus dem gegebenen Neigungswinkel m, aus dem bekannten Werthe von g, aus dem gemeſſenen Wege s, und aus der beobachteten Dauerzeit t die **Reibungszahl** k beſtimmen läßt. Man kann mittelſt dieſer Formel unterſuchen, ob die Reibung der Ruhe mit der Reibung der wirklichen Bewegung einerley ſey oder nicht. Wenn man den Werth von g nicht für bekannt annimmt, ſo muß man bey zwey verſchiedenen bekannten Neigungswinkeln m, M die in den beobachteten Zeiten t, T zurückgelegten Wege s, S ausmeſſen; und ſodann laſſen ſich aus den zwey Gleichungen $s = (\text{ſin}m - k.\cos m)gt^2$, $S = (\text{ſin}M - k.\cos M)gT^2$

die zwey unbekannten Gröſſen g und k berechnen, vorausgeſetzt daß k in beyden Fällen einerley ſey; man kann in beyden Fällen die Länge der ſchiefen Ebene einerley nehmen, nämlich $S = s$ ſetzen; in einem ſolchen Falle iſt die **Reibungszahl** $k = \frac{T^2\sin M - t^2\sin m}{T^2\cos M -- t^2.\cos m}$ **und die Beſchleunigung der Schwere** Fig.

$$g = \frac{s}{t^2.(\sin m - k\cos m)}.$$

Iſt einmal die Reibungszahl k bekannt, ſo wird die vollſtändige Bewegung auf der ſchiefen Ebene, wenn man auch die Reibung in Erwägung zieht, durch die drey Formeln beſtimmet

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & s = gt^2(\sin m - k\cos m) \\ \text{II.} & v = 2gt(\sin m - k\cos m) \\ \text{III.} & v^2 = 4gs(\sin m - k.\cos m) \end{array}\right\} \text{welche aus (§. 50.) abgeleitet ſind.}$$

§. 102.

Wenn ein ſchwerer Körper auf einer krummen Linie von ununterbrochener Krümmung gegen den Horizont herabſinket, ſo hat er in jedem Punkte derſelben nach der Richtung des Elementes nämlich nach der Richtung der Tangente dieſes Punktes eine eben ſo groſſe Geſchwindigkeit, als wenn er von eben der Höhe frey herabgefallen wäre, wenn z. B. auf der krummen Linie AMC Fig. 25. oder in einer vollkommen glatten nach dem Bogen AMC gekrümmten Rinne ein ſchwerer Körper in A ausgelaſſen wird, ſo daß er in dieſer krummen Linie gegen den Horizont BC herabſinken kann, ſo iſt in M nach der Richtung Mm ſeine Geſchwindigkeit derjenigen gleich, die er durch den freyen Fall von A nach P erlanget, nämlich in M nach der Richtung Mm iſt ſeine Geſchwindigkeit $=\sqrt{4g.AP}$. 25

Fig. 25 Um dieſes einzuſehen ſey $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$, $Mm = ds$, des Körpers Gewicht $= q$, und in M nach der Richtung Mm ſeine Geſchwindigkeit $= v$; nun kann Mm für eine gerade Linie, und zwar für die Länge einer ſchiefen Ebene angeſehen werden, deren Neigungswinkel $= MmR$, oder deren Höhe $= dx$, und Grundlinie $= dy$ iſt; derowegen iſt in M des bewegten Körpers relatives Gewicht oder nach der Richtung Mm die bewegende Kraft $= q \,.\, \sin MmR = \frac{q.dx}{ds}$ vermög (§. 91.), welche veränderlich ſeyn muß, weil der Winkel MmR veränderlich iſt; nun iſt bey veränderlichen Kräften $vdv = \frac{2gPds}{M}$ (§. 56. III.) und es iſt im gegenwärtigen Falle $P = \frac{qdx}{ds}$, $M = q$; folglich iſt $vdv = \frac{2gqdx.ds}{q.ds} = 2gdx$; daraus folgt endlich durch die Integralrechnung $v^2 = 4gx$, allwo Conſt. $= 0$ ſeyn muß, weil für $x = 0$ auch $v = 0$ iſt, nämlich es iſt $v = \sqrt{4g.AP}$.

Auch die Zeit t des Falles von A bis M läßt ſich finden; denn da in M des Körpers Geſchwindigkeit $v = \sqrt{4gx}$, und vermög (§. 56. II. $dt = \frac{ds}{v}$ ſtatt findet, ſo iſt $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$, nämlich $dt = \left(\frac{dx^2 + dy^2}{4gx}\right)^{\frac{1}{2}}$, und endlich $t = \int\left(\frac{dx^2 + dy^2}{4gx}\right)^{\frac{1}{2}}$ $+$ Conſt. allwo dy^2 aus der Eigenſchaft der krummen Linie bekannt ſeyn muß um das Integrale entwickeln

zu

zu können. Es kann allhier unter andern die Frage aufgeworfen werden, **wie die krumme Linie beſchaffen ſeyn müſſe, damit der ſchwere Körper in gleichen Zeiten ſich dem Horizonte gleichviel nähert.** Wenn man des ganzen Bogens AMC Dauerzeit $= b$, und die Höhe AB $= a$ ſetzet, ſo iſt in einem ſolchen Falle AB (a : AP ($x = b : t = \frac{bx}{a}$, und $\mathrm{d}t = \frac{b\mathrm{d}x}{a}$; es iſt demnach $\frac{b\mathrm{d}x}{a} = \left(\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{4gx}\right)^{\frac{1}{2}}$; daraus folgt durch die Abſönderung $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x(4a^{-2}b^2gx - 1)^{\frac{1}{2}}$, und endlich durch die Integration $y = \frac{1 + (4a^{-2}b^2gx - 1)^{\frac{3}{2}}}{6a^{-2}b^2g}$, wenn für $x = 0$ auch $y = 0$ ſeyn ſoll. Wenn man $(4a^{-2}b^2gx - 1) = a^{-1}u$ in der vorigen Differenzialgleichung ſetzet, ſo iſt $\mathrm{d}x = \frac{a\mathrm{d}u}{4b^2g}$; folglich $\mathrm{d}y = \frac{a^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u}{4b^2g}$, und $y = \frac{a^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}}{6b^2g}$, nämlich $u^3 = 36a^{-1}b^4g^2y^2$, oder $u^3 = cy^2$, wenn man $36a^{-1}b^4g^2 = c$ ſetzet, woraus zu erſehen iſt, **daß die geſuchte krumme Linie eine cubiſche Parabel ſey**

Fig. 25

Auch der Druck r gegen die krumme Linie AMC in jedem Punkte derſelben läßt ſich beſtimmen; es iſt nämlich in dem Punkte M vermög (§. 91.) der ſenkrechte Druck $r = q.\cos \mathrm{MmR}$, oder $r = \frac{q\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{q\mathrm{d}y}{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Fig. 26

§. 103.

Aufgabe. Die Dauerzeit des Falles in der Cycloide zu finden.

Aufl. Es ſey Fig. 26 des Erzeugungskreiſes Halbmeſſer $\frac{1}{2}$AB $= r$, der ſchwere Körper werde auf der Cycloide CMA in D in der Erhöhung AE $= b$ ausgelaſſen, in der Zeit t lege derſelben den Bogen DM $= s$ zurück; ferner ſey AP $= x$, PM $= y$, ſo iſt PM $=$ PQ $+$ QM $=$ PQ $+$ AQ, nämlich $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + r.\mathrm{arc\,ſin}\frac{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}{r}$ für den ganzen Sinus $= 1$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x(2rx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$, und Mm $= \mathrm{d}s = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{d}x\sqrt{2rx^{-1}}$; ſetzet man nun in M des bewegten Körpers Geſchwindigkeit $= v$, ſo iſt $v = \sqrt{4g.\mathrm{EP}} = \sqrt{4g(b-x)}$; es iſt aber $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}$, folglich iſt $\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}x\sqrt{(2rx^{-1})}}{\sqrt{[4g(b-x)]}}$ **(es muß allhier das Zeichen — geſetzet werden, weil t abnimmt, wenn x wächſt und umgekehrt)**; daraus folgt $t = -\left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \times \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(b-x)^{-\frac{1}{2}} +$ Conſt. nämlich vermög (621. VII) iſt $t = -\left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{arc\,cos}\left(1 - \frac{2x}{b}\right) +$ Conſt. nun iſt für $t = 0$ die Abſciſſe $x = b$; folglich $0 = -\left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{arc\,cos} - 1 +$ Conſt. nämlich Conſt. $= \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{arc\,cos} - 1 = \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\mathrm{arc}\,180^{\circ}$

$=$

$= \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\pi$, wenn $\pi = 3{,}14159265\ldots\ldots$ das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreis bedeutet; es iſt demnach $t = \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.[\pi - \text{arc} \cos(1 - 2x : b)]$; ſetzet man nun $x = 0$, ſo iſt endlich von D bis A die ganze Dauerzeit $t = \pi.\sqrt{\frac{r}{2g}}$; eben ſo groß iſt demnach auch die Dauerzeit von C bis A, und auch von G bis A, wenn ſchon der Bogen GA unendlich klein wäre, weil in der gefundenen Gleichung für die ganze Dauerzeit $t = \pi.\sqrt{\frac{r}{2g}}$ die Gröſſe b nicht mehr erſcheinet. Fig. 26

Wegen dieſer beſonderen Eigenſchaft der Cycloide, daß alle noch ſo verſchiedene Bögen derſelben vom Scheitel gerechnet, wenn ſie in einer vertikalen Lage mit dem Scheitel auf dem Horizonte aufliegt, von einem ſchweren Körper in einerley Zeit zurückgeleget werden, heißt ſie eine **gleichdauerende Linie**, (linea tautochrona). Um ſich von dieſer Eigenſchaft durch Verſuche zu überzeugen, muß man eine Rinne nach der cycloidiſchen Krümmung verfertigen, oder aber einen Körper A mittelſt eines vertikalen Fadens AF zwiſchen zwey halben cycloidiſchen Bögen CF und KF, deren Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes der halben Fadenlänge gleich iſt, ſo in F aufhängen wie es aus Fig. 26. zu erſehen iſt; denn bey dieſer Einrichtung muß der Körper A, wenn man denſelben bis M oder bis D erhebt, und ſodann frey ausläßt, vermög (§. 98.) in der Cycloide CMA gegen den Horizont herabſinken.

VII. Vorleſung.

Das einfache Pendel.

§. 104.

27 Ein vollkommen biegſamer Faden ohne Schwere, an deſſen einem Ende ein einziger ſchwerer Punkt ſich befindet, das andere Ende aber an einem unbeweglichen Punkte befeſtiget iſt, heißt ein **einfaches Pendel.** Statt dem vollkommen biegſamen Faden kann man auch eine gerade Linie CA Fig. 27. ohne Schwere gedenken, die ſich um den einen unbeweglichen Endpunkt C herumdrehen kann, am anderen Endpunkte aber einen einzigen ſchweren Punkt A bey ſich führet. Im Gegentheile heißt es ein **zuſammengeſetztes Pendel**, wenn es aus einem ſchweren Faden, oder aus einer ſchweren Stange beſteht, worauf ein oder mehrere Körper befeſtiget ſind. Wenn man ein einfaches Pendel in eine vertikale Lage CA bringet, ſo wird ſelbes in dieſer Lage ruhig bleiben, weil in dieſer Lage das Gewicht des ſchweren Punktes A von dem Zuſammenhange des Fadens nach der gerade entgegengeſetzten Richtung gänzlich aufgehoben wird. Bringt man aber das Pendel in die ſchiefe Lage CB oder CM, ſo kann es in dieſer Lage nicht ruhig verbleiben, weil der Punkt M in der Lage CM von der Schwere nach einer vertikalen Richtung gezogen, vom Faden CM aber nur nach einer ſchiefen Richtung zurückgehalten wird; der Punkt M ſtrebet in einer vertikalen Ebene gegen den Horizont herabzuſinken, und iſt gezwungen wegen der

unveränderlichen Länge des Fadens einen Kreisbogen zu beſchreiben. Der Faden leiſtet das nämliche, was eine nach dem Kreisbogen BMA gekrümmte Rinne leiſten würde. Wenn man demnach des Pendel CA in die ſchiefe Lage CB bringet, allwo der ſchwere Punkt B über den Horizont AQ um AE erhöhet iſt, und es daſelbſt frey ausläßt, damit der ſchwere Punkt in dem Kreisbogen BMA gegen den Horizont herabſinken kann, ſo iſt in M nach der Richtung des Elements Mm ſeine Geſchwindigkeit $= \sqrt{4g.EP}$, und in A iſt nach der Richtung AQ ſeine Geſchwindigkeit $= \sqrt{4g.EA}$ vermög (§. 102.) welches ſich hier eben ſo wie (§. 102.) aus der Betrachtung der ſchiefen Ebene Mm darthun läßt); mit dieſer in A erlangten Geſchwindigkeit ſetzet der ſchwere Punkt die Bewegung im Bogen AND ſolang weiter fort, bis ſeine Geſchwindigkeit gänzlich getilget iſt, das iſt bis ihm nach entgegengeſetzter Richtung eine eben ſo groſſe Geſchwindigkeit beygebracht wird, welches in D geſchieht, allwo der ſchwere Punkt wieder um AE über den Horizont erhöhet iſt; von D ſinket der ſchwere Punkt wider bis A, ſteiget von A bis B, und ſo weiter von B bis D, und von D bis B **unaufhörlich**, wenn durch die Reibung in C und durch den Widerſtand der Luft ſeine Bewegung nicht gehindert würde. Fig. 27

Ein jeder Gang von der einen Seite der Vertikallinie bis zur anderen (nämlich von B bis D, oder von D bis B) heißt ein **Pendelſchlag**, oder eine **Schwingung** (oſcillatio, vibratio).

§. 105.

Wenn man die Anzahl der Grade des **Schwingungswinkels** (Elongationswinkels) ACB $= m$, und ACM $= u$, die Pendellänge aber CA $= a$ ſe-

Fig. 27 tzet, ſo iſt ſintot (1 : CB (a = ſin CBE (cos m : CE = a.cos$m$, und ſintot (1 : CM (a = ſin CMP (cos u : CP = a cos u; es iſt demnach EP = a.cos$u$ —a.cos$m$; nun iſt vermög vorhergehenden in M die Geſchwindigkeit $v = \sqrt{4g.EP}$; folglich iſt auch $v = \sqrt{4ag.(\cos u - \cos m)}$.

Setzet man $u = 0$, ſo iſt in dem unterſten Punkte A die Geſchwindigkeit $v = \sqrt{4ag(1 - \cos m)} = \sqrt{4ag.\text{ſinvers}\, m} = \sqrt{4g.EA}$, womit der ſchwere Punkt nach der Richtung AQ fortgehen müßte, wenn der Faden ſeine Richtung nicht änderte, und die Schwere nicht mehr auf ihn wirkte. Rücket nun der ſchwere Punkt weiter hinaus nach N, ſo iſt der Winkel ACN negativ, nämlich ACN = — u; nun iſt eines negativen ſpitzigen Winkels Coſinus poſitiv, nämlich cos—u = cos u; derowegen iſt in N die Geſchwindigkeit $v = \sqrt{4ag(\cos u - \cos m)}$ **eben ſo groß wie in** M, wenn ACM = ACN iſt. Dieſe Formel $v = \sqrt{4ag.(\cos u - \cos m)}$ zeiget, daß die Geſchwindigkeit von B bis A immer zunehme, in A am größten ſey, und von A bis D wieder ſo abnehme, daß ſie in D gänzlich getilget werde, wenn man ACD = ACB ſetzet; iſt nämlich $u = -m$, ſo iſt $v = \sqrt{4ag(\cos m - \cos m)} = 0$. In dem Augenblicke alſo, da der ſchwere Punkt in D ankömmt, kehret derſelbe wieder zurück, ſo daß er wechſelweiſe in B und D anlanget, daß er in dem Bogen BAD hin- und her ſchwinget.

Es ſey AC = a, AE = b, und die Sehne AD = c, ſo iſt $ED^2 = 2ab - b^2$, und folglich $c^2 = AE^2 + ED^2 = 2ab$, nämlich $b = \frac{c^2}{2a}$; nun iſt in dem unterſten Punkte A die Geſchwindigkeit $v = \sqrt{4g.AE} = \sqrt{4gb}$; es iſt demnach auch

Fig. 27

$v = \sqrt{\frac{2gc^2}{a}} = c\sqrt{\frac{2g}{a}}$; und eben ſo iſt bey einer anderen Sehne $= C$ des nämlichen Pendels in dem unterſten Punkte die Geſchwindigkeit $V = C . \sqrt{\frac{2g}{a}}$; daus folgt $v : V = c : C$; das iſt **die Geſchwindigkeiten in dem unterſten Punkte bey verſchiedenen Schwingungsbögen eines nämlichen Pendels verhalten ſich wie die Sehnen der halben Schwingungsbögen, oder auch wie die Sehnen der Schwingungswinkel; ſind nun die Schwingungswinkel ſehr klein, ſo verhalten ſich auch die erlangten Geſchwindigkeiten wie die Schwingungswinkel.**

§. 106.

Aufgabe. **Die Dauerzeit eines Pendelſchlages bey einem einfachen Pendel zu finden, welches ſeine Schwingungen in ſehr kleinen Bögen verrichtet, und deſſen Länge = a gegeben iſt.**

Auflöſ. Es ſey des ſehr kleinen Schwingungsbogens BAD größte Erhöhung AE $= b$, ein Stückchen davon AP $= x$, und PM $= y$, ſo iſt EP $= b - x$,

$y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, $dy = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$,

$dy^2 = \frac{(a^2 - 2ax + x^2)dx^2}{2ax - x^2}$, und folglich Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$; nun ſetze man, der Bogen AM $= s$ werde in der Zeit t zurückgelegt, und der

ſchwe-

Fig. 27 ſchwere Punkt des Pendels erlange durch den Fall von B nach M in M die Geſchwindigkeit $= v$, ſo iſt vermög vorhergehenden $v = \sqrt{4g \cdot EP} = \sqrt{4g(b-x)} = 2g^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}$, und $dt = \frac{ds}{v}$; folglich auch

$$dt = \frac{-a\,dx}{2g^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(es muß allhier das Zeichen — geſetzet werden, weil t abnimmt wenn x wächſt und umgekehrt); daraus folgt $t = -\left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} \times \int[(1-\frac{x}{2a})^{-\frac{1}{2}} . x^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}]$; in dem Faktor $(1-\frac{x}{2a})^{-\frac{1}{2}}$ kann man $\frac{x}{2a} = 0$ ſetzen in Rückſicht 1, weil der Bogen BAD, und auch ſeine gröſte Höhe AE $= b$, in Rückſicht AC ſehr klein angenommen wird, und dabey x niemals gröſſer als b werden kann, derowegen iſt $t = -\left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} \times \int x^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}$, nämlich es iſt vermög (621. VII.) $t = -\left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc}\cos(1-\frac{2x}{b}) + C$. für $t = 0$ iſt $x = b$; alſo $0 = -\left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc}\cos - 1 + \text{Conſt.}$ nämlich $\text{Conſt.} = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc}\cos - 1 = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc}\,180° = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \pi$; und endlich $t = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . [\pi - \text{arc}\cos(1-\frac{2x}{b})]$; ſetzet man nun in dieſer gefundenen Formel $x = 0$, ſo

iſt

Fig. 27 iſt von B bis A die Dauerzeit $t = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \pi = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$; und folglich iſt von B bis D die geſuchte Dauerzeit eines Pendelſchlages $t = \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$.

Es iſt leicht einzuſehen, daß die Dauerzeit des Aufſteigens von A bis D eben ſo groß ſey, als die Dauerzeit des Herabſinkens von B bis A; denn wenn man AN = AM ſetzet, ſo iſt vermög (§. 105.) in N die Geſchwindigkeit eben ſo groß als in M, nämlich es iſt in N die Geſchwindigkeit $v = 2g^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}$; ſetzet man nun von A bis N die Dauerzeit $= t$, ſo iſt $dt = \frac{ds}{v} = \frac{+a dx}{2g^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}.(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ (allhier wird das Zeichen + geſetzet, weil t mit x zugleich wächſt), nämlich es iſt $dt = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx(b--x)^{-\frac{1}{2}}$, oder weil man wegen dem ſehr kleinen Bogen BAD ſo wie ehevor $\frac{x}{2a} = 0$ ſetzen kann, ſo iſt $dt = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} \times x^{--\frac{1}{2}} dx(b-x)^{--\frac{1}{2}}$; daraus folgt $t = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{b}\right)$ allwo Conſt. $= 0$ iſt, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird; ſetzet man nun in dieſer gefundenen Formel $x = b$, ſo iſt endlich von A bis D die Dauerzeit $t = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{arc cos} -1 = \left(\frac{a}{8g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$

$=$

Fig. 27 $= \frac{1}{2} \cdot \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ eben ſo groß als die Dauerzeit von B bis A.

Anmerk. Die Dauerzeit eines Pendelſchlages in einem ſehr kleinen Schwingungsbogen kann man auch aus der Dauerzeit des Falles in einem cycloidiſchen Bogen ableiten; denn der ſehr kleine Bogen BAD kann für den Bogen einer Cycloide angeſehen werden, deren Halbmeſſer des Erzeugungskreiſes $= \frac{1}{4}\mathrm{AC} = \frac{1}{4}a$ iſt, weil eine ſolche Cycloide bey ihrem Scheitel mit dem Kreisbogen BAD einerley Krümmung hat; derowegen iſt in dem ſehr kleinen Kreisbogen von B bis A die Zeit des Falles eben ſo groß als in einem cycloidiſchen Bogen, deſſen Halbmeſſer des Erzeugungskreiſes $= \frac{1}{4}\mathrm{AC}$ iſt, nämlich es iſt von B bis A die Zeit des Falles $t = \frac{1}{2}\pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$, wenn man $\frac{1}{4}a$ ſtatt r in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$ ſubſtituiret (§. 103).

§. 107.

Auch läßt ſich die Dauerzeit eines Pendelſchlages finden, wenn ſchon der Schwingungsbogen nicht ſehr klein ſeyn ſollte, und zwar auf folgende Art. Wenn man von A bis N **die Zeit des Aufſteigens** $= t$ ſetzet, ſo iſt vermög vorhergehenden

$$\mathrm{d}t = \frac{+a\mathrm{d}x}{2g^{\frac{1}{2}}(b-x)^{\frac{1}{2}}.(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} ;$$ daraus folgt

$$\left(\frac{8g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} . \mathrm{d}t = (1 - \frac{x}{2a})^{-\frac{1}{2}} : x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x (b-x)^{-\frac{1}{2}} .$$

Da-

Damit dieſe Gleichung könne integriret werden, Fig. 27 muß zu erſt $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ in folgende unendliche Reihe aufgelöſet werden; $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1.x}{2.(2a)}$

$$+\frac{1.3.x^2}{2.4.(2a)^4}+\frac{1.3.5.x^3}{2.4.6.(2a)^3}+\ldots\ldots$$

ſodan iſt $\left(\frac{8g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.\,dt = x^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$+\frac{1}{2(2a)}.x^{\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.3}{2.4.(2a)^2}.x^{\frac{3}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6.(2a)^3}.x^{\frac{5}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.(2a)^4}\times$$

$$x^{\frac{7}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}+\ldots\ldots\ldots$$

In dieſer Gleichung iſt vermög (621. VII.) das Integrale des erſten Gliedes $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}$ $=$ arc cos $(1-2x:b)$; und das Integrale eines jeden der übrigen Glieder läßt ſich nach der allgemeinen Formel (625) mittelſt dieſes bekannten Integrals entwikeln; es iſt nämlich das Integrale des 2ten Gliedes

$$=-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2.(2a)}.(b-x)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}.\frac{b}{2a}.\text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{b}\right);$$

des 3ten $=-\frac{1.3(b-x)^{\frac{1}{2}}}{2.4.(2a)^2}.\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}+\frac{\frac{3}{2}bx^{\frac{1}{2}}}{2.1}\right]$

$$+\left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{b}{2a}\right)^2.\text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{b}\right);$$

Fig. 27 des 4ten $= -\frac{1.3.5.(b-x)^{\frac{1}{2}}}{2.4.6.(2a)^3}.\Big[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{\frac{5}{2}bx^{\frac{3}{2}}}{3.2}$

$+ \frac{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}b^2x^{\frac{1}{2}}}{3.2.1}\Big] + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{b}{2a}\right)^3.\text{arc cos}\left(1 - \frac{2x}{b}\right);$

des 5ten $= -\frac{1.3.5.7.(b-x)^{\frac{1}{2}}}{2.4.6.8.(2a)^4}.\Big[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{4} + \frac{\frac{7}{2}bx^{\frac{5}{2}}}{4.3}$

$+ \frac{\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.b^2x^{\frac{3}{2}}}{4.3.2} + \frac{\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}b^3x^{\frac{1}{2}}}{4.3.2.1}\Big]$

$+ \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{b}{2a}\right)^4.\text{arc cos}\left(1 - \frac{2x}{b}\right)$

des 6ten $= -\frac{1.3.\ldots 9(b-x)^{\frac{1}{2}}}{2.4\ldots 10\,(2a)^5}\Big[\frac{x^{\frac{9}{2}}}{5} + \frac{\frac{9}{2}bx^{\frac{7}{2}}}{5.4}$

$+ \frac{\frac{9}{2}.\frac{7}{2}.b^2.x^{\frac{5}{2}}}{5.4.3} +$ u. ſ. w.

Bey dieſem Integrale iſt Conſt. $= 0$, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ iſt, und in dieſer Vorausſetzung das ganze gefundene Integrale verſchwindet.

Setzet man nun $x = b$, ſo wird t die Zeit der halben Schwingung von **A** bis **D** anzeigen; in dieſem Falle verſchwinden bey dem gefundenen Integral alle mit $(b-x)^{\frac{1}{2}}$ multiplicirten Glieder; weil $(b-x)^{\frac{1}{2}}$ ſodann $= (b-b)^{\frac{1}{2}} = 0$ iſt; in eben dieſem Falle iſt arc cos $(1 - 2x : b) =$ arc cos $- 1 =$ arc $180^{\circ} = \pi$; derowegen iſt bey der halben Schwingung

$$\left(\frac{8g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.t = \pi + \frac{1}{4}.\frac{b\pi}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{b}{2a}\right)^2.\pi$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{b}{2a}\right)^3.\pi + \ldots\ldots$$

näm-

nämlich es iſt die Dauerzeit einer halben Schwingung Fig. 27

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{b}{2a}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$$

und folglich iſt die Dauerzeit einer ganzen Schwingung

$$t = \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{b}{2a}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$$

Wenn man die Sehne des halben Schwingungsbogens AD $= c$ ſetzet, ſo iſt $AD^2 = AE^2 + ED^2$, nämlich $c^2 = b^2 + 2ab - b^2$; daraus folgt $\frac{b}{2a} = \frac{c^2}{4a^2}$; folglich iſt nach dieſer Benennung die Dauerzeit einer ganzen Schwingung, nämlich die Dauerzeit eines Pendelſchlages

$$t = \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{4a^2} + \left(\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c^2}{4a^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c^2}{4a^2}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{c^2}{4a^2}\right)^4 + \ldots\right]$$

Iſt nun c ſehr klein in Rückſicht a, ſo iſt wieder wie ehevor die Zeit eines Pendelſchlages in einem ſehr kleinen Schwingungsbogen $t = \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$.

§. 108.

Aus der gefundenen Formel für die Dauerzeit eines Pendelſchlages in einem ſehr kleinen Schwingungs-

Fig. bogen $t = \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$ laſſen ſich nun verſchiedene Folgen ableiten; als

I. **Aus der bekannten Beſchleunigung der Schwere = g, läßt ſich die Länge eines einfachen Pendels beſtimmen, deſſen jede ſehr kleine Schwingung 1 Sekunde dauert;** denn ſetzet man $t = 1$ in der gefundenen Formel, ſo iſt $1 = \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$; daraus folgt $a = \frac{2g}{\pi^2}$.

z. B. in Wien iſt $g = 15,51512$ W. Fuß;

und $2g = 31,03024$

$$\left.\begin{array}{r} \text{nun iſt } \log 2g = 1,4917852 \\ \text{ſubtr. } \log \pi^2 = 2.\log \pi = \underline{0,9942997} \end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

giebt $\log a = 0,4974855$

folglich $a = 3,144021 = 3$ F. 1 Z. 8,739 Lin.

Ein einfaches Pendel, deſſen jede ſehr kleine Schwingung 1 Sek. dauert, heißt das **Sekundenpendel.** Wenn man eine metallene Kugel mittelſt eines Fadens, der ſich nicht dehnet (die Fäden von Aloeblättern haben dieſe Eigenſchaft) vertikal ſo aufhänget, daß der Abſtand des Mittelpunktes der Kugel von dem Aufhängungspunkte $37\frac{3}{4}$ Wien. Zolle beträgt, ſo iſt ein ſolches zuſammengeſetztes Pendel von dem einfachen Sekunden Pendel nicht merklich verſchieden, nämlich die ſehr kleinen Schwingungen eines ſolchen zuſammengeſetzten Pendels ſind mit den Schwingungen eines einfachen Sekunden Pendels während einer kurzen Zeit von einigen Minuten gleichdauerend. Damit die Schwingungen eines ſolchen zuſammengeſetzten Pendels, wenn man mit demſelben eine Dauerzeit von einigen Sekunden oder auch von einigen wenigen Minuten beobachtet, immer in einerley Ebene geſchehen, ſo kann man die Kugel auf

zwey

zwey Fäden AC, BD Fig. 28 aufhängen, und läßt ſodann dieſes zuſammengeſetzte Pendel um die unbewegliche horizontale Achſe AB ſchwingen ; bey dieſer Einrichtung muß nicht die Fadenlänge AC oder BD, ſondern der ſenkrechte Abſtand des Mittelpunktes der Kugel von der unbeweglichen Achſe $37\frac{1}{4}$ Wien. Zolle betragen

Fig. 28

II. Aus der bekannten Länge des Sekundenpendels $= a$ läßt ſich die Beſchleunigung der Schwere $= g$ finden ; denn aus der Gleichung $1 = \pi.\sqrt{\frac{a}{2g}}$, folgt $g = \frac{1}{2}a\pi^2$.

z. B. Herr **Bouguer** hat in **Quito** ſehr nahe beym Aequator in Amerika durch einen genauen Verſuch die Länge des Sekundenpendels $a = 439{,}1$ Pariſ. Lin. gefunden; daraus läßt ſich die Beſchleunigung der Schwere daſelbſt auf folgende Art ableiten ;

$$\left.\begin{array}{r} \text{es iſt } \log \tfrac{1}{2}a = \log 219{,}55 = 2{,}3415334 \\ \log \pi^2 = 2.\log\pi = \underline{0{,}9942997} \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Pariſ. Lin. } \log g = 3{,}3358331 \\ \log 144 = \underline{2{,}1583625} \end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Pariſ. Fuß } \log g = 1{,}1774706 \\ \text{wegen } 100000\text{P} = 102764\text{W} \\ \log 1{,}02764 = \underline{0{,}0118411} \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$\text{Wien. Fuß. } \log g = 1{,}1893117$$

folglich iſt daſelbſt $g = 15{,}46364$ Wien. Fuß.

Wie man die Länge des Sekundenpendels durch Verſuche beſtimmen könne, wird weiter unten zu erſehen ſeyn. Indeſſen aber läßt ſich ſchon daraus abnehmen, daß das Pendel ein Mittel ſey, wodurch ſich beſtimmen läßt, ob die Beſchleunigung der Schwere, und

Fig. folglich auch die Schwerkraft ſelbſt, an verſchiedenen Oertern der Erde einerley, oder verſchieden ſey.

III. **Die Quadratzahlen der Pendelſchläge, welche von zwey verſchiedenen einfachen Pendeln in einerley Zeit gemacht werden, verhalten ſich bey der nämlichen Beſchleunigung der Schwere verkehrt, wie die Pendellängen;** oder welches einerley iſt **die Produkte aus den Pendellängen in die Quadratzahlen der Schwingungen, welche in einerley Zeit gemacht werden, ſind einander gleich;** wenn nämlich n Schwingungen in einer gewiſſen Zeit $= T$ Sekunden von einem einfachen Pendel $= a$, und in der nämlichen Zeit N Schwingungen von einem anderen einfachen Pendel $= A$ gemacht werden, ſo iſt $n^2 : N^2 = A : a$, oder es iſt $an^2 = AN^2$. Denn da 1 Schwingung in der Zeit $\pi . \sqrt{\frac{a}{2g}}$ gemacht wird, ſo iſt zu n Schwingungen die Zeit $n \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ erforderlich, nämlich 1 Schwingung verhält ſich zu n Schw. $= \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ Sek. zu T Sek. woraus $T = n\pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ folget; und eben ſo iſt $T = N\pi . \sqrt{\frac{A}{2g}}$, wenn das Pendel A **in eben dieſer Zeit** N Schwingungen verrichtet; es iſt demnach auch $n\pi \sqrt{\frac{a}{2g}} = N\pi \sqrt{\frac{A}{2g}}$, oder $an^2 = AN^2$; und endlich $n^2 : N^2 = A : a$.

Wenn die Schwingungsbögen auch nicht ſehr klein, Fig. **wenn ſie nur ähnlich ſind**, ſo iſt dieſer Satz noch immer richtig, weil in der gefundenen Formel für die Zeit einer Schwingung $t = \pi \left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{2a^2}$

$$+ \left(\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c^2}{4a^2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c^2}{4a^2}\right)^3 + \ldots \Big]$$

der Quotient $\frac{c^2}{4a^2}$ in einem ſolchen Falle bey beyden Pendeln einerley, und folglich auch die ganze in den Klammern [. . . .] eingeſchloſſene Reihe in beyden Fällen einerley iſt.

Dieſer Satz, **die Produkte aus den Pendellängen in die Quadratzahlen der Schwingungen, welche von verſchiedenen Pendeln in einerley Zeit gemacht werden, ſind einander gleich**, iſt in der Ausübung vom groſſen Nutzen. Wenn z. B. ein einfaches Pendel, deſſen Länge $= b$ bekannt iſt, in einer bekannten Zeit $= t$ Sek. eine bekannte Anzahl Pendelſchläge $= n$ macht, ſo läßt ſich daraus die Länge des Sekundenpendels $= p$ finden; es iſt nämlich in dieſem Falle $pt^2 = bn^2$, und daraus folgt $p = \frac{bn^2}{t^2}$. Wenn z. B. ein gegebenes einfaches Pendel $b = 151$ Wien. Zoll in einer beobachteten Dauerzeit $t = 420$ Sek. eine gezählte Menge ſehr kleiner Schwingungen $n = 210$ verrichtet, ſo folgt daraus die Länge des Sekundenpendels

$$p = \frac{151.210^2}{420^2} = \frac{151}{4} = 37\tfrac{3}{4} \text{ W. Z.}$$

Und eben ſo läßt ſich aus der Länge des Sekundenpendels $= p$, und aus der gegebenen Anzahl der Pendelſchläge $= n$ eines Pendels in einer beſtimmten

Fig. Zeit = t, die Länge dieſes Pendels = b finden; es iſt nämlich $b = \frac{pt^2}{n^2}$. Z. B. aus der Länge des Sekundenpendels p = 3,144021 Wien. Fuß folgt die Länge des Minutenpendels = 11318,48 Wien. Fuß.

IV. Bey verſchiedenen Beſchleunigungen der Schwere verhalten ſich die Längen der Sekundenpendel wie die Beſchleunigungen. Dann bey der Beſchleunigung der Schwere = g, iſt vermög vorhergehenden (I) die Länge des Sekundenpendels $a = \frac{2g}{\pi^2}$, hingegen iſt bey einer anderen Beſchleunigung der Schwere = g', die Länge des Sekundenpendels $a' = \frac{2g'}{\pi^2}$; folglich $a : a' = g : g'$; **und eben ſo verhält ſich auch die Schwerkraft als die Urſache der Beſchleunigung**; dieſe iſt in **St. Petersburg** gröſſer, und in **Quito** kleiner als in **Wien**, weil das Sekundenpendel am erſten Orte gröſſer und am zweyten kleiner iſt als in Wien; es iſt die Länge des Sekundenpendels in **Quito** = 439,1, in **Wien** = 440,562, und in **St. Petersburg** = 441,02 Pariſ. Lin.

V. Bey einerley Pendellänge und verſchiedener Beſchleunigung der Schwere verhalten ſich die Quadratzahlen der Pendelſchläge in einerley Zeit wie die Beſchleunigungen der Schwere. Denn da 1 Schwingung von dem Pendel a bey der Beſchleunigung der Schwere = g in der Zeit $\pi.\sqrt{\frac{a}{2g}}$ verrichtet wird, ſo muß nothwendig zu n Schwingungen die Zeit $n\pi.\sqrt{\frac{a}{2g}} = T$ erforderlich ſeyn; und eben ſo iſt $N\pi . \sqrt{\frac{a}{2G}} = T$, wenn bey einer anderen Beſchleunigung der Schwere $= G$ **eben dieſes Pendel in eben dieſer Zeit**, N Schwingungen verrichtet; es iſt demnach $n\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = N\pi\sqrt{\frac{a}{2G}}$; und daraus folgt endlich $n^2 : N^2 = g : G$.

Im erſten Falle iſt die Dauerzeit eines Pendelſchlages $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, und im zweyten $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{2G}}$; derowegen iſt auch $t : T = \frac{1}{\sqrt{g}} : \frac{1}{\sqrt{G}}$, oder $t : T$ $\sqrt{G} : \sqrt{g}$, **nämlich bey einerley Pendellänge und verſchiedener Beſchleunigung der Schwere verhalten ſich die Dauerzeiten der einzelnen ſehr kleinen Schwingungen verkehrt wie die Quadratwurzeln aus den Beſchleunigungen der Schwere.**

Anmerk. Aus der Formel $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ fließt auch $\pi = \sqrt{\frac{2g}{a}}$, wenn man $t = 1$ ſetzet, eine Gleichung, wodurch ſich das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe mittelſt des Sekundenpendels und der Beſchleunigung der Schwere beſtimmen läßt, wenn dieſes Verhältniß nicht ſchon aus anderen Quellen genauer als man es jemals verlangen kann, ſchon längſt durch eine unglaublich weitgetriebene Annäherung abgeleitet wäre.

§. 109.

Herr **Huygen** ließ bey den von ihm erfundenen Sekundenuhren das Pendel in einer Cycloide ſchwingen, Fig. um die gleiche Dauer bey gröſſeren und kleineren Schwingungsbögen zu erhalten. Man iſt von dieſer Einrichtung der Pendeluhren wieder abgegangen, weil ſie nicht leicht genau auszuführen iſt, und weil die Schwingungen eines nämlich Pendels auch in ungleichen Kreisbögen, wenn ſolche nur ſehr klein ſind, für gleichdauerend können angeſehen werden, da vermög der gefundenen Formel $t = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ die Dauerzeit eines Pendelſchlages in einem ſehr kleinen Kreisbogen gar nicht von der Gröſſe dieſes Bogens, ſondern nur von ſeinem Halbmeſſer abhänget. Durch die Länge der Zeit können jedoch die Schwingungen bey zwey Pendeln von einerley Länge beträchtlich von einander abweichen, wenn ſie auch in ſehr kleinen Kreisbögen von ungleicher Länge ihre Pendelſchläge verrichten, wie es aus folgendem Beyſpiele zu erſehen iſt.

Es ſey die Länge eines einfachen Pendels $a = 40$ W. Zoll, und die Sehne des halben Schwingungsbogens $c = 2$ Zoll, ſo iſt vermög (§. 107.) die Dauerzeit eines Pendelſchlages vollkommen genau

$$t = \pi . \left(\frac{\frac{1}{12} . 40}{2 . 15{,}51512}\right)^{\frac{1}{2}} . \left[1 + \frac{1}{4} . \frac{1}{1600} + \left(\frac{1.3}{2.4} . \frac{1}{1600}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{1}{1600}\right)^2 + .. \right]$$

nämlich $t = \frac{\pi}{\sqrt{9{,}309072}} \times 1{,}0001563049$, wenn man die unendliche Reihe in den Klammern durch Beyhilfe **meiner logarithmiſchen Tafeln mittelſt der Hilfstafel** Seite 401 entwickelt.

Daraus läßt ſich die Anzahl der Schwingungen $= x$ binnen 24 Stunden, nämlich binnen 86400 Sekunden auf folgende Art ableiten.

Es iſt $\log \pi = 0{,}4971499$
$- \frac{1}{2}\log 9{,}309072 = 0{,}4844532$

Logarith. der Zeit $= 0{,}0126967$ für ſehr kl. Schwing.
$+ \log 1\ 0001563049 = 0{,}0000678$

$\log t = 0{,}0127645$ ſubtr.
von $\log 86400 = 4{,}9365137$

giebt endlich $\log x = 4{,}9237492 \} \; x = 83897{,}54$ folglich iſt binnen 24 Stunden die Anzahl der Pendelſchläge $= 83897{,}54$.

Wenn bey eben dieſem Pendel die Sehne des halben Schwingungsbogens $c = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$ Zoll iſt, ſo macht ſelbes binnen 24 Stunden nur 83890,14 Pendelſchläge, alſo um 7,4 Schwingungen weniger als im vorigen Falle; derowegen können zwey ſolche Pendel in Rückſicht der ganzen Sekunden nicht länger als höchſtens etwan durch 3 Stunden für gleichdauerend angeſehen werden.

Wenn ein Pendel von der nämlichen Länge ſeine Schwingungen in unendlich kleinen Kreisbögen verrichtet, ſo iſt binnen 24 Stunden die Anzahl der Pendelſchläge $= 83910{,}64$; alſo um $20\frac{1}{2}$ mehr als im vorigen 2ten Falle.

Es iſt möglich, daß ein Pendel $= 40$ Zoll, durch die Wärme etwan um $\frac{1}{4}$ Linie, oder beynahe um 0,02 Zoll verlängert wird, ſo daß ſodann ſeine Länge $a = 40{,}02$ Zoll ſey; in dieſem Zuſtande iſt binnen 24 Stunden die Anzahl ſeiner Schwingungen in ſehr kleinen (in unendlich kleinen) Bögen $= 83889{,}66$; folglich um 21 kleiner als im vorigen Falle.

Bey den Pendeluhren werden durch die Wärme die Pendelſtangen verlängert; dieſer Erfolg vergrößert die Dauerzeit eines jeden Pendelſchlages; und aus dieſer Urſache gehen die gewöhnlichen Pendeluhren in der

Wär-

Wärme langſamer als in der Kälte, wenn dieſer Abirrung nicht durch beſondere Vorrichtungen vorgebeuget wird. Jedoch der Uhrperpendikel iſt nicht einerley mit dem einfachen Sekundenpendel, auch nicht einerley mit einem zuſammengeſetzten aber dabey freyen Pendel, weil ein freyes Pendel nur durch ſein eigenes Gewicht ſich in der ſchwingenden Bewegung zu erhalten trachtet, ein Uhrperpendikel aber wird nicht bloß durch ſein eigenes Gewicht, ſondern auch durch das Aufziehgewicht der Uhr in der ſchwingenden Bewegung erhalten. Wenn bey einem nämlichen freyen Pendel die Schwingungsbögen kleiner werden, ſo werden ſolche in einer kürzeren Zeit zurückgelegt, das freye Pendel geht ſodann **geſchwinder**; wenn hingegen bey einem nämlichen Uhrperpendickel durch Verminderung des Aufziehgewichtes die Schwingungsbögen kleiner gemacht werden, ſo werden ſolche in einer längeren Zeit zurückgelegt, die Uhr geht ſodann **langſamer**, wovon ich mich durch eigene Beobachtungen überzeuget habe. Durch die Vermehrung der Wärme kann wegen der gröſſeren Flüſſigkeit des Oeles in der Uhr die Reibung vermindert werden; durch die Verminderung der Wärme geſchieht das Gegentheil; dieſes iſt eben ſoviel als wenn das Aufziehgewicht der Uhr im erſten Falle vergröſſert, im zweyten vermindert würde; der Uhrperpendikel müßte daher im erſten Falle gröſſere und im zweyten Falle kleinere Schwingungen machen, er müßte im erſten Falle jede Schwingung in einer kürzeren Zeit, im zweyten Falle aber in einer längeren Zeit verrichten, das iſt die Uhr müßte im erſten Falle bey der Wärme wegen verminderter Reibung **geſchwinder**, und im zweyten Falle bey der Kälte wegen vermehrter Reibung **langſamer** gehen, wenn dabey die Länge der Pendelſtange ungeändert bliebe; ein freyes Pendel würde bey geänderter

Gröſſe der Schwingungsbögen das Gegentheil befolgen. Mit der Veränderung der Schwingungsbögen bey einem nämlichen Uhrperpendikel hat es ohngefähr die Beſchaffenheit, wie mit einfachen Pendeln von einerley Länge, welche von verſchiedenen Kräften getrieben werden, jenes geht vermög (§. 108. V.) geſchwinder, welches von einer ſtärkeren Kraft getrieben wird. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß die Cycloide bey dem Uhrperpendikel das gar nicht leiſten konnte, was Hr. **Huygen** von ihr verlangte. Fig.

VIII. Vorleſung.

Der Hebel.

§. 110.

Eine kreisrunde feſte Scheibe AEB, die ſo angebracht iſt, daß ſie ſich um ihren Mittelpunkt C zwar frey drehen, ſonſt aber nicht von ihrer Stelle weichen kann, heißt eine **Rolle**. Wegen des Gebrauchs, wozu ſie dienen ſoll, muß ſie am Umfange eine Vertiefung haben, damit man eine biegſame Schnur herumlegen, und Gewichte daran hängen, oder auch ſonſt Kräfte anbringen kann, die an der Schnur ziehen. Auch iſt es öfters erlaubt die Rolle ſo zu betrachten, als wenn ſie ſelbſt, und auch die herumgelegte Schnur kein Gewicht hätte, und bey der Umdrehung um ihren Mittelpunkt von aller Reibung frey wäre; eine 29

Fig. 29 ne ſolche Rolle kann man eine **mathematiſche Rolle** nennen.

§. 111.

Zwey gleiche Kräfte Q, P, wenn ſie die Rolle ABE um einen feſten Stift C auf entgegengeſetzte Art zu drehen ſtreben, und ihre Richtungen AQ, BP in der Ebene der Rolle den Umfang derſelben berühren, nämlich an den Endpunkten der Halbmeſſer CA, CB ſenkrecht angebracht ſind, erhalten einander im Gleichgewicht, das iſt die Rolle verbleibt bey dieſen Umſtänden gänzlich in Ruhe. Denn es iſt kein Grund vorhanden, warum die Rolle eher der einen als der anderen von den zwey gleichen Kräften gehorchen ſollte, weil bey den angeführten Umſtänden gleiche Kräfte die Rolle auf entgegengeſetzte Seiten gleich ſtark zu drehen ſtreben; beyden Kräften kann die Rolle nicht zugleich gehorchen, das iſt ſie kann ſich nicht nach beyden Seiten zugleich drehen; wegen der Feſtigkeit des Stiftes kann ſie auch nicht von der Stelle weichen; derowegen muß ſie gänzlich in Ruhe verbleiben.

Wenn nun bey Q an dem Faden PBAQ ein Gewicht Q hängt, und der Faden bey P etwan mit einem Nagel oder Stifte befeſtiget iſt, oder von einer Hand daſelbſt gehalten wird, ſo iſt zwar die urſprüngliche Richtung AQ vertikal, nach welcher das Gewicht Q den Faden zieht, dabey wird aber doch der Stift bey P nach der Richtung PB eben ſo ſtark gezogen, als ihn das Gewicht Q lothrecht herabziehen würde, wenn es an dem Faden frey ohne über die Rolle geführet zu ſeyn, herabhienge. Demnach kann man durch

die Rollen zuwege bringen, daß ein Gewicht nach jeder Fig.
verlangten Richtung ſo ſtark zieht, als es nach ſeiner urſprünglichen lothrechten Richtung ziehen würde; man kann durch die Rollen zuwege bringen, daß ein Gewicht nach einer gegebenen Richtung eben ſo ſtark zieht, als eine gegebene bewegende Kraft nach eben dieſer Richtung zu ziehen, oder zu drücken vermögend iſt: z. B. mittelſt zwey Rollen übereinander läßt ſich unterſuchen, wie ſtark ein Pferd nach horizontaler Richtung zu ziehen vermögend ſey.

§. 112.

Eine gerade unbiegſame Linie AB Fig. 30, oder 30
AC Fig. 31. die man ſich ohne Schwere und in irgend 31
einem Punkte C ſo unterſtützet vorſtellet, daß ſich die Linie zwar um denſelben drehen, ſonſt aber nicht in Bewegung kommen kann, nennt man einen **geradlinigte mathematiſchen Hebel**, den unterſtützten Punkt ſeinen **Ruhepunkt**, oder **Unterſtützungspunkt**, und was ihn daſelbſt hält (etwan ein Stift oder die Schärfe eines dreyſeitigen Priſma) die **Unterlage**, oder die **Widerlage**. Wenn an einem Hebel zwey Kräfte P, Q, oder zwey Gewichte ſo angebracht ſind, daß ſie denſelben auf entgegengeſetzte Art (z. B. das eine Gewicht aufwärts, das andere abwärts) zu drehen ſtreben, ſo pflegt man das eine Gewicht die **Kraft**, und das andere die **Laſt** zu nennen, und gemeiniglich wird bey ungleichen Gewichten das gröſſere die Laſt, und das kleinere die Kraft genennt. Ein Hebel, bey dem Kraft und Laſt auf entgegengeſetzten Seiten des Ruhepunktes angebracht ſind, wie Fig 30, heißt ein **doppelarmiger** Hebel; ſind aber an einem Hebel Kraft und Laſt beyde an einer nämlichen Seite des Ruhepunktes angebracht, wie Fig. 31, ſo wird er ein

ein=

Fig. **einarmiger** Hebel genennt. Die Abſtände der Rich-
30 tungen der angebrachten Kräfte heiſſen in beyden Fällen
31 die **Hebelsarme**; am doppelarmigen Hebel Fig. 30 ſind AC, BC, und am einarmigen Hebel Fig. 31. ſind auch AC, BC die Hebelsarme; AP, BQ Fig. 30, und AP, BD Fig. 31 ſind die Richtungen der am Hebel angebrachten Kräfte. Ein phyſiſcher oder **materieller** Hebel iſt endlich jede Stange, jeder Hebbaum, der von den angebrachten Kräften nicht merklich gebogen wird; denn jede Stange wird zum Heben, oder um eine Laſt zu erhalten unbrauchbar, ſobald ſie ſich unter der Laſt merklich beugt; die **Unbiegſamkeit** iſt daher eine weſentliche Eigenſchaft eines jeden Hebels. Man betrachtet zu erſt den leichteſten Fall, nämlich den Hebel ohne Schwere, oder den mathematiſchen, den unmateriellen Hebel, allwo man bloß die angebrachten Kräfte, und die Abſtände ihrer Richtungen vom Ruhepunkte in Erwägung zieht; der Einfluß der Materie, oder des Gewichtes des Hebels kann in der Folge nachgehohlet werden. Die am Hebel angebrachten Kräfte kann man durch Gewichte vorſtellen; wenn nun dieſe frey herabhängen, und ihre Richtungen auf die Hebelsarme ſenkrecht ſind, ſo muß der Hebel eine horizontale Lage haben. Aus dieſem Geſichtspunkte wird nun der Hebel betrachtet; was von angebrachten Gewichten erwieſen wird, findet auch bey anderen Kräften ſtatt.

§. 113.

Wenn zwey gleiche Gewichte P, Q, am doppelarmigen horizontalen Hebel Fig. 30 in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkte AC, BC angebracht ſind, ſo erhalten ſie einander im Gleichgewichte, das iſt 1) der Hebel ver-

bleibt gänzlich in Ruhe; 2) die Unterlage Fig. **trägt die Summe beyder Gewichte, das iſt ſie leidet einen Druck, welcher der Summe beyder Gewichte gleich iſt.**

Denn weil wegen den angeführten Umſtänden die zwey gleichen Gewichte in der nämlichen vertikalen Ebene den Hebel zugleich auf entgegengeſetzte Seiten gleich ſtark zu drehen ſtreben, ſo iſt kein Grund vorhanden, warum der Hebel vielmehr auf die eine als auf die andere Seite ſich neigen ſollte; auf beyde Seiten zugleich kann ſich derſelbe wegen der **Unbiegſamkeit** nicht neigen, auch kann er wegen der Feſtigkeit der Unterlage von der Stelle nicht weichen, noch vielweniger in einer horizontalen Ebene aus Mangel einer dazu erforderlichen Kraft oder Geſchwindigkeit ſich herumdrehen; derowegen muß er bey dieſen Umſtänden gänzlich ruhen. Daß die Unterlage nicht mehr und nicht weniger als die Summe beyder Gewichte trage, erhellet daher, weil vermög der Vorausſetzung der Hebel **ohne Schwere**, ohne aller Maſſe, ohne allem Gewichte betrachtet wird.

I. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß noch alles im Gleichgewichte verbleiben müſſe, wenn man Fig. 32 32 die Unterlage gänzlich hinwegnimmt, und dafür im Ruhepunkte **C** ein Gewicht $Q = 2P$ nach entgegengeſetzter Richtung mittelſt einer Rolle **D** anbringt. Der Stift der Rolle **D** leidet in dieſem Falle einen Druck $= 4P$, wenn man das Gewicht der Rolle auſſer Acht läßt.

II. Sind nun ungleiche Gewichte am doppelarmigen Hebel in gleichen Entfernungen angebracht, ſo können ſie einander nicht im Gleichgewichte erhalten, das gröſſere Gewicht muß das kleinere überwiegen, nämlich der Hebel muß ſich nach der Seite des gröſſeren Gewichts drehen, weil in einem ſolchen Falle nur ein Theil des gröſſeren Gewichts von dem kleineren im Gleichgewichte erhalten wird; der andere Theil aber, da ihm nichts

Fig. im Wege ſtehet, muß eine Bewegung hervorbringen. Jedoch iſt auch bey ungleichen Gewichten am Hebel unter gewiſſen Umſtänden ein Gleichgewicht möglich, nur müſſen in dergleichen Fällen auch die Hebelsarme ungleich ſeyn, wie es aus folgenden zu erſehen ſeyn wird.

§. 114.

Am einarmigen Hebel iſt ein zweyfaches Gewicht in einer einfachen Entfernung, mit einem einfachen Gewichte in einer zweyfachen Entfernung vom Ruhepunkte im Gleichgewichte.

Um dieſes einzuſehen ſey ABC der einarmige Hebel Fig. 33. C der Ruhepunkt, das Gewicht Q = 2P, 33 und der Hebelsarm AC = 2BC; man gedenke in C ſtatt der Widerlage ein Gewicht R = P mit AP nach einer parallelen Richtung, ſo iſt wegen P = R, und AB = CB vermög (§. 113. I.) zwiſchen P, Q, und R ein Gleichgewicht; nimmt man nun R weg, und bringt dagegen in A eine Widerlage an, ſo thut ſelbe eben das, was vorher R that, ſie hindert, daß der Punkt C nicht ſteigen kann; derowegen iſt unter dieſen Umſtänden zwiſchen P und Q bey der Widerlage in C auch noch ein Gleichgewicht; dadurch aber iſt der doppelarmige Hebel, deſſen Unterſtützungspunkt B war, in einen einarmigen verwandelt, bey dem C der Ruhepunkt, Q = 2P, und AC = 2BC iſt; folglich iſt am einarmigen Hebel ABC zwiſchen Q = 2P in der Entfernung BC, und zwiſchen P in der Entfernung AC = 2BC ein Gleichgewicht.

§. 115.

Auch am doppelarmigen Hebel iſt ein zweyfaches Gewicht in einer einfachen Entfernung, mit einem einfachen Gewichte in einer zweyfachen Entfernung im Gleichgewichte.

Fig. 34

Um dieſes einzuſehen ſey ACB der doppelarmige Hebel Fig. 34. $AC = 2BC$, und $Q = 2P$; man gedenke in D in der Entfernung $CD = AD = CB$ ein Gewicht $R = 2P$ abwärts, und ein Gewicht $S = 2P$ aufwärts angebracht, ſo iſt zwiſchen P und S wegen (§. 114.) und auch zwiſchen R und Q vermög (§. 113.) zugleich ein Gleichgewicht, das iſt der Hebel verbleibet bey dieſen vier Gewichten P, S, R, Q gänzlich in Ruhe; nun ſind auch S und R im Gleichgewichte, ihre Wirkungen heben einander gänzlich auf; derowegen kann man ſie wegnehmen ohne das Gleichgewicht zu ſtöhren; und es verbleibt am doppelarmigen Hebel $Q = 2P$ in der Entfernung BC, mit P in der Entfernung $AC = 2BC$ im Gleichgewichte.

I. *Es iſt leicht einzuſehen, daß auch bey dem eben erwieſenen, und überhaupt bey jedem Gleichgewichte am doppelarmigen Hebel die Unterlage nicht mehr und nicht weniger zu leiden habe, als einen Druck, welcher der Summe beyder Gewichte gleich iſt, weil der Hebel ſelbſt ohne Schwere betrachtet wird; hat hingegen der Hebel auch ein Gewicht, ſo leidet beym Zuſtande des Gleichgewichts am doppelarmigen Hebel die Unterlage einen Druck, der ſo groß iſt, als die Summe beyder Gewichte mehr dem Gewichte des Hebels.*

II. Nun läßt ſich ferner, ſo wie §. 114. erweiſen, daß am einarmigen Hebel auch ein dreyfaches Gewicht mit einem einfachen im Gleichgewichte ſeyn könne, wenn die Entfernung des letzteren dreymal ſo groß

Fig. iſt, als die Entfernung des erſteren; darauf läßt ſich
34 eben ſo wie §. 115. dieſes auch vom doppelarmigen Hebel darthun, und ſo kann man immer nach der Ordnung um eine Einheit weiter gehen; welches aber auf folgende Art kürzer und leichter geſchehen kann.

§. 116.

Wenn ein paar ungleiche Gewichte am Hebel der einen Art in gewiſſen Entfernungen vom Ruhepunkte im Gleichgewichte ſind, ſo ſind eben dieſe Gewichte in eben den Entfernungen auch am Hebel der anderen Art im Gleichgewichte.

Um dieſes einzuſehen ſey an was immer für einem doppelarmigen Hebel AB Fig. 34. P mit Q in den Entfernungen AC und BC im Gleichgewichte; man mache CD = CB, und laſſe in D ein Gewicht S = Q mittelſt einer Rolle aufwärts, und ein anderes eben ſo groſſes Gewicht R = Q niederwärts ziehen, ſo bleibt noch wegen S = R ein Gleichgewicht; aber R und Q halten ſich einander das Gleichgewicht vermög §. 113. folglich iſt noch ein Gleichgewicht, wenn man R und Q hinwegnimmt, nämlich am einarmigen Hebel AC iſt auch ein Gleichgewicht, wo die angebrachten Gewichte nebſt ihren Entfernungen, den Gewichten und deren Entfernungen am doppelarmigen Hebel im Zuſtande des Gleichgewichts, wechſelweiſe gleich ſind, P = P, AC = AC, S = Q, DC = BC.

Iſt im Gegentheile an was immer für einem einarmigen Hebel AC Fig. 34. P mit S in den Entfernungen AC und DC im Gleichgewichte, ſo verlängere man AC über C hinaus, mache CB = CD, und hänge in D und B die Gewichte R und Q, jedes der-

ſel-

ſelben $= S$, ſo iſt wegen $R = Q$ und $DC = BC$ Fig. vermög §. 113. noch alles im Gleichgewichte; da nun R und S auch im Gleichgewichte ſind, ſo kann man ſie wegnehmen ohne das Gleichgewicht zu ſtöhren; folglich ſind am doppelarmigen Hebel P und $Q = S$ im Gleichgewichte bey eben den Entfernungen von C wie ehevor am einarmigen Hebel.

§. 117.

Wenn am Hebel eine *n*fache Kraft in einer einfachen Entfernung vom Ruhepunkte, mit einer einfachen Kraft in einer *n*fachen Entfernung ſenkrecht angebracht im Gleichgewichte iſt; ſo iſt auch eine $(n+1)$fache Kraft in der einfachen Entfernung mit der einfachen Kraft in der $(n+1)$fachen Entfernung ſenkrecht angebracht im Gleichgewichte, was auch *n* für eine ganze Zahl bedeutet.

Um dieſes einzuſehen nehme man an (ohne zu unterſuchen ob es in allen Fällen möglich ſey, bey $n = 2$ iſt es vermög §. 114. und 115. gewiß möglich) daß am doppelarmigen Hebel AC Fig. 35. deſſen Ruhepunkt 35 B iſt, das einfache Gewicht P in der *n*fachen Entfernung $AB = n.CB$, mit dem *n*fachen Gewichte $Q = n.P$ in der einfachen Entfernung CB im Gleichgewicht ſey, ſo trägt vermög (§. 115. I.) die Unterlage B die Summe beyder Gewichte $= P + Q = (n+1)P$; wenn man alſo in B ein Gewicht $R = (n+1)P$ mittelſt einer Rolle aufwärts ziehen läßt, und die Unterlage in B hinwegnimmt, ſo iſt noch alles in Ruhe, nämlich P, Q, R ſind im Gleichgewichte; nimmt man endlich das Gewicht Q in C hinweg, und bringt dafür eine Widerlage daſelbſt an, damit der Punkt C nicht ſteigen könne, ſo ſind auch noch P und

Fig. 35 R im Gleichgewichte, und es iſt nun C der Ruhepunkt, die Entfernung $AC = (n+1)BC$, ſo wie das Gewicht $R = (n+1)P$, nämlich bey der angeführten Vorausſetzung iſt am einarmigen Hebel AC, deſſen Ruhepunkt C iſt, eine $(n+1)$fache Kraft R in einer einfachen Entfernung BC, mit der einfachen Kraft P in der $(n+1)$fachen Entfernung AC vom Ruhepunkte C im Gleichgewichte. Da nun bey der angeführten Vorausſetzung die Kräfte P, $(n+1)P$ in den Entfernungen $(n+1)BC$, BC am einarmigen Hebel im Gleichgewichte ſind, ſo müſſen vermög (§. 116.) eben dieſe Kräfte in eben den Entfernungen auch am doppelarmigen Hebel im Gleichgewichte ſeyn.

§. 118.

Es iſt wirklich am einarmigen ſowohl als auch am doppelarmigen Hebel jede $n$fache Kraft in einer einfachen Entfernung, mit einer einfachen Kraft in einer $n$fachen Entfernung vom Ruhepunkte ſenkrechte angebracht im Gleichgewichte, was auch immer n für eine ganze Zahl bedeutet.

Denn für $n = 2$ erhellet dieſes ſchon aus §. 114. und 115; es iſt alſo auch noch wahr für $(n+1) = 2+1 = 3$ vermög §. 117; ſetzet man nun $n = 3$, ſo gielt vermög §. 117. der Satz auch noch für $n+1=4$; und nun $n = 4$ geſetzet, gilt er auch für $n+1 = 5$, u. ſ. w. ohne Ende fort für jede ganze Zahl, weil der Schluß allemal von einer auf die nächſtgröſſere fortgeht.

§. 119.

Zwey Kräfte am Hebel ſenkrecht angebracht, die ſich verkehrt verhalten wie ihre

Entfernungen vom Ruhepunkte, ſind im Gleichgewichte. Fig.

Um dieſes einzuſehen, betrachte man was immer für zwey Gewichte P, Q, deren erſtes m, und letzteres n Einheiten enthalte, nämlich zwey Gewichte P, Q von der Beſchaffenheit, daß $P : Q = m : n$ ſtatt finde, wo m, n ganze Zahlen ſind, ſo iſt $mQ = nP$; nun theile man in Gedanken einen doppelarmigen Hebel AB Fig. 36. dergeſtalt in gleiche Theile ein, daß der Hebelsarm 36 BC in m, und AC in n gleichgroſſe Theile getheilet ſey, ſo folgt daraus $DC = EC$, und $AC = n.EC$, $BC = m.DC$, wenn D, E beyderſeits des Ruhepunktes die nächſten Theilungspunkte ſind; ferner folgt daraus $BC : AC = m : n$, und folglich auch $P : Q = BC : AC$; nun hänge man in A das Gewicht P, in B das Gewicht Q, in D ein Gewicht $R = mQ$, und in E ein Gewicht $S = nP$ auf, ſo ſind P, Q, R, S gewiß im Gleichgewichte, weil vermög (§. 113.) P mit S, und Q mit R im Gleichgewichte iſt; aber vermög (§. 113.) iſt auch R mit S im Gleichgewichte; folglich kann man dieſe zwey Gewichte hinwegnehmen ohne das Gleichgewicht zu ſtöhren, und es bleiben am doppelarmigen Hebel die zwey Gewichte P, Q, die ſich verkehrt wie ihre Abſtände verhalten, noch immer im Gleichgewichte.

Daß bey dieſen Umſtänden auch am einarmigen Hebel das Gleichgewicht ſtatt finde, erhellet aus §. 116.

Auch wenn das gerade Verhältniß der Kräfte, und das verkehrte der Entfernungen vom Ruhepunkte des Hebels irrational oder auch tranſcendent wäre, behält der Satz ſeine Richtigkeit, weil man die irrationalen und tranſcendenten Verhältniſſe durch rationale Zahlen ſo genau angeben kann, als man es nur immer verlanget.

§. 120.

Fig. 37 38 **Hauptgrundgeſetz des Hebels. Am Hebel ſind zwey Kräfte im Gleichgewichte, wenn ſie ſich verkehrt verhalten wie die Entfernungen ihrer Richtungen vom Ruhepunkte des Hebels, die Richtungen mögen übrigens wie immer beſchaffen ſeyn, wenn ſie nur mit dem Hebel in einer nämlichen Ebene liegen; und umgekehrt, wenn zwey Kräfte am Hebel im Gleichgewichte ſind, ſo verhalten ſie ſich gegeneinander verkehrt wie die Entfernungen ihrer Richtungen vom Ruhepunkte des Hebels.**

Wenn die Kräfte ſenkrecht an die Hebelsarme als z. B. Gewichte am horizontalen Hebel angebracht ſind, ſo erhellet die Richtigkeit des erſten Theils des angeführten Satzes aus §. 119. ſind aber die Richtungen der Kräfte auf die Hebelsarme ſchief angebracht, als z. B. Fig. 37 u. 38 die Kräfte P, Q, nach den Richtungen AF, BF an den Hebeln ACB und ABC, deren Ruhepunkte in C ſind, und es findet ſtatt P : Q = EC : DC, wo EC, DC die Senkrechten vom Ruhepunkte des Hebels bis an die Richtungen der Kräfte ſind, ſo nehme man AF, BF ſo, daß P : Q = AF : BF ſtatt finde, ziehe die Senkrechten FM, FN auf den Hebel, und ergänze die Parallelograme MR, NS, ſo zerfallen die zwey Kräfte AF und BF in die Seitenkräfte AM, AR, und in BN, BS; die zwey Seitenkräfte AM, BN nach der Richtung des Hebels angebracht, werden durch die Feſtigkeit des Stiftes C gänzlich aufgehoben; die zwey anderen Seitenkräfte AR, BS aber ſind auf die Hebelsarme ſenkrecht angebracht; iſt nun AR : BS = CB : CA ſo iſt vermög §. 119. ein Gleichgewicht an dieſem Hebel; es iſt aber AR:BS

=

= CB : CA weil vermög Vorausſetzung P : Q Fig.
= CE : CD ſtatt findet, welches aus folgendem erhellet: 37
das Dreyeck BNF ∽ CBE, und AMF ∽ ADC; 38
folglich AF : FM (AR = CA : CD, nämlich AR.CA=AF.CD; und BF : FN(BS = CB : CE; nämlich BS.CB=BF.CE; nun iſt AF.CD=BF.CE, weil vermög Vorausſetzung AF(P:BF(Q=CE:CD ſtatt findet; folglich auch AR.CA=BS.CB, und AR : BS = CB : CA; es iſt demnach am Hebel ein Gleichgewicht, wenn ſich die Kräfte verkehrt, wie die Entfernungen ihrer Richtungen vom Ruhepunkte verhalten.

Der zweyte Theil des angeführten Satzes läßt ſich auf folgende Art darthun: wenn die Kräfte P, Q nach den Richtungen AF, BF am Hebel ACB angebracht im Gleichgewichte ſind, ſo gedenke man indeſſen die Kraft P hinweg, und bringe dafür eine andere Kraft $p = \frac{CE.Q}{CD}$ nach der nämlichen Richtung AF an, eine ſolche Kraft nämlich, daß p : Q = CE : CD ſich verhalte, ſo wird vermög den eben erwieſenen Gründen auch p mit Q im Gleichgewichte ſeyn, das iſt p wird den Hebel eben ſo ſtark zu drehen ſtreben, als es P that; und nun iſt p entweder dem P gleich, oder es iſt davon verſchieden; p kann von P nicht verſchieden ſeyn, weil es ungereimt iſt zu behaupten, daß zwey **ungleiche** Kräfte am nämlichen Hebelsarm nach einerley Richtung angebracht denſelben **gleich ſtark** zu drehen ſtreben; es iſt demnach p = P, und folglich findet auch die Proportion ſtatt P : Q = CE : CD, weil p : Q = CE : CD ſich verhält.

§. 121.

Wenn man Fig. 37. die Hebelsarme CA, CB hinweg gedenket, und dafür die Hebelsarme CD, CE, Fig. oder CB, CD, oder auch CA, CG dergeſtalt anbringt, daß die nämlichen Kräfte P, Q, nach den nämlichen Richtungen wie ehevor beym geradlinigten Hebel darauf wirken, ſo bleibt noch alles im Gleichgewichte, weil vermög Vorausſetzung die Kräfte P, Q ſich verkehrt verhalten wie die Entfernungen ihrer Richtungen vom Ruhepunkte des Hebels; nur müſſen die neu angebrachten Hebelsarme, ſo wie die hinweggenommenen, vollkommen unbiegſam und ohne Gewicht ſeyn. Ein ſolcher Hebel wie DCE, oder DCB, oder ACG Fig. 37. oder auch DCE Fig. 38. bey dem die Abſtände der angegriffenen Punkte der Hebelsarme vom Ruhepunkte einen Winkel mit einander einſchlieſſen, heißt ein **Winkelhebel**; das am geradlinigten Hebel erwieſene Grundgeſetz (§. 120.) findet demnach auch am Winkelhebel ſtatt.

§: 122.

39 Wenn am horizontalen Hebel AB Fig. 39. die Gewichte P, Q im Gleichgewichte ſind, und man bringt durch eine fremde Kraft den Hebel in die ſchiefe Lage ab, ſo beſchreiben bey dieſer Bewegung die angegriffenen Punkte A, B (die Punkte der Hebelsarme nämlich, wo die Gewichte angebracht ſind) die Wege Aa, Bb in einer nämlichen Zeit, und es iſt Aa : Bb = CA : CB wegen den ähnlichen Ausſchnitten ACa, BCb; es iſt aber auch CA : CB = Q : P wegen dem Gleichgewichte; folglich auch Aa : Bb = Q : P, **nämlich beym Gleichgewichte am Hebel verhalten ſich die Kräfte verkehrt wie die in einer nämlichen Zeit zurückgelegten Wege, wenn der Hebel durch eine fremde Kraft aus ſeiner Lage gebracht wird.**

Da bey der ſchiefen Lage des Hebels aCb wegen Fig. der Aehnlichkeit der Dreyecke aCD, bCE auch $P : Q = CE : CD$ ſtatt findet, wenn $P : Q = Cb : Ca$ ſich verhält, ſo ſind wegen §. 120. auch am ſchiefgeneigten Hebel zwey Gewichte, die ſich verkehrt wie ihre zugehörigen Hebelsarme verhalten, im Gleichgewichte; warum nun dieſes bey der bekannten **Krammerwage**, die für einen doppelarmigen materiellen Hebel von gleichen Hebelsarmen anzuſehen iſt, nicht zutreffe, wird weiter unten zu erſehen ſeyn.

§. 123.

Da beym Gleichgewichte am Hebel zwey Kräfte P, p ſich verkehrt verhalten, wie die Entfernungen E,e ihrer Richtungen vom Ruhepunkte des Hebels, (§. 120.) nämlich $P : p = e : E$, wo die Entfernung E mit P, und e mit p zuſammengehört, ſo iſt im Zuſtande des Gleichgewichts am Hebel $EP = ep$, das iſt **beym Gleichgewichte am Hebel ſind die Produkte aus den Kräften in die Entfernungen ihrer Richtungen vom Ruhepunkte einander gleich**; das Produkt aus einer Kraft am Hebel in die Entfernung ihrer Richtung von einem gegebenen Punkte des Hebels pflegt man Kürze wegen, **das Moment der Kraft in Rückſicht des gegebenen Punktes zu nennen; es ſind demnach beym Gleichgewichte am Hebel die Momente der zwey angebrachten Kräfte vom Unterſtützungspunkte gerechnet einander gleich**, und umgekehrt, **wenn zwey Kräfte oder eine Kraft und eine Laſt am Hebel dergeſtalt angebracht ſind; daß ihre Momente vom Unterſtützungspunkte gerechnet nach entgegengeſetzten Seiten ein-**

Fig. einander gleich ſind, ſo halten ſie einander das Gleichgewicht.

Auch iſt es leicht einzuſehen, daß bey ungleichen Momenten am Hebel das Gleichgewicht nicht ſtatt finden könne, ſondern daß der Hebel nach der Seite des gröſſeren Moments ſich drehen müſſe; es ſey z. B. das Moment $EP > ep$, und eine andere Kraft P' ſey von der Beſchaffenheit, daß $EP' = ep$ ſey, ſo iſt P mit p im Gleichgewichte, und wegen $EP > ep$ iſt $EP > EP'$, und folglich auch $P > P'$; da nun $P > P'$, ſo muß P am nämlichen Hebelsarm nach der nämlichen Richtung angebracht den Hebel ſtärker zu drehen ſtreben als P', und kann folglich durch p nicht im Gleichgewichte erhalten werden, ſondern es muß ſelbes den Hebel nach ſeiner Seite drehen.

§. 124.

Aus der Gleichheit der Momente am Hebel im Stande des Gleichgewichts $EP = ep$ folgt $E = \frac{ep}{P}$, und $P = \frac{ep}{E}$, nämlich aus zwey Gewichten und dem einen Hebelsarm läßt ſich der zweyte Hebelsarm für das Gleichgewicht beſtimmen; und aus zwey gegebenen Hebelsarmen und dem einen Gewichte läßt ſich das andere Gewicht für das Gleichgewicht berechnen.

Auch iſt aus den zwey Gleichungen $P = \frac{ep}{E}$, und $E = \frac{ep}{P}$ zu erſehen, daß eine nämliche gegebene Kraft p am nämlichen Hebelsarm e angebracht einer deſto gröſſeren Laſt P das Gleichgewicht halten könne, je kürzer der letzteren ihr Hebelsarm iſt; wie auch daß um eine gegebene Laſt p in einer gegebenen Entfernung e mit einer gewiſſen Kraft P im Gleichgewichte zu erhalten, der letzteren ihr Hebelsarm E deſto länger ſeyn müſſe, je kleiner ſie ſelbſt iſt, weil die Werthe der Brüche $\frac{ep}{E}$, $\frac{ep}{P}$ deſto gröſſer werden, je kleiner ihre Nenner ſind. Fig.

§. 125.

Aufgabe. Zwey Gewichte P, Q Fig. 40 und 41. mittelſt eines Hebels verbunden nebſt ihrer Entfernung AB ſind gegeben; man ſoll den Unterſtützungspunkt C für den Stand des Gleichgewichts finden. 40 41

Auflöſ. I. Es ſey Fig. 40 am doppelarmigen Hebel AB = a, und der geſuchte Abſtand AC = x des Unterſtützungspunktes von der Kraft P, ſo iſt BC = $a - x$; nun iſt im Stande des Gleichgewichtes P.AC=Q.BC vermög (§. 123.), nämlich $Px=Q(a-x)$; daraus folgt $x = \frac{Q.a}{P+Q}$, das iſt AC = $\frac{Q.AB}{P+Q}$, und BC = $\frac{P.AB}{P+Q}$; **es iſt demnach am doppelarmigen Hebel der Abſtand des Unterſtützungspunktes von dem einen Gewichte im Stande des Gleichgewichts, gleich dem anderen Gewichte multipliciret mit der Entfernung der zwey Gewichte und dividiret durch die Summe beyder Gewichte.** Wenn man nun den Punkt C mittelſt einer Unterlage oder mittelſt eines Stiftes unterſtützet, oder denſelben auf einen Faden aufhängt, ſo muß der mit den zwey Gewichten P, Q be-

ſchwer-

Fig. ſchwerte Hebel nicht nur allein im horizontalen Stande, ſondern auch in einer jeden wie immer ſchief geneigten Lage ruhen vermög §. 122.

II. Am einarmigen Hebel Fig. 41. ſey auch AB $= a$, und AC $= x$, ſo iſt BC $= x - a$; nun iſt im Stande des Gleichgewichts $Px = Q(x - a)$; daraus folgt $x = \frac{Qa}{Q - P}$; **es iſt demnach am einarmigen Hebel der Abſtand des Unterſtützungspunktes von dem kleineren Gewichte, gleich dem Produkte aus dem gröſſeren Gewichte in den Abſtand der zwey Gewichte dividirt durch ihre Differenz.** Iſt nun $Q = P$, ſo iſt $x = \infty$.

§. 126.

In Fig. 40. bey den zwey Gewichten P Q am doppelarmigen Hebel leidet der Unterſtützungspunkt C im Stande des Gleichgewichts einen Druck $= P + Q$ eben ſo als wenn beyde Gewichte im Punkte C vereiniget wären, der Abſtand dieſer zwey Gewichte mag noch ſo groß oder noch ſo klein ſeyn; wenn man nämlich den Druck auf die Unterlage C gänzlich aufheben wollte, ſo müßte man daſelbſt ein Gewicht $P + Q$ nach entgegengeſetzter Richtung anbringen, damit der Hebel im Ruhe verbleibe; und zwar nur der Punkt C bey dem Abſtande AB der zwey Gewichte P, Q am doppelarmigen Hebel und ſonſt kein anderer hat die Eigenſchaft, daß daſelbſt die Summe beyder Gewichte den nämlichen zweyen mittelſt eines Hebels verbundenen Gewichten das Gleichgewicht hält; denn wenn man in einem anderen Punkte z. B. in D die Summe beyder Gewichte nach entgegengeſetzter Richtung anbringen, oder dieſen Punkt unterſtützen wollte, ſo könnte P.AD dem

Q,BD

Q.BD nicht gleich ſeyn, weil P.AC=Q.BC iſt, und Fig. folglich könnte auch wegen (§. 123.) kein Gleichgewicht ſeyn, ſondern der Hebel müßte ſich nach der Seite des gröſſeren Moments drehen.

In Fig. 41. endlich bey den zwey Gewichten P, Q am einarmigen Hebel leidet der Punkt C einen Druck, welcher der Differenz der zwey Gewichte Q und P gleich iſt; wenn man nämlich in C ſtatt der Widerlage ein Gewicht = Q — P aufwärts ziehen läßt, ſo wird noch alles in Ruhe verbleiben, weil man bey dieſer Veränderung CBA für einen doppelarmigen Hebel anſehen kann, deſſen Unterſtützungspunkt B iſt.

IX. Vorleſung.

Der Schwerpunkt.

§. 127.

Derjenige Punkt eines mit zwey Gewichten beſchwerten Hebels, welcher unterſtützet werden muß, damit die zwey angebrachten Gewichte bey jeder Lage des Hebels im Gleichgewichte ſind, heißt der **gemeinſchaftliche Schwerpunkt** der zwey angebrachten Gewichte; daß ein ſolcher und zwar nur ein einziger Punkt möglich ſey, iſt aus §. 125. zu erſehen.

Da vermög §. 126. für das Gleichgewicht des beſchwerten Hebels Fig. 40. der Erfolg immer der nämliche verbleibet, wenn man die Gewichte in A und B gänzlich hinwegnimmt, und dafür in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte C ein einziges Gewicht = P+Q, oder auch einen einzigen materiellen Punkt, der einen Druck = P + Q zu äuſſeren im Stande iſt, nach der nämlichen Richtung anbringt, **ſo iſt es erlaubet im erforderlichen Falle zwey am doppelarmigen Hebel angebrachte Gewichte von ihren Stellen hinwegzunehmen und dafür in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte ein Gewicht anzubringen, welches ihrer Summe gleich iſt.**

Sind mehrere Gewichte mittelſt einer geraden unbiegſamen Linie ohne Schwere (mittelſt eines Hebels) verbunden, ſo kann man erſtlich zwey Gewichte in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte in ein einziges vereinigen, welches ihrer Summe gleich iſt; ſodann läßt ſich dieſe Summe wieder mit dem dritten Gewichte in ein einziges vereinigen, und ſo weiter fort; aus dieſem iſt es zu erſehen, daß bey noch ſo vielen mittelſt eines Hebels verbundenen Gewichten ein Punkt und zwar nur ein einziger vorhanden ſey, welcher unterſtützet werden muß, damit die verbundenen Gewichte bey jeder Lage im Gleichgewichte ſind; dieſer Punkt heißt der **gemeinſchaftliche Schwerpunkt** aller Gewichte, und eine Vertikallinie durch dieſen Punkt gezogen heißt die **mittlere Richtung** dieſer Gewichte.

§. 128.

Bey einem von zwey Gewichten beſchwerten Hebel iſt der Abſtand des Schwerpunk-

tes

tes von einem gegebenen Punkte des Hebels gleich der Summe der Momente der zwey Gewichte dividiret durch die Summe dieſer nämlichen zwey Gewichte, wenn der gegebene Punkt, wovon die Momente gerechnet werden, den zwey Gewichten zur Seite liegt; befindet ſich aber der gegebene Punkt zwiſchen beyden Gewichten, **ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes von dem gegebenen Punkte gleich der Differenz der Momente dividiret durch die Summe der beyden Gewichte,** ſo daß der Schwerpunkt auf die Seite des gröſſeren Moments fällt; nämlich in Fig. 40 iſt Fig. 40

$$FC = \frac{P.AF + Q.BF}{P+Q}, \text{ und } DC = \frac{P.AD - Q.BD}{P+Q}.$$

Denn vermög §. 125. iſt $BC = \frac{P.AB}{P+Q}$; folglich

$$FC = BC + FB = \frac{P.AB}{P+Q} + FB = \frac{P(AB+BF)+Q.BF}{P+Q}$$

$$= \frac{P.AF + Q.BF}{P+Q}; \text{ imgleichen } DC = BC - BD$$

$$= \frac{P.AB}{P+Q} - BD = \frac{P.AD - Q.BD}{P+Q}.$$

§. 129.

Auch bey einem von mehreren Gewichten beſchwerten Hebel iſt der Abſtand des Schwerpunktes von einem gegebenen Punkte des Hebels gleich der Summe der Momente aller Gewichte dividiret durch die Summe aller Gewichte, wenn der gegebene Punkt allen Gewichten zur Seite liegt; liegt er aber zwiſchen den Gewichten, ſo iſt der Abſtand des Schwer-

Fig. 42 punktes von dieſem Punkte gleich **der Summe der Momente auf der einen Seite weniger der Summe der Momente auf der anderen Seite des gegebenen Punktes dividiret durch die Summe aller Gewichte**, ſo daß der Schwerpunkt nach der Seite der gröſſeren Summe der Momente fällt; nämlich wenn in Fig. 42. bey den Gewichten P, Q, R, S, T am Hebel BF der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in K iſt, ſo iſt $AK = (P.BA + Q.CA + R.DA + S.EA + T.FA) : (P + Q + R + S + T)$, und $MK = [(R.DM + S.EM + T.FM) - (Q.CM + P.BM)] : [P + Q + R + S + T]$.

Denn für den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt G der zwey Gewichte P, Q iſt $GA = \frac{P.BA + Q.CA}{P + Q}$ vermög §. 128, und beyde Gewichte laſſen ſich daſelbſt in ein einziges Gewicht $(P+Q)$ vereinigen; ſodann iſt für den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt H zwiſchen $(P + Q)$ und zwiſchen R der Abſtand $AH = \frac{(P+Q).GA + R.DA}{(P+Q) + R}$, oder wenn man für GA ſeinen Werth ſetzet, $HA = \frac{P.BA + Q.CA + R.DA}{P + Q \div R}$, und in dieſem Punkte H laſſen ſich die drey Gewichte P, Q, R in ein einziges Gewicht $P+Q+R$ vereinigen; der gemeinſchaftliche Schwerpunkt zwiſchen $(P+Q+R)$ und zwiſchen S ſey in I, ſo iſt $AI = \frac{(P+Q+R).HA + S.EA}{P+Q+R+S}$ $= \frac{P.BA + Q.CA + R.DA + S.EA}{P+Q+R+S}$; vereinigt man nun die vier Gewichte in I, ſo findet man endlich den geſuchten Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller Gewichte $AK = \frac{P.AB+Q.CA+R.DA+S.EA+T.FA}{P+Q+R+S+T}$. Fig. 42

Iſt aber der gegebene Punkt zwiſchen den Gewichten z. B. in M befindlich, und G iſt der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Gewichte P, Q, dieſſeits, und L der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Gewichte R, S, T jenſeits des gegebenen Punktes M, ſo iſt MG $= \frac{Q.CM+P.BM}{P+Q}$, und $ML = \frac{R.DM+S.EM+T.FM}{R+S+T}$; ferner iſt, wenn man in G, und L die zugehörigen Gewichte vereiniget, der Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller Gewichte

$$MK = \frac{(R+S+T).LM-(P+Q).GM}{(R+S+T)+(P+Q)}$$, und endlich wenn man für LM und GM ihre Werthe ſetzet,

$$MK = \frac{[(R.DM+S.EM+T.FM)-(Q.CM+P.BM)]}{P+Q+R+S+T.}.$$

§. 130.

Wenn man MK = 0 ſetzet, nämlich M in K rücket, ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes = 0, das iſt

$$\frac{(P.BK+Q.CK+R.DK)-(S.EK+T.FK)}{P+Q+R+S+T} = 0,$$ und folglich $(P.BK+Q.CK+R.DK) = (S.EK+T.FK)$; es ſind demnach bey mehreren Gewichten am Hebel die Summen der Momente zu beyden Seiten des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes einander gleich; ſollen nun alle dieſe Gewichte bey jeder Lage des Hebels im Gleichgewichte ſeyn, ſo muß K unterſtützet, oder mit einer Kraft $= P+Q+R+S+T$ gehalten werden; daher iſt bey mehreren Kräften am Hebel ein Gleichgewicht, wenn zu beyden Seiten des Unterſtü-

Fig. ſtungspunktes die Summen der Momente einander gleich ſind; und dieſes gilt auch vom einarmigen Hebel, wenn die Summe der Momente der aufwärts ziehenden der Summe der Momente der niederwärts ziehenden Kräfte gleich iſt; und ſo iſt endlich allgemein das Grundgeſetz des Hebels folgendes: **bey mehreren Kräften am Hebel ſind im Stande des Gleichgewichts die Summen der Momente der Kräfte, welche den Hebel um den Unterſtützungspunkt auf entgegengeſetzte Seiten zu drehen ſtreben, einander gleich.**

§. 131.

Die ſchweren Elemente, die in einer Linie, in einer Fläche, oder in einem phyſiſchen Körper durch ihren Zuſammenhang, wie gleichſam mit mathematiſchen Hebeln unter einander verbunden ſind, machen ein **Syſtem** (eine Verbindung) ſchwerer Elemente aus, nämlich eine **ſchwere Linie**, eine **ſchwere Fläche**, oder einen **ſchweren Körper**. Derjenige Punkt einer ſchweren Linie, einer ſchweren Fläche, oder eines ſchweren Körpers, um welchen, wenn er unterſtützet wird, alle ſchweren Elemente bey jeder Lage im Gleichgewichte ſind, heißt **der gemeinſchaftliche Schwerpunkt** einer ſolchen Linie, Fläche, oder Körpers. Daß es bey einer ſchweren Linie von gerader Richtung einen gemeinſchaftlichen Schwerpunkt gebe, iſt aus vorhergehenden zu erſehen, weil man eine ſolche Linie für einen mit mehreren Gewichten beſchwerten Hebel anſehen kann; daß auch bey krummen Linien, bey Flächen, und bey Körpern ein ſolcher Punkt und zwar nur ein einziger vorhanden ſey, erhellet daher, weil man auch in ſolchen Fällen erſtlich zwey ſchwere Elemente in einem Punkte, ſodann die Summe der erſten zweyen

mit

mit dem dritten, die Summe dieſer dreyen mit dem Fig. vierten Elemente in einem einzigen Punkte vereinigen kann, welcher ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt iſt, es möge dieſes vierte Element mit den drey erſten in einer nämlichen Ebene liegen oder nicht, und ſo gilt der Schluß immer von jeder Anzahl ſchwerer Elemente auf die um eins gröſſere Anzahl.

Mathematiſche Linien, Flächen, und Körper haben zwar im eigentlichen Verſtande keinen Schwerpunkt, weil ſie ihrer Natur nach kein eigenthümliches Gewicht haben; jedoch wenn gleich groſſe Theilchen von ſolchen Linien, Flächen, und Körpern von gleich groſſen Kräften nach parallelen Richtungen getrieben werden, ſo giebt es in dergleichen Fällen immer einen gewiſſen Punkt, um welchen, wenn er unterſtützet wird, alle Theile im Gleichgewichte ſind, und worinen man ſich die Kräfte aller Theilchen vereiniget vorſtellen kann; einen ſolchen Punkt kann man immer **Schwerpunkt** heiſſen, wenn ſchon die angebrachte Kraft (z. B. der Windſtrich gegen eine ebene Fläche) von der Schwerkraft verſchieden iſt.

Eine Ebene, die den Körper durch ſeinen Schwerpunkt ſchneidet, heißt eine **Schwerpunktsebene**, und eine gerade Linie durch des Körpers Schwerpunkt gezogen heißt eine **Schwerpunktslinie**.

§. 132.

Aufgabe. Den Schwerpunkt mehrerer ſchweren Elemente zu finden.

Auflöſ. I. Wenn die ſchweren Elemente alle in einer geraden Linie befindlich ſind, ſo findet man nach §. 129. den Abſtand ihres Schwerpunktes, von einem angenommenen Punkte der geraden Linie, wenn man

Fig. die Summe der Momente durch die Summe der Ele-
43 mente dividiret.

II. Sind aber die ſchweren Elemente als P, Q, R in einer Ebene MN Fig. 43. nicht in gerader Linie, ſo gedenke man durch einen beliebigen Punkt A in dieſer Ebene zwey Gerade AB, AC ſenkrecht auf einander; von den gegebenen ſchweren Elementen P, Q, R ziehe man ſodann ſenkrechte Linien auf die Geraden AB, AC, und berechne die zwey Abſtände EG, FG des Schwerpunktes von den beyden Geraden AB, AC dadurch, daß man die Summen der Momente aller ſchweren Elemente bey einer jeden dieſer zwey Geraden beſonders durch die Summe aller Elemente dividiret, ſo iſt dadurch die Lage oder der Ort des geſuchten Schwerpunktes beſtimmt. Um dieſes einzuſehen ſtelle man ſich vor, die Ebene MN werde ſo in eine vertikale Lage gebracht, daß die Gerade AC horizontal ſey, ſo wird wegen dem Zuſammenhange der ſchweren Elemente untereinander und mit der Ebene MN die Gerade AC eben ſo herabgezogen, als wenn die ſchweren Elemente P, Q, R mittelſt der ſenkrechten Fäden Pp, Qq, Rr ohne Schwere an AC angebracht wären; AC iſt daher in dieſer Lage für einen beſchwerten Hebel anzuſehen, und es iſt des Punktes F, durch welchen die mittlere Richtung FG durchgeht, von A der Abſtand $AF = \frac{P\ pA + Q.qA + R.rA}{P+Q+R}$; in dieſer Geraden FG liegt der geſuchte Schwerpunkt; dieſe Gerade FG iſt von AB um $AF = EG$ entfernet, und dabey iſt wegen den ſenkrechten Linien, $pA = PP'$, $qA = QQ'$, $rA = RR'$; folglich iſt des geſuchten Schwerpunktes G von AB der Abſtand $EG = \frac{P.PP' + Q.QQ' + R.RR'}{P+Q+R}$; ſtellet man ſich ferner vor, MN werde nun dergeſtalt in eine vertikale Lage gebracht, daß AB horizontal ſey, ſo iſt aus der Fig. 43 nämlichen Urſache

$$AE = \frac{P.P'A + Q.Q'A + R.R'A}{P+Q+R};$$

und folglich iſt des geſuchten Schwerpunktes G von AC der Abſtand

$$FG = \frac{P.Pp + Q.Qq + R.Rr}{P+Q+R}.$$

III. Sind endlich die ſchweren Punkte in verſchiedenen Ebenen, ſo muß man durch einen beliebigen Punkt drey Ebenen ſenkrecht auf einander gedenken (als z. B. die Ecke eines Würfels); von den gegebenen ſchweren Elementen zieht man ſodann auf eine jede der drey Ebenen ſenkrechte Linien, und berechnet den Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von einer jeden der drey Ebenen insbeſondere dadurch, daß man die Summen der Momente aller Elemente bey einer jeden dieſer drey Ebenen beſonders durch die Summe aller Elemente dividiret. Es ſey z. B. der Schwerpunkt G 44 zwiſchen den Elementen P, Q, R, S zu beſtimmen Fig. 44. die nicht in einer nämlichen Ebene liegen, ſo gedenke man durch einen Punkt I die horizontale Ebene INM, und die Ebenen INL, IML ſowohl auf einander als auch auf die erſte Ebene ſenkrecht; von den Elementen P, Q, R, S, und von ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte G ziehe man bis zur Ebene MN die Vertikallinien PA, QB, RC, SD, ſo iſt wegen dem Zuſammenhange der ſchweren Elemente die Ebene MN in dieſer Lage ſo anzuſehen, als wenn die Elemente in A, B, C, D befindlich wären, deren Schwerpunkt in F iſt; daher iſt vermög vorhergehenden

$$Ff = \frac{P.Aa + Q.Bb + R.Cc + S.Dd}{P+Q+R+S} = Gg, \text{ und}$$

$$Ff' = \frac{P.Aa' + Q.Bb' + R.Cc' + S.Dd'}{P+Q+R+S} = Gg', \text{ näm-}$$

Fig. 44 lich bey jeder von den zwey Ebenen LM, LN iſt der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von der Ebene gleich der zugehörigen Summe der Momente aller Elemente dividiret durch die Summe aller Elemente, weil Aa, Bb, Aa', Bb', den Entfernungen der Elemente P, Q von den Ebenen LM, LN gleich ſind; um endlich die Entfernung FG = f'g' des geſuchten Schwerpunktes von der Ebene MN zu beſtimmen, ſtelle man ſich die Figur in einer ſolchen Lage vor, daß die Ebene LN *horizontal ſey, ſo wird aus der nämlichen Urſache* wie ehevor, FG gleich ſeyn der Summe der Momente aller Elemente in Rückſicht der Ebene NM dividiret durch die Summe aller Elemente.

Würden die Elemente P, Q, R, S in den zugehörigen Entfernungen a, b, c, d nicht von der Schwerkraft, die bey jedem Elemente dem Gewichte des Elementes ſelbſt gleich iſt, ſondern von anderen Kräften p, q, r, s nach parallelen Richtungen getrieben, die dieſen Elementen proportional ſind, oder von ſolchen Kräften, daß die Kraft p, welche auf das Element P wirket, einem $n$fachen ſchweren P gleich ſey, $p = nP$, $q = nQ$ u. ſ. w. ſo wäre die Summe der Momente **aller Kräfte** $= nP.a + nQ.b + nR.c + nS.d$, und die Summe **aller Kräfte** $= nQ + nP + nR + nS$; daraus folgt der Abſtand des Schwerpunktes $= \frac{nP.a + nQ.b + nR:c + nS.d}{nP + nQ + nR + nS} = \frac{Pa + Qb + Rc + Sd}{P + Q + R + S}$ **= der Summe der Momente aller Elemente getheilt durch die Summe aller Elemente;** man kann demnach die Lage des Schwerpunktes bey mehreren Elementen beſtimmen, wenn ſolche auch nicht ſchwer ſind, und auch wenn gar keine Kraft auf ſelbe wirket, als z. B. bey mathematiſchen Linien, Flächen und Körpern.

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß bey den Momenten in Rückſicht einer geraden Linie, und auch in Rückſicht einer Ebene, ſo wie in Rückſicht eines Punktes, die Differenz der Summen der Momente müſſe genommen werden, wenn die Elemente zu beyden Seiten der gezogenen geraden Linie, oder der gelegten Ebene befindlich ſind.

§. 133.

Es wird in der Folge, **die Summe der Momente auf der einen Seite weniger der Summe der Momente auf der anderen Seite,** jederzeit mit den Worten **Summe aller Momente** bezeichnet werden, weil die eine Summe in Rückſicht der anderen negativ iſt, und die Differenz zweyer Gröſſen, als eine Summe aus der poſitiven und aus der negativen Gröſſe kann angeſehen werden. In dieſer Bedeutung kann man ſagen: **die Summe aller Momente in Rückſicht des Schwerpunktes, und auch in Rückſicht einer geraden Linie oder einer Ebene, die durch den Schwerpunkt geht, iſt** = 0; denn weil in einem ſolchen Falle der Abſtand des Schwerpunktes = 0 iſt, ſo muß auch bey dem Werthe dieſes Abſtandes, bey dem Bruche, **die Summe aller Momente dividirt durch die Summe aller Elemente,** der Zähler = 0 ſeyn.

§. 134.

Und nun ſind wir im Stande folgende Aufgaben aufzulöſen.

I. Den Schwerpunkt einer geraden Linie zu finden.

Fig. 45 Aufldſ. Es ſey die gegebene gerade Linie $AB = a$ Fig. 45. ein Stück davon $AP = x$; man ſtelle ſich nun vor, AP ſey in unendlich viele und gleiche Theilchen eingetheilet, ſo kann ein jedes ſolches Theilchen für ein Element angeſehen werden, welches mit ſeinem eigenen Schwerpunkte gleichſam in einem Punkte vereiniget iſt; der Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller Elemente vom Anfangspunkte A wird demnach erhalten, wenn man die Summe aller Momente in Rückſicht des Punktes A durch die Summe aller Momente dividiret; dieſes kann ganz kurz mittelſt der Integralrechnung geſchehen; wenn man nämlich $Pp = dx$ ſetzet, und der Schwerpunkt von AP befindet ſich in g, ſo iſt $Ag = \frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x$; ſetzet man endlich $x = a$, ſo iſt bey der Geraden AB der Abſtand AG ihres Schwerpunktes G von $A = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$; **bey einer geraden Linie liegt demnach der Schwerpunkt in ihrer Mitte.**

II. Den Schwerpunkt des Umfanges einer geradlinigten Figur zu finden.

Auflöſ. Man halbire jede Seite, um den Schwerpunkt einer jeden zu finden, und ſtelle ſich in jedem Schwerpunkte die zugehörige Seite vereiniget vor, ſo hat man nun eben ſo viele Punkte in einer Ebene beyſammen, als Seiten am Umfange vorhanden ſind, deren Schwerpunkt ſich nun nach §. 132. II. beſtimmen läßt.

Iſt die geradlinigte Figur ein regelmäſſiges Vieleck, ſo liegt der Schwerpunkt des Umfanges im Mittelpunkte des Vieleckes. Es ſey z. B. Fig. 46. ein regelmäſſiges Vieleck, deſſen Mittelpunkt C iſt; A, B, E, F, D ſind die Schwerpunkte der zugehörigen Seiten; man ziehe durch C und G die Gerade GCF, ſo liegt wegen 46

An

Fig. 46 Aa = Ba der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von A und B in GF; auch von D und E wegen Db = Eb liegt der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in GF; und auch F liegt in eben dieſer Geraden GF; derowegen iſt GF eine **Schwerpunktslinie** (§. 131.); aus der nämlichen Urſache iſt auch DH eine Schwerpunktslinie; und folglich iſt ihr Durchſchnittspunkt C, nämlich der Mittelpunkt des regelmäſſigen Vielecks der geſuchte Schwerpunkt.

Da der Schwerpunkt des Umfangs nicht in dem Umfange liegt, ſo muß man ſich vorſtellen, als wäre der Schwerpunkt mit dem beſchwerten Umfange mittelſt unbiegſamer Linien ohne Maſſe verbunden, damit der Umfang um den Schwerpunkt, wenn ſolcher unterſtützet iſt, bey jeder Lage im Gleichgewichte ſey.

III. Den Schwerpunkt des Bogens bey was immer für einer krummen Linie von ſenkrechten Ordinaten zu finden.

47 Auflöſ. Es ſey bey der krummen Linie AM Fig. 47. der Schwerpunkt des Bogens AM in G, $AP = x$, $PM = y$, und $Pp = dx$; ſo iſt $Mm = (dx + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und das Moment davon in Rückſicht AP iſt $= y.(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, in Rückſicht AQ aber $= x.(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$;

folglich iſt CG oder $AB = \dfrac{\int x(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{\int x dx(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}}{AM}, \text{ und } BG = \frac{\int y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{AM}.$$

Wenn der Bogen NAM, deſſen Schwerpunkt geſucht wird, auf beyden Seiten der Abſciſſenlinie aus zwey vollkommen gleichen und ähnlichen Theilen beſteht,

Fig. ſo muß der Schwerpunkt irgendwo in der Abſciſſenlinie
47 AP in B liegen, und es iſt die Entfernung

$$AB = \frac{2\int x\mathrm{d}x(1+\mathrm{d}y^2\mathrm{d}x^{-2})^{\frac{1}{2}}}{NAM}.$$

Z. B. im Kreiſe iſt $y = \sqrt{(a^2-x^2)}$, und das Element des Bogens AM iſt $= - a\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, wenn die Abſciſſen vom Mittelpunkte gerechnet werden, nämlich wenn $OP = x$ iſt; (das Element iſt negativ, weil der Bogen abnimmt, wenn die Abſciſſe wächſt) daraus folgt das Moment des Bogens NAM in Rückſicht der Senkrechten $EF = 2\int -ax\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= 2a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, allwo Conſt. $= 0$ iſt, weil für $x = a$ das Moment $= 0$ wird; es iſt demnach bey dem Kreisbogen NAM der Abſtand des Schwerpunktes B von dem Mittelpunkte $OB = \frac{2a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{NAM}$ $= \frac{OA.NM}{NAM}$; daraus folgt $NAM : NM = OA : OB$, nämlich **der Kreisbogen verhält ſich zur Sehne, wie der Halbmeſſer zur geſuchten Entfernung des Schwerpunktes.**

IV. Den Schwerpunkt eines Rechteckes zu finden.

48 Auflöſ. Es ſey bey dem Rechtecke AC Fig. 48. die eine Seite $AB = a$, und die andere $AD = b$; ferner ſey $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$, PM, pm parallel zu AD; über dieß ſey $PQ = z$, $Qq = \mathrm{d}z$, und QR, qr parallel zu AB, ſo iſt das Moment des Elements Qr in Rückſicht $AD = FQ.QR.Qq = x\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, weil dieſes Element mit ſeinem Schwerpunkte gleichſam einen einzigen Punkt ausmacht; daraus folgt durch die Integra-

Fig. 48 gration das Moment des Elements PR in Rückſicht AD = $zx\mathrm{d}x$, allwo man um das Moment des Elements PR allein zu erhalten ſo integriren muß, daß man nur z für veränderlich anſieht; und folglich iſt das Moment des Elements Pm = $bx\mathrm{d}x$; daraus erhält man durch eine fernere Integration das Moment der Fläche AM in Rückſicht AD = $\frac{1}{2}bx^2$, und endlich das Moment des ganzen Rechteckes = $\frac{1}{2}a^2b$; folglich iſt der Abſtand LG des geſuchten Schwerpunktes G von

$$\mathrm{AD} = \frac{\frac{1}{2}a^2b}{ab} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = \mathrm{DE};$$

aus eben dieſer Urſache iſt des nämlichen Schwerpunktes G Abſtand EG von AB = $\frac{1}{2}b$ = $\frac{1}{2}$AD = AL = BL; der Schwerpunkt befindet ſich demnach in dem Durchſchnittspunkte G der zwey Geraden EE und LL; **nämlich der Schwerpunkt eines Rechteckes liegt in dem Durchſchnittspunkte der zwey Geraden, welche die entgegengeſetzten Seiten des Rechtecks halbiren.**

V. Den Schwerpunkt eines geradlinigten Dreyecks zu finden.

Auflöſ. Es ſey das Dreyeck ABC Fig. 49. man gedenke daſſelbe durch gerade Linien, die zu BC parallel laufen, in ſeine Elemente (in die eingeſchriebene unendlich kleine Rechtecke) zertheilet, und ziehe die Gerade AD von A bis in die Mitte der Seite BC, ſo liegt der Schwerpunkt eines jeden Elements in der Geraden AD, weil durch dieſe Gerade jedes Element halbiret wird; folglich liegt auch der Schwerpunkt des Dreyeckes in dieſer Geraden AD, nämlich AD iſt eine Schwerpunktslinie; um nun ſeinen Abſtand von A zu finden, ſetze man AD = a, BC = b, den Winkel ADB = m, AP = x, Pp = $\mathrm{d}x$, MN = y, ſo iſt das Element Mn = $y\mathrm{d}x.\sin m$, welches man ſich in 49

P

Fig. 49 P oder p, in ſeinem Schwerpunkte nämlich vereiniget vorſtellen kann; deſſen Moment von A gerechnet iſt, demnach $= xydx.\sin m$; es iſt aber MN(y : AP(x = BC(b : AD(a, nämlich $y = \frac{bx}{a}$; folglich iſt das nämliche Moment $= \frac{bx^2dx.\sin m}{a}$; daraus folgt das Moment des Dreyeckes AMN $= \frac{bx^3.\sin m}{3a}$, und ferner das Moment des ganzen Dreyeckes $= \frac{1}{3}a^2b.\sin m$; das Dreyeck aber iſt $= \frac{1}{2}ab.\sin m$; folglich iſt der Abſtand des Schwerpunktes G auf der Geraden AD von A gerechnet AG $= \frac{\frac{1}{3}a^2b.\sin m}{\frac{1}{2}ab.\sin m} = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$AD; das iſt, **der Schwerpunkt eines Dreyeckes liegt in der Geraden, welche die Spitze eines Winkels mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, und iſt um zwey Drittheile derſelben von der Spitze des Winkels entfernet.**

VI. Den Schwerpunkt einer geradlinigten Figur zu finden.

Auflöſ. Man zertheile die gegebene Figur in Dreyecke, beſtimme den Schwerpunkt in jedem Dreyecke, und gedenke jedes Dreyeck in ſeinem Schwerpunkte vereiniget, ſo hat man nun ſo viele ſchwere Punkte in einer Ebene als Dreyecke vorhanden ſind; der gemeinſchaftliche Schwerpunkt aller dieſer Punkte, der ſich nach §. 132. II. beſtimmen läßt, iſt der geſuchte Schwerpunkt der geradlinigten Figur.

Iſt nun die geradlinigte Figur ein regelmäſſiges Vieleck, ſo liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte des Vieleckes; denn die Schwerpunkte aller einzelnen Dreyecke, in wel-

Fig. 47 welche das regelmäſſige Vieleck aus dem Mittelpunkte zertheilet wird, liegen in gleichen Entfernungen von einander in einem Umkreiſe, welcher mit dem Vielecke einerley Mittelpunkt hat; derowegen fällt ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt, ſo wie jener des Umfanges des nämlichen regelmäſſigen Vieleckes, mit dem Mittelpunkte zuſammen.

VII. Den Schwerpunkt des Flächenraums bey einer krummen Linie von ſenkrechten Ordinaten zu finden.

Aufløſ. Es ſey Fig. 47 $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, ſo iſt das Element $Pm = ydx$ und deſſen Moment in Rückſicht $AQ = xydx$, in Rückſicht AO aber $= \frac{1}{2}y.ydx = \frac{1}{2}y^2dx$; folglich iſt des geſuchten Schwerpunktes G von AQ der Abſtand CG oder

$$AB = \frac{\int xydx}{\int ydx},$$ und von AO der Abſtand

$$BG = \frac{\int\frac{1}{2}y^2dx}{\int ydx}.$$

Z. B. bey der Parabel iſt $y^2 = px$; folglich AB

$$= \frac{\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x;$$ und $$BG = \frac{\int\frac{1}{2}pxdx}{\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$= \frac{3}{8}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}y.$$

Wenn der Flächenraum NAM, deſſen Schwerpunkt geſucht wird, auf beyden Seiten der Abſciſſenlinie AB aus zwey vollkommen gleichen und ähnlichen Theilen beſteht, ſo liegt der geſuchte Schwerpunkt in der Abſciſſenlinie AB irgendwo in B, und es iſt AB

$$= \frac{\int x.2ydx}{\int 2ydx} = \frac{2\int xydx}{NAM}.$$ Es ſey z. B. NAM ein Kreisabſchnitt, ſo läßt ſich der Abſtand OP des Schwerpunktes B vom Mittelpunkte O auf folgende Art berechnen

Fig. 47 nen: es iſt das Element Pm $= - dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. weil APM abnimmt, wenn $x =$ OP wächſt; und deſſen Moment in Rückſicht EF iſt $= - x dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; daraus folgt das Moment von NAMN $= \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, allwo Conſt. $= 0$ iſt; es iſt demnach OB $= \frac{\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{NAMN} = \frac{\frac{2}{3}PM^3}{NAMN}$. Und nun iſt es leicht den Schwerpunkt eines Kreisausſchnittes zu beſtimmen, weil der Kreisausſchnitt aus zwey Theilen, aus einem Kreisabſchnitte und aus einem Dreyecke beſteht, wo man bey jedem Theile die Lage des Schwerpunktes kennet; man findet nach vorgenommener Unterſuchung, **daß in einem Kreisausſchnitte der Bogen zur Sehne ſich verhalte, wie zwey Drittheile des Halbmeſſers zur Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreiſes.**

Die halbe Kreisfläche iſt auch ein Kreisabſchnitt, oder auch ein Kreisausſchnitt; derowegen iſt der Abſtand des Schwerpunktes der halben Kreisfläche vom Mittelpunkte $= \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2\pi} = \frac{4a}{3\pi}$ vermög der Formel OB $\frac{\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{NAMN}$. Setzet man in eben dieſer Formel $x = - a$, ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes der ganzen Kreisfläche vom Mittelpunkte $= 0$, das iſt der Schwerpunkt des ganzen Kreiſes iſt mit ſeinem Mittelpunkt einerley; bey dem Kreiſe iſt demnach jede Gerade, welche die Kreisfläche halbiret, eine Schwerpunktlinie, weil jede halbirende Gerade durch den Mittelpunkt geht; und umgekehrt jede Schwerpunktlinie halbiret die Kreisfläche. Eben dieſes findet auch bey allen

ſymetriſchen Vielecken ſtatt, ſie mögen regelmäſſig oder unregelmäſſig ſeyn (277.); bey den **unſymetriſchen** Vielecken kann man nicht ſagen, daß jede Gerade, welche ein ſolches Vieleck halbiret, eine Schwerpunktslinie ſey; auch wird nicht von einer jeden Schwerpunktslinie ein unſymetriſches Vieleck halbiret: eine gerade Linie in einem Dreyecke zu einer Seite in einer ſolchen Entfernung parallel gezogen, daß ſie das Dreyeck halbiret, iſt keine Schwerpunktlinie; und eine Gerade in einem Dreyecke durch den Schwerpunkt zu einer Seite parallel gezogen halbiret nicht das Dreyeck. Nur dazumal iſt eine halbirende Gerade in einer ebenen Fläche eine Schwerpunktslinie, **wenn mit jedem Theilchen auf der einen Seite der halbirenden Geraden ein eben ſo groſſes Theilchen auf der anderen Seite in einer eben ſo groſſen Entfernung zuſammengehört**, als z. B. in einem Dreyecke bey einer Geraden, die aus der Spitze eines Winkels bis zur Mitte der gegenüberliegenden Seite gezogen wird.

Und eben ſo iſt auch in einem Körper eine halbirende Ebene nur dazumal eine Schwerpunktsebene, wenn mit jedem Theilchen auf der einen Seite der halbirenden Ebene ein eben ſo groſſes Theilchen auf der anderen Seite in einer eben ſo groſſen Entfernung zuſammengehört, weil nur bey einer ſolchen halbirenden Ebene die Summen der Momente zu beyden Seiten gleich ſind.

VIII. Den Schwerpunkt eines Priſma zu finden.

50 Auflöſ. Jedes Priſma AC Fig. 50. kann angeſehen werden, als wäre es aus unendlich vielen zur Grundfläche parallelen Schichten zuſammengeſetzet, deren jede eine unendlich kleine Dicke hat; der Schwerpunkt ei-

Fig. 50 einer jeden ſolchen Schichte wird eben ſo beſtimmet, als wenn die Schichte gar keine Dicke hätte; verbindet man nun die Schwerpunkte der oberen und unteren Grundfläche durch die gerade Linie EF, welche man die **Achſe des Priſma** nennen kann, ſo liegen die Schwerpunkte aller Schichten in dieſer Achſe; und folglich liegt auch der Schwerpunkt des Priſma in dieſer Achſe, nämlich EF iſt eine Schwerpunktslinie. Um nun den Abſtand des geſuchten Schwerpunktes G von E zu erhalten, ſey EF $= a$, jede der Grundflächen BFC oder ADN $= b$, und AP $= x$, Pp $= dx$, ſo iſt das Element oder die Schichte Pm $= bdx$, und ihr Moment in Rückſicht des Punktes E iſt $= bxdx$, wenn das Priſma ſenkrecht iſt; iſt aber deſſen Achſe gegen die Grundfläche um den Winkel $= m$ geneigt, ſo iſt die Schichte $= bdx.\sin m$, und ihr Moment $= bxdx.\sin m$; daraus folgt bey dem Stücke AM der Abſtand des Schwerpunktes von E $= \frac{\int bxdx.\sin m}{\int bdx.\sin m} = \frac{1}{2}x$; ſetzet man nun $x = a$, ſo iſt endlich der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes EG $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$EF; **nämlich bey dem Priſma, und folglich auch bey dem Cylinder liegt der Schwerpunkt in der Mitte der Achſe.**

Daß bey einem dreyſeitigen Priſma die Achſe EG eine Schwerpunktslinie ſey, läßt ſich auch auf folgende Art erweiſen. Durch die Seite DC und durch die parallele Mittellinie der gegenüberliegenden Seitenfläche BN gedenke man eine Ebene, eine andere Ebene aber durch die Seite AB und durch die parallele Mittellinie der gegenüberliegenden Seitenfläche CN, ſo iſt jede dieſer zwey Ebenen eine Schwerpunktsebene, weil durch jede derſelben daß Priſma ſo halbiret iſt, das mit jedem Theilchen auf der einen Seite der halbirenden Ebe-

ne

Fig. 50 ne ein eben ſo groſſes Theilchen auf der anderen Seite in einer eben ſo groſſen Entfernung zuſammen gehört; und folglich iſt die Durchſchnittslinie EF dieſer zwey Ebenen, welche durch die Schwerpunkte der beyden Grundflächen geht, eine Schwerpunktslinie bey dem dreyſeitigen Priſma. Wenn man durch die Mitte dieſer Schwerpunktslinie EF eine dritte halbirende Ebene parallel zur Grundfläche legt, ſo iſt aus dem nämlichen Grunde auch dieſe eine Schwerpunktsebene, und folglich liegt der geſuchte Schwerpunkt des dreyſeitigen Priſma in der Mitte der Achſe deſſelben. Daß auch bey jedem mehrſeitigen Priſma der Schwerpunkt in der Mitte der Achſe liege, erhellet daher, weil man jedes vielſeitige Priſma in dreyſeitige Priſmen zertheilen kann.

IX. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden.

51 Auflöſ. Es ſey die Pyramide ABC Fig. 51. durch den Schwerpunkt D der Grundfläche und durch die Spitze A ziehe man die Gerade AD, welche die **Achſe** der Pyramide heiſſen kann, ſo iſt dieſe Achſe eine Schwerpunktslinie, weil der Schwerpunkt eines jeden zur Grundfläche parallelen Elements Pm, und folglich auch ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt in dieſer Achſe liegt. Um nun den Abſtand des geſuchten Schwerpunktes G von A zu erhalten, ſetze man die Grundfläche BDC $= b$, die Achſe AD $= a$, ihren Neigungswinkel gegen die Grundfläche $= m$, das Stück der Achſe AQ $= x$, Qq $= dx$, und die Fläche PM $= y$, ſo iſt $y : b = x^2 : a^2$ vermög (374. III.), nämlich $y = \frac{bx^2}{a^2}$, und folglich das Element Pm $= \frac{bx^2 dx . \sin m}{a^2}$, deſſen Moment aber $= \frac{bx^3 dx . \sin m}{a^2}$ in Rückſicht A; daraus folgt in der Pyramide APM der Abſtand des

Fig. 51 Schwerpunktes von A $= \frac{\int bx^3 dx.\sin m}{\int bx^2 dx.\sin m} = \frac{3}{4}x$; und folglich, wenn man $x = a$ ſetzet, der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes G von A nämlich AG $= \frac{3}{4}a$; **der Schwerpunkt einer Pyramide, und auch eines Kegels, liegt demnach in der Achſe, und iſt um drey Viertheile derſelben von der Spitze entfernet.**

Wäre BACG eine Afterpyramide, oder auch ein Afterkegel, wo die zur Grundfläche parallelen Schnitte nicht den Quadraten ihrer Entfernungen von der Spitze proportional ſind, ſondern nach einem anderen bekannten Geſetze abnehmen, ſo läßt ſich der Schwerpunkt eben ſo leicht mittelſt der Momente beſtimmen.

X. Den Schwerpunkt einer abgekürzten Pyramide, oder eines abgekürzten Kegels zu finden.

Aufløſ. Es ſey Fig. 52. der Inhalt der abgekürzten Pyramide oder des abgekürzten Kegels DB $= K$, 52 und der Inhalt der Ergänzung CDE $= k$; der Schwerpunkt der Ergänzungspyramide CDE ſey in g, der geſuchte Schwerpunkt der abgekürzten Pyramide DB ſey in G, der gemeinſchaftliche Schwerpunkt aber der abgekürzten Pyramide und ihrer Ergänzung ſey in g', welche alle drey in der Achſe CQ liegen, ſo iſt Qg' $= \frac{\text{QG}.K + \text{Qg}.k}{K+k}$; und daraus folgt der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes G von der gröſſern Grundfläche

$$\text{QG} = \frac{\text{Qg}'(K+k) - \text{Qg}.k}{K}$$ **= dem Momente der ganzen Pyramide weniger dem Momente der Ergänzungspyramide getheilet durch die abgekürzte Pyramide.**

Fig. 52 Wäre es nun erforderlich den Abſtand des Schwerpunktes durch die zwey parallelen Grundflächen und durch die Achſe der abgekürzten Pyramide auszudrücken, ſo kann dieſes auf folgende Art geſchehen.

Es ſey die Achſe PQ $= a$, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche $= m$, die gröſſere Grundfläche AB $= B$, die kleinere Grundfläche DE $= b$, und die Ergänzungsachſe PC $= x$, ſo iſt $B : b = \mathrm{QC}^2(a^2 + 2ax + x^2 : \mathrm{PC}^2(x^2$; daraus folgt $x = \frac{a(b+\sqrt{Bb})}{B-b} = \mathrm{CP}$, und ferner $\mathrm{CQ} = \frac{a(B+\sqrt{Bb})}{B-b}$; es iſt demnach der Inhalt der Ergänzungspyramide $k = \frac{ab(b+\sqrt{Bb}).\sin m}{3(B-b)}$, der Inhalt der ganzen Pyramide $K+k = \frac{aB(B+\sqrt{Bb}).\sin m}{3(B-b)}$, und der Inhalt der abgekürzten Pyramide $K = \frac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb}).\sin m$; ferner iſt vermög vorhergehenden $\mathrm{Pg} = \frac{1}{4}\mathrm{PC} = \frac{a(b+\sqrt{Bb})}{4(B-b)}$, $\mathrm{Qg}' = \frac{1}{4}\mathrm{QC} = \frac{a(B+\sqrt{Bb})}{4(B-b)}$, und $\mathrm{Qg} = a + \frac{a(b+\sqrt{Bb})}{4(B-b)} = \frac{a(4B-3b+\sqrt{Bb})}{4(B-b)}$; es iſt alſo, wenn man in der obangeführten Gleichung $\mathrm{QG} = \frac{\mathrm{Qg}'(K+k)-\mathrm{Qg}.k}{K}$, ſtatt Qg′, ſtatt $(K+k)$, ſtatt Qg, ſtatt k, und ſtatt K ihre Werthe ſetzet, der geſuchte Abſtand $\mathrm{QG} = \frac{1}{4}a(\frac{B+3b+2\sqrt{Bb}}{B+b+\sqrt{Bb}})$. Daraus folgt der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von der kleineren Grundfläche $\mathrm{PG} = \frac{\frac{1}{4}a(3B+b+2\sqrt{Bb})}{B+b+\sqrt{Bb}}$

Fig. 52 $=\frac{1}{2}a+\frac{\frac{1}{4}a(B-b)}{B+b+\sqrt{Bb}}$, und ferner der Abſtand des Schwerpunktes vom Mittel der Achſe gegen der gröſſeren Grundfläche $=\frac{\frac{1}{4}a(B-b)}{B+b+\sqrt{Bb}}=\frac{\frac{1}{12}a^2(B-b}{\frac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb})}$ **= dem zwölften Theile des Produktes aus dem Quadrate der Achſe multipliciret mit der Differenz der Grundflächen getheilet durch den Inhalt der abgekürzten Pyramide.**

Iſt DB ein abgekürzter Kegel, der Halbmeſſer der gröſſeren Grundfläche AQ $= P$, und der Halbmeſſer der kleineren Grundfläche DP $= p$, ſo iſt $B = P^2\pi$, $b = p^2\pi$, und $\sqrt{Bb} = Pp\pi$; folglich iſt der Abſtand des Schwerpunktes vom Mittel der Achſe gegen der gröſſeren Grundfläche $=\frac{\frac{1}{4}a(P^2-p^2)}{P^2+p^2+Pp}$.

XI. Aus dem Schwerpunkte einer Summe, welche aus zwey Theilen beſteht, und aus dem Schwerpunkte des einen Theils, den Schwerpunkt des andern Theils zu finden.

Auflöſ. Dieſe Aufgabe iſt bereits bey der Beſtimmung des Schwerpunktes einer abgekürzten Pyramide aufgelöſet worden; dabey iſt aber allgemein der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von einer gegebenen Ebene gerechnet **gleich dem Momente der ganzen Summe weniger dem Momente des einen Theils** (deſſen Schwerpunkt bekannt iſt) **dividiret durch den andern Theil** (deſſen Schwerpunkt geſucht wird), wenn die gegebene Ebene den zwey bekannten Schwerpunkten zur Seite liegt; befindet ſich aber die gegebene Ebene zwiſchen den zwey bekannten Schwerpunkten, ſo iſt der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von dieſer Ebene gerechnet **gleich dem Mo-**

men-

mente der ganzen Summe mehr dem Momente Fig. 52 **des einen Theils dividirt durch den anderen Theil;** denn wenn man Fig. 52. den einen Theil DCE $= k$, und den anderen DB $= K$ ſetzet, ſo iſt

$$Qg' = \frac{QG.K+Qg.k}{K+k}, \text{ und } Pg' = \frac{PG.K-Pg.k}{K+k}$$

folglich auch $QG = \frac{Qg'(K+k)-Qg\,k}{K}$,

und $PG = \frac{Pg'(K+k)+Pg.k}{K}$.

Durch dieſes Hilfsmittel wird in manchen Fällen die Beſtimmung des Schwerpunktes erleichtert, **und zwar dazumal, wenn der gegebene Körper oder die gegebene Fläche durch die Hinzufügung eines gewiſſen Theiles eine ſolche Geſtalt erhält, daß man ſowohl bey der ganzen Summe, als auch bey dem hinzugefügten Theile die Lage des Schwerpunktes kennet.** Auf dieſe Art läßt ſich die Lage des Schwerpunktes bey einem abgekürzten Kegel, der cylindriſch und mit dem Kegel Concentriſch ausgehöhlet iſt, ſehr leicht beſtimmen; es iſt nämlich der Abſtand des geſuchten Schwerpunktes von der Mitte der Achſe gegen der grösseren Grundfläche = **dem Momente des abgekürzten Kegels getheilt durch den Inhalt des ausgehöhlten Kegels**, weil das Moment des einen Theils, des Cylinders nämlich, in Rückſicht des Mittelpunktes der Achſe $= 0$ iſt. Setzet man nun bey einem ſolchen ausgehöhlten Kegel AB Fig. 53. die 52 Achſe PQ $= a$, die ganze gröſſere Grundfläche $= B$, die kleinere $= b$, und die Grundfläche des ausgehöhlten Cylinders $= c$, ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes G vom Mittelpunkte g der Achſe, nämlich $gG = \frac{\frac{1}{4}a(B-b)}{B+b+\sqrt{Bb-3c}}$

Fig. oder wenn man die Halbmeſſer der drey Grundflächen mit P, p, q bezeichnet, ſo iſt $gG = \frac{\frac{1}{4}a(P^2 - p^2)}{P^2 + p^2 + Pp - 3q^2}$.

Eben ſo leicht iſt auch der Schwerpunkt in einem Trapeze, und in vielen anderen Fällen zu beſtimmen.

XII. Den Schwerpunkt eines Körpers zu beſtimmen, welcher durch die Umdrehung einer krummen Linie von ſenkrechten Ordinaten beſchrieben wird.

54 Auflöſ. Es ſey. $AB = a$ Fig. 54 die Umdrehungsachſe, in welcher der Schwerpunkt G des Körpers DAC liegt, die Abſciſſe $AP = x$, $Pp = dx$, $PM = y$, ſo iſt das körperliche Element $Nm = y^2\pi dx$, deſſen Moment in Rückſicht $A = y^2\pi x dx$, und folglich bey dem Körper NAM die Entfernung des Schwerpunktes g von A nämlich $Ag = \frac{\int y^2\pi x dx}{\int y^2\pi dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$.

Es ſey z. B. DAC ein Paraboloides, alſo $y^2 = px$, ſo iſt $Ag = \frac{2}{3}x$, und folglich $AG = \frac{2}{3}a$.

Iſt aber DAC eine Halbkugel, ſo iſt $y^2 = 2ax - x^2$; daraus folgt $\int y^2 x dx = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$, und $\int y^2 dx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$; folglich iſt der Abſtand des Schwerpunktes in einem Kugelabſchnitte von dem Endpunkte des Halbmeſſers $Ag = \frac{2ax - \frac{3}{4}x^2}{3a - x}$, wo x die Höhe des Kugelabſchnittes, und a den Halbmeſſer der dazugehörigen Kugel bedeutet, es möge der Kugelabſchnitt kleiner oder auch gröſſer ſeyn, als die Halbkugel. Setzet man nun $x = a$, ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes in einer Halbkugel von dem Endpunkte ihrer Achſe gleich $\frac{5}{8}$ des Halbmeſſers, und folglich der Abſtand vom Mittelpunkte gleich $\frac{3}{8}$ des Halbmeſſers; ſetzet man aber $x = 2a$, ſo iſt der Abſtand $= a$, welches anzeigt,

daß

daß der Schwerpunkt der ganzen Kugel mit ihrem Mittelpunkte einerley ſey. Fig. 55

Wenn ſich die krummlinigte Fläche ABC Fig. 55. nicht um die Abſciſſenlinie AB, ſondern um eine zu ihr parallele Achſe FH drehet, ſo läßt ſich der Abſtand des Schwerpunktes G von F auf folgende Art beſtimmen. Es ſey AF $=$ HB $= c$, AP $=$ FQ $= x$, Pp $= dx$, und PM $= y$, ſo iſt das körperliche Element Nm $= (QM^2 - QP^2).\pi.Pp = (y^2 + 2cy)\pi dx$, und deſſen Moment in Rückſicht des Punktes F iſt $= (y^2 + 2cy)\pi x dx$; folglich iſt in dem Körper, der durch APM erzeuget wird, des Schwerpunktes g Abſtand gF $= \frac{\int x dx (y^2 + 2cy)}{\int dx (y^2 + 2cy)}$, allwo man für y den Werth durch x ausgedrückt ſubſtituiren, und nach vorgenommener Integration $x =$ FH ſetzen muß, um den Abſtand FG des Schwerpunktes G in dem ausgehöhlten Körper AD zu erhalten. Man kann nach dieſer Formel den Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels, der cylindriſch und mit dem Kegel concentriſch ausgehöhlet iſt, ſehr leicht beſtimmen.

XIII. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung einer krummen Linie von ſenkrechten Ordinaten entſteht.

Aufloͤſ. In Fig. 55. iſt Mm $= (dx^2 + dy)^{\frac{1}{2}}$, die Oberfläche der Zone Nm $= 2\pi(y + c)(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und ihr Moment $= 2\pi x(y + c)(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ in Rückſicht der Ebene AE, oder des Punktes F; folglich iſt der Abſtand des Schwerpunktes

$$\mathrm{Fg} = \frac{\int x(y + c)(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\int (y + c)(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Fig. In Fig. 54 iſt $c = 0$; folglich iſt bey der Oberfläche **NAM** der Abſtand des Schwerpunktes Ag $= \frac{\int xy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\int y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$. Z. B. beym Kreiſe iſt $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, und $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; folglich iſt der Abſtand des Schwerpunktes der Oberfläche eines Kugelabſchnittes $= \frac{1}{2}x$, die Höhe x des Abſchnittes möge kleiner oder auch gröſſer ſeyn als der Halbmeſſer a der zugehörigen Kugel.

Durch eben dieſe Formel findet man, daß der Schwerpunkt einer Kegelfläche um zwey Drittheile der Achſe, ſo wie im Dreyecke, von der Spitze entfernet ſey.

§. 135.

Mittelſt der angeführten Gründe iſt man nun im Stande den Schwerpunkt einer Kanone zu beſtimmen. Die drey Haupttheile einer Kanone, das **Bodenſtück, Zapfenſtück**, und **Langenfeld**, ſind abgekürzte concentriſch ausgehöhlte Kegel, die erſteren zwey zuweilen auch ausgehöhlte Cylinder. Da man nun bey dergleichen Körpern die Lage des Schwerpunktes kennet, ſo kann man das Moment eines jeden dergleichen Körpers in Rückſicht des äuſſerſten Punktes der Traube finden, wenn man den Abſtand des Schwerpunktes von dieſem äuſſerſten Punkte der Traube mit dem Inhalte des Körpers multipliciret. Zu dieſer Summe der Momente addiret man noch die Momente der Traube, des Stoſſes, und der Verſtäbungen, welche man nur beyläufig ſo berechnet, daß man den Inhalt einer jeden Verſtäbung mit der Entfernung ihres Mittelpunktes von dem Endpunkte der Traube multipliciret. Dividiret man

end-

Fig.

endlich die Summe aller Momente mit dem Kubikinhalte der Kanone, ſo findet man die Entfernung des Schwerpunktes der Kanone von dem äuſſerſten Punkte der Traube. Man kann auch, wenn es nothwendig wäre, die Momente der Verſtäbungen vermög den gegebenen Gründen nach der größten Schärfe berechnen. Aus der Lage des Schwerpunktes ergiebt ſich nun der Ort für die **Delphinen** (Handhaben), und auch für die **Schildzapfen**; jene werden gerade über dem Schwerpunkte angebrachte, und dieſe etwas vorwärts gegen die Mündung geſetzet, damit das Bodenſtück ein hinlängliches Uebergewicht habe. Die Abhandlungen über den Schwerpunkt einer Kanone im III. und IV. B. des **Magaz. für Ingen. und Artill.** verdienen nachgeleſen zu werden.

Praktiſch findet man die Lage des Schwerpunktes bey einer Kanone ſehr leicht, wenn man ein verjüngtes Modell einer ſolchen Kanone mittelſt einer Schlinge an einen freyhangenden Faden ſo aufhängt, daß auf beyden Seiten der Schlinge die Theile des Modells in horizontaler Lage im Gleichgewichte ſind. Die von den ſogenannten **praktiſchen Artilleriſten** erfundene, und unter ihnen fortgepflanzte Art den Schwerpunkt einer Kanone zu ſuchen, vermög der man den Durchſchnitt der Kanone auf einen Pappendeckel oder auf ein gleich dickes Brettchen zeichnet, darauf die Zeichnung ausſchneidet, und mittelſt einer ſpitzigen Nadel den Ruhepunkt durch Verſuchen findet, iſt **unrichtig**, weil nicht bey jedem Körper der Schwerpunkt des Körpers, mit dem Schwerpunkte eines Durchſchnittes (Profils) deſſelben zuſammenfällt; als z. B. bey dem Kegel iſt der Schwerpunkt um $\frac{3}{4}$, hingegen bey dem Durchſchnitte deſſelben, bey dem Dreyecke nur um $\frac{2}{3}$ der Achſe von der Spitze entfernet. Der Leſer wird ſich wundern ſo was ungereimtes unter den praktiſchen Ar-

tille-

Fig. tilleriſten anzutreffen, weil er einen praktiſchen Artilleriſten für einen Mann halten wird, der mit allen nothwendigen Hilfswiſſenſchaften (mit der Theorie) ausgerüſtet, bey allen in der Ausübung vorkommenden Fällen ſich leicht und geſchwind zu helfen weiß; weit gefehlt, man pflegt gemeiniglich dieſe Benennung, **praktiſcher Artilleriſt**, nur jenen Artilleriſten beyzulegen, die entweder keine Anlage, oder auch keinen Willen haben ſich die Hilfswiſſenſchaften eigen zu machen.

Auch der Schwerpunkt einer Bombe iſt nun auf folgende Art leicht zu finden. Man berechne für den äuſſerſten Punkt der Verſtärkung (für den Punkt nämlich, welcher dem Brandloche gegenüber liegt) das Moment der ganzen Bombe, als wenn ſolche eine volle Kugel wäre, und auch das Moment der Ohren, ferner das Moment des ausgehöhlten Segments und des Brandlochs; von der Summe der erſten zwey Momente ziehe man die Summe der zwey letzten ab, und dividire die Differenz mit dem Inhalte, welchen das Eiſen in der Bombe einnimmt, ſo findet man den Abſtand des Schwerpunktes von dem äuſſerſten Punkte der Verſtärkung gegen den Mittelpunkt der Bombe.

§. 136.

Der Schwerpunkt eines jeden irregulären Körpers wird auf folgende praktiſche Art ſehr leicht gefunden. Man ſchiebet den Körper mit einer Seitenfläche auf der Schärfe eines dreyſeitigen Priſma ſolang hin und her, bis die Theile auf beyden Seiten des Priſma im Gleichgewichte ſind, ſo iſt eine vertikale Ebene durch die Schärfe des Priſma gelegt eine **Schwerpunktsebene**; bey dieſer Lage wird die Schärfe des Priſma an der Seitenfläche des zu unterſuchenden Körpers mit einer

ner Linie angemerket. Man wiederholt dieſen Verſuch, indem man den Körper mit der nämlichen Seitenfläche in einer anderen Lage auf der Schärfe des Priſma ins Gleichgewicht bringt, ſo daß die vorige bemerkte Linie itzt auf der Schärfe des Priſma beynahe ſenkrecht ſey; eine vertikale Ebene durch die Schärfe des Priſma bey dieſer zweyten Lage giebt eine **zweyte Schwerpunktsebene**, und die Durchſchnittslinie der zwey Schwerpunktsebenen giebt eine **Schwerpunktslinie;** wenn man bey dieſer zweyten Lage an der Seitenfläche des Körpers auch wieder die Schärfe des Priſma mit einer Linie bemerket, ſo liegt der Schwerpunkt in der Vertikallinie, welche durch den Durchſchnittspunkt der zwey angemerkten Linien geht. Macht man endlich einen dritten Verſuch, indem man den Körper mit einer anderen Seitenfläche auf die Schärfe des Priſma aufleget, ſo erhält man eine dritte **Schwerpunktsebene**, wodurch die vorige Schwerpunktslinie in einem Punkte geſchnitten wird, welcher der geſuchte Schwerpunkt des Körpers iſt. Gemeiniglich liegt dieſer im inneren des Körpers, ſo daß man zu demſelben nicht anders gelangen kann, als wenn man den Körper durchbohret; es iſt aber meiſtens erfoderlich nur einen Punkt auf der Oberfläche zu wiſſen, durch welchen eine Schwerpunktslinie geht. Wenn man den Körper nicht unmittelbar auf die Schärfe des Priſma auflegen will, ſo kann man zuvor ein ſtarkes Brett auf die Schärfe des Priſma ins Gleichgewicht ſetzen, und ſodann den zu unterſuchenden Körper bey unverrückten Brette auf demſelben ſolang hin und her ſchieben, bis er ins Gleichgewicht gebracht iſt. Auf dieſe letzte Art läßt ſich der Schwerpunkt einer Bildſäule von beliebiger Stellung, und auch eines menſchlichen Körpers finden.

Fig.

§. 137.

P. Guldin, ein Jeſuit, hat folgende Regel erfunden den Inhalt derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung einer Fläche erzeuget werden: **der Inhalt eines ſolchen Körpers iſt gleich der erzeugenden Fläche multipliciret mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bey der Umdrehung beſchreibt.** Z. B. der Inhalt k des Körpers, welcher durch die Umdrehung der Fläche AMP Fig. 47. erzeuget wird, die ihren Schwerpunkt in G hat, iſt $k = \mathrm{AMP}.2\mathrm{BG}.\pi$. denn es iſt vermög (649.) $k = \pi.\int y^2 dx = \frac{2\pi.\int\frac{1}{2}y^2 dx.\int y dx}{\int y dx}$; es iſt aber $\frac{\int\frac{1}{2}y^2 dx}{\int y dx} = \mathrm{BG}$, und $\int y dx = \mathrm{APM}$; folglich $K = 2\pi.\mathrm{BG}.\mathrm{APM}$.

Nach dieſer Regel iſt es nun leicht den Inhalt eines Faſſes zu finden; man kömmt der Wahrheit ſehr nahe, wenn man die Krümmung der Faßdauben für eine Parabel anſieht, und bey dieſer Vorausſetzung, da ſowohl der Flächeninhalt als auch die Lage des Schwerpunktes einer paraboliſchen Fläche ſich ſehr einfach ausdrücken läßt, den Inhalt des Faſſes nach der guldiniſchen Regel berechnet. Herr **Lambert** hat in ſeinen Beyträgen zur Mathematik I. Th. S. 329. folgende ſehr kurze Regel gegeben: **der Inhalt eines Faſſes iſt gleich zwey Drittheilen des gröſſeren mehr einem Drittheile des kleinern Cylinders.**

§. 138.

Aus der Eigenſchaft des Schwerpunktes, vermög welcher man ſich das ganze Gewicht eines Körpers in ſeinem Schwerpunkte nach der vertikalen Richtung vereiniget gedenken kann, erhellet es, daß ein ſchwerer Körper ruhen müſſe, wenn deſſen Schwerpunkt in der ver-

ti-

tikalen Richtung mit einer Kraft gehalten wird, die ſeinem Gewichte gleich iſt, oder wenn er ſo unterſtützet wird, daß die Vertikallinie durch ſeinen Schwerpunkt innerhalb der Stütze fällt. Iſt aber der Schwerpunkt nicht in der vertikalen Richtung unterſtützet, oder die Vertikallinie durch den Schwerpunkt fällt auſſerhalb der Stütze, ſo ſinkt der Körper gegen die Erde herab. und kömmt nicht eher zur Ruhe, als bis in einer anderen Lage ſein Schwerpunkt eine Unterſtützung erhält. Denn wenn gedachte Vertikallinie innerhalb der Stütze fällt, ſo widerſteht die Stütze vermög ihrer Feſtigkeit oder vermög ihres Zuſammenhanges der Bewegung des Schwerpunktes, und der Körper iſt bey hinlänglicher Feſtigkeit der Stütze vor dem Falle geſichert. Sobald aber die gedachte Vertikallinie auſſerhalb der Stütze, oder auſſerhalb der horizontalen Grundfläche fällt, mit welcher der Körper auf einer Unterlage aufliegt ohne mit ſelber verbunden zu ſeyn, ſo iſt nichts da, was der Bewegung des Schwerpunktes widerſtünde; der Körper muß alſo wirklich herabſinken, oder ſich in eine andere Lage begeben, wo ſein Schwerpunkt eine Unterſtützung erhält, der Körper muß **umfallen** oder **überſchlagen.**

Wenn ein Körper in einem einzigen Punkte einer vertikalen Schwerpunktslinie unterſtützet iſt (der Körper ſey z. B. von unten hinauf nach der Richtung einer vertikalen Schwerpunktslinie etwas ausgehöhlet, und liege mit der Aushöhlung auf der Spitze eines feinen Stiftes) ſo iſt er deſto ſicherer vor dem Falle, je tiefer der Schwerpunkt unter dem Unterſtützungspunkte liegt; iſt aber der Schwerpunkt höher als der Unterſtützungspunkt, ſo bringt die geringſte Abweichung von der Vertikallinie den Körper zum Falle; eben dieſes findet ſtatt, wenn der Körper längſt einer geraden Linie in einer vertikalen Schwerpunktsebene unterſtützet iſt. Wenn endlich ein Körper mit drey oder mehr Punkten aufliegt, die nicht in gera-

Fig. der Linie liegen, ſondern die Winkelpunkte einer ebenen geradlinigten Figur vorſtellen, nämlich wenn er in ſeiner Grundfläche unterſtützet iſt, ſo ſteht er auf einer horizontalen Ebene ruhig, wofern die vertikale Schwerpunktslinie innerhalb der Grundfläche fält, widrigen Falles muß er umfallen; und zwar iſt derſelbe vor dem Falle deſto ſicherer, je näher die vertikale Schwerpunktslinie gegen die Mitte der Grundfläche fällt, und je gröſſer ſeine Grundfläche bey einerley Höhe, oder je kleiner ſeine Höhe bey einerley Grundfläche iſt; zwey Körper, z. B. zwey Cylinder von einerley Höhe und verſchiedenen Grundflächen ſtehen mit ihren Grundflächen auf einer horizontalen Tafel; man neige beyde um einen nämlichen und zwar ſolchen Winkel, daß die Richtungslinie des Schwerpunktes bey dem Körper der kleineren Grundfläche ſchon etwas weniges auſſerhalb der anfänglichen Lage der Grundfläche falle, ſo wird ſolche Richtungslinie bey dem Körper der gröſſeren Grundfläche noch innerhalb der anfänglichen Lage der Grundfläche, innerhalb der Stütze fallen; der erſte Körper muß daher umfallen, und der zweyte ſich in ſeinen vorigen Stand zurück begeben, wenn bey der angeführten Neigung jeder ſich ſelbſt überlaſſen wird. Eben dieſes geſchieht bey zwey gleichartigen Körpern von einerley Grundfläche und verſchiedenen Höhen.

Anmerk. Die Kenntniß des Schwerpunktes hat zur Erfindung verſchiedener Kunſtſtücke Anlaß gegeben, welche hier anzuführen überflüſſig wäre; ſie können in Hrn. **Hallens** und **Wieglebs** Magie nachgeſchlagen werden. Als z. B. einen Cylinder anzugeben, welcher auf einer horizontalen Tafel, wenn er geſtoſſen wird, ſich nicht fortwälzet, ſondern eine wiegenförmige Bewegung annimmt, und der, wenn er auf eine etwas geneigte Ebene in eine gewiſſe Stellung gebracht wird, ſich etwas aufwärts beweget; ein ſolcher Cylinder beſteht aus Holz, und enthält innerhalb nahe an der Oberfläche einen andern kleinern Cylinder von Bley verborgen. Im

Fig.

gleichen einen Körper anzugeben, der auf einer horizontalen Tafel ruhig liegen bleibt, auf einer gewiſſen ſchiefen Ebene aber aufwärts (jedoch nur ſcheinbar) ſich beweget; ein ſolcher Körper iſt ein Doppelkegel, und auch eine Kugel; die ſchiefe Ebene wird aus zwey vertikalen Ebenen von beliebiger Länge ſo zuſammengeſetzt, daß ſie einen Flächenwinkel mit einander einſchlieſſen, daß ſie dabey am Ende um etwas weniger als um den Durchmeſſer der Kugel abſtehen, und endlich daß die Endpunkte ihrer oberen Kanten um etwas weniger als um den Halbmeſſer der Kugel über den Horizont ihres Durchſchnittspunktes erhöhet ſind; die ſo aufwärts ſteigenden Kanten der zwey erwähnten vertikalen Ebenen ſtellen die Lage der ſchiefen Ebene vor, auf welcher die Kugel aufwärts zu ſteigen ſcheint, da ſie in der That doch wirklich ſinkt, wenn ſie von der Spitze des Winkels gegen die Oeffnung ſich fortbeweget.

§. 139.

Nach den bisher vorgetragenen Gründen iſt es nun leicht bey mehreren gegebenen Kräften, deren Richtungen mit einander parallel ſind, die Gröſſe und Richtung einer einzigen Kraft zu finden, welche allen gegebenen zuſammengenommen gleichgeltend iſt, und welche ſo wie bey dem Kräftenparallelogram die **mittlere Kraft** heiſſen kann. **Es iſt nämlich bey mehreren parallelen Kräften die mittlere Kraft gleich der Summe aller einzelnen Kräfte; und eine durch den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt der einzelnen Kräfte zu deren Richtungen parallel gezogene Gerade iſt die Richtung der mittleren Kraft** vermög (§. 127.) Wäre aber bey mehreren Kräften, deren einige nach parallelen, einige aber nach verſchiedenen gegeneinander geneigten Rich-

Fig. Richtungen wirken, die Gröſſe und Richtung der mittleren Kraft zu beſtimmen, ſo kann man die parallelen Kräfte nach der Lehre des Schwerpunktes, und die gegeneinander geneigten Kräfte nach der Lehre des Kräftenparallelograms vereinigen, wenn die gegeneinander geneigten Richtungen entweder alle in einer nämlichen Ebene liegen, oder auch wenn ſolche bey noch ſo verſchiedenen Neigungen alle in einem Punkte zuſammentreffen. Dadurch hat man zwey Kräfte und ihre Richtungen gefunden, welche allen gegebenen zuſammengenommen gleichgeltend ſind; ſind nun die Richtungen dieſer zwey gefundenen Kräfte entweder mit einander parallel, oder in einer nämlichen Ebene gegen einander geneigt, ſo laſſen ſich endlich auch noch dieſe zwey Kräfte in eine einzige vereinigen; ſind hingegen die Richtungen der zwey gefundenen Kräfte nicht in einer nämlichen Ebene befindlich, ſo läſſen ſich ſolche auch nicht in eine einzige vereinigen.

§. 140.

Wenn alle Theile eines Körpers (er möge feſt oder flüſſig ſeyn) **nach parallelen Richtungen von Kräften getrieben werden, die ihren Maſſen proportional ſind, ſo bewegt ſich der Schwerpunkt des Körpers eben ſo, als wenn in demſelben die ganze Maſſe des Körpers in einem einzigen Punkte vereiniget, und an demſelben die Summe aller einzelnen Kräfte nach der mittleren Richtung angebracht wäre.**

Um dieſes einzuſehen ſey Fig. 56. des Körpers AB Maſſe = M, und ſein Schwerpunkt ſey in G; die Richtungen der Kräfte, welche auf die Theile die-

ſes

Fig. 56 ſes Körpers wirken, und den Maſſen derſelben proportional ſind, ſollen alle zu HG parall ſeyn; auf das Theilchen Q dieſes Körpers wirke die Kraft p nach der Richtung PRQ parallel zu HG, und die Maſſe dieſes Theilchens ſey $= m$, ſo wird die Bewegung dieſes Theilchens nämlich des Punktes Q nach der Richtung PRQ durch folgende zwey Fundamentalgleichungen beſtimmet $dv = \frac{2gpdt}{m}$, und $ds = vdt$. Setzet man nun die Summe aller Kräfte $= P$, ſo iſt vermög Vorausſetzung $p : P = m : M$, und folglich $\frac{p}{m} = \frac{P}{M}$; die Bewegung des Punktes Q wird demnach auch durch folgende zwey Gleichungen beſtimmet $dv = \frac{2gPdt}{M}$, und $ds = vdt$, wenn man in der vorigen Gleichung ſtatt $\frac{p}{m}$ den gleichen Werth $\frac{P}{M}$ ſetzet; und dieſes gilt von einem jeden anderen Punkte des Körpers nach der zu HG parallelen Richtung, und folglich auch von der Bewegung des Schwerpunktes G nach der Richtung HG, nämlich wenn jedes Theilchen mit ſeiner zugehörigen Kraft, nach der zu HG parallelen Richtung getrieben wird, ſo wird die Bewegung des Schwerpunktes G nach der Richtung HG durch die zwey Gleichungen beſtimmet $dv = \frac{2gPdt}{M}$, und $ds = vdt$. HG iſt die mittlere Richtung aller einzelnen Kräfte, weil in einem ſolchen Falle die mittlere Richtung der Kräfte durch den Schwerpunkt des Körpers geht; nun würde die Summe aller Kräfte $= P$ nach dieſer Richtung HG auf die in G vereinigte Maſſe $= M$ angebracht den Punkt G dergeſtalt forttreiben,

Fig. 56 ben, daß ſeine Bewegung durch die zwey Formeln $dv' = \frac{2gPdt}{M}$ und $ds' = v'dt$ beſtimmet würde, welche mit obigen zwey Gleichungen $dv = \frac{2gPdt}{M}$ und $ds = vdt$ einerley ſeyn müſſen, nämlich $dv' = dv$ wegen $\frac{2gPdt}{M} = \frac{2gPdt}{M}$, und alſo auch $v' = v$, und auch $ds' = ds$, und ferner $s' = s$; die Bewegung des Schwerpunktes iſt demnach in beyden Fällen einerley.

§. 141.

Wenn ein feſter Körper von was immer für einer Kraft P, deren Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht, oder auch von mehreren Kräften, deren mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht, angetrieben wird, ſo wird er mit paralleler Bewegung nach eben der Richtung fortgehen, und ſein Schwerpunkt wird ſich ſo bewegen, als wenn in demſelben die ganze Maſſe des Körpers vereiniget wäre.

Denn es iſt eben ſo viel, als wenn alle Theilchen des Körpers nach eben den parallelen Richtungen von Kräften getrieben würden, die den Maſſen der Theilchen proportional ſind, und deren Summe der gegebenen Kraft P gleich iſt; alle dieſe einzelnen Kräfte wären der gegebenen Kraft P gleichgeltend, und folglich die Bewegung in beyden Fällen einerley, welche im erſten Falle nämlich bey den einzelnen den Maſſen der Theilchen proportionalen Kräften vermög vorhergehenden richtig ſo erfolgen muß, als es die Bedingung des Satzes erfodert.

Bey flüſſigen Körpern läßt ſich dieſer Satz nicht Fig. 56 anwenden, weil ihre Theilchen nicht feſt zuſammenhangen, nicht können angeſehen werden, als wären ſie mit mathematiſchen Hebeln verbunden; eine Kraft an ein Theilchen in G, oder in Q angebracht würde ſolches von den nebenliegenden Theilchen losreiſſen, und mit ſich wegführen; dabey würde aber nicht der ganze Körper mit fortbeweget werden.

§. 142.

Wenn auf einen **feſten** Körper, der ſich frey bewegen kann, eine oder mehrere Kräfte wirken, die auf eine einzige können gebracht werden, deren mittlere Richtung **nicht** durch den Schwerpunkt des Körpers geht,

So wird erſtens der Schwerpunkt dennoch nach der Richtung der Kraft ſich parallel eben ſo fortbewegen, als wenn die Richtung dieſer Kraft durch den Schwerpunkt des Körpers gienge, und in demſelben die Maſſe des ganzen Körpers vereiniget wäre;

Zweytens der Körper wird während der fortgehenden Bewegung ſich zugleich um eine Schwerpunktslinie eben ſo drehen, als wenn der Schwerpunkt befeſtiget wäre, und zwar um diejenige Schwerpunktslinie, welche auf der durch die Richtung der angebrachten Kraft gelegten Schwerpunktsebene ſenkrecht ſteht.

Man kann ſich von der Richtigkeit dieſes Satzes auf folgende Art überzeugen. Auf den feſten Körper AB Fig. 56. wirke eine Kraft P nach der Richtung PQ, die nicht durch den Schwerpunkt G des Körpers

Fig. geht; durch die Richtung PQ und durch den Schwer-
56 punkt G gedenke man eine Ebene XZ, und durch den Schwerpunkt eine Senkrechte GV auf dieſe Ebene. Durch die Gerade PQ bezeichne man die Gröſſe der Kraft P, und theile dieſelbe in R in zwey gleiche Theile. Die Kraft PR zerlege man in zwey Seitenkräfte, deren eine durch den Schwerpunkt G geht, die andere aber auf PQ ſenkrecht ſteht, nämlich man zerlege PR in die Kräfte PS und PT. Ferner verlängere man PG, bis GD = GP wird, und mache DE = PS. Die Kraft PS übertrage man in ihrer Richtung nach D, nämlich ſtatt der Kraft PS in P, ſetze man die gleichgeltende Kraft DE = PS in D, und zerlege DE in die Seitenkräfte DN und DM, wovon die erſte parallel mit PQ, und die zweyte darauf ſenkrecht iſt.

Statt der Kraft PQ wirken nun vier gleichgeltende Kräfte RQ, PT, DN, DM auf den Körper, welche gemeinſchaftlich eben das leiſten was die Kraft PQ für ſich allein zu thun vermögend iſt; der Erfolg iſt nämlich in beyden Fällen einerley.

Die zwey Kräfte RQ und DN ſind einander gleich, und ihre Richtungen nach einerley Gegend ſind in gleichen Entfernungen vom Schwerpunkte G mit einander parallel; folglich laſſen ſie ſich im Schwerpunkte G nach der parallelen Richtung HG in eine einzige Kraft HG vereinigen, welche ihrer Summe, und daher auch der Kraft PQ gleich iſt, nämlich HG = RQ + DN = 2RQ = PQ, ſo daß ſtatt der Kraft PQ nun drey gleichgeltende Kräfte, nämlich HG, PT, und DM angebracht ſind.

Die zwey Kräfte PT und DM ſind auch einander gleich, und ihre Richtungen in gleichen Entfernungen vom Schwerpunkte mit einander parallel; ſie wirken aber nach entgegengeſetzten Gegenden; folglich haben ſie auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß, weil der Schwerpunkt von dieſen Kräf-

ten

ten weder nach der Richtung GQ, noch nach der Richtung GC Fig. 56 (wo QGC parallel zu PT und DM iſt) noch auch nach ſonſt einer Richtung kann getrieben werden. Der Schwerpunkt G wird demnach von der Kraft HG, welche der Kraft PQ gleich iſt, eben ſo nach der Richtung HG mit PQ parallel beweget, als wenn die zwey Kräften PT und DM gar nicht angebracht wären.

Die zwey Kräfte PT und DM, weil ihre Richtungen nicht in einer nämlichen geraden Linie einander entgegengeſetzet ſind, heben einander doch nicht auf; ihre Wirkung beſteht nur darin, daß ſie den Körper in der Eben XZ um die ſenkrechte Achſe GV nach einer nämlichen Seite eben ſo zu drehen ſtreben, als wenn der Schwerpunkt unterſtützet, oder die Kraft HG gar nicht da wäre, weil letztere durch den Schwerpunkt geht, und folglich auf die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt keinen Einfluß hat. Dabey iſt es einerley, ob die zwey Kräfte PT und DM in P und D, oder aber in H und F am Hebel HGF nach den nämlichen Richtungen angebracht ſind; ihr gemeinſchaftliches Moment iſt $= PT.GH + DM.GF = 2PT.GH = 2RS.PQ = PQ.GQ =$ dem Momente der Kraft PQ in Q in Rückſicht des Schwerpunktes G.

Bey den drey Kräften $HG = PQ$, PT und DM wird demnach der Schwerpunkt nach der Richtung HG parallel zu PQ, eben ſo fortbeweget, als wenn die Maſſe des Körpers im Schwerpunkte vereiniget, und an dieſem die Kraft PQ nach der Richtung HG angebracht wäre; dabey aber wird ſich der Körper während der fortgehenden Bewegung des Schwerpunktes zugleich um die Achſe GV eben ſo drehen, als wenn der Schwerpunkt befeſtiget wäre. Nun aber ſind die drey Kräfte HG, PT, und DM der Kraft PQ gleichgeltend. Folglich muß eben dieſes auch bey der Kraft PQ allein erfolgen.

Fig. Aus der gegebenen Gröſſe der bewegenden Kraft
56 PQ, und aus der Maſſe des Körpers AB läßt ſich die fortgehende Bewegung des Schwerpunktes nach der zu PQ parallelen Richtung durch die Fundamentalgleichungen $dv = \frac{2gPdt}{M}$, und $ds = vdt$, oder durch $vdv = \frac{2gPds}{M}$ und $ds = vdt$ beſtimmen; die drehende Bewegung wird in der Folge unterſuchet werden. Die Bewegung einer Kugel auf der ſchiefen Ebene iſt ſo beſchaffen, daß der Schwerpunkt der Kugel längſt der Länge der ſchiefen Ebene ſich zu derſelben parallel fortbeweget, dabey aber zugleich die Kugel um eine horizontale Achſe von oben nach unten zu, ſich drehet, weil die Reibung für eine widerſtehende Kraft anzuſehen iſt, welche im Berührungspunkte an dem Endpunkte des Halbmeſſers ſenkrecht angebracht iſt, oder wenn auch keine Reibung da wäre, welche bey der Kugel beynahe unmerklich iſt, weil der Schwerpunkt der Kugel in der vertikalen Richtung nicht unterſtützet iſt.

Bey dem Bombenwerfen iſt die Achſe der Kammer die mittlere Richtung der bewegenden Kraft; wegen dem Spielraume liegt der Schwerpunkt der Bombe bey der Neigung des Pöllers gemeiniglich auſſer der Achſe der Kammer; und aus dieſer Urſache beſchreibt die Bombe ihre Bahn gemeiniglich mit einer drehenden Bewegung, wenn ſie beym Herausfahren auch nicht an die inneren Wände des Fluges angeſchlagen hat.

X. Vorleſung.

Der materielle Hebel, und deſſen Gebrauch.

§. 143.

Ein **materieller** oder **phyſiſcher Hebel** iſt vermög (§. 112.) jede Stange von Holz oder Metall, die von den angebrachten Kräften nicht merklich gebogen wird. Als der **eigentliche Hebbaum** wird zum Fortwälzen, zum Fortſchieben der Laſten, auch wohl dazu gebraucht um unter die etwas gehobene Laſt Stützen, zuweilen auch Walzen unterzubringen. Der **Geißfuß** und die **Brechſtange** oder das **Brecheiſen** dienen auſſer dem noch um Steine auszubrechen, etwas loßzureiſſen u. ſ. w. ſie werden ſowohl als dopperarmige Hebel, wenn man eine Unterlage unterbringt, und auch als einarmige Hebel gebraucht, wo im letzteren Falle der eine Endpunkt ſelbſt der Unterſtützungspunkt iſt, nachdem man den Hebel unter die Laſt geſteckt, oder zwiſchen die Fugen hineingetrieben hat. Bey der Anwendung eines dergleichen Hebels hat man vermög (§. 124.) darauf zu ſehen, daß der angegriffene Punkt der Laſt ſo nahe als möglich bey der Unterlage ſich befinde, und daß zugleich der von der angebrachten Kraft angegriffene Punkt des Hebels ſo weit von der nämlichen Unterlage abſtehe, als es die Umſtände zulaſſen, damit die Laſt um ſo leichter zu überwältigen ſey. Verſchiedene Handwerksinſtrumente ſind

Fig. auch aus materiellen Hebeln zuſammengeſetzet, als z. B.
57 die meiſten **Zangen** und **Scheeren** ſind für doppelarmige Hebel anzuſehen; die **Feuerzange** und die **Schaafſcheere** aber gehören zum einarmigen Hebel.

§. 144.

Aufgabe. An einem materiellen Hebel ACB Fig. 57. deſſen Gewicht = R, und Schwerpunkt D iſt, hängen zwey Gewichte P, Q; man ſoll den Ort der Unterlage C für den Zuſtand des Gleichgewichts finden.

Auflöſ. ACB iſt für einen mathematiſchen Hebel anzuſehen, woran die Kräfte P, R, Q in B, D, A angebracht ſind; folglich iſt der Abſtand des Unterſtützungspunktes $AC = \frac{AD.R + AB.P}{P+Q+R}$.

I. Es folgt aus dieſem, daß man aus Q und AC, aus R und CD, und aus CB auch P finden könne; es iſt nämlich $P = \frac{AC.(Q+R) - AD.R}{AB - AC}$ $= \frac{AC.Q - CD.R}{CB}$.

Eben ſo läßt ſich aus P und CB, aus R und CD, und aus AC auch Q finden; es iſt nämlich Q $= \frac{BC.P + CD.R}{AC}$; u. ſ. w. das iſt wenn von den ſechs Gröſſen P, CB, Q, CA, R, CD fünf gegeben ſind, ſo läßt ſich jederzeit daraus die 6te beſtimmen.

II. Wäre der materielle Hebel AB Fig. 58. in
58 A unterſtützet, ſein Gewicht = R, und ſein Schwerpunkt in D befindlich, ferner die Laſt Q in C, und die Kraft P in B nach entgegengeſetzter Richtung aufwärts an-

Fig. 58 angebracht, und man wollte durch die Verlängerung des Hebels AB das Moment von P vergröſſeren, ſo würde dadurch auch zugleich das Gewicht R des Hebels, und der Abſtand ſeines Schwerpunktes AD vergröſſert; dadurch könnte es geſchehen, daß dasjenige, was durch die gröſſere Entfernung der Kraft P gewonnen wird, durch das vergröſſerte Gewicht des Hebels verlohren gienge. Daher giebt es eine beſtimmte Länge des Armes AB, damit mittelſt eines ſolchen einarmigen materiellen Hebels eine gegebene Kraft P der möglichſt größten Laſt Q in einer gegebenen Entfernung AC das Gleichgewicht zu halten vermögend ſey. Iſt der Hebel eine gleichförmig dichte priſmatiſche Stange vom bekannten eigenthümlichen Gewichte, ſo iſt die Länge des Armes AB in einem ſolchen Falle ſehr leicht zu beſtimmen.

§. 145.

Aufgabe. Ein materieller Hebel AB Fig. 59. iſt in A und B unterſtützet, und in C mit einer Laſt Q beſchweret; man ſoll den Druck auf jede Stütze finden.

Auflöſ. Es ſey der Schwerpunkt des materiellen Hebels in D, und ſein Gewicht = R; man vereinige die Gewichte Q und R in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte E, ſo daß $AE = \frac{AC.Q + AD.R}{Q + R}$ ſey, ſo iſt ſodann AB für einen mathematiſchen Hebel anzuſehen; und der Druck auf die Stütze B wird nun gefunden, wenn man diejenige Kraft berechnet, welche in B aufwärts angebracht der Laſt (Q + R) in der Entfernung AE vom Unterſtützungspunkte A am einarmigen Hebel AEB das Gleichgewicht zu halten, und folglich 59

Fig. 59 den Druck auf die Stütze B gänzlich aufzuheben vermögend iſt; dieſe Kraft iſt = $\frac{AE.(Q+R)}{AB}$ vermög (§. 124.) und eben ſo groß iſt auch der Druck auf die Stütze B, oder wenn man ſtatt AE ſeinen Werth ſetzet, ſo iſt auf die Stütze B der Druck = $\frac{AC.Q+AD.R}{AB}$; auf die nämliche Art findet man auf die Stütze A den Druck = $\frac{BE.(Q+R)}{AB} = \frac{BD.R+BC.Q}{AB}$.

I. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß beyde Stützen zuſammen eine Preſſung leiden, welche dem Gewichte des Hebels nebſt dem Gewichte aller darauf befindlichen Laſten gleich iſt, wenn mehrere Laſten auf dem Hebel hin und wieder liegen ſollten, welche man ſich alle in ihrem Schwerpunkte C vereiniget vorſtellen kann; die Preſſungen aber auf jede Stütze insbeſondere verhalten ſich verkehrt wie ihre Entfernungen von dem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte E. Hieraus läßt ſich auch finden, wie man zwey Perſonen von ungleichen Kräften, wenn ſie eine gegebene Laſt auf einer Stange von gegebener Länge tragen ſollten, ihren Kräften gemäß anſtellen könne, allwo es bekannt ſeyn muß, wie vielmal des einen ſein Kraft gröſſer als des anderen ſey.

§. 146.

Ein ſchwerer Körper, der ſich um eine am Ende deſſelben befindliche Achſe drehet (z. B. eine Zugbrücke) wird beym Aufheben von der horizontalen Lage immer leichter überwältiget, je mehr ſich derſelbe dem vertikalen Stande nähert, weil dadurch die Vertikallinie durch den Schwerpunkt dem Unterſtützungspunkte immer näher kömmt, und das Moment eben dadurch immer kleiner wird. Es ſey z. B. AF Fig. 60 eine Zugbrücke in

Fig. 60 horizontaler Lage, in G ſey ihr Schwerpunkt, und ihr Gewicht $= p$; gegen das Ende der Zugbrücke in F ſey ein Seil, oder eine Kette angemacht, und in der Erhöhung $AC = AF$ über eine Rolle C geführet; bey C hänge an dieſem Seile ein Gewicht Q vertikal herunter, und ſey mit der Zugbrücke in horizontaler Lage im Gleichgewichte, ſo iſt dieſes Gewicht Q $= \frac{p\,AG}{AD}$ vermög (§. 124), wenn man AD aus dem Ruhepunkte A ſenkrecht auf CF zieht; in der erhöheten Lage AB aber iſt für das Gleichgewicht der Zugbrücke in dieſer ſchiefen Lage nur ein Gewicht $Q' = \frac{p.AE}{AH}$ nach vertikaler Richtung erforderlich, allwo die Vertikallinie G'E durch den Schwerpunkt G', und AH ſenkrecht auf CB gezogen iſt; da iſt nun offenbar $Q' < Q$, weil $AE < AG$, und nebſt dieſem auch noch $AH > AD$ iſt. Wenn das nämliche Gewicht $Q = \frac{p\,AG}{AD}$ mit der Zugbrücke auch in der ſchiefen Lage derſelben AB im Gleichgewichte ſeyn müßte, ſo darf bey dieſer Lage der Brücke ſeine Richtung nicht vertikal ſeyn, ſondern ſie muß mit der Vertikallinie einen gewiſſen Winkel einſchlieſſen; das nämliche Gewicht Q muß nun in N auf einer gewiſſen ſchiefen Ebene Mm liegen, deren Neigungswinkel Mmr gegen den Horizont pm von der Beſchaffenheit iſt, daß vermög (§. 97. u. 124.) die Gleichung $\frac{p.AG}{AD} \times \frac{\sin Mmr}{\sin(Mmr + Q'CN)} = \frac{p.AE}{AH}$ ſtatt finde. Die Richtung des nämlichen Gewichtes Q, und die ſchiefe Ebene Mm muß bey jeder verſchiedenen Lage der Zugbrücke auch verſchieden gegen den Horizont geneigt ſeyn. Es iſt eine krumme Linie RMS, oder vielmehr eine krumme Fläche von der Beſchaffenheit möglich,

Fig. 60 daß auf derſelben das nämliche Gewicht $Q = \frac{p.AG}{AD}$ mit der Zugbrücke in jeder Lage im Gleichgewichte ſey; RMS iſt nämlich die Durchſchnittslinie der krummen Fläche mit einer vertikalen auf die horizontale Umdrehungsachſe ſenkrecht geführten Ebene. Für eine ſolche krumme Linie RMS kann man die Gleichung auf folgende Art ſuchen.

Es ſey die Vertikallinie CA die Abſciſſenlinie; R ſey der Anfangspunkt der Abſciſſen, der Ort R nämlich des erfoderlichen Gegenwichts $Q = \frac{p.AG}{AD}$ bey der horizontalen Lage der Zugbrücke; dieſes Gegengewicht Q iſt eine Walze, nämlich ein Cylinder, bey dem die Endpunkte ſeiner Achſe mit dem Seile ſo verbunden ſind, daß ſich der Cylinder bey dem Herabſinken auf der krummen Fläche, um die Reibung zu vermindern, um ſeine Achſe drehen könne. Es ſey die Länge $AF = AB = AC = a$, und der Abſtand des Schwerpunktes $AG = AG' = b$, ſo iſt $FC = a\sqrt{2}$, $FD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, und auch $AD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ wegen $FAD = 45^\circ$; daraus folgt für den Zuſtand des Gleichgewichts der Zugbrücke bey der horizontelen Lage das erforderliche Gegengewicht $Q = \frac{bp}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{bp\sqrt{2}}{a} = N$.

In dem Punkte M auf der krummen Linie RMS bey der Lage der Zugbrücke AB äuſſert das gefundene Gegengewicht $N = \frac{bp\sqrt{2}}{a}$ nach der Richtung BCN vermög (§. 97.) nur die Kraft $\frac{bp\sqrt{2}}{a} \times \frac{\sin Mmr}{\sin(Mmr + Q'CN)}$; das Moment dieſer Kraft in dieſer Lage iſt

=

$= \frac{bp\sqrt{2}}{a} \times \frac{\sin Mmr \times AH}{\sin(Mmr + Q'CN)}$; das Moment der Zugbrücke aber iſt $= p.AE$; und es iſt $p.AE = \frac{bp\sqrt{2}}{a} \times \frac{\sin Mmr \times AH}{\sin(Mmr + Q'CN)}$ wegen dem Gleichgewichte der Zugbrücke mit dem Gegengewichte N; daraus folgt $\frac{a.AE}{b.AH\sqrt{2}} = \frac{\sin Mmr}{\sin(Mmr + Q'CN)}$; oder $\frac{a.AE}{b.AH\sqrt{2}} = \frac{\sin Mmr}{\sin(Mmr + PRM)}$, weil man ohne merklichen Fehler CN parallel zu RM anſehen kann; und ferner $\frac{a.AE}{b.AH\sqrt{2}} = \frac{\sin Mmr}{\sin Mmr . \cos PRM + \cos Mmr . \sin PRM}$, oder $\cos PRM + \sin PRM . \cot Mmr = \frac{b.AH\sqrt{2}}{a.AE}$; nun iſt $\cos PRM = \frac{RP}{RM}$, $\sin PRM = \frac{PM}{RM}$, und $\cot Mmr = \frac{rm}{Mr}$; folglich $\frac{RP.Mr + PM.rm}{RM.Mr} = \frac{b.AH.\sqrt{2}}{a.AE}$.

R iſt für den Anfangspunkt der Abſciſſen angenommen worden; folglich iſt $RP = x$, $PM = y$, $Pp = dx = Mr$, und $rm = dy$, weil PM ſenkrecht auf RP, pm unendlich nahe und parallel zu PM, und Mr parall zu Pp gezogen iſt; es iſt demnach

$$\frac{xdx + ydy}{dx(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b.AH\sqrt{2}}{a.AE}.$$

Endlich iſt es noch erforderlich AH und AE in x, y und bekannten Gröſſen auszudrücken, welches auf folgende Art geſchehen kann. Es iſt ohne merklichen Fehler $CB = CF - RM$, nämlich $CB = a\sqrt{2} - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, und $CH = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, oder wenn man in-

Fig. 60

deſ-

Fig. 60 deſſen $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = z$ ſetzet, ſo iſt $\mathrm{CH} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}z$; daraus folgt $\mathrm{AH} = (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}az\sqrt{2} - \frac{1}{4}z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Um nun auch AE in x und y auszudrücken, erinnere man ſich, daß $\cos \mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB.AC}}$ ſey vermög (459), nämlich $\cos \mathrm{BAC} = \frac{2az\sqrt{2} - z^2}{2a^2}$; daraus folgt $\sin \mathrm{BAC} = (1 - \cos^2 \mathrm{BAC})^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{(4a^4 - 8a^2z^2 + 4az^3.\sqrt{2} - z^4)^{\frac{1}{2}}}{2a^2}$; es iſt aber $1 : \mathrm{AG}' = \sin \mathrm{EG}'\mathrm{A}$ oder $\mathrm{BAC} : \mathrm{AE}$; folglich $\mathrm{AE} = \frac{b(4a^4 - 8a^2z^2 + 4az^3\sqrt{2} - z^4)^{\frac{1}{2}}}{2a^2}$. Es iſt demnach $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AE}} = \frac{a^2}{b}.(\frac{2a^2 + 2az\sqrt{2} - z^2}{4a^4 - 8a^2z^2 + 4az^3\sqrt{2} - z^4})^{\frac{1}{2}}$, nämlich $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AE}} =$ $\frac{a^2}{b}.(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{2}.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - x^2 - y^2}{4a^4 - 8a^2(x^2+y^2) + 4a\sqrt{2}.(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2+y^2)^2})^{\frac{1}{2}}$.

Und daraus folgt endlich für die geſuchte krumme Linie RMS die Differenzialgleichung $\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$

$$\left(\frac{4a^4 + 4a^3\sqrt{2}.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - 2a^2x^2 - 2a^2y^2}{4a^4 - 8a^2(x^2+y^2) + 4a\sqrt{2}.(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2+y^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

oder wenn man die Länge des Seiles CF mit c bezeichnet, nämlich $a\sqrt{2} = c$ ſetzet, ſo iſt $\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{c\mathrm{d}x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$

$$\left(\frac{c^2 + 2c(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - x^2 - y^2}{c^4 - 4c^2(x^2+y^2) + 4c(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2+y^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieſe gefundene Differenzialgleichung für die geſuchte krumme Linie iſt von anderen dießfälligen Unterſuchungen verſchieden; man ſehe z. B. Chr. Wolfii Elem. Matheſ. univ. T. II. §. 371. C. Scherfer Inſtit. Mechanic. P. I. §. 245. **Belidor** Ingenieur-Wiſſenſchaft IV. Buch V. Kap. In gegenwärtiger Unterſuchung ſteckt der einzige Fehler, daß man CN parallel zu RM angenommen hat; dieſer Fehler verſchwindet gänzlich, wenn man die Rolle C ſowohl, als auch den Inhalt des Gegengewichtes Q unendlich klein annimmt, und dabey den Anfangspunkt der Abſciſſen in C feſtſetzet; allein auch bey dieſer Vorausſetzung iſt die gefundene Differenzialgleichung noch immer von anderen dießfälligen Unterſuchungen verſchieden. Daß die gefundene Gleichung bey der eben angeführten Vorausſetzung vollkommen richtig ſey, hoffe ich den Leſer überzeuget zu haben; ob andere dießfällige Unterſuchungen auch beſtehen können, wolle der Leſer ſelbſt prüfen. Fig.

Wenn es nun erforderlich wäre für verſchiedene Abſciſſen x die entſprechenden Ordinaten y zu berechnen um die geſuchte krumme Linie verzeichnen zu können, ſo müßte man durch verſchiedene Kunſtgriffe verſuchen die gefundene Differenzialgleichung entweder vollſtändig, oder doch durch eine genugſame Annäherung zu integriren. Meines Erachtens könnte die gefundene Gleichung in der Ausführung beſtehen, weil der unbedeutende Fehler, daß man CN parallel zu RM angenommen hat, durch die Reibung beynahe aufgehoben wird, welche man bey dießfälligen Unterſuchungen nicht in die Rechnung zu nehmen pflegt.

§. 147.

Eine **Waage** iſt ein Werkzeug, deſſen man ſich bedienet das Gewicht eines Körpers mittelſt bekannter

Fig. Gegengewichte zu erforſchen. Es wird dazu eine feſte unbiegſame Stange von Eiſen (der Waagebalken, ein materieller Hebel) mit gleichen, oder ungleichen Armen gebraucht. Die gemeine Waage mit gleichen Hebelsarmen heißt eine **Kramerwaage**, wozu auch die feineren Waagen, die **Probierwaage**, die **Goldwaage** u. ſ. w. gehören. Die Waage mit ungleichen Hebelsarmen heißt die **Schnellwaage**; dazu gehört die **römiſche Waage**, bey der das Gegengewicht am längern Arm beweglich iſt, und die **ſchwediſche Waage**, allwo der Ring, woran der Waagebalken hängt, ſich längſt deſſelben verſchieben läßt.

§. 148.

Bey der gemeinen Waage muß der Waagebalken ein gleicharmiger Hebel ſeyn, damit im Zuſtande des Gleichgewichts das Gewicht des abzuwägenden Körpers 61 dem bekannten Gegengewichte gleich ſey. In A und B Fig. 61 an beyden Enden des Waagebalkens ſind die Aufhängepunkte der gleichſchweren Waageſchalen. In der Mitte der geraden Linie AB, welche dieſe Aufhängepunkte verbindet, muß der Schwerpunkt G des ganzen vollſtändig fertigen Waagebalkens liegen. In der Geraden GC, die auf AB ſenkrecht iſt, etwas weniges über AB in C auf beyden Seitenflächen des Waagebalkens ſind die Zapfen angebracht, die ſich unten in C in einer Schärfe nach Art eines Keils endigen, damit ſich der Balken um dieſe Schärfe als um ſeine Achſe drehen könne, wenn die Zapfen in den Pfannen der Scheere liegen. Bey dieſer Einrichtung, weil der Unterſtützungspunkt C etwas höher liegt, als der Schwerpunkt G, kann der Waagebalken ſowohl für ſich allein, als auch wenn die Schalen daran hängen, und gleiche Gewichte darin liegen, nur alsdann ruhen, wenn CG

Fig. 61 vertikal, und folglich AB horizontal iſt. Um dieſe Lage anzuzeigen dienet die auf AB ſenkrechte Zunge EF in der Verlängerung GC, welche bey der horizontalen Lage des Waagebalkens in den Zwiſchenraum der vertikal herabhangenden Scheere einſpielet, in deren Pfannen der Waagebalken mit ſeinen Zapfen aufliegt.

Wenn an B ein Gewicht Q hängt, welches etwas ſchwerer iſt als das Gegengewicht P in A, ſo fällt der Schwerpunkt in D von G gegen B hin, ſo daß $GD = \frac{Q.GB - P.GA}{P+Q} = \frac{GA.(Q-P)}{Q+P}$ wird. Bey dieſen Umſtänden muß der Arm GB ſinken, weil der Schwerpunkt D nicht unterſtützet iſt, und der Balken kann nicht eher ruhen, als bis CD vertikal geworden, und folglich der Arm AB ſowohl als auch die Zunge einen Winkel = GCD zurückgelegt hat. Der Winkel GCD heißt der **Ausſchlag**, und iſt bey einerley Unterſchied der Gewichte am nämlichen Waagebalken, das iſt bey gleicher Länge der GD deſto gröſſer, und folglich die Waage deſto **empfindlicher** oder ſchneller, je näher C an G liegt; hingegen iſt dieſer Winkel GCD deſto kleiner, und folglich die Waage deſto **unempfindlicher** oder fauler, je höher C über G liegt. Die Empfindlichkeit einer Waage wird auch durch die Länge der Arme vermehret, weil dadurch der Ueberſchuß des Gewichtes ein gröſſeres Moment erhält, und bey dieſen Umſtänden GD länger wird. Jedoch darf der Waagebalken auch nicht gar zu lang ſeyn, weil er ſonſt ſehr viel Maſſe haben muß, damit er ſich bey den angebrachten Gewichten nicht biegt, wodurch in den Pfannen der Scheere eine ſtarke Reibung entſteht, welche der Empfindlichkeit der Waage hinderlich iſt.

Fig. 61 Probierwaagen, Goldwaagen, u. ſ. w. müſſen ſehr empfindlich ſeyn; daher ſind ſie ſo einzurichten, daß C nur etwas ſehr weniges höher als G liegt; dabey müſſen ſie ſehr fein ausgearbeitet ſeyn, damit ihre Empfindlichkeit durch die Reibung nicht gehindert wird; auf dergleichen Waagen können daher auch nur ſehr kleine Körper gewogen werden; es giebt ſo feine Waagen, daß der 1024te Theil eines Granes einen Ausſchlag giebt; es können aber auch auf dergleichen Waagen nur einige wenige Grane abgewogen werden. Bey den Waagen zum gemeinen Gebrauch kann C ſchon etwas höher über G liegen, auch müſſen ſie in allen ihren Theilen genugſam ſtark ſeyn, weil auf ſolchen Waagen ſchon größſere Körper gewogen werden, allwo es nicht nothwendig iſt, daß Grane einen Ausſchlag geben. Nie aber darf die Einrichtung ſo gemacht werden, daß C mit G zuſammenfalle, weil ſodann bey dem geringſten Ueberſchuſſe des einen Gewichts der Waagebalken in die vertikale Lage übergehen, bey gleichen Gewichten hingegen derſelbe nicht bloß in der horizontalen, ſondern auch in jeder geneigten Lage ruhen müßte; noch weniger darf C tiefer als G liegen, weil ſodann bey dem geringſten Ueberſchuſſe der Waagebalken ganz überſchlagen würde, und die Waage gänzlich unbrauchbar wäre.

§. 149.

Eine Kramerwaage iſt **falſch**, oder betrüglich, wenn der eine Arm länger als der andere, und dabey auch die zweyte Waagſchale ſchwerer als die erſte iſt, damit unbelaſtet die Waagſchalen einander doch im Gleichgewichte erhalten. Vermuthet man Betrug, ſo entdecket man ihn gewiß durch Verwechslung der Waagſchalen, oder noch leichter dadurch, daß man die Waare, und das zugehörige Gegengewicht verwechſelt. Letzte-

Fig. 61 teres dienet auch dazu, ſelbſt mittelſt einer falſchen Waage das wirkliche Gewicht der Waare zu finden. Denn das geſuchte Gewicht der Waare ſey $= x$; wenn x in P gelegt wird, ſey in Q das nöthige Gegengewicht $= q$; legt man aber x in Q, ſo ſey in P das nöthige Gegengewicht $= p$; dann iſt im erſten Falle $q : x = AG : BG$, und im zweyten $x : p = AG : BG$; folglich auch $q : x = x : p$, und $x = \sqrt{pq}$, nämlich **die mittlere geometriſche Proportionalgröſſe zwiſchen den verſchiedenen Gewichten giebt das wirkliche Gewicht der Waare.**

§. 150.

Die Schnellwaage wird in der Hauptſache beynahe eben ſo eingerichtet wie die Kramerwaage; an den kürzern Arm wird die Waare mittelſt eines Hackens, oder auch mittelſt einer Waagſchale aufgehangen; auf dem längern Arm wird das Gegengewicht mittelſt eines Hackens oder auch mittelſt einer Hülſe verſchoben um ſein Moment zu verändern. Wenn der kürzere Arm dem längern das Gleichgewicht hält, ſo iſt es ſehr leicht den langen Arm ſo einzutheilen, daß man mit einem nämlichen beweglichen Gegengewichte verſchiedene Laſten abwägen kann, weil in einem ſolchen Falle der Waagebalken für einen mathematiſchen Hebel anzuſehen iſt, woran das einfache Gegengewicht in der $n$fachen Entfernung am langen Arm, dem $n$fachen Gewicht der Laſt in der einfachen Entfernung am kurzen Arm das Gleichgewicht hält. Wenn der kürzere Arm auch nicht mit dem längern ins Gleichgewicht geſetzet iſt, ſo kann doch der Waagebalken vermög den Gründen der Theorie gehörig eingetheilet werden; allein es iſt eben ſo gut, und für die Richtigkeit der Ausübung ſicher und genau

Fig. genug die Eintheilungen des Waagebalkens bey der Schnellwaage durch Verſuche zu beſtimmen. Die Schnellwaagen werden hauptſächlich gebraucht ſehr groſſe Laſten abzuwiegen, als z. B. groſſe Ballen von Kaufmannswaaren, belaſtete Heu- und Frachtwägen u. d. m. man kann die Einrichtungen ſolcher Schnellwaagen in den öffentlichen Waaghäuſern kennen lernen.

Der Betrug an einer Schnellwaage iſt nicht ſo leicht zu entdecken als an der Krammerwaage. Wenn man Betrug vermuthet, und dabey mit bekannten Gewichten in hinlänglicher Menge verſehen iſt, ſo kann man auf folgende Art das wirkliche Gewicht der Waare finden. Man legt die Waare an ihre gehörige Stelle am kürzern Arm, und bringt ſie durch das bewegliche Gegengewicht am längern Arm ins Gleichgewicht; alsdann nimmt man die Waare weg, und legt an deren Stelle ſo viele bekannte Gewichte, bis die Zunge bey unverrücktem Gegengewichte wieder einſteht, ſo ſind dieſe bekannten Gewichte gleich dem geſuchten Gewichte der Waare. Dieſes Verfahren iſt auch bey der Krammerwaage anwendbar, und vorzüglich bey Probierwaagen zu empfehlen.

XI. Vorleſung.

Das Gleichgewicht an den Maſchinen.

§. 151.

Eine **Maſchine** iſt ein Werkzeug, mittelſt deſſen einer Maſſe die Bewegung mit Vortheil der Kraft oder der Geſchwindigkeit mitgetheilet werden kann. Der **Hebel** z. B. und die **ſchiefe Ebene** ſind Maſchinen, weil mittelſt derſelben durch eine geringe Kraft eine anſehnliche Maſſe in Bewegung geſetzet werden kann. An einer Maſchine kann und muß man ſich allezeit zwey gegeneinander wirkende Kräfte vorſtellen. Eine dieſer zwey Kräfte iſt die **bewegende Kraft**, welche ſich bemühet mittelſt der Maſchine eine Bewegung hervorzubringen; die andere Kraft iſt der **Widerſtand**, der ſich dieſer Bewegung zu widerſetzen ſtrebet, und welcher durch die bewegende Kraft mittelſt der Maſchine zu überwinden iſt. Die erſte dieſer zwey Kräfte pflegt man kurzweg die **Kraft**, und die zweyte die **Laſt** zu nennen.

§. 152.

Es iſt nothwendig zu erſt das Verhältniß zwiſchen Kraſt und Laſt im Stande des Gleichgewichts an den Maſchinen zu kennen, ehe man ihre Bewegungen unterſuchet. Wir werden in der Folge ſehen, daß an jeder Maſchine im Stande des Gleichgewichts die Kraft

Fig. zur Laſt ſich verhalte wie umgekehrt ihre in einer nämlichen Zeit zurückgelegten Wege, oder auch wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten, wenn bey dem Zuſtande des Gleichgewichts die Maſchine durch eine äuſſere Kraft in eine gleichförmige Bewegung geſetzet wird, **und daß folglich an jeder Maſchine ein Gleichgewicht ſtatt finden könne, wenn bey der Bewegung derſelben das Produkt der Kraft multipliciret mit ihrer Geſchwindigkeit gleich iſt dem Produkte der Laſt multipliciret mit ihrer Geſchwindigkeit.** Daß dieſer Satz beym Hebel ſtatt finde, iſt aus §. 122 zu erſehen; er iſt auch bey der ſchiefen Ebene richtig; denn wenn eine Kraft p Fig. 24. mit der Länge der ſchiefen Ebene parallel angebracht auf derſelben eine Laſt q im Gleichgewichte erhält, ſo iſt $p : q = AC : BC$ vermög (§. 98. II.); wird nun die Kraft p von einer äuſſeren Kraft (z. B. mit der Hand) durch einen Weg $= BC$ vertikal heruntergezogen, ſo wird die Laſt q in eben dieſer Zeit um eine Höhe $= AC$ über den Horizont ſenkrecht ſteigen; nämlich BC und AC ſind die in einerley Zeit zurückgelegten Wege der Kraft und Laſt; folglich verhalten ſich Kraft und Laſt wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, oder auch wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten, weil man in dergleichen Fällen ſich vorſtellet, daß die Bewegung gleichförmig ſey, wo die Wege ſich verhalten wie die Geſchwindigkeiten; eben dieſes findet bey der ſchiefen Ebene ſtatt, wenn p nicht parallel zu BC, ſondern nach einer anderen Richtung z. B. parallel zu BA angebracht wäre. Daß eben dieſer Satz auch bey den übrigen Maſchinen zutreffe, wird weiter unten zu erſehen ſeyn.

Setzet man nun die Kraft $= P$ und ihre Geſchwindigkeit $= C$; ferner die Laſt $= q$ und ihre Geſchwindigkeit $= c$, ſo iſt für den Zuſtand des Gleichgewichts erforderlich, daß bey der gleichförmigen Bewegung einer Maſchine $PC = qc$ ſey. Bey einerley Werthe von PC oder qc können q und c auf verſchiedene Arten verändert werden, allwo aber c jederzeit deſto kleiner ſeyn muß, je gröſſer q iſt, wenn P und C beyde ungeändert verbleiben; bleibt hingegen C und q ungeändert, ſo muß c deſto kleiner ſeyn in Rückſicht C, je kleiner P in Rückſicht q angenommen wird, das heißt **man muß bey jeder Maſchine eben ſo viel an der Geſchwindigkeit der zubewegenden Laſt verlieren, als man an der Kraft gewinnt.** Fig.

Wenn einmal das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt an einer Maſchine im Stande des Gleichgewichts bekannt iſt, ſo darf man nur entweder die Kraft vermehren, oder die Laſt vermindern, damit die Laſt wirklich in Bewegung geſetzt werde, allwo man aber auch auf die Reibung, und auf andere Hinderniſſe der Bewegung Rückſicht nehmen muß, welche alle zur Laſt mitzurechnen ſind. Durch Maſchinen kann man zu wege bringen, daß von einer ſehr kleinen Kraft eine ſehr groſſe Laſt im Gleichgewichte erhalten, und auch in Bewegung geſetzet werden kann; allein die Geſchwindigkeit der Laſt iſt in einem ſolchen Falle in Rückſicht der Geſchwindigkeit der Kraft auch nur ſehr klein, weil man vermög vorhergehenden jederzeit bey der Geſchwindigkeit der Laſt den nämlichen Theil verliert, welchen man bey der angebrachten Kraft gewinnt. Wenn man z. B. die Anordnung trifft, daß eine Laſt = 3600 Pfund mittelſt einer Maſchine von einer Kraft = 1 Pfund im Gleichgewichte erhalten wird, ſo muß auch, wenn die Maſchine in Bewegung geſetzet wird, die Laſt ſich 3600mal langſamer bewegen als die Kraft; wenn da-

Fig. her die Kraft auch in jeder Sekunde 1 Klafter zurücklegt, ſo wird die Laſt erſt in einer Stunde 1 Klafter zurücklegen.

§. 153.

So zuſammengeſetzt und manigfaltig auch die Maſchinen ſeyn mögen, ſo ſind ſie doch nichts anders als Verbindungen einiger weniger Maſchinen, die man **einfache Maſchinen** zu nennen pflegt, und welche letztere ſich ferner auf zwey, auf den **Hebel**, und auf die **ſchiefe Ebene** zurückführen laſſen. Aus dem Hebel wird unmittelbar das **Wellrad** und die **Zugrolle**, aus der ſchiefen Ebene aber der **Keil** und die **Schraube** abgeleitet.

§. 154.

62 Das **Wellrad** (die Winde oder das Rad an der
63 Achſe) Fig. 62. iſt ein Cylinder (eine **Welle**) AB,
64 welcher mit den an beyden Enden ausgehenden ſchwächern
65 Cylindern (den **Zapfen**) c, d, auf Unterlagen
(in den **Pfannen** oder **Zapfenlagern**) e, f ruhet, in welchen Pfannen dieſer Cylinder AB mittelſt des Rades GH, oder auch nur mittelſt der Speichen IG, IH umgedrehet werden kann. Iſt die Welle horizontal, ſo entſteht eine **liegende Winde**, oder ein **Haſpel** Fig. 62. 63. 64; iſt aber die Welle vertikal, ſo heißt das Wellrad eine **ſtehende Winde**, oder ein **Göpel** Fig. 65.

Es iſt nicht nothwendig, daß jederzeit mit der Welle ein wirkliches Rad, ein Kreisring, oder eine Scheibe verbunden ſey; in vielen Fällen iſt es genug, wenn nur durch die Welle einige Speichen als Halbmeſſer des Rades durchgeſtecket ſind Fig. 63. Beym

Well-

Wellrade wird die Kraft am Umfange des Wellrades, Fig. oder am Ende der Speichen angebracht; an der Welle iſt das eine Ende eines Seiles befeſtiget, deſſen anderes Ende mit der Laſt verbunden iſt; indem nun von der angebrachten Kraft die Welle umgedrehet wird, wickelt ſich das Seil um dieſelbe; ſolchergeſtalt wird beym Aufwinden das Seil immer kürzer, und die Laſt rückt immer näher; beym Abwinden geſchieht das Gegentheil; zuweilen wird auch um die Welle ein doppeltes Seil geſchlagen, ſo daß ſich das eine abwickelt, wenn das andere ſich aufwickelt.

§. 155.

Zu den liegenden Winden, oder **Haſpeln** gehört I. Der Kreutzhaſpel; II. Der Hornhaſpel oder die Kurbel; III. Der Radhaſpel; IV. Das Lauf- und Trettrad; V. Das vertikale Waſſerrad. VI. Die Windflügel.

I. Der **Kreutzhaſpel** Fig. 63. iſt eine liegende Winde, bey der Hebbäume (Speichen) kreutzweiſe durch die Welle gehen, woran die Arbeiter wechſelweis ziehen und drücken.

II. Der **Hornhaſpel** Fig. 64. iſt eine liegende Winde, allwo an die Zapfen der Welle ein Winkelhebel in Geſtalt eines Horns (eine **Kurbel**) angeſtecket wird, womit die Hand des Arbeiters die Welle umdrehet. Der Arm AB der Kurbel heißt der **Kurbelbug**, BC aber der **Kurbelgriff**; der Kurbelbug iſt zuweilen nach einem Kreisbogen gekrümmet; jedoch hat der gekrümte Kurbelbug vor dem geraden von der nämlichen Weite keinen Vorzug.

III. Der **Radhaſpel** theils mit dem Seil ohne **Ende** Fig. 62. wo an dem an beyden Enden zuſammengefügten Seile von erforderlicher Länge, welches

ſich

Fig. ſich in die Einſchnitte am Umfange der Scheibe zwiſchen die eiſernen Gabeln feſt einklemmet, die Arbeiter in verſchiedenen Höhen angeſtellet werden, und immer ſenkrecht beynahe mit ihrem ganzen Gewichte ziehen; theils mit dem **Spillrade**, welches am Umfange mit ſenkrecht eingeſetzten Zapfen (Spillen) verſehen iſt, wo die Arbeiter eine Spille nach der anderen ergreifen, und auch ſenkrecht faſt mit ihrem ganzen Gewichte wirken.

IV. Das **Laufrad** iſt aus zwey Ringen zuſammengeſetzt, am äuſſerem Umfange mit Brettern verſchlagen, und inwendig mit Leiſten oder kleinen Stuffen verſehen, worauf ein oder zwey Menſchen im Laufrade wie auf einer Treppe hinauf zu ſteigen ſich bemühen, und dadurch mittelſt ihres Gewichtes verurſachen, daß das Rad ſammt der Welle ſich umdrehet. Sind die Stuffen am äuſſeren Umfange des Rades angebracht, ſo entſteht ein **Trettrad**, welches aber ſehr ſelten gebraucht wird.

V. Das **vertikale Waſſerrad** dem Trettrade ähnlich, iſt theils **oberſchlächtig**, welches bey hohem Gefälle und wenigem Waſſer gebrauchet wird, und aus mehreren Zellen am Umfange beſteht, worein ſich das Waſſer von oben herab ſtürzet, und das Rad umdrehet; theils iſt es **unterſchlächtig**, welches bey kleinerem Gefälle, und mehrerem Waſſer gebraucht wird, und an ſeinem Umfange mit **Schaufeln** (ſenkrecht eingeſetzten viereckigten Brettchen) verſehen iſt, an welche das Waſſer unterwärts ſtößt, und dadurch das Rad umdrehet. Sind nur kleine Schaufeln an dem Umfange eines einfachen Ringes eingeſetzt, ſo nennt man es ein **Strauberrad**; ſind die Schaufeln aber zwiſchen zwey Ringen eingefüget, ſo heißt es bey mäſſiger Länge der Schaufeln ein **Staberrad**, und bey gar groſſer Länge ge der Schaufeln als z. B. bey den Schiffmühlen ein Fig. **Panſterrad**; iſt letzteres alſo eingerichtet, daß man es bey hohem Waſſer ſamt der Welle in die Höhe ziehen, bey niedrigem aber herablaſſen kann, ſo heißt es alsdann ein **Ziehpanſter**.

VI. Die **Windflügel** entſtehen, wenn man durch den Kopf der Welle zwey lange hölzerne Bäume (**Windruthen**) ſenkrecht gegeneinander und gegen die Welle ſteckt, und ſolche in Entfernungen von 2 oder 3 Schuhen mit durchgeſteckten hölzernen Sproſſen verſieht, welche man zu beyden Seiten durch Leiſten oder Rahmen befeſtiget; dieſe Flügel werden mit Segeltuch bekleidet, oder mit dünen Brettern (Thüren) zugedeckt, welche man bey Stürmen eröfnen kann, damit der Wind durch die Flügel ſtreiche ohne der Maſchine zu ſchaden. Die Ebene eines jeden der vier Flügel iſt gegen die Umlaufsachſe der Welle unter einem nämlichen ſchiefen Winkel beyläufig von 55° geneigt, damit der Wind, da er in paralleler Richtung mit der Achſe gegen die Flügel ſtöſſet, dieſelben ſeitwärts drücke, und dadurch mit der Welle in Umlauf bringe.

§. 156.

Zu den ſtehenden Winden, oder den **Göpeln** gehört I. Der gemeine Göpel und der Pferde-Göpel; II. Die Erdwinde; III. Das horizontale Waſſerrad; IV. Die horizontalen Windflügel; V. Die Trettſcheibe.

I. Der **gemeine Göpel** Fig. 65. wird durch Schiebſtangen beweget, oberhalb deren ſich das Seil um die Welle windet. Hier können die Menſchen immer ſenkrecht auf die Schiebſtangen wirken, da ſie in einem Kreiſe herumgehen, und ſo die Schiebſtangen immer von ſich wegdrücken. Es werden bey dergleichen Gö-

Fig. peln öfters mehr als vier Schiebſtangen angebracht; jede Stange kann mit einer langen Feder AB verſehen ſeyn, welche der angeſtellte Arbeiter an die Schiebſtange CD andrücket, und ſo die Welle des Göpels umdrehet, wodurch die trägen Arbeiter gleich kennbar gemacht, und von den übrigen fleiſſigen Arbeitern angetrieben werden. An den Pferde-Göpeln, welche nämlich durch Pferde beweget werden, müſſen die Zugſtangen 18 bis 20 Fuß lang ſeyn, damit die Kreisbewegung den Pferden nicht zu unbequem werde. In Bergwerken werden die Pferde-Göpel häufig gebraucht, daher ſie auch **Bergwerksgöpel** heiſſen, allwo aber öfters oberhalb der Zugſtange ſtatt dem Seile ein groſſes Rad angebracht iſt, welches in ein anderes Rad eingreift.

II. Die **Erdwinde** Fig. 66. wird durch Zugſtangen beweget, unterhalb deren ſich das Seil um die Welle windet, da ſich ſolches zugleich am anderen Ende, wo es von einem Arbeiter horizontal angezogen wird, von ſelbſt abwickelt. Ihren Namen hat ſie daher, weil ſie eine Laſt horizontal auf der Erde fortzieht; doch kann ſie mittelſt Rollen, wie der Göpel und Haſpel, gebraucht werden die Laſten auf beliebige Höhen hinaufzuwinden.

III. Das **horizontale Waſſerrad** (Muſchelrad oder Löffelrad) welches durch den Stoß eines ſchief herunter ſchieſſenden Waſſerſtrahls gegen die ſchief geſtellten Schaufeln (Muſcheln) horizontal umgetrieben wird.

IV. Die **horizontalen Windflügel**, welche durch den Stoß des Windes horizontal umlaufen.

V. Die **Trettſcheibe**, deren ſenkrechte Welle mit dem Horizont einen ſchiefen Winkel beyläufig von 75° macht, wird gewöhnlich durch Thiere von anſehnlicher Schwere, als z. B. durch Ochſen in Bewegung geſetzet. Hiezu zu iſt die aufwärts gekehrte Fläche der Scheibe mit Fig. Leiſten oder Stuffen verſehen, und ſeitwärts neben der Stelle, wo der Ochs ſteht, ein Pfahl oder ſonſt etwas haltbares befindlich, woran der Ochs angebunden wird.

§. 157.

Die Rolle, welche vermög (§. 100.) eine um einen feſten Stift C Fig. 67 und 68 umlaufbare Scheibe 67 iſt, unterſcheidet ſich dadurch vom Wellrade, daß 68 bey der Umdrehung der Rolle der Stift, welcher der **Polzen** heißt, gemeiniglich ſich nicht mit umdrehet, und daß die Laſt nicht unmittelbar an dem Polzen angebracht wird, wenn ſolcher auch ſo wie die Welle am Wellrade mit der Scheibe befeſtiget iſt. Die Hülſe oder Scheere DE, in welcher der Polzen ſteckt, heißt der **Kloben**. Eine Rolle Fig. 67, um welche ein Seil geht, ſo daß die Laſt Q an dem einen, die Kraft P aber an dem anderen Ende des Seils wirkt, heißt eine **feſte Rolle**; iſt aber bey einer Rolle Fig. 68. das eine Ende des Seils in F feſt angemacht, und die Laſt Q im Mittelpunkte C der Rolle mittelſt des Klobens, die Kraft P aber am anderen Ende des Seils angebracht, ſo wird ſie die **loſe Rolle** oder kürzere die **Zugrolle** genennt, weil ſie ſamt dem Kloben, und der daran befeſtigten Laſt bey hinlänglicher Kraft **fortgezogen** wird; da hingegen die feſte Rolle ihren Ort nicht verändert.

§. 158.

Der **Keil** iſt ein dreyſeitiges Prisma ACFE Fig. 69, mittelſt deſſen eine Kraft die Theile eines Körpers von einander zu treiben, und zuweilen eben dadurch andere Körper an einander zu preſſen, oder auch

Fig. 69 eine Laſt etwas zu erheben ſtrebet. Seine Seitenflächen AF, EC, womit er in die Körper eindringt, heiſſen ſeine **Seiten**; die Seitenfläche AC, welche den Druck oder Stoß der Kraft leidet, ſein **Rücken**; der Durchſchnitt EF der Seiten, womit er zu erſt eindringet, ſeine **Schärfe**; und der Abſtand KL der Schärfe vom Rücken heißt ſeine **Länge**. Sind die Grundflächen des Priſma, und folglich auch alle damit parallele Schnitte, wie GK, gleichſchenklichte Triangel, ſo heißt der Keil **gleichſeitig**. Ob nun gleich die Kraft und der Widerſtand über mehrere Punkte der Seiten des Keils vertheilt ſind, ſo kann man ſich doch eine mittlere Richtung derſelben, etwan in der Ebene des Durchſchnittes GKH, gedenken, und Kürze halber GH den **Rücken**, KG, KH die **Seiten**, KL die **Länge**, und den Winkel GKH die **Schärfe** des Keils nennen.

§. 159.

74 Die **Schraube** Fig. 74 iſt nichts anders als ein Cylinder, der an ſeiner Oberfläche mit einer feſten Hervorragung (mit einem dreyſeitigen, oder auch mit einem vierſeitigen Priſma) ununterbrochen öfters nebeneinander in Geſtalt einer in die Runde herum gewickelten ſchiefen Ebene umwunden iſt. Es ſey z. B. die Höhe BC 70 Fig. 70 des Rechteckes AC in mehrere gleiche Theile in a, b, c, d, e getheilet; man ziehe die Gerade Aa, und mit ihr durch die Theilungspunkte bf, cg, u. ſ. w. parallel, ſo hat man mehrere ſchiefe Ebenen Aa, fb, gc von einerley Neigungswinkel im Durchſchnitte vor Augen; wickelt man nun dieſes Rechteck um einen Cylinder FG, deſſen Umkreis EF der Grundlinie AB des Rechteckes gleich, und deſſen Höhe mit jener des Recht-

eckes

Fig. 70 eckes einerley ſey, ſo fällt B mit A, a mit f, b mit g zuſammen, und es entſteht eine ununterbrochene um den Cylinder ſich herumziehende krumme Linie, welche man eine **Schraubenlinie**, den Cylinder aber die **Spindel** nennt. Schneidet man nach Vorſchrift dieſer krummen Linie entweder dreyſeitige, oder auch vierſeitige prismatiſche Vertiefungen in den Cylinder, ſo heiſſen ſie **Schraubengänge** oder **Gewinde**, und ihre Abſtände von einander Ba, ab, die **Höhe der Schraubengänge**; die Peripherie des Cylinders AB heißt der **Umfang der Spindel**, und endlich der ganze ſo eingerichtete Körper eine **Schraube**. Ein anderer Körper, in deſſen cylindriſcher Höhlung Schraubengänge von einerley Höhe und Umfange mit dem vorigen gemacht ſind, ſo daß die Erhöhungen der Schraubenſpindel in die Vertiefungen der cylindriſchen Höhlung, und umgekehrt einpaſſen, heißt die **Schraubenmutter**, oder die **Mutterſchraube**. Eine Schraube mit dreyſeitigen prismatiſchen Hervorragungen heißt eine Schraube mit **ſcharfen Gewinden**, hingegen eine Schraube mit vierſeitigen prismatiſchen Hervorragungen eine Schraube mit **flachen Gewinden**.

Man bedienet ſich der Schraube Körper anzudrücken, und zu befeſtigen, auch Laſten zu heben; allemal aber iſt von den beyden Stücken, der Spindel und der Mutter, das eine beweglich indem das andere unbeweglich iſt; wobey ſich folgende Fälle unterſcheiden laſſen.

I. Die Schraubenmutter iſt ganz feſt und unbeweglich, Kraft und Laſt aber ſind an der beweglichen Spindel angebracht, welche ſich nach ihrer ganzen Länge durch die Mutter drehet. Auf dieſe Art hebt man Laſten, die entweder unten an der Spindel hangen, wo ſie ſich mit drehen müſſen, oder wenn der Schraubenkopf die Laſt fortſchiebet, indem er ſich gegen dieſelbe ſtemmet. Auch kann in dieſem Falle mit der Schraubenſpindel

Fig. eine ſchiefe Ebene, oder ein Keil (als z: B. bey den Richtmaſchinen des K. K. Geſchützes der **Richtkeil**) verbunden werden, welcher unter die zu erhebende Laſt geſchoben wird, wenn man die Schraubenſpindel drehet.

II. Die Schraubenmutter, an welcher die Kraft iſt, drehet ſich bloß um ihre Achſe ohne ihren Ort zu veränderen; die Spindel aber, an welcher die Laſt iſt, ſchiebt ſich nach ihrer ganzen Länge durch die Mutter. Dieſe Art dienet einen Körper an einen anderen anzuziehen, *auch etwas auszureiſſen*, und dergleichen.

III. Die Spindel iſt ganz feſt und unbeweglich, Kraft und Laſt aber ſind beyde an der beweglichen Mutter, die ſich um die Spindel drehet, und ſich zugleich längſt derſelben fortſchiebet. Dieſe Art dient vornehmlich zum Andrücken und befeſtigen.

IV. Die Spindel, an welcher die Kraft iſt, drehet ſich bloß um ihre Achſe ohne ihren Ort zu verändern; die Schraubenmutter aber, an welcher die Laſt iſt, ſchiebet ſich ſamt der Laſt längſt der Spindel fort. Hieher gehört die Schraube in der Richtmaſchine bey den K. K. Pöllern; und auch die ſogenannte **Zimmermannsſchraube**, mittelſt deren man das Dach eines Gebäudes in die Höhe ſchraubt, um ein Stockwerk dazwiſchen zu bringen. Hiezu ſind für jedes Paar Schrauben die Mütter in einem gemeinſchaftlichen Kloße eingeſchnitten, auf dem die Streben oder Säulen ruhen, welche die Laſt des Gebäudes tragen ſollen.

§. 160.

Die bisher angeführten Maſchinen, der **Hebel**, das **Wellrad**, die **Zugrolle**, die **ſchiefe Ebene**, der **Keil**, und die **Schraube** heiſſen **einfache Maſchinen**, obſchon das Wellrad und die Zugrolle eigentlich nur Anwendungen des Hebels, der Keil aber und die Schraube Anwendungen der ſchiefen Ebene ſind. Fig. Das Wellrad iſt nämlich für einen doppelarmigen Hebel anzuſehen, allwo der Halbmeſſer der Welle mit der halben Dicke des Seils bey der einfachen Aufwindung den einen Hebelsarm, der Halbmeſſer des Rades aber, oder die Länge einer Speiche, einer Zug- oder Schiebſtange, oder die Weite des Kurbelbugs den anderen Hebelsarm vorſtellet. Die Zugrolle iſt für einen einarmigen Hebel anzuſehen, allwo der eine Endpunkt des Durchmeſſers der Rolle den Unterſtützungspunkt, der Halbmeſſer den kürzern, und der Durchmeſſer der Rolle den längern Hebelsarm vorſtellet, wenn die Seile, worin die Rolle hängt, parallel ſind. Der Keil, wenn er gebraucht wird eine Laſt etwas zu erheben, oder einen Körper an einen anderen anzudrücken, iſt mit der ſchiefen Ebene völlig einerley. Auch die Schraube iſt für eine ſchiefe Ebene anzuſehen, allwo der Umfang der Spindel die **Grundlinie**, und der Abſtand zweyer Schraubengänge bey einem einfachen Gewinde die **Höhe** der ſchiefen Ebene vorſtellet, und wobey die Kraft parallel mit der Grundlinie, die Laſt aber darauf ſenkrecht wirket. Wenn der Keil nicht eine Laſt zu erheben, ſondern Körper von einander zu trennen, Holz zu ſpalten, u. ſ. w. gebraucht wird, ſo iſt ſolcher von der ſchiefen Ebene verſchieden; das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts wird ſich in einem ſolchen Falle nicht unmittelbar aus der ſchiefen Ebene, ſondern aus dem Kräftenparallelogramme ableiten laſſen.

§. 161.

Maſchinen, welche aus mehreren einfachen Maſchinen von einerley oder von verſchiedener Art dergeſtalt

Fig. zuſammengeſetzt ſind, daß alle zuſammenſetzende einfache Maſchinen in Bewegung kommen müſſen, wenn deren eine in Bewegung geſetzet wird, heiſſen **zuſammengeſetzte Maſchinen.** Die Anzahl der zuſammengeſetzten Maſchinen iſt ſehr groß, und wird immer gröſſer, weil nach und nach immerfort theils neue Maſchinen zuwachſen, theils an bereits vorhandenen Verbeſſerungen gemacht werden. Wenn man indeſſen die zuſammengeſetzten Maſchinen nach ihrer Wirkung eintheilet, die ſie hervorbringen, ſo kann man ſie füglich in folgende ſechs Klaſſen bringen.

I. **Fabrikmaſchinen**, wodurch etwas zubereitet wird, als Spinnräder, Spinnmaſchinen, Weberſtühle, Drehbänke, u. ſ. w.

II. **Uhrwerke**, welche entweder durch ihre Bewegung die während derſelben verflieſſende Zeit anzeigen (als Wanduhren, Sackuhren) oder auch nur ſonſt eine gleichförmige Bewegung hervorbringen, als Brattenwender u. ſ. w.

III. **Hebzeuge**, oder Heb- und Druckmaſchinen, wodurch groſſe Laſten erhoben und fortgebracht, oder auch Körper mit groſſer Gewalt an andere gepreſſet werden; als die **Heblade** (eine Maſchine, welche aus zwey ſtarken aufrecht ſtehenden nur etwas geneigten Pfoſten beſteht, und durch eine Stütze vor dem Falle geſichert iſt; in jedem Pfoſten ſind nach der Länge zwey Reihen Löcher befindlich, wodurch zwey Polzen geſtecket werden, auf welchen die Hebſtange zwiſchen den zwey Pfoſten wechſelweis ruhet, da man immer einen Polzen nach dem anderen höher ſteckt, und dadurch die Unterlage und folglich auch die Laſt höher bringt); der **Garushebel**, oder das **Schiebrad** Fig. 85; das **Wellrad**, oder die Haſpel und Göpel; die **Fuhrmannswinde**, oder die **Stockwinde**; der **Artilleriehebzeug**; der **Krahn** (eine Maſchine, wodurch eine Laſt auf einer Stelle z. B. aus einem Schiffe in die Höhe gehoben, ſodann auf

je-

jede beliebige Seite gedrehet, und endlich auf einer anderen Stelle z. B. auf einen Wagen am Ufer wieder niedergelaſſen wird, und umgekehrt); der **Fahrſtuhl** (eine Maſchine, wodurch ein Menſch entweder von der Kraft ſeiner eigenen Hand oder von einem anderen Menſchen in die Höhe gezogen, und herunter gelaſſen wird); der **Rammel** um **Pfähle** einzuſchlagen; die **Weinpreſſe**, die **Druckerpreſſe**, die **Münzpreſſe**, u. ſ. w. Fig.

IV. **Pneumatiſche Maſchinen**, die einen Zug der Luft verurſachen, als Luftpumpe, Windbüchſe, u. ſ. w.

V. **Hydrauliſche Maſchinen**, die das Waſſer heben, ſie mögen nun durch Menſchen, Thiere, Waſſer, Luft, Feuer, oder andere Kräfte getrieben werden; zu dieſer Klaſſe gehören alle Arten der Waſſerkünſte.

VI. **Mühlenwerke**, welche mittelſt Räder und Getriebe allerhand Sachen zum Gebrauch zubereiten; als

a. **Kornmühlen**, welche durch Zerreiben der Getreide-Körner ihre Wirkung äuſſern.

b. **Stampfmühlen**, welche durch Stoſſen entweder mittelſt eigener Stämpfer oder mittelſt Hämmer wirken; dahin gehören Oehlmühlen, Lohmühlen, Pulvermühlen, Walkmühlen, Papiermühlen, Puchwerke, Hammerwerke, u. ſ. w.

c. **Schneide- oder Sägemühlen**, welche groſſe Bäume zu Bretter, Momor zu Tafeln, Steine zum Baue der Häuſer mittelſt einer oder mehrerer Sägen zerſchneiden.

d. **Bohrmühlen**, welche die Röhren zu Brunnen und Pumpenkünſten, auch allerhand groſſe und kleine Geſchütze ausbohren.

e. **Schleif- und Polirmühlen**, welche Schleifſteine in Bewegung ſetzen, wodurch Sachen von Glas, Stein, oder Metall geſchliffen, und poliret werden.

Anmerk. Die Mühlen, ſo wie auch andere Maſchinen, erhalten zuweilen auch von den Kräften, wodurch ſie beweget werden, ihre beſondere Benennungen; daher giebt es Handmühlen, Ochſenmühlen, Pferdmühlen, Waſſermühlen, Windmühlen, auch ſogar eine **Feuermühle** in **Penzing** unweit **Wien.**

§: 162.

Zur Kenntniß und Beurtheilung einer Maſchine gehören I. Die Theile, woraus ſie beſteht. II. Die Verbindung dieſer Theile. III. Die Wirkung, welche die Maſchine zu leiſten hat. IV. Die Art ſolcher Wirkung. V. Die Kraft, wodurch die Maſchine beweget wird. VI. Die Wirkung der angebrachten Kraft.

I. Die Theile einer zuſammengeſetzten Maſchine ſind die obgenannten einfachen Maſchinen, welche durch ſchickliche Vorrichtungen, und Zurüſtungen gehörig mit einander verbunden ſind.

II. Die Verbindung der Theile muß ſo getroffen ſeyn, daß der eine dem anderen ſeine Bewegung mittheilet, ſo daß keiner davon beweget werden kann, ohne die übrigen mit in Bewegung zu ſetzen.

III. Die Wirkung der Maſchine beſteht entweder darin, daß eine herabhangende Laſt wirklich in die Höhe gezogen, oder eine andere Art des Widerſtandes überwältiget werde. Der erſte Fall iſt bey einem Haſpel oder Göpel, und der zweyte bey einer Kornmühle, wo der Widerſtand des Läufers (des oberen Mühlſteines) und der Körner ſich der Bewegung entgegenſetzet, auf eben die Art, als wenn der Läufer eine lothrechtſtehende Welle wäre, um welche ſich ein Seil herumwände, und ein daran hangendes proportionirtes Gewicht in die Höhe zöge. Auf dieſe Art kann man ſich in allen Fällen die Wirkung (den **Effect**) einer Maſchine ſo vorſtellen, als wenn ſie eine gewiſſe Laſt auf eine gewiſſe Höhe in einer gewiſſen Zeit hinaufbrächte; wel-

welches hauptſächlich dienet die Wirkungen zweyer ſehr verſchiedenen Maſchinen mit einander zu vergleichen. Nur muß man zu dieſer Laſt auch alle obwaltende Hinderniſſe der Bewegung, die aus dem Reiben, aus der Steifigkeit der Seile, und aus anderen Urſachen entſtehen, mit hinzurechnen.

IV. Die Art der Wirkung iſt entweder ununterbrochen, oder nicht, kann aber als ununterbrochen gedacht werden. So iſt z. B. bey einer Kornmühle die Wirkung ununterbrochen, weil da immer ein völlig oder doch beynahe gleicher Widerſtand ſtatt findet. Bey einem Haſpel hingegen wird jedesmal etwas Zeit erfodert, das hinaufgezogene Gefäß oben auszuleeren, wieder herabzulaſſen, und unten zu füllen. Indeſſen kann man dieſe Zeit entweder ganz abrechnen, oder ſie zu derjenigen addiren, welche die Laſt jedesmal unterwegs zu bringt; und folglich in allen Fällen die Sache ſo betrachten, als wenn die Maſchine ununterbrochen wirkte.

V. Die Kräfte, wodurch Maſchinen beweget werden, ſind herabhangende Gewichte bey Wanduhren; geſpannte elaſtiſche Federn bey Taſchenuhren; Menſchen und Thiere, durch Ziehen, Drucken, und Tretten; Stoß und Druck eines flieſſenden Waſſers; Druck der zuſammengepreßten Luft; Stoß des Windes; Gewalt elaſtiſcher Dünſte des kochenden Waſſers bey Feuermaſchinen, u. ſ. w.

VI. Die Wirkung der Kräfte iſt entweder **unveränderlich**, wie bey Gewichten, ſo daß ſie beſtändig mit gleicher Stärke auf die Maſchine wirken, ſie mag ruhen, ſich ſchnell, oder langſam bewegen; oder **veränderlich**, wie bey dem Wind- und Waſſerſtoſſe, wie auch bey den Kräften der Menſchen und Thiere, ſo daß der davon entſtehende Druck, Zug, oder Stoß auf die Maſchine deſto geringer wird, je mehr die Geſchwindigkeit der Maſchine zunimmt.

Fig.

§. 163.

Am Wellrade verhält ſich im Stande des Gleichgewichts Kraft zur Laſt wie der Halbmeſſer der Welle zum Halbmeſſer des Rades, wenn Laſt und Kraft auf dieſe Halbmeſſer ſenkrecht wirken.

Es ſey Fig. 71. der Durchſchnitt eines Wellrades
71 ſenkrecht auf ſeine Achſe; aus dem Mittelpunkte G ſey der Halbmeſſer GH bis zur Mitte des Seiles ſenkrecht auf die Richtung HQ der Laſt Q, und der Halbmeſſer GF ſey ſenkrecht auf die Richtung FP der Kraft P, ſo iſt FGH für einen mathematiſchen Winkelhebel anzuſehen, weil die Welle ſowohl als auch die Scheibe für ſich im Gleichgewichte ſind, und ſich um eine durch den Punkt G gehende Achſe drehen laſſen; folglich iſt vermög (§. 120.) im Stande des Gleichgewichtes $P : Q = GH : GF$.

I. Wird das Wellrad in Bewegung geſetzet, ſo beſchreibet die Kraft einen Weg $S = 2GF.\pi$, welcher dem Umkreiſe des Rades gleich iſt, in der nämlichen Zeit als die Laſt Q ſich um einen Umkreis der Welle $s = 2GH.\pi$ erhebet, weil Welle und Rad zugleich umlaufen; folglich iſt $s : S = GH : GF$; es iſt aber im Stande des Gleichgewichtes $P : Q = GH : GF$; folglich auch $P : Q = s : S$; nämlich am Wellrade verhalten ſich im Stande des Gleichgewichts Kraft und Laſt wie umgekehrt ihre in einer nämlichen Zeit zurückgelegten Wege, oder auch umgekehrt wie ihre Geſchwindigkeiten, wenn das Wellrad gleichförmig umgedrehet wird.

II. Wären die Richtungen der Kraft und Laſt nicht ſenkrecht auf die Halbmeſſer des Rades und der Welle angebracht, ſo muß man aus dem Mittelpunkte G ſenkrechte Linien auf die Richtungen der Kraft und Laſt gedenken, und dann verhalten ſich vermög der Lehre des Hebels Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts wie umgekehrt dieſe ſenkrechten Linien. Im Laufrade z. B. iſt die Kraft nicht ſenkrecht auf den Halbmeſſer angebracht; die Stelle der arbeitenden Perſon an dem inneren Umfange des Kranzes iſt von der niedrigſten Stelle des Rades beynahe um 30 Grade entfernet; und daher iſt die Senkrechte aus dem Mittelpunkte auf die Richtung der Kraft gezogen dem halben Halbmeſſer des Rades als dem Sinus von 30° gleich. Bey der Trettſcheibe iſt die Richtung der Kraft, nämlich das Gewicht des darauf geſtellten Ochſen, zwar ſenkrecht auf den Halbmeſſer der Scheibe, allein nicht in der Ebene der Scheibe; daher muß man dieſe Kraft nach der Lehre des Kräftenparallelograms in zwey andere zerlegen, wovon die eine in der Ebene der Scheibe auf den Halbmeſſer derſelben wirket, und die andere auf der Ebene der Scheibe ſenkrecht ſteht; die letzte wird von der Undurchdringlichkeit der Scheibe gänzlich aufgehoben, die erſte aber iſt für die bewegende Kraft anzuſehen, wodurch die Scheibe umgedrehet wird, und welche dem Gewichte des Ochſen multipliciret mit dem Sinus des Neigungswinkels der Welle gegen die Vertikallinie gleich iſt, weil die Stelle des Ochſen am Umfange der Scheibe ſeitwärts 90 Grade von der niedrigſten Stelle entfernet iſt. Fig.

III. Bey der Kurbel kann der Arbeiter nicht immer ſenkrecht auf den Kurbelbug als den Halbmeſſer des Rades wirken; auch kann er ſein eigenes Gewicht nur dazumal in etwas benützen, wenn er die Kurbel niederdrückt. Dieſe Ungleichheit findet auch ſtatt, wenn mittelſt der Kurbel eine Laſt, wie z. B. die Säge bey den Schneidemühlen, beweget wird. Daher müſſen alle Maſchinen mit Kurbeln oder **Krumzapfen** einen ſehr ungleichförmigen Gang haben, die Arbeiter müſſen im-

Fig. mer wie gleichſam vom neuen wieder anfangen oder anſetzen, wodurch ſie ſehr ermüdet werden, wenn nicht durch andere Hilfsmittel dieſe Ungleichförmigkeit bey der Bewegung der Maſchine gehoben wird. Ein Hilfsmittel iſt folgendes; wenn an der nämlichen Welle zwey Kurbeln befindlich ſind, ſo bringe man ſolche dergeſtalt an, daß ſich ihre Ebenen unter rechten Winkeln ſchneiden. Wenn alsdann die eine Kurbel in die vertikale Lage kömmt, ſo erhält die andere in der horizontalen Lage den ſtärkſten Druck. Man erreicht dadurch ſeinen Zweck gewiß beſſer, als wenn man ſie ſo ſetzet, daß die eine vertikal ſteht, wenn die andere herabhänget. Verbindet man mit dieſer Art noch ein **Schwungrad**, oder ein paar ſogenannte **Schwungkolben**, ſo läßt ſich die Bewegung ziemlich gleichförmig machen.

Ein **Schwungrad** iſt nichts anderes als ein Rad **DE** Fig. 64 an einer Umlaufsachſe einer Maſchine, an deſſen Umfange ſehr viel Maſſe (z. B. ein Ring von Bley) gleichförmig vertheilet iſt. Ein **Schwungkolben** aber iſt eine an beyden Enden ſtark beſchwerte Stange an einer Umlaufsachſe einer Maſchine ſo angebracht, daß ihr Schwerpunkt, ſo wie bey dem Schwungrade, genau in der Umlaufsachſe liegt. Da Schwungrad und Schwungkolben mit der übrigen Maſchine ſonſt in kleiner Verbindung ſtehen, und beyde in ihrem Schwerpunkte unterſtützet ſind, ſo haben ſie weiter keinen Einfluß auf die Maſchine, auſſer daß ihr Gewicht die Reibung an den Zapfen der Umlaufsachſe vermehret, und daß eben deßwegen um die Maſchine zu bewegen etwas mehr Kraft erfordert wird. Aendert ſich nun während der Bewegung etwas an der Kraft oder Laſt, wodurch die Umlaufsgeſchwindigkeit vermehret oder vermindert würde, ſo kann ſolches nicht geſchehen ohne zugleich das Schwungrad oder die Schwungkolben zu beſchleunigen oder zu verzögern. Da aber deren Maſſe ſehr beträchtlich iſt, und am Umfange mit groſſer Geſchwindigkeit umläuft, ſo iſt dazu eine beträchtliche Aenderung an der Kraft oder Laſt, und auch eine längere Zeit nöthig, während welcher der Umſtand wieder aufhöret, der die Bewegung beſchleunigen oder verzögern könnte; und dadurch muß Schwungrad oder Schwungkolben, und mit demſelben auch die Maſchine ununterbrochen beynahe im gleichförmigen Gange verbleiben.

§. 164.

An der Zugrolle Fig. 68. wenn die Seile parallel geſpannet ſind, iſt im Stande des Gleichgewichts die Kraft P der Hälfte der Laſt Q gleich. 68

Man ziehe den Durchmeſſer AB, ſo iſt BA für einen einarmigen Hebel anzuſehen, der in B unterſtützet iſt; in A iſt die Kraft in der Entfernung AB, und in C in der Entfernung $CB = \frac{1}{2}AB$ iſt die Laſt angebracht; folglich $P : Q = CB : AB = 1 : 2$, und $P = \frac{1}{2}Q$. Dieſes erhellet auch daher; weil beyde Seile parallel, und folglich gleich ſtark geſpannet ſind, ſo trägt ein jedes die Hälfte der angehängten Laſt Q; die eine Hälfte wirket auf die Befeſtigung, auf den Nagel in F, und nur die andere Hälfte muß von der Kraft P getragen werden. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß Scheibe, Polzen, und Kloben, weil ſie alle Schwer ſind, zur Laſt müſſen gerechnet werden. Auch iſt ſchon aus (§. 111.) bekannt, daß die feſte Rolle G nichts anderes beytrage, als den Kräften jede beliebige Richtung zu geben.

I. Werden Kraft und Laſt an der Zugrolle in Bewegung geſetzet, ſo wird die Laſt nur die Hälfte des Weges machen, welchen die Kraft in der nämlichen

Fig. Zeit beſchreibet; wenn nämlich die Laſt Q um 1 Fuß ſteiget, ſo muß jedes Seil BF und AG um 1 Fuß verkürzet, und folglich GP um 2 Fuß verlängert werden. An der Zugrolle verhalten ſich demnach auch Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts, wie umgekehrt ihre in einer nämlichen Zeit zurückgelegten Wege, oder wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten, wenn ſie gleichförmig beweget werden.

72 II. Wären an der Zugrolle Fig. 72. die Seile nicht mit der Richtung CQ der Laſt Q parallel, ſondern gegen dieſelbe unter gleichen Winkeln geneigt, ſo verbinde man die Berührungspunkte A, B mit der Geraden BA, welche auf CQ ſenkrecht, und in D halbiret ſeyn wird; dieſe Gerade BA iſt für einen einarmigen in B unterſtützten Hebel anzuſehen, bey dem die Laſt in D ſenkrecht auf BD, die Kraft aber in A nach der ſchiefen Richtung AP angebracht iſt. Zieht man nun aus dem Unterſtützungspunkte B auch noch die Senkrechte BE auf die Richtung PQ der Kraft P, ſo iſt vermög der Lehre des Hebels $P : Q = BD$ oder $DA : BE$; es ſey ferner der Halbmeſſer CA an den Berührungspunkt A der Richtung PQ, alſo ſenkrecht auf PQ und parallel zu BE gezogen, ſo iſt $DA : BE = AC : AB$ wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ADC, AEB; folglich iſt auch $P : Q = AC : AB$, nämlich **die Kraft verhält ſich zur Laſt wie der Halbmeſſer zur Sehne des umſchlungenen Bogens,** wo der Halbmeſſer $AC > \frac{1}{2}AB$, und folglich auch $P > \frac{1}{2}Q$ iſt, wenn der umſchlungene Bogen kleiner iſt als der halbe Umkreis. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß die parallele Lage der Seile an der Zugrolle die vortheilhafteſte ſey. Der Nachtheil für die Kraft wird um ſo gröſſer, je kleiner der umſchlungene Bogen iſt; iſt der umſchlungene Bogen $= 60^\circ$, ſo muß die Kraft ſchon der Laſt gleich ſeyn;

bey

bey einem noch kleineren Bogen aber muß im Stande Fig. des Gleichgewichts die Kraſt gröſſer ſeyn als die Laſt.

§. 165.

Beym gleichſeitigen Keile, wenn der Widerſtand oder die Laſt parallel zum Rücken, die Kraft aber darauf ſenkrecht wirket, verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft P zur Laſt Q wie der halbe Rücken des Keils zu ſeiner Länge.

Denn in einem ſolchen Falle iſt der Keil ſo anzuſehen, als wäre er aus zwey gleichen ſchiefen Ebenen nach ſeiner Länge als der gemeinſchaftlichen Grundlinie der zwey ſchiefen Ebenen zuſammengeſetzt, allwo auf eine jede Seite des Keils die Hälfte des Widerſtandes oder der Laſt Q ſenkrecht auf die Grundlinie der ſchiefen Ebene, die Kraft P aber mit eben dieſer Grundlinie parallel wirket, und auf jeder Seite des Keils $\frac{1}{2}$P mit $\frac{1}{2}$Q im Gleichgewichte iſt. In einem ſolchen Falle verhält ſich vermög (§.98. I.) Kraft zur Laſt im Stande des Gleichgewichtes, wie die Höhe der ſchiefen Ebene zu ihrer Grundlinie; es iſt aber hier die Kraft $= \frac{1}{2}$P bey der einen Hälfte des Keils, und die Laſt $= \frac{1}{2}$Q; die Höhe der ſchiefen Ebene = dem halben Rücken, und die Grundlinie der ſchiefen Ebene = der Länge des Keils; folglich $\frac{1}{2}$P zu $\frac{1}{2}$Q wie der halbe Rücken zur Länge des Keils, und alſo auch die ganze Kraft P zur ganzen Laſt Q wie der halbe Rücken des Keils zu ſeiner Länge.

I. Wenn der Keil in Bewegung geſetzet wird, und der Rücken ſamt der darauf wirkenden Kraft um die Länge des Keils eingedrungen iſt, ſo iſt der Widerſtand auf jeder Seite um den halben Rücken des Keils von ſeiner Stelle gewichen, nämlich der halbe Rücken

Fig. cken und die Länge des Keil ſind die in einerley Zeit zurückgelegten Wege der Laſt Q, und der darauf wirkenden Kraft P; folglich verhalten ſich auch beym Keile Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege.

II. Wäre der Widerſtand nicht parallel zum Rücken, ſondern nach einer anderen Richtung z. B. ſenkrecht 73 auf die Seiten des Keils in M und N an den Endpunkten der zum Rücken parallelen Geraden MN nach den Richtungen MR, NR Fig. 73, die Kraft aber noch immer ſenkrecht auf den Rücken nach der Richtung LK angebracht, ſo verlängere man MR, NR bis ſie in R in der Geraden LK zuſammentreffen, und ziehe die Parallelen MS, NS, um das Parallelogram MRNS zu erhalten ſo iſt vermög (§. 72.) für den Zuſtand des Gleichgewichts erfoderlich, daß die Kraft P durch die Diagonale RS ausgedrückt ſey, wenn der Widerſtand $\frac{1}{2}Q$ auf jeder Seite durch $MR = NR$ vorgeſtellet wird, nämlich es iſt zum Gleichgewichte erforderlich, daß $P : \frac{1}{2}Q = RS : MR$, oder $\frac{1}{2}P : \frac{1}{2}Q = RT : MR$, und daher auch $P : Q = RT : MR$ ſtatt finde; nun iſt $RT : MR = GL : GK$; folglich auch $P : Q = GL : GK$, **nämlich die Kraft zur Laſt, wie der halbe Rücken zur Seite des Keils, wenn die Laſt ſenkrecht auf die Seiten des Keiles wirket.**

Anmerk. Es wäre überflüſſig bey dem Keile ſich länger aufzuhalten, und ſchärfere Unterſuchungen darüber anzuſtellen; am Ende kömmt doch nichts anderes heraus, als je ſchärfer oder ſpitziger der Keil, nämlich je kleiner der Winkel GKH iſt, deſto leichter dringt er ein, oder deſto weniger Kraft wird erfordert um den Widerſtand zu überwinden. Die aus der Theorie abgeleiteten Regeln dienen nur verſchiedene Keile mit einander zu vergleichen, weil man bey dem Keile, haupt-

Fig. ſächlich bey jenem, der zum Holzſpalten gebrauchet, und durch Schlagen getrieben wird, weder die Kraft, noch vielweniger den Widerſtand im voraus genau beſtimmen kann. Zur Vergleichung der Keile (wozu die Meſſer, Degen, Säbel, Beile, Hacken oder Aexte, Krampen, Hauen, Pflugſcheeren, Stemm- Hobel- und Dreheiſen, Grabſtichel, Nägel, Nadeln, und mehr dergleichen Werkzeuge und Geräthſchaften gerechnet werden) ſind die zwey angeführten Sätze hinreichend.

§. 166.

An der Schraube verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft zur Laſt wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange der Spindel, wenn die Kraft unmittelbar am Umfange der Spindel nach der Richtung einer Tangente des Umkreiſes wirket. Iſt hingegen mit der Schraube noch ein Hebelsarm verbunden, an deſſen Endpunkte die Kraft ſenkrecht und parallel zu einer Tangente des Umkreiſet wirket, **ſo verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft zur Laſt, wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange des Kreiſes, deſſen Halbmeſſer dem Hebelsarm der Kraft gleich iſt.**

74 Es ſey EF Fig. 74 eine unverrückt befeſtigte Mutterſchraube, worin die vertikale Spindel AB ſtecket, ſo wird eine Kraft P, welche unmittelbar am Umfange der Spindel etwann in B nach der Richtung einer Tangente des Umkreiſes wirket, nicht nur die Spindel drehen können, ſo daß ſich ein Gewinde der Spindel nach dem anderen aus der Mutterſchraube auswickelt, ſondern es wird auch ein angehängte Laſt Q bey jeder Umdrehung der Spindel um eine Höhe eines Schraubenganges erho-

Fig. hoben werden, wofern nur die Kraft P ſtark genug iſt. Die Kraft P ſey ſo groß, daß ſie der Laſt Q das Gleichgewicht halte, wo Q das Gewicht der Schraubenſpindel ſamt der daran hangenden Laſt bedeutet, wenn die bewegliche Spindel vertikal iſt. In einem ſolchen Falle, worauf ſich alle Einrichtungen der Schraube zurückführen laſſen, kann man ſich nun vorſtellen, daß der Druck der Laſt Q über die Schraubengänge der Mutterſchraube nach einer zur Achſe der Spindel parallelen Richtung gleichförmig vertheilet ſey, ſo daß auf einen ſehr kleinen Theil mr Fig. 70. eines Schraubenganges der Mutterſchraube der Theil $\frac{1}{n} Q$ der Laſt Q nach der vertikalen Richtung mn drücket, wenn die Länge aller Schraubengänge der Mutterſchraube aus n ſolchen Theilen beſteht, deren einer = mr iſt. Jeden ſolchen ſehr kleinen (unendlich kleinen) Theil mr eines Schraubenganges der Mutterſchraube kann man als eine ſchiefe Ebene anſehen, welche durch rmn im Durchſchnitte vorgeſtellet iſt, nämlich deren Grundlinie = rn parallel zu AB, und Höhe = mn parallel zur Achſe iſt. Bey jedem ſolchen Theilchen hält die Kraft $\frac{1}{n} P$ nach der zu rn parallelen Richtung der Laſt $\frac{1}{n} Q$ das Gleichgewicht, weil P der Laſt Q am Umfange der Spindel nach der Richtung einer Tangente des Umkreiſes parallel zu rn das Gleichgewicht hält. Es iſt demnach vermög (§.98. I.) $\frac{1}{n} P : \frac{1}{n} Q = \mathrm{mn} : \mathrm{nr}$, und ferner $P : Q = \mathrm{mn} : \mathrm{nr}$; es iſt aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke mn : nr = Ba : AB, allwo Ba die Höhe eines Schraubenganges, und AB den Um-

fang

fang der Spindel bedeutet; folglich auch $P:Q = \mathrm{Ba}:\mathrm{AB}$, **nämlich die Kraft verhält ſich zur Laſt im Stande des Gleichgewichts, wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange der Spindel**, wenn die Kraft unmittelbar am Umfange der Spindel nach der Richtung einer Tangente des Umkreiſes wirket. Fig.

Wenn man die Höhe eines Schraubenganges $= a$, und den Halbmeſſer der Spindel $= r$ ſetzet, ſo muß die Kraft $P = \frac{aQ}{2r\pi}$ ſeyn, damit ſie in B Fig. 74 angebracht der Laſt Q das Gleichgewicht halten könne, weil im Stande des Gleichgewichts $P:Q = a:2r\pi$ ſtatt findet. Will man nun in B die Kraft $\frac{aQ}{2r\pi}$ hinwegnehmen, und dafür in G am Ende des Hebels $\mathrm{MG} = b$ eine gleichgeltende Kraft p zu der vorigen parallel anbringen, ſo muß p von der Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie am Hebel $\mathrm{MG} = b$, der in M ſeinen Unterſtützungspunkt hat, angebracht der Kraft $P = \frac{aQ}{2r\pi}$ in der Entfernung $\mathrm{MB} = r$ das Gleichgewicht halten könne; folglich muß vermög (§. 120.) $p : \frac{aQ}{2r\pi} = r : b$ ſtatt finden; und daraus folgt endlich $p : Q = a : 2b\pi$, **das iſt die Kraft verhält ſich zur Laſt an der Schraube im Stande des Gleichgewichts, wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer dem Hebelsarme der Kraft gleich iſt**, wenn die Kraft auf dieſen Hebelsarm ſenkrecht und parallel zu einer Tangente des Umfanges der Spindel wirket.

I. Erfolgt bey der Schraube eine Bewegung, ſo beſchreibt die Kraft den ganzen Umfang des Kreiſes $2b\pi = S$, deſſen Halbmeſſer dem Hebelsarm der Kraft gleich iſt, in der nämlichen Zeit als die Laſt um die Höhe eines Schraubenganges $s = a$ gehoben wird; nämlich $S = 2b\pi$, und $s = a$ ſind die in einerley Zeit zurückgelegten Wege der Kraft p und der Laſt Q; derowegen iſt $s : S = a : 2b\pi$; es iſt aber auch $p : Q = a : 2b\pi$; folglich auch $p : Q = s : S$, das iſt, auch an der Schraube verhalten ſich Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichtes wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, oder auch wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten, wenn die Schraube gleichförmig umgedrehet wird.

II. Es giebt auch Schrauben mit doppelten, dreyfachen, und mehrfachen Gewinden, allwo aber die Höhe eines Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde ziemlich groß ſeyn muß, damit die Zwiſchenweiten der Gewinde nicht zu klein ausfallen. Wenn man z. B. in Fig. 70. die Cylinderfläche in zwey, drey, oder mehr gleiche Theile durch gerade zur Achſe parallele Linien eintheilet, an dieſe Theilungslinien nacheinander das nämliche eingetheilte Rechteck DB mit der Seite DA aufleget, und jederzeit die ſchrägen Linien Aa, fb, gc, an der Cylinderfläche bezeichnet, ſo wird man eine doppelte, dreyfache, oder mehrfache Schraubenlinie erhalten, nach deren Bezeichnung ein doppeltes, dreyfaches, oder mehrfaches Schraubengewinde kann eingeſchnitten werden. Der gegebene Beweis für das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts an der Schraube mit dem einfachen Gewinde findet auch bey einer Schraube mit mehrfachem Gewinde ſtatt; folglich verhält ſich auch bey der Schraube mit mehrfachem Gewinde im Stande des Gleichgewichts Kraft zur Laſt wie die Höhe eines Schraubenganges **an einem nämlichen Gewinde** zum Umfange des Kreiſes, deſſen Halbmeſſer dem Hebelsarm der Kraft gleich iſt; es iſt nämlich bey einem mehrfachen Gewinde die Höhe eines Schraubenganges keineswegs der Zwiſchenweite zweyer anliegenden Schraubengänge gleich, ſondern ſie iſt gleich dem Abſtande zweyer Schraubengänge an einem nämlichen Gewinde. Fig.

§. 167.

Nachdem das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts an den einfachen Maſchinen bekannt iſt, ſo iſt nun ſehr leicht auch das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt an jeder zuſammengeſetzten Maſchine im Stande des Gleichgewichts zu finden. Wenn zu einer gegebenen Laſt bey einer gegebenen zuſammengeſetzten Maſchinen für den Zuſtand des Gleichgewichts die Kraft zu ſuchen iſt, ſo fängt man bey der einfachen Maſchine an, woran die Laſt unmittelbar angebracht iſt, und ſuchet an dieſer einfachen Maſchine die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft; dieſe gefundene Kraft iſt die Laſt bey der zweyten einfachen Maſchine, wozu man wieder die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft ſuchet; dieſe Kraft iſt die Laſt an der dritten einfachen Maſchine, wozu ſich abermal für den Stand des Gleichgewichts die Kraft finden läßt; und auf dieſe Art kömmt man endlich an diejenige einfache Maſchine, woran die Kraft unmittelbar wirken muß. Umgekehrt iſt es, wenn man aus der gegebenen Kraft an einer gegebenen zuſammengeſetzten Maſchine die für das Gleichgewicht erforderliche Laſt ſuchet.

Wenn z. B. Fig. 75 die Laſt Q mittelſt der drey miteinander verbundenen doppelarmigen Hebel von gegebenen Hebelsarmen von einer Kraft P im Gleichgewichte zu erhalten wäre, allwo die Hebelsarme mit Seilen und Rollen mit einander verbunden ſind, ſo läßt ſich die dazu erforderliche Kraft, und folglich auch das Verhältniß

Fig. 75 niß zwiſchen Kraft und Laſt auf folgende Art finden. Am Hebelsarm A iſt für das Gleichgewicht mit der Laſt Q eine Kraft $\frac{a.Q}{A}$ erforderlich (§. 124.); und dieſes $\frac{a.Q}{A}$ iſt die Laſt oder der Druck am Hebelsarm b; dazu iſt am Hebelsarm B für das Gleichgewicht eine Kraft $\frac{a.Q}{A} \cdot \frac{b}{B} = \frac{a.b.Q}{A.B}$ erforderlich; und eben ſo groß iſt demnach auch die Laſt oder der Druck am Endpunkte des Hebelsarmes c, wozu endlich am Hebelsarm C für das Gleichgewicht die geſuchte Kraft $P = \frac{a.b.Q}{A.B} \cdot \frac{c}{C}$ $= \frac{a.b.c.Q}{A.B.C}$ erforderlich iſt. Daraus folgt $P:Q = a.b.c : A.B.C$, **nämlich an einem zuſammengeſetzten Hebel verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft zur Laſt wie das Produkt der Hebelsarme, welche mit der Laſt auf der nämlichen Seite der Ruhepunkte liegen, zum Produkte der Hebelsarme auf der Seite der Kraft,** allwo aber das Gewicht der Hebelsarme auſſer Acht gelaſſen worden, welches im erforderlichen Falle vermög (§.144. I.) ſehr leicht in Erwägung zu ziehen iſt.

In dergleichen Fällen läßt ſich auch das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt auf folgende Art beſtimmen. Bey dem Zuſtande des Gleichgewichts der Laſt Q mit der Kraft P ſey diejenige Kraft = P′, womit der Hebelsarm c aufwärts und der Hebelsarm B mittelſt des um die Rolle geführten Seils abwärts ſich zu bewegen ſtrebet, die Kraft aber ſey = P″, welche den

Hebelsarm b aufwärts und den Hebelsarm A niederwärts treibet, Fig.

ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} P : P' = c : C \\ P' : P'' = b : B \\ P'' : Q = a : A \end{array}\right\} \text{vermög (§. 120.)}$$

folglich auch $P : Q = a.b.c : ABC$ durch die Multipl.

Anmerk. Da erwieſen worden, daß bey allen einfachen Maſchinen, aus deren Verbindung die zuſammengeſetzten entſtehen, im Stande des Gleichgewichts Kraft und Laſt ſich gegen einander verhalten, wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, wenn ſie in Bewegung geſetzet werden, ſo pflegt man auch zuweilen das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt an den zuſammengeſetzten Maſchinen dadurch zu beſtimmen, daß man aus den gegebenen Theilen der Maſchine unterſuchet, was für Wege Kraft und Laſt in einer nämlichen Zeit beſchreiben, wenn die Maſchine in Bewegung geſetzet wird. Beym Keile, wenn die Laſt ſenkrecht auf die Seiten deſſelben wirket, findet zwar dieſe Regel nicht ſtatt; der Keil kömmt aber auch niemals auf dieſe Art in den zuſammengeſetzten Maſchinen vor. Allein auch bey der Zugrolle, wenn die Seile nicht parallel ſind, auch bey dem Wellrade, wenn die Kraft auf den Halbmeſſer ſchief wirket, und in mehr dergleichen Fällen findet dieſe Regel nicht ſtatt; derowegen iſt es rathſamer bey der Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichtes an den Maſchinen von dieſer Regel keinen Gebrauch zu machen. Man würde einen unverzeihlichen Fehler begehen, wenn man nach dieſer Regel das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts beym Laufrade und bey der Trettſcheibe beſtimmen wollte.

§. 168.

Fig.

Eine Verbindung mehrerer Wellräder, welche mittelſt einer an einem einzigen Wellrade angebrachten Kraft einander wechſelweiſe umdrehen können, heißt ein **Räderwerk**, oder eine **Rädermaſchine**. Räder, welche mittelſt einer um ihre Umkreiſe geführten und zuſammengefügten Schnur (Schnur ohne Ende) einander wechſelweiſe umdrehen, heiſſen **Seilräder**. Ein Rad kann auch ein anderes mit umdrehen, wenn erſteres auf ſeinem Umfange Erhöhungen hat, welche in die Vertiefungen auf dem Umfange des zweyten Rades eingreiſen. Dergleichen Erhöhungen heiſſen **Zähne**; wenn ſolche in der Ebene des Rades nach den Richtungen der Halbmeſſer am äuſſeren Umfange angebracht ſind, ſo heißt ein mit ſolchen Zähnen verſehenes Rad ein **Sternrad**, oder auch **Stirnrad**. Hingegen heißt das Rad ein **Kammrad**, oder auch **Kronrad**, wenn die Zähne am Umkreiſe auf der Ebene des Rades ſenkrecht ſind; und die Zähne ſelbſt werden in einem ſolchen Falle **Kämme** genennt. Kammräder ſind dienlich horizontale Wellräder mit vertikalen zu verbinden. Von zweyen Rädern, davon eines in das andere eingreifet, iſt meiſtentheils das eine in Vergleichung mit dem anderen nur klein, und man nennt das kleinere ein **Getrieb**. In dem Falle insbeſondere wird das Getrieb ein **Trilling** genennt, wenn es aus zwey parallelen Scheiben beſteht, die mittelſt mehrerer am Umfange mit der Achſe parallel eingeſetzter Stäbe zuſammengefügt ſind. Wenn aber in der Welle ſelbſt Vertiefungen parallel mit der Achſe eingeſchnitten ſind, ſo wird ein ſolches Getrieb ein **Kumpf** genennt. Die Stäbe des Trillings, die Hervorragungen des Kumpfes, und überhaupt die Zähne eines jeden Getriebes heiſſen endlich **Triebſtecken**. Man giebt einem Getriebe niemals weniger als vier, gar ſelten vier oder fünf, ſondern meiſtentheils mehr als fünf Triebſtecken. Fig.

§. 169.

Bey dem Räderwerke verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft am Umfange des erſten Rades (oder am Hebelsarm der erſten Welle als an dem Halbmeſſer des erſten Rades ſenkrecht angebracht) zur Laſt an der lezten Welle, wie das Produkt der Halbmeſſer aller Wellen zum Produkte der Halbmeſſer aller Räder, wo bey zweyen an einer nämlichen Achſe befeſtigten Rädern das kleinere (das Getrieb) für die Welle des gröſſeren angeſehen wird. Oder anders ausgedrückt, **die Kraft verhält ſich zur Laſt, wie das Produkt der Halbmeſſer aller eingreifenden Räder von der Kraft an gerechnet zum Produkte der Halbmeſſer aller ergriffenen Räder,** wo für das lezte eingreifende Rad die Welle, woran die Laſt hänget, verſtanden wird.

Um dieſes einzuſehen bezeichne man die Halbmeſſer der ergriffenen Räder von der Kraft angefangen Fig. 82. mit **A**, **B**, **C**, **D**, und die Halbmeſſer der damit verbundenen Wellen oder Getriebe als der eingreifenden Räder mit **a**, **b**, **c**, **d**. Die Kraft am Umfange des Hauptrades **A** ſey $= P$, ſo läßt ſich für das Gleichgewicht an der Welle d die erforderliche Laſt Q auf folgende Art finden. An der Welle a iſt zum Gleichgewichte mit der Kraft P am Hebelsarm A eine Laſt $= \frac{A.P}{a}$ erforderlich (§. 163.); dieſe Laſt $\frac{A.P}{a}$ iſt die

Fig. 82 Kraft, womit das Rad B ſich zu drehen ſtrebet; nämlich der Druck des eingreifenden Triebſteckens am Getriebe a gegen einen Zahn am Umfange des ergriffenen Rades B iſt = $\frac{A.P}{a}$; dazu iſt an der Welle b dieſes Rades zum Gleichgewichte eine Laſt = $\frac{A.P}{a} \cdot \frac{B}{b}$ erforderlich; und dieſe Laſt $\frac{A.B.P}{a.b}$ iſt die Kraft am Umfange des Rades C; derowegen iſt an der Welle c dieſes Rades zum Gleichgewichte eine Laſt = $\frac{A.B.P}{a.b} \cdot \frac{C}{c}$ erforderlich; und ſo geht der Schluß immer weiter von jeder Zahl der Räder auf die folgende um eins gröſſere Anzahl; wenn nämlich noch ein Rad D ſamt deſſen Welle d mit den vorigen verbunden iſt, ſo iſt an dieſer Welle d eine Laſt $Q = \frac{A.B.C.D.P}{a.b.c.d}$ zum Gleichgewichte mit der Kraft P erforderlich; und daraus folgt endlich $P : Q = a.b.c.d : A.B.C.D.$

Dieſes Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichtes am Räderwerke läßt ſich auch auf folgende Art darthun. Der Druck der Triebſtecken a gegen die Zähne B ſey = P', der Druck der Triebſtecken b gegen die Zähne C ſey = P'', und endlich der Druck der Triebſtecken c gegen die Zähne D ſey = P''',

$$\text{ſo iſt } \left.\begin{array}{lcl} P : P' & = & a : A \\ P' : P'' & = & b : B \\ P'' : P''' & = & c : C \\ P''' : Q & = & d : D \end{array}\right\} \text{ vermög (§. 163.)}$$

folglich auch $P : Q = a.b.c.d : A.B.C.D.$

I.

Fig. 82

I. Die Halbmeſſer der gezähnten Räder (ſie mögen Stirnräder oder Kammräder ſeyn) und der Getriebe werden bis zum Mittelpunkte der Zähne und der Triebſtecken, das iſt bis zu demjenigen Punkte gerechnet, wo ſie beym vollſtändigen Eingriffe gegen einander drucken. Die Zwiſchenweiten der Zähne müſſen etwas weniges gröſſer ſeyn als die Dicke der eingreifenden Triebſtecken, damit ſich das Räderwerk nicht klemme oder ſperre. Auch pflegt man die Triebſtecken etwas weniges dicker zu machen als die Zähne der Räder, weil die Triebſtecken geſchwinder abgenützet werden, als die Zähne der Räder. Dabey muß aber doch ein Triebſtecken ſamt einer Zwiſchenweite am eingreifenden Getriebe genau eben ſo groß ſeyn, als ein Zahn ſamt einer Zwiſchenweite an dem ergriffenen Rade, damit Rad und Getrieb gehörig in einander eingreifen können. Dieſes wird erhalten, **wenn ſich der Halbmeſſer des eingreifenden Getriebes zum Halbmeſſer des ergriffenen Rades verhält, wie die Anzahl der Triebſtecken zur Anzahl der Zähne.** Wenn z. B. eines gezähnten Rades Halbmeſſer $= R$ und die Anzahl der Zähne $= N$ geſetzet wird, ſo iſt die Gröſſe eines Zahnes ſamt der Zwiſchenweite $= \frac{2R\pi}{N}$; ſetzet man ferner den Halbmeſſer des eingreifenden Getriebes $= r$, und die Anzahl der Triebſtecken $= n$, ſo iſt ein Triebſtecken ſamt einer Zwiſchenweite $= \frac{2r\pi}{n}$; ſetzet man nun $R : r = N : n$, ſo iſt $\frac{R}{N} = \frac{r}{n}$, und folglich auch $\frac{2R\pi}{N} = \frac{2r\pi}{n}$; und umgekehrt wenn $\frac{2R\pi}{N} = \frac{2r\pi}{n}$ iſt, ſo iſt auch $R : r = N : n$. Aus

Fig. 82 der gegebenen Anzahl der Zähne des Rades, aus dem Halbmeſſer deſſelben und aus der Zahl der Triebſtecken läßt ſich demnach der Halbmeſſer des Getriebes finden. Auch läßt ſich aus der Anzahl der Zähne oder Triebſtecken, und aus der Dicke eines Zahnes oder Trieſteckens ſamt der Zwiſchenweite der Halbmeſſer des Rades oder des Getriebes beſtimmen. Gemeiniglich verhält ſich bey groſſen Maſchinen die Dicke der Triebſtecken zu ihrer Zwiſchenweite wie 8 zu 7, und die Dicke der Zähne zu ihrer Zwiſchenweite wie $6\frac{1}{2}$ zu $8\frac{1}{2}$; nämlich derjenige Theil des Umkreiſes durch die Mitte der eingreifenden Triebſtecken, welcher für einen Triebſtecken ſamt der Zwiſchenweite gehöret, wird in 15 gleiche Theile getheilet, wovon 8 für den Triebſtecken, und 7 für die Zwiſchenweite kommen; ferner wird eine eben ſo groſſe Länge des Umkreiſes durch die Mitte der Zähne des ergriffenen Rades, welche für einen Zahn ſamt der Zwiſchenweite gehöret, auch in 15 gleiche Theile getheilet; davon kommen $6\frac{1}{2}$ auf die Dicke eines Zahnes, und $8\frac{1}{2}$ auf die Zwiſchenweite. Derjenige Theil des Umkreiſes, welcher für einen Triebſtecken oder Zahn ſamt der Zwiſchenweite gehöret, wird erhalten, wenn man den ganzen Umkreis in ſo viel gleiche Theile eintheilet, als Triebſtecken oder Zähne darauf ſeyn ſollten. Bey groſſen hölzernen Rädermaſchinen z. B. bey Mühlwerken kann man den Halbmeſſern der Getriebe und Räder beyläufig ſoviel Zolle geben, als ſie Triebſtecken oder Zähne haben müſſen.

II. Da das Verhältniß der Halbmeſſer der Räder und der eingreiffenden Getriebe dem Verhältniſſe der Zahlen der Zähne und der Triebſtecken gleich iſt, ſo kann man auch ſagen, **daß am Räderwerke im Stande des Gleichgewichts die Kraft am Umfange des erſten Rades ſich zur Laſt an**

Fig. 82 der lezten Welle verhalte, wie das Produkt aus dem Halbmeſſer dieſer Welle in die Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe zum Produkte aus dem Hebelsarm der Kraft in die Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder. Wenn z. B.

die Getriebe $\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\}$ aus $\left\{\begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \end{matrix}\right\}$ Triebſtecken,

und Räder $\left\{\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}\right\}$ aus $\left\{\begin{matrix} B' \\ C' \\ D' \end{matrix}\right\}$ Zähnen beſtehen,

ſo iſt vermög der Einrichtung des Räderwerks

$$a : B = a' : B'$$
$$b : C = b' : C'$$
$$c : D = c' : D';$$

folglich auch $a.b.c : B.C.D = a'.b'.c' : B'.C'.D'$, und $\frac{B.C.D}{a.b.c} = \frac{B'.C'.D'}{a'.b'.c'}$; nun iſt $Q = \frac{A.B.C.D.P}{a.b.c.d}$; folglich auch $Q = \frac{A.B'.C.'D'.P}{a'.b'.c'.d}$; und endlich $P : Q = a'.b'.c'.d : A\,B'.C'.D'$.

Es ſey z. B. der Kurbelbug $A = 1\frac{1}{2}$ Schuh, und der Halbmeſſer der Welle $d = \frac{1}{2}$ Schuh bis zur Mitte des aufgewundenen Seiles; jedes der drey Räder B, C, D enthalte nach der Ordnung 60, 48, 36 Zähne, und jedes der drey Getriebe a, b, c nach einander 12, 10, 8 Triebſtecken, ſo kann eine Kraft $P = 20$ Pfund einer Laſt $Q = \frac{20 . 1\frac{1}{2} . 60 . 48 . 36}{\frac{1}{2} . 12 . 10 . 8} = 6 . 5 . 6 . 36 = 6480$ Pfund das Gleichgewicht halten; die Laſt iſt demnach in dieſem Falle 324mal ſo groß als die Kraft.

Fig. III. Wenn die Kraft = p und die Laſt = q gegeben ſind, welche an einem Räderwerk einander im Gleichgewichte erhalten ſollen, ſo läßt ſich dazu die Einrichtung des Räderwerks auf mancherley Art beſtimmen; als z. B. auf folgende Weiſe. Der Hebelsarm für die Kraft, ſo wie der Halbmeſſer der Welle für die Laſt ergiebt ſich gemeiniglich aus der Beſchaffenheit der Kraft und Laſt; es ſey vorläufig der Hebelsarm der Kraft an dem Rade (etwan der Kurbelbug) = A, und der Halbmeſſer der Welle, woran die Laſt ſich aufwindet, ſey = a; das Produkt der Zahlen der Triebſtecken aller eingreifenden Getriebe ſey = x, und das Produkt der Zahlen der Zähne aller ergriffenen Räder ſey = X, ſo iſt $p : q = a.x : A.X$; daraus folgt $\frac{x}{X} = \frac{A.p}{a.q}$. Bey dieſem Bruche wird nun Zähler und Nenner durch den Zähler dividiret, damit der Werth $\frac{x}{X}$ durch einen Bruch vorgeſtellet ſey, deſſen Zähler = 1 iſt; ſollte der Nenner durch den Zähler nicht genau theilbar ſeyn, ſo läßt man den Diviſionsreſt gänzlich weg, und vermehret dafür den Quotienten um eine ganze Einheit, damit die Laſt q um ſo gewiſſer von der Kraft p könne überwältiget werden. Sodann zerleget man dieſen Nenner in einige Faktoren, wovon der kleinſte etwan 3 oder 4 ſeyn kann, und der größte nicht über 12 oder 15 ſeyn darf, damit nicht ein Rad gar zu viel Zähne enthalte. Es iſt nicht nothwendig, daß dieſe Faktoren alle aus ganzen Zahlen beſtehen, ſie können auch angehängte Brüche bey ſich führen, z. B. $3\frac{1}{5}$, $4\frac{3}{7}$, $6\frac{7}{8}$ u. ſ. w. Sollte die Zahl, welche in Faktoren zu zerlegen iſt, keine ſchickliche Zerlegung zulaſſen, ſo kann man ihr einige wenige Einheiten, und

zwar

zwar ſo viele zuſetzen, daß ſie ſich ſodann in ſchickliche Faktoren zerlegen laſſe. Iſt nun auf dieſe Art der Nenner in ſeine Faktoren zerleget, ſo zerfällt dadurch der Werth des Bruches $\frac{x}{X}$ in ſo viele Brüche, als Faktoren vorhanden ſind, und jeder dieſer Brüche hat zum Zähler eine Einheit. Dieſe Brüche ſind die Verhältniſſe der Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe gegen die Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder. Wenn man endlich bey jedem dieſer Brüche den Zähler und Nenner durch eine ſolche Zahl multipliciret, daß beyde ganze Zahlen werden, ſo iſt bey jedem ſolchen Bruche der Zähler die geſuchte Anzahl der Triebſtecken bey dem eingreifenden Getriebe, und der Nenner iſt die Anzahl der Zähne des davon ergriffenen Rades.

Es ſey z. B. von einer Kraft $p = 11$ Pfund eine Laſt $q = 1000$ Pfund mittelſt eines Räderwerkes im Gleichgewichte zu erhalten, ſo kann man vorläufig den Kurbelbug $A = 18$ und den Halbmeſſer der Welle für die Laſt $a = 5$ Zoll ſetzen, folglich iſt $\frac{x}{X} = \frac{18.11}{5.1000} = \frac{198}{5000} = \frac{1}{26} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5\frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4\frac{1}{3}}$; daraus folgen in den Zählern nachſtehender Brüche die Produkte der Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe, und in den Nennern die Produkte der Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder $= \frac{10.10}{50.52}$, oder $= \frac{12}{24} \cdot \frac{8}{26} \cdot \frac{8}{32}$, oder $= \frac{10.12}{60.52}$ u. ſ. w. auf unzählige Arten. Weil bey dieſer Auflöſung zuweilen das Gleichgewicht in etwas geſtöh:

ſtöh:

ſtöhret wird, ſo kann man ſolches wieder auf verſchiedene Arten herſtellen, als z. B. wenn man den Hebelsarm der Kraft verändert, nämlich wenn man aus dem feſtgeſetzten Verhältniſſe des Produktes der Zahlen der Triebſtecken gegen das Produkt der Zahlen der Zähne der Räder, und aus dem Halbmeſſer der Welle, woran die Laſt hängen ſoll, den Hebelsarm A für die Kraft berechnet; in dem angeführten Beyſpiele iſt $A = \frac{a.q}{p} \cdot \frac{x}{X} = \frac{5.1000}{11} \cdot \frac{1}{26} = 17\tfrac{69}{143}$ Zoll als der Halbmeſſer des erſten Rades; an der Achſe dieſes Rades kann ein Getrieb von 10 Triebſtecken befeſtiget ſeyn, welches in ein Rad von 52 Zähnen eingreifet; an der Achſe dieſes Rades ſteckt ein Getrieb von 10 Triebſtecken, und greifet in das letzte Rad von 50 Zähnen, an deſſen Welle die Laſt hänget.

Anmerk. In dem angeführten Beyſpiele, ſo wie auch in anderen dergleichen Fällen werden die Zahlen der Triebſtecken und der Zähne viel kürzer auf folgende Art gefunden: aus der Gleichung $\frac{x}{X} = \frac{11.18}{5.1000} = \frac{99}{2500}$ folgt $\frac{x}{X} = \frac{11.9}{50.50}$, wenn Zähler und Nenner jeder in eine gleichgroſſe Anzahl Faktoren aufgelöſet wird; folglich kann von zwey Getrieben das eine 11, und das andere 9 Triebſtecken haben, von den zwey Rädern aber jedes 50 Zähne enthalten. Dieſe Anordnung des Räderwerks hat vor der obigen einen Vorzug, weil die Zahlen der Triebſtecken mit den Zahlen der Zähne keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben; denn es iſt rathſam bey groſſen Maſchinen die Anordnung des Räderwerkes ſo einzurichten, daß die Zahl der Triebſtecken mit der Zahl der Zähne des ergriffenen Rades keinen ge-

Fig.

gemeinſchaftlichen Theiler habe, damit während der Bewegung nicht gewiſſe Zähne immer nur an einen nämlichen Triebſtecken kommen, ſondern gehörig unter einander abwechſeln, wodurch Zähne und Triebſtecken beſſer an einander abgeſchliffen werden, und die Maſchine einen gleichförmigern und leichtern Gang erhält.

§. 170.

Wenn ein Rad mittelſt eines Getriebes, oder ein Getrieb mittelſt eines Rades umgedrehet wird, ſo verhält ſich die Zahl der Umläufe des Getriebes zu der Zahl der Umläufe des Rades in einer nämlichen Zeit (zu der gleichzeitigen Umlaufszahl) wie die Zahl der Zähne des Rades zu der Zahl der Triebſtecken des Getriebes.

Wenn aber durch die Umdrehung eines Getriebes ein Räderwerk in Umlauf gebracht wird, ſo verhalten ſich die gleichzeitigen Umlaufszahlen des erſten eingreifenden Getriebes und des letzten ergriffenen Rades, wie umgekehrt die zwey Produkte aus den Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder, und aus den Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe.

Denn weil jeder Triebſtecken einen Zahn fortſchiebt, und mit jedem fortgeſchobenen Zahn ſich ein Triebſtecken auslöſet, ſo werden bey einem Umlaufe des Getriebes nur ſo viel Zähne des Rades fortgeſchoben, als das Getriebe Triebſtecken enthält; bey 2, 3, n Umläufen des Getriebes aber werden 2, 3, $n$mal ſo viel Zähne des Rades fortgeſchoben, als das Getriebe Triebſtecken enthält; wenn daher das Getrieb aus m Triebſtecken, und das Rad aus $n.m$ Zähnen beſteht, ſo werden

Fig. den bey n Umläufen des Getriebes $n.m$ Zähne des Rades fortgeſchoben, nämlich 1 Umlauf des Rades vollendet; bey $n.p$ Umläufen des Getriebes aber werden p Umläufe des Rades gemacht; folglich verhalten ſich $n.p$ Umläufe des Getriebes zu p Umläufen des Rades, welche in der nämlichen Zeit gemacht werden, wie $n p$ zu $p = n : 1 = n.m : m$ wie die Zahl der Zähne des Rades zu der Zahl der Triebſtecken des Getriebes. Es könnte jemand an der Richtigkeit dieſes Satzes zweifeln, wenn n keine ganze Zahl wäre, das iſt wenn die Zahl der Triebſtecken in der Zahl der Zähne nicht genau enthalten iſt. Man kann ſich von der Richtigkeit dieſes Satzes auch in einem ſolchen Falle auf folgende Art überzeugen. Es ſey die Zahl der Triebſtecken $= m$, und die Zahl der Zähne $= M$; in einer gewiſſen Zeit, in welcher das Rad n Umläufe vollendet, mache das Getrieb N Umläufe, ſo werden bey N Umläufen des Getriebes $N.m$ Zähne des Rades fortgeſchoben, und in der nämlichen Zeit werden bey n Umläufen des Rades $n.M$ Triebſtecken ausgelöſet, weil bey jedem Umlaufe des Rades ſo viel Triebſtecken ausgelöſet werden, als das Rad Zähne enthält. Nun iſt $N.m = n.M$, weil in einer nämlichen Zeit eben ſo viel Zähne fortgeſchoben werden, als ſich Triebſtecken auslöſen; folglich iſt $N : n = M : m$.

Nun ſetze man bey dem Räderwerk Fig. 82. die Zahlen der Triebſtecken an den eingreifenden Getrieben a, b, c nach der Ordnung = a, b, c, und die Zahlen der Zähne bey den ergriffenen Rädern B, C, D nach der Ordnung = B, C, D; die Zahl der Umläufe des erſten eingreifenden Getriebes a ſey $= N$ in der Zeit als das letzte ergriffene Rad n Umläufe macht, die gleichzeitige Umlaufszahl aber des Rades B und des damit verbundenen Getriebes b ſey $= N'$, und die

Umlaufszahl des Rades C und des damit verbundenen Getriebes c ſey = N'', Fig. 82

ſo iſt vermög vorhergeh.

$$\begin{array}{rcl} N : N' &=& B : a \\ N' : N'' &=& C : b \\ N'' : n &=& D : c \\ \hline \end{array}$$

folglich auch $N : n = B.C.D : a.b.c$;

nämlich die gleichzeitigen Umlaufszahlen des erſten eingreifenden Getriebes und des letzten ergriffenen Rades verhalten ſich gegeneinander wie umgekehrt die Produkte der Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder, und der Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe.

I. An der Welle d hänge eine Laſt Q, welche von der Kraft P durch die Umdrehung der Kurbel A in die Höhe gezogen wird, ſo muß bey 1 Umlaufe der Welle d die Kurbel $\frac{B.C.D}{a.b.c}$ mal umlaufen. Bey einem Umlauf der Welle d wird die Laſt um einen Umkreis $= 2\pi d$ gehoben; während dieſer Zeit muß die Kraft den Umkreis $2\pi A$ des Rades A, der zu ſeinem Halbmeſſer den Kurbelbug A hat, $\frac{B.C.D}{a.b.c}$ mal durchlaufen, nämlich $S = 2\pi A \cdot \frac{B.C.D}{a.b.c}$, und $s = 2\pi d$ ſind die in einer nämlichen Zeit zurückgelegten Wege S der Kraft und s der Laſt; daraus folgt $s : S = a.b.c.d : A.B.C.D$; es iſt aber auch im Stande des Gleichgewichts $P : Q = a.b.c.d : A.B.C.D$; folglich auch $P : Q = s : S$, nämlich **Kraft und Laſt für den Stand des Gleichgewichts am Räderwerke verhalten ſich wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, oder auch wie**

Fig. **umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten, wenn das Räderwerk gleichförmig umgedrehet wird.**

II. Auch das Verhältniß der Umlaufszeiten des erſten eingreifenden Getriebes, und des letzten ergriffenen Rades bey einem gleichförmigen Umlaufe des Räderwerks iſt nun leicht zu beſtimmen. Denn es ſey die zu einem Umlaufe des erſten eingreifenden Getriebes erforderliche Dauerzeit $= t$, ſo iſt bey der gleichförmigen Umdrehung des Räderwerks die zu einem Umlaufe des letzten ergriffenen Rades erforderliche Dauerzeit $T = \frac{B\ C.D}{a.b.c} \cdot t$, weil während einer Umdrehung des letzten Rades das erſte eingreifende Getriebe $\frac{B.C.D}{a.b.c}$ mal umgelaufen iſt, wozu die Dauerzeit t einer Umdrehung $\frac{B.C.D}{a.b.c}$ mal genommen erforderlich iſt; aus dieſer Gleichung $T = \frac{B.C.D}{a.b.c} \cdot t$ folgt $t : T = a.b.c :$ B.C.D; **es verhalten ſich alſo die Umlaufszeiten des erſten eingreifenden Getriebes, und des letzten ergriffenen Rades gerade ſo wie die Produkte aus den Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe, und aus den Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder.**

III. Daß ſich aus der Umlaufszeit eines Rades bey einem gleichförmigen Umlaufe die Geſchwindigkeit für jeden Punkt des Halbmeſſers, und umgekehrt aus der bekannten Geſchwindigkeit eines Punktes des Halbmeſſers die Umlaufszeit des Rades ableiten laſſe, iſt für ſich klar. Wenn man z. B. die Umlaufszeit eines Rades $= t$ Sekunden, ſeinen Halbmeſſer $= r$, und die Geſchwindigkeit = v ſetzet, womit der Endpunkt des Halbmeſſer umläuft, ſo iſt $v = \frac{2\pi r}{t}$, und $t = \frac{2\pi r}{v}$ wegen $1 : t = v : 2\pi r$ (§. 22.), woraus auch noch $r = \frac{vt}{2\pi}$ folget.

§. 171.

Aufgabe. Aus den gegebenen Umlaufszeiten, oder aus den gleichzeitigen Umlaufszahlen des erſten eingreifenden Getriebes und des letzten ergriffenen Rades die Anordnung des Räderwerks zu berechnen.

Auflöſ. Es ſey die Umlaufszeit des erſten eingreifenden Getriebes = t, und die Umlaufszeit des letzten ergriffenen Rades = T; oder auch die Umlaufszahl des erſten eingreifenden Getriebes = T, und die gleichzeitige Umlaufszahl des letzten ergriffenen Rades = t; ferner ſey das Produkt aus den Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe = x, und das Produkt aus den Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder = X, ſo iſt $t : T = x : X$ vermög §. 170. II. und §. 170; es iſt demnach $\frac{x}{X} = \frac{t}{T}$.

Wenn nun bey dieſem Bruche der Nenner nicht über 200 Einheiten enthält, und der Zähler in dem Nenner nicht über 12 oder 15mal enthalten iſt, ſo kann die Abſicht durch ein einziges eingreifendes Getrieb, und ein einziges ergriffenes Rad erreicht werden; denn man darf in einem ſolchen Falle nur dem Getriebe t Triebſtecken, und dem Rade T Zähne geben. Sollte aber der Nenner über 200 Einheiten enthalten, und der Zähler im Nenner über 15mal enthalten ſeyn, ſo

Fig. ſind zu der Anordnung des Räderwerks ſchon mehrere Getriebe und Räder erforderlich, weil man nicht leicht einem Rade über 200 Zähne giebt, und auch nicht leicht die Zahl der Zähne eines Rades über 15mal gröſſer annimmt, als die Zahl der Triebſtecken des eingreifenden Getriebes. Derowegen trachte man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{t}{T}$ in eine gleichgroſſe Anzahl Faktoren zu zerlegen, und zwar ſo daß die Faktoren des Zählers zu den Zahlen der Triebſtecken der eingreifenden Getriebe, die Faktoren des Nenners aber zu den Zahlen der Zähne der ergriffenen Räder tauglich werden. Um dieſen Endzweck zu erreichen, muß man zuweilen bey den Brüchen, in welche der Bruch $\frac{t}{T}$ zerleget iſt, den Zähler und Nenner mit einer nämlichen dazu ſchicklichen Zahl multipliciren. Wenn die Zahlen des Bruches $\frac{t}{T}$ ſehr groß ſeyn ſollten, ſo kann man dieſen Bruch vermög (2ter Band Zuſatz III.) ohne merklicher Veränderung des Werthes in einen einfachern verwandeln, und ſodann erſt ſowohl Zähler als Nenner in eine gleichgroſſe Anzahl Faktoren zerlegen. Wenn auch alsdann entweder der Nenner, oder der Zähler, oder auch keiner aus beyden einer ſchicklichen Zerlegung fähig iſt, ſo muß man einen ſolchen Bruch noch ferner ohne merklicher Veränderung des Werthes dergeſtalt verwandeln, daß ſodann ſowohl Zähler als Nenner ſich in eine gleich groſſe Anzahl tauglicher Faktoren zerlegen laſſe. Wie nun eine ſolche Verwandlung vorzunehmen ſey, iſt weiter unten aus den Beyſpielen V. VI. VII. zu erſehen. Die Faktoren können zuweilen auch gebrochene Zahlen ſeyn; z. B. $4\frac{3}{7}$, $8\frac{9}{10}$, u. ſ. w.

I. Es ſey z. B. ein Räderwerk anzuordnen, wo das erſte Rad in 1 Minute = t, und das letzte in 1 Stunde nämlich in 60 Minuten = T herumlaufe. In dieſem Falle iſt $\frac{x}{X} = \frac{1}{60} = \frac{1.1}{6.10} = \frac{10.9}{60.90}$, oder auch $\frac{x}{X} = \frac{1}{8.7\frac{1}{2}} = \frac{10.12}{80.90}$; man kann demnach an die Welle des Rades, welches in einer Minute umläuft, ein Getrieb von 10 Triebſtecken befeſtigen, welches in ein Rad von 80 Zähnen eingreift; an der Achſe dieſes Rades ſteckt ein Getrieb von 12 Triebſtecken, und greift in ein Rad von 90 Zähnen. Bey den aſtronomiſchen Pendeluhren iſt dieſe Anordnung anzutreffen. Das Rad A Fig. 80 welches jede Minute einmal herumkömmt, heißt das **Sekundenrad** oder das **Steigrad**; ſeine Achſe geht durch das Zifferblatt, an ihr ſteckt ein Zeiger f (der Sekundenzeiger) welcher auf dem in 60 gleiche Theile getheilten Sekundenringe die einzelnen Sekunden weiſet. Das zweyte Rad B von 80 Zähnen, welches mit dem Getriebe a von 10 Triebſtecken an der Achſe des Steigrades zuſammengreift, heißt das **kleine Bodenrad**, oder das **Mittelrad**; und das dritte Rad C von 90 Zähnen, welches mit dem Getriebe b von 12 Triebſtecken an der Achſe des Mittelrades zuſammengreift, wird das **Minutenrad** genennt. Die Achſe des Minutenrades geht durch das Zifferblatt; an ihr ſteckt der Zeiger g (der Minutenzeiger) mittelſt einer Hülſe ziemlich ſtreng, ſo daß der Zeiger mit dem Minutenrade zugleich in jeder Stunde einmal herumkommen, und ſo auf dem in 60 gleiche Theile getheilten Minutenringe die einzelnen Minuten weiſen könne; wenn hingegen die Achſe des Minutenrades feſtgehalten wird, ſo muß der Minutenzeiger ſamt der Hülſe mit einer ge- Fig. 80

Fig. 80 ringen Kraft ſich herumdrehen laſſen. Auf dem nämlichen Minutenringe werden auch noch 12 gleiche Theile des ganzen Umfanges als die 12 gewöhnlichen Stunden mit gröſſern Ziffern bezeichnet; der Zeiger h (der Stundenzeiger) welcher in 12 Stunden herumkömmt, zeiget ſolche an, und zwar auf folgende Art. Zwiſchen dem Zifferblatte und dem vorderen Uhrboden iſt an der Hülſe des Minutenzeigers ein Getrieb i von 10 Triebſtecken befeſtiget; dieſes Getrieb greift in ein Rad von 40 Zähnen (in das **Wechſelrad**); an der Achſe des Wechſelrades iſt ein Getrieb von 12 Triebſtecken befeſtiget, und greift in das **Stundenrad** von 36 Zähnen, welches mittelſt einer Hülſe auf die Hülſe des Minutenzeigers ſo angeſteckt wird, daß es auf dieſer willig umlaufen könne. Die Hülſe des Stundenrades raget aus dem Zifferblatte etwas weniges hervor, ſo daß man den Stundenzeiger h darauf ſtecken könne, der nun bey dieſer Einrichtung in 12 Stunden einmal herumkömmt; dabey läßt auch der Stundenzeiger ſich vorwärts oder rückwärts bewegen, wenn man den Minutenzeiger über demſelben vorwärts oder rückwärts herumdrehet. Statt dem Stundenzeiger kann man auch hinter dem Zifferblatte mit der Hülſe des Stundenrades eine Stundenſcheibe befeſtigen, worauf die Stundenzahlen bezeichnet, und durch ein Loch im Zifferblatte dem Auge ſichtbar werden. An der Achſe des Minutenrades zwiſchen den zwey Uhrböden iſt noch ein Getrieb c von 12 Triebſtecken befeſtiget, welches in ein Rad D von 96 Zähnen eingreift; dieſes Rad heißt das **Zuſatzrad**; an der Achſe des Zuſatzrades iſt ein Getrieb d von 16 Triebſtecken befeſtiget, und greift in ein Rad E von 96 Zähnen; mit der Achſe dieſes Rades (des **Walzenrades**) iſt eine Walze e ohngefähr 1¼ Zoll im Durchmeſſer verbunden, worauf ſich eine Schnur, oder eine Darmſaite 16mal ne-

Fig. 80

nebeneinander in die ſchraubenförmigen Vertiefungen aufwinden läßt; an dieſer Darmſaite hängt ein Gewicht von ohngefähr 15 bis 20 Pfund; das Gewicht iſt mit der Walze mittelſt einer Zugrolle verbunden; es iſt nämlich das eine Ende der Saite an der Walze, und das andere Ende, nachdem es über eine am Gewichte befindliche Rolle geführet iſt, unten am Uhrboden befeſtiget. Das Walzenrad iſt mit der Walze durch Beyhilfe eines Sperrades und Sperrkegels dergeſtalt verbunden, daß das mittelſt der Darmſaite aufgewundene Aufziehgewicht die Walze ſammt dem Rade umdrehen könne; wenn aber nach vollendeten 16 Umläufen des Walzenrades die Walze mittelſt einer angeſteckten Kurbel oder des **Uhrſchlüſſels** auf die entgegengeſetzte Seite zu drehen iſt, damit das Gewicht wieder aufgewunden, nämlich die Uhr aufgezogen werde, muß bey dieſer Umdrehung der Walze das Walzenrad in Ruhe verbleiben. Auch pflegt man noch bey dergleichen Uhren eine Vorrichtung anzubringen, durch deren Beyhilfe die Uhr auch bey dem Aufziehen ihren Gang ungeändert beybehält. Bey dieſer Anordnung des Räderwerks kömmt das Walzenrad in 48 Stunden oder 2 Tagen einmal herum, wenn das Minutenrad in 1 Stunde herumläuft. Da nun auf der Walze die von dem Aufziehgewichte angezogene Darmſaite 16mal aufgewunden iſt, ſo wird die Uhr durch 32 Tage fortgehen; nach Verlauf dieſer Zeit aber, oder in jedem Monathe einmal muß die Uhr wieder aufgezogen werden. Das Aufziehgewicht, wenn es ohne der Zugrolle mit der Darmſaite verbunden wäre, müßte eine Höhe $= \pi.1\frac{3}{4}.16$ Zolle zum Sinken haben; mit der Zugrolle aber braucht es nur eine Höhe $= \pi.1\frac{3}{4}.8 = 44$ Zoll. Bey einer ſolchen Einrichtung werden von dem Aufziehgewichte durch die Umdrehung des Walzenrades alle Getriebe und Räder in Umlauf gebracht, und ſie würden wegen der un-

Fig. 81 veränderlichen Wirkung des Aufziehgewichtes mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung umlaufen, wenn nicht durch eine beſondere Vorrichtung das Steigrad gezwungen würde mit gleichförmiger Bewegung umzulaufen, und zwar jeden Umlauf in 1 Minute zu vollenden. Dieſe Vorrichtung beſteht im folgenden.

Das Steigrad Fig. 81 hat 30 keilförmige Zähne, wo die eine Seite des Keils bey jedem Zahn in der Richtung des Halbmeſſers liegt. Die Länge der Zähne iſt ihrer Zwiſchenweite am äuſſeren Umfange, und die Dicke dem dritten Theile dieſer Zwiſchenweite gleich. Die Zähne des Steigrades werden durch den ſogenannten **Anker**, oder **grahamiſchen Hacken** wechſelweiſe aufgehalten und wieder losgelaſſen. Der Anker iſt am beſten eingerichtet, wenn er 12 Zähne des Steigrades umfaſſet, und ſeine Drehungsachſe c um $\frac{1}{5}{}^{3'}$ Halbmeſſer des Steigrades von deſſen Achſe entfernet iſt. Der eine Hacken m des Ankers wird inwendig, und der andere n auswendig von den Zähnen des Steigrades angeſtoſſen. Die Anſtoßflächen des Ankers müſſen kreisförmig aus ſeiner Umdrehungsachſe abgerundet ſeyn. Die Dicke eines jeden Hackens am Anker iſt der halben Zwiſchenweite der Zähne am äuſſeren Umfange gleich. Jeder Hacken iſt etwas weniges ſchräge abgeſchnitten, damit der Zahn des Steigrades ſich ſchnell auslöſe. Die Abrundungshalbmeſſer der Anſtoßflächen ſind von folgender Beſchaffenheit: wenn die Seite eines Zahnes in der Ebene der Achſe des Ankers und der Achſe des Steigrades ſich befindet, ſo muß auſſer dieſem Zahn der 6te auf der innwendigen Anſtoßfläche des Hackens m anliegen; wenn ſodann durch eine geringe Drehung des Steigrades, und Ausweichung des Ankers dieſer Zahn ſich auslöſet, muß auf der anderen Seite von oben gerechnet auſſer dem obenerwähnten vertikalen

Fig. 81

Zähne der 6te auf die auswendige Fläche n des Hackens anſtoſſen; und wenn dieſer ſich auslöſet, muß wieder auf der vorigen Seite einer auf die inwendige Fläche des Hackens anſtoſſen. Weil nun bey dieſer Einrichtung die Anſtoßflächen des Ankers mit den gehörigen Halbmeſſern aus dem Mittelpunkte c abgerundet, und nur etwas weniges ſchräge abgeſchnitten ſind, ſo ſpielt jeder Hacken des Ankers bey unverrücktem Steigrade zwiſchen deſſen Zähnen; dann läßt er den Zahn beynahe plötzlich aus, und in eben dem Augenblicke wird auf der anderen Seite ein Zahn gefangen, wodurch es geſchieht, daß der Sekundenzeiger ohngefähr durch $\frac{5}{6}$ Sekunden auf einem Theilſtriche unverrückt ſteht, und binnen $\frac{1}{6}$ Sekunde auf den folgenden Theilſtreich ſpringet. In dem nämlichen Augenblicke, als ein Zahn des Steigrades über die Schräge des Hackens m oder n hinweggleitſchet, wird der Anker ſeitwärts etwas hinweggeſtoſſen, weil das Steigrad durch das Aufziehgewicht immer herumgetrieben wird. An der Achſe FG Fig. 80 des Ankers iſt ein Stäbchen GK von etlichen Zollen mit einem umgebogenen Arm KL in Geſtalt einer Kurbel befeſtiget; dieſer umgebogene Arm greift in die Pendelſtange, die unten mit einem linſenförmigen Körper von 15 bis 20 Pfund beſchweret iſt, und oben mittelſt einer biegſammen Stahlfeder MN ſich hin und her ſchwingen kann. Dieſes Stäbchen verurſachet, daß der Anker mit dem Pendel einerley Schwingungen machet, und daß ſolche immer fortdauern, ſo lange die Uhr aufgezogen iſt, da ſonſt wegen der nicht vollkommenen Biegſamkeit der Feder MN, und wegen dem Widerſtande der Luft ein ſolches Pendel gar bald zu ſchwingen aufhört. Die Schwingungsachſe M des Pendels liegt oben in der Verlängerung der Achſe des Ankers. Die Länge der Pendelſtange von der Schwingungsachſe bis zum Mittelpunkte der Linſe iſt beynahe 3 Schuhe

Fig. 2 Zoll. Die Linſe läßt ſich mittelſt einer Schraubenmutter höher und niedriger ſtellen, wodurch man es dahin bringen kann, daß ein ſolches Pendel in jeder Sekunde eine Schwingung macht, wo bey jeder Schwingung des Pendels und der damit verbundenen Ausweichung des Ankers ſich ein Zahn des Steigrades auslöſet; und zwar bey einem Umlaufe des Steigrades wird jeder Zahn zweymal ausgelöſet, weil er einmal auf den einen, und dann wieder, ehe noch als er herumkömmt, auf den anderen Hacken des Ankers anſtößet; aus dieſer Urſache hat das Steigrad nur 30, und nicht 60 Zähne. Wenn man dem Steigrade 60 Zähne giebt, und den Perpendikel 9½ Zoll lang macht, ſo wird das Steigrad auch in 1 Minute herumkommen, und ein Zeiger an deſſen Achſe wird an dem in 120 gleiche Theile abgetheilten Sekundenringe halbe Sekunden anzeigen.

II. Eine ſehr einfache und gar nicht koſtbare Anordnung einer aſtronomiſchen Pendeluhr iſt folgende. Das Steigrad, der Anker, und der Perpendikel bleibt wie oben. An der Achſe des Steigrades ſteckt ein Getrieb von 8 Triebſtecken, und greift in das Mittelrad von 120 Zähnen; an der Achſe des Mittelrades ſteckt ein Getrieb von 10 Triebſtecken, und greift in das Hauptrad von 160 Zähnen; die Achſe dieſes Hauptrades geht durch das Zifferblatt, und trägt einen Zeiger; an der Achſe dieſes nämlichen Hauptrades ſteckt ein Getrieb vou 12 Triebſtecken, und greift in das Walzenrad von 144 Zähnen, welches ſo wie das oben beſchriebene mittelſt eines Sperrades und Sperrkegels mit der Walze verbunden iſt. Bey dieſer Einrichtung kömmt der Zeiger an der Achſe des Hauptrades in 4 Stunden, und das Walzenrad in 48 Stunden einmal herum, wenn das Steigrad in jeder Minute einmal herumkömmt; und dieſe Uhr wird wie die ehevor beſchriebene in jedem Monathe nur einmal aufgezogen. Der

Zif-

Zifferring für den Zeiger des Hauptrades wird in vier gleiche Haupttheile eingetheilet. Am Endpunkte der erſten Abtheilung rechts werden die Stundenzahlen 1, 5, 9, am Ende der zweyten Abtheilung unten die Stundenzahlen 2, 6, 10, am Ende der dritten Abtheilung links die Stundenzahlen 3, 7, 11, und am Ende der vierten Abtheilung oben die Stundenzahlen 4, 8, 12 angeſetzet; über dieſes wird jede dieſer vier Abtheilungen noch ferner in 60 gleiche Theile abgetheilet, und jeder 10te Theilſtrich mit den Minutenzahlen 10, 20, 30, 40, 50 bezeichnet. Bey dieſer Einrichtung weiſet der nämliche Zeiger an der Achſe des Hauptrades zugleich Stunden und Minuten; wenn er z. B. Nachmittag zwiſchen der zweyten mit den Stundenzahlen 2, 6, 10, und zwiſchen der dritten mit den Stundenzahlen 3, 7, 11 bezeichneten Abtheilung auf den 35 Theilſtrich weiſet, ſo iſt 2 Uhr 35 Min. oder gegen Abend 6 Uhr 35 Minuten, oder endlich in der Nacht 10 Uhr 35 Minuten; die zu dieſen Stunden und Minuten gehörigen Sekunden weiſet der Sekundenzeiger an der Achſe des Steigrades. Wenn bey dieſer Einrichtung zwiſchen das Hauptrad und zwiſchen das Walzenrad noch ein **Zuſatzrad** von 144 Zähnen mit einem Getriebe von 12 Triebſtecken angebracht wird, ſo daß vom Walzenrade das Getrieb an der Achſe des Zuſatzrades, und vom Zuſatzrade das Getrieb an der Achſe des Hauptrades, u. ſ. w. mittelſt des Aufziehgewichtes in Umlauf gebracht werde, ſo darf die Uhr jedes Jahr nur einmal aufgezogen werden. Der Perpendikel bey dergleichen Uhren hat die gehörige Länge, wenn die Dauerzeit zwiſchen zweyen auf einander folgenden Eintritten eines nämlichen Fixſternes in einen nämlichen Scheitelkreis an der Uhr 23 Stund 56 Min. 4$\frac{1}{10}$ Sekunden beträgt. Die Beobachtung geſchieht mittelſt eines mit Fig.

Fig. dem Fadenkreutze verſehenen Fernrohrs, welches an eine Mauer ſo befeſtiget wird, daß es auf einen Fixſtern entweder im Aequator ſelbſt, oder doch nahe bey demſelben gerichtet ſey.

III. Die Taſchenuhren werden durch eine zuſammengerollte Stahlfeder, die im einem hohlen Cylinder (in dem **Federhauſe**) eingeſchloſſen iſt, beweget. Ihre Einrichtung beſteht kürzlich in folgenden, die man an einer jeden ſolchen Uhr ſehen kann. Die Feder iſt mit dem einem Ende an einer unbeweglichen cylindriſchen Achſe befeſtiget, ſodann über dieſe Achſe etlichemal über einander gewunden, und mit dem anderen Ende an der inneren Fläche des Federhauſes angeheftet. Das Federhaus läßt ſich um die unbewegliche Achſe, ſo wie eine Rolle um den Polzen herumdrehen. An der äuſſeren Oberfläche des Federhauſes iſt eine Kette mit dem einen Ende befeſtiget, ſodann etlichemal über das Federhaus umgewickelt, und mit dem anderen Ende an die kegelförmige Spindel (an die **Schnecke**) angeheftet. Mit der Schnecke iſt das **Schneckenrad** mittelſt eines Sperrades und Sperrkegels verbunden. Wenn man nun die Schnecke mittelſt des Uhrſchlüſſels herumdrehet, nämlich die Uhr aufzieht, ſo wird die Kette ſich auf der Schnecke aufwickeln; eben dadurch muß das Federhaus ſich auf der unbeweglichen Achſe herumdrehen, und die Feder wird dadurch noch ſtärker über einander gewunden, oder aufgerollet. Nachdem die Uhr aufgezogen iſt, ſtrebt die Feder wegen ihrer Elaſticität ſich wieder abzuwickeln, und das Federhaus herumzudrehen, wodurch mittelſt der Kette auch das Schneckenrad herumgetrieben wird. Je mehr ſich die Feder abwickelt, deſto geringer iſt ihre Kraft; und aus dieſer Urſache iſt die Schnecke ſo eingerichtet, daß die Feder immer mittelſt eines gröſſeren Hebelsarmes das Schneckenrad zu dre-

Fig. drehen ſtrebt, je mehr ſie ſich abwickelt. Das Schneckenrad greift in ein Getrieb an der Achſe des **Minutenrades**, und treibt dadurch das Minutenrad ſamt dem Minutenzeiger in 1 Stunde herum. Wenn das Schneckenrad 48 Zähne, und das Getrieb an der Achſe des Minutenrades 8 Triebſtecken enthält, ſo kömmt das Schneckenrad in 6 Stunden einmal herum, vorausgeſetzt daß das Minutenrad in jeder Stunde einmal herumlaufe. Zwiſchen dem vorderen Uhrboden, und zwiſchen dem Zifferblatte ſteckt an der Achſe des Minutenrades das **Zeigerwerk** ſo wie bey der oben beſchriebenen aſtronomiſchen Pendeluhr. Das Minutenrad wird durch folgende Anordnungen gezwungen in jeder Stunde einmal umzulaufen. Das Minutenrad hat 54 Zähne, und greift in ein Getrieb von 6 Triebſtecken an der Achſe des **Mittelrades**; das Mittelrad hat 48 Zähne, und greift in ein Getrieb von 6 Triebſtecken an der Achſe des **Kronrades**; das Kronrad hat auch 48 Zähne, und greift in ein Getrieb von 6 Triebſtecken an der Achſe des **Steigrades**; dadurch kömmt das Steigrad in jeder Stunde $\frac{54 \cdot 48 \cdot 48}{6.6.6} = 576$ mal herum, wenn das Minutenrad in jeder Stunde einmal herumläuft. Das Steigrad hat 15 ſchräge Zähne in Geſtalt eines Kronrades, deſſen Bewegung von der **Lappenſpindel**, an der die **Unruhe** in Geſtalt eines Schwungrades angeſteckt iſt, wechſelweiſe aufgehalten, und dann wieder erlaubet wird. Damit die Bewegung gleichförmig werde, und die gehörige Zeit aushalte, iſt unter der Unruhe die **Spiralfeder** angebracht, deren vibrirender Theil durch eine beſondere unter der **Stell-** oder **Richtſcheibe** befindliche Vorrichtung kürzer oder länger gemacht werden kann, wenn die Uhr geſchwinder oder langſamer gehen ſoll. Weil die Lappenſpindel

Fig. zwey Lappen hat, ſo muß jeder Zahn des Steigrades bey einem Umlaufe zweymal an die Lappen anſtoſſen, nämlich zwey **Spindelſtreiche** machen; bey einem Umlaufe des Steigrades geſchehen demnach 30 Spindelſtreiche, und folglich muß eine ſolche Uhr, wenn ſie recht geht, in einer Stunde 576.30 = 17280 Spindelſtreiche machen. Da nun eine Stunde 3600 Sekunden enthält, ſo kommen auf 5 Sekunden 24 Spindelſtreiche.

Wenn man eine Sackuhr haben wollte, welche in jeder Sekunde 4 Spindelſtreiche macht, ſo müßte bey derſelben das Steigrad von 15 Zähnen in $7\frac{1}{2}$ Sekunden herumkommen. Setzet man nun das Produkt der Zahlen der Triebſtecken der Getriebe am Steigrade, am Kronrade, und am Mittelrade $= x$, das Produkt aber der Zahlen der Zähne am Kronrade, am Mittelrade, und am Minutenrade $= X$, ſo iſt die Umlaufszeit des Steigrades $7\frac{1}{2}$ Sekunden zu der Umlaufszeit 3600 Sek. des Minutenrades $= x : X$; folglich

$$\frac{x}{X} = \frac{7\frac{1}{2}}{3600} = \frac{1}{480} = \frac{1.1.1}{8\,8.7\frac{1}{2}} = \frac{6.6.6}{45.48.48};$$

die Zahlen des Triebſtecken der drey geſuchten Getriebe ſind demnach *6, 6, 6*, und die Zahlen der Zähne am Kronrade 45, am Mittelrade aber, und auch am Minutenrade 48; das Getrieb am Minutenrade und das Schneckenrad verbleibt wie oben. Eine ſolche Uhr macht in einer Stunde 14400 Spindelſtreiche, und das Steigrad kömmt in einer Stunde 480mal herum.

IV. Wenn man bey einer Uhr auch einen **Mondzeiger** anbringen will, der nämlich in derjenigen Zeit einmal herumkömmt, welche von einem Neumonde bis zum anderen verfließt, ſo läßt ſich die Anordnung des dazu erforderlichen Räderwerks auf folgende Art finden.

Die Zeit von einem Neumonde bis zum anderen iſt 29 Tage 12 Stund 44 Min. 3 Sek. $= \frac{850481}{1200}$ Stund; ſo groß iſt demnach auch die Umlaufszeit des Mondenzeigers, und des Mondrades, an deſſen Achſe der Mondzeiger oder die Mondſcheibe ſteckt. Das Mondrad erhalte ſeine Bewegung von einem Getriebe an der Hülſe des Stundenrades, deſſen Umlaufszeit $=$ 12 Stund iſt; das Produkt der Zahlen der Triebſtecken ſey $= x$, das Produkt der Zahlen der Zähne aber $= X$, ſo iſt vermög (§. 170. II.) $12 : \frac{850481}{1200} = x : X$; folglich $\frac{x}{X} = \frac{14400}{850481}$.

Wenn man nun dieſen Bruch nach (2ter Band Zuſatz III.) ohne merklicher Veränderung des Werthes in einen einfachern verwandelt, ſo kann der Bruch $\frac{x}{X} = \frac{16}{935}$ beybehalten werden, weil ſich Zähler und Nenner in eine gleichgroſſe Anzahl tauglicher Faktoren zerlegen läßt, und das Mondenrad bey einer ſolchen Anordnung in 29 T. 12 St. 45 Min. herumkömmt anſtatt 29 T. 12 St. 44 M. 3 S. ſo daß der Fehler in dieſer Zeit nur 57 Sek. beträgt, weil $16 : 945 = 12 : x = 29$ T. 12 St. 45. Min. ſich verhält. Dieſer Bruch $\frac{x}{X} = \frac{16}{945}$ läßt ſich in die Faktoren $\frac{x}{X} = \frac{8.8}{60.63}$ zerlegen. Es kann daher ein Getrieb von 8 Triebſtecken an der Hülſe des Stundenrades in ein Rad von 60 Zähnen eingreifen; und ein Getrieb von 8 Triebſtecken an der Achſe dieſes Rades greift in das Mondenrad von 63 Zähnen.

Fig. V. Nun ſtelle man ſich vor, daß keiner von den abgekürzten Brüchen ſich in ſchickliche Faktoren zerlegen laſſe, ſo muß man noch ferner folgendes vornehmen. Man kann von den abgekürzten Brüchen

$$\frac{x}{X} = \frac{1}{59}, \frac{16}{945}, \frac{33}{1949}, \frac{49}{2894}, \frac{425}{25101}, \frac{474}{27995}, \text{u. ſ. w.}$$

den Bruch $\frac{x}{X} = \frac{49}{2894}$ beybehalten, deſſen Nenner nicht gar zu groß iſt, und der doch nicht einmal um 2 Sekunden fehlen würde, wenn er ſich in Faktoren zerlegen lieſſe.

Aus der Gleichung $\frac{x}{X} = \frac{49}{2894}$ folgt $X = 59x + \frac{3x}{49}$; dafür ſetze man $X = 59x + \frac{3x+m}{49}$, wo m entweder poſitiv oder negativ, und zwar von der Beſchaffenheit zu nehmen iſt, daß $\frac{3x+m}{49}$ eine ganze Zahl ſey, und daß die daraus für x und X abgeleiteten Zahlen ſich in taugliche Faktoren zerlegen laſſen.

Weil nun $\frac{3x+m}{49}$ eine ganze Zahl ſeyn muß, damit X eine ganze Zahl wird, ſo ſetze man $\frac{3x+m}{49} = A$; daraus folgt $x = \frac{49A-m}{3} = 16A + \frac{A-m}{3}$.

Auch $\frac{A-m}{3}$ muß eine ganze Zahl ſeyn, damit x eine ganze Zahl wird; es ſey $\frac{A-m}{3} = B$, ſo iſt $A = 3B + m$.

Daraus folgt $x = 49B + 16m$, und $X = 2894B + 945m$; oder wenn man M ſtatt B ſchreibt, ſo iſt $x = 49M + 16m$, und $X = 2894M + 945m$; folglich $\frac{x}{X} = \frac{49M+16m}{2894M+945m}$. Fig.

Nun ſetze man $M = 0$, und $m = 1$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{16}{945} = \frac{8.8}{60.63}$ wie oben.

Setzet man aber $M = -1$, und $m = 7$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{63}{3721} = \frac{7.9}{61.61}$; und dieſe Anordnung fehlt nur ohngefähr um 4 Sek.

Wenn man mit dem abgekürzten Bruche $\frac{x}{X} = \frac{474}{27995}$ eine eben ſolche Verwandlung vornimmt, ſo findet man $\frac{x}{X} = \frac{474M+49m}{27995M+2894m}$.

Denn aus der Gleichung $\frac{x}{X} = \frac{474}{27995}$ folgt

$X = 59x + \frac{29x}{474}$; dafür ſetze man

$$X = 59x + \frac{29x+m}{474}.$$

Es ſey $\frac{29x+m}{474} = A$, ſo iſt $x = 16A + \frac{10A-m}{29}$.

Ferner $\frac{10A-m}{29} = B$, ſo iſt $A = 2B + \frac{9B+m}{10}$.

Und nun $\frac{9B+m}{10} = C$, ſo iſt $B = C + \frac{C-m}{9}$.

Und endlich $\frac{C-m}{9} = M$ geſetzet, giebt $C = 9M + m$.

Daraus folgt
$$\begin{aligned} B &= 10M + m \\ A &= 29M + 3m \\ x &= 474M + 49m \\ X &= 27995M = 2894m; \end{aligned}$$
nämlich $\frac{x}{X} = \frac{474M+49m}{27995M+2894m}$.

Setzet man nun $M = 2$, und $m = 3$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{1095}{64672} = \frac{3.5.73}{32,43.47} = \frac{73.10.9}{96.86.47}$; und der Fehler beträgt nur ohngefähr $\frac{1}{4}$ Sekunde.

VI. Die Dauer eines Jahres, nämlich die Zeit von einem Anfange des Frühlings bis zum nächſt folgenden iſt 365 T. 5 St. 48 M. $45\frac{1}{2}$ S. $= \frac{63113851}{7200}$ Stunden. Wenn es nun erforderlich wäre bey einer Uhr ein Rad anzubringen, welches von einem Getriebe an der Hülſe des Minutenzeigers ſeine Bewegung erhält, und ſeinen Umlauf in dieſer Zeit vollendet, ſo läßt ſich die Anordnung des dazu erforderlichen Räderwerks auf folgende Art berechnen.

Es iſt in dieſem Falle $\frac{x}{X} = \frac{7200}{63113851}$; daraus folgen die abgekürzten Brüche
$$\frac{x}{X} = \frac{1}{8765}, \frac{1}{8766}, \frac{5}{43829}, \frac{11}{96424}, \frac{16}{140253},$$
$\frac{443}{3927084}$, u. ſ. w. Man kann den Bruch $\frac{x}{X} = \frac{16}{140253}$ beybehalten; daraus folgt $X = 8765x + \frac{13x}{16}$; dafür ſetze man $X = 8765x + \frac{13x+m}{16}$.

Es ſey $\frac{13x+m}{16} = A$, ſo iſt $x = A + \frac{3A-m}{13}$;

Ferner $\frac{3A-m}{13} = B$, ſo iſt $A = 4B + \frac{B+m}{3}$;

Endlich $\frac{B+m}{3} = M$, ſo iſt $B = 3M - m$.

Daraus folgt $x = 16M - 5m$,

und $X = 140253M - 43829m$;

folglich iſt $\frac{x}{X} = \frac{16M-5m}{140253M-43829m}$.

Setzet man nun $M = -1$, und $m = -5$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{9}{78892} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 163} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18}{110 \cdot 110 \cdot 120 \cdot 163}$, und der Fehler beträgt in einem Jahre 2 Min. $5\frac{1}{2}$ Sek.

Setzet man aber $M = 4$, und $m = 3$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{49}{429525} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 83} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8}{50 \cdot 69 \cdot 83 \cdot 96}$, und der Fehler iſt nur ohngefähr 13 Sekunden.

Anmerk. In der Geichung $\frac{x}{X} = \frac{16M-5m}{140253M-43829m}$ kann auch m negativ ſeyn; folglich kann auch dieſe Gleichung ſo geſchrieben werden $\frac{x}{X} = \frac{16M+5m}{140253M+43829m}$.

Wenn man im gegenwärtigen Beyſpiele, ſo wie auch im vorhergehenden, den verwandelten Bruch mit den abgekürzten Brüchen vergleichet, ſo erhellet es daraus ganz deutlich, wie man aus den einmal gefundenen abgekürzten Brüchen den verwandelten Bruch ohne aller ferneren Rechnung ableiten könne.

In ſolchen Fällen, wie der gegenwärtige iſt, wo zu der Anordnung des Räderwerks vier Getriebe, und vier Räder, oder noch mehr erforderlich ſind, kann man

Fig. auch die Zahlen für die Triebſtecken und für die Zähne bis auf zwey Getriebe und zwey Räder nach Belieben annehmen, und nur für dieſe letzten zwey Getriebe und Räder die Triebſtecken und Zähne nach der angeführten Art berechnen, wodurch die Rechnung um vieles abgekürzet wird; auch kann auf dieſe Art eine kleine Faktorentafel (z. B. die in meinen **Logarithm. Tafeln Seite** 188 befindliche) mit Vortheil gebrauchet werden.

VII. Es ſey zum letzten Beyſpiele von einem Getriebe an der Achſe des Minutenrades ein Räderwerk zu bewegen, wo das letzte Rad in 101 Stunden einmal herumkömmt. Wenn man in dieſem Beyſpiele zwey Getriebe jedes von n Triebſtecken, und zwey Räder anbringet, wovon das eine aus 101 und das andere aus n^2 Zähnen beſteht, ſo iſt die Abſicht vollkommen erreicht; allein wir wollen uns vorſtellen, 101 ſey eine ſo groſſe Primzahl, daß ſich in ein Rad nicht ſo viele Zähne einſchneiden laſſen, als dieſe Primzahl Einheiten enthält. In einem ſolchen Falle kann durch Räder und Getriebe die Abſicht nicht vollkommen genau erreicht werden; jedoch kann man ſich der Genauigkeit ſo ſehr nähern als man will. Wenn man in dieſem Beyſpiele ſtatt dem Verhältniße $\frac{x}{X} = \frac{1}{101}$ das Verhältniß $\frac{x}{X} = \frac{1}{100}$, oder $\frac{x}{X} = \frac{1}{102}$ annehmen wollte, ſo wäre der Fehler zu grob, er würde bey einem Umlaufe 1 Stunde betragen. Man kann ſich der Genauigkeit auf folgende Art nähern.

Statt $\frac{x}{X} = \frac{1}{101}$ ſchreibe man $\frac{x}{X} = \frac{1}{100{,}99}$, $= \frac{100}{10099}$, ſo iſt $X = 100x + \frac{99x}{100}$; dafür ſetze man $X = 100x + \frac{99x + m}{100}$.

Es

Es ſey $\frac{99x+m}{100} = A$, ſo iſt $x = A + \frac{A-m}{99}$.

Ferner $\frac{A-m}{99} = M$, ſo iſt $A = 99M + m$.

Daraus folgt $x = 100M + m$

$$X = 10099M + 101m$$

Es iſt demnach $\frac{x}{X} = \frac{100M+m}{10099M+101m}$.

Nun ſetze man für M und m ſolche Zahlen, daß ſich Zähler und Nenner in ſchickliche Faktoren zerlegen laſſen. Wenn man zwey Getriebe von 7 und 8 Triebſtecken haben will, daß nämlich der Zähler 56 wird, ſo ſetze man $M = 1$, und $m = -44$; ſodann iſt $\frac{x}{X} = \frac{56}{5655} = \frac{7 \cdot 8}{65 \cdot 87}$, und der Fehler iſt 1 Min. $4\frac{2}{7}$ Sek. Setzet man aber $M = 1$, und $m = 56$, ſo iſt $\frac{x}{X} = \frac{156}{15755} = \frac{12.13}{115.137}$, und der Fehler beträgt nur 23 Sek. Wenn kein Rad über 100 Zähne haben ſollte, ſo ſetze man $M = 1$, und $m = 121$; alsdann iſt $\frac{x}{X} = \frac{221}{22320} = \frac{12.13.17}{60.62.72}$, und der Fehler beträgt nur 16 Sek. Man kann den Fehler noch kleiner machen, wenn man ſtatt dem gegebenen Verhältniſſe $\frac{x}{X} = \frac{1}{101}$, das Verhältniß $\frac{x}{X} = \frac{1}{100{,}999}$, oder auch $\frac{x}{X} = \frac{1}{101{,}001}$ annimmt, und ſodann mit dieſem Verhältniſſe die fernere Verwandlung vornimmt.

Anmerk. Mittelſt der hier vorgetragenen Gründe, und mittelſt §. 108. III. kann man zu einer Pendeluhr von einer gegebenen Anordnung des Räderwerks die Länge

Fig. des Perpendikels beſtimmen, und auch zu einem gegebenen Perpendikel die Eintheilung des Räderwerks anordnen, damit das Minutenrad in jeder Stunde einmal herumkomme. Es ſey z. B. eine Thurmuhr anzuordnen, wo der Perpendikel ohngefähr 36 Fuß lang iſt, ſo macht vermög (§. 108. III.) ein ſolcher Perpendikel in einer Stunde 1064 Pendelſchläge. Setzet man nun das Produkt aus den Zahlen der Zähne der Räder $= X$, und das Produkt aus den Zahlen der Triebſtecken $= x$, ſo iſt wegen dem Steigrade $\frac{2X}{x} = 1064$ nämlich $\frac{X}{x} = 532 = 4 \cdot 7 \cdot 19 = 19 \cdot \frac{32}{6} \cdot \frac{42}{8}$; es kann alſo das Steigrad 19 Zähne und deſſen Getrieb 6 Triebſtecken, das Mittelrad 32 Zähne und deſſen Getrieb 8 Triebſtecken, und endlich das Minutenrad 42 Zähne haben. Giebt man ferner dem Getriebe des Minutenrades 10 Triebſtecken, dem Walzenrade 60 Zähne, und der Walze 6 Umgänge, ſo wird die Uhr in 36 Stunden ablaufen. Es iſt in dergleichen Fällen nicht nothwendig, daß die Zähne des Steigrades und der Anker die oben beſchriebene Geſtalt haben. Bey dem Steigrade können ſtatt der keilförmigen Zähne cylindriſche oder priſmatiſche Stäbchen auf deſſen Ebene ſenkrecht eingeſetzet, und dabey ein ſolcher Anker angebracht werden, wie er in Fig. 81 mit punktirten Linien angedeutet iſt. Daß man auch vermög den angeführten Gründen bey einem Uhrwerke, wenn daraus ein Rad oder ein Getrieb verlohren gegangen, die Zahl der Zähne oder Triebſtecken deſſelben aus der bekannten Umlaufszeit des letzten Rades finden könne iſt überflüſſig zu erinneren.

§. 172.

§. 172.

Fig. 76 77 78 Eine Verbindung mehrerer Rollen in einem einzigen Kloben heißt eine **Flaſche**; und eine Verbindung zweyer Flaſchen mittels eines Seils, ſo daß das Seil wechſelweis um eine Rolle der unbeweglichen (der feſten) und um eine Rolle der beweglichen (der loſen) Flaſche geführet iſt, oder umgekehrt, heißt ein **Flaſchenzug**. Wenn die Rollen in den Flaſchen über einander geſtellt ſind, wie **Fig.** 76, und 77, ſo müſſen ſolche von ungleicher Gröſſe ſeyn, damit die Seile einander ausweichen können; man pflegt die Anordnung ſo zu machen, daß die Seile mit einander parallel laufen, weil eine ſolche Richtung des Seils bey der beweglichen Rolle die vortheilhafteſte iſt (§. 164. II.); dieſes wird erhalten, wenn die Halbmeſſer der Rollen nach der Ordnung, wie das Seil um dieſelben geführet iſt, ſich wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. w. verhalten. Sind hingegen die Rollen in den Flaſchen nebeneinander an einem gemeinſchaftlichen Polzen befindlich, wie **Fig.** 78, ſo können ſelbe auch von gleicher Gröſſe ſeyn. Das eine Ende des Seils wird entweder an die unbewegliche Flaſche geknüpfet, und ſodann zu erſt über eine Rolle der beweglichen Flaſche geführet wie **Fig.** 76, oder es wird an die bewegliche Flaſche geknüpfet, und zu erſt über eine Rolle der unbeweglichen Flaſche geführet wie **Fig.** 77, wo im letzten Falle in der unbeweglichen Flaſche die Zahl der Rollen um eins gröſſer ſeyn muß als in der beweglichen, wenn Kraft und Laſt nach einerley Gegend ziehen. Daß man in **Fig.** 78 das Seil auch an die bewegliche Flaſche knüpfen könne, iſt für ſich klar. Bey dieſer Gattung des Flaſchenzugs wird gemeiniglich noch eine kleine Rolle entweder an den unteren Boden der unbeweglichen, oder an den oberen Boden der beweglichen Fla-

Fig. ſche in der Mitte des Bodens ſo befeſtiget, daß die
76 erweiterte Ebene dieſer kleinen Rolle die Ebenen der
77 übrigen Rollen unter rechten Winkeln durchſchneidet. Durch
78 dieſe kleine Rolle wird das Seil ſo durchgezogen, daß zu beyden Seiten die Theile gleich lang ſind; und endlich werden beyde Theile des Seils wechſelsweiſe über zwey Rollen der einen und über zwey Rollen der anderen Flaſche geführet, wo im letzteren Falle, wenn die kleine Rolle ſich an der beweglichen Flaſche befindet, in der unbeweglichen Flaſche zwey Rollen mehr ſeyn müſſen als in der beweglichen.

§. 173.

Sind an einem Flaſchenzuge die Seile, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt, parallel, ſo verhält ſich im Stande des Gleichgewichts die Kraft P, welche an einem Ende des Seiles zieht, zur Laſt Q, wie eins zur Zahl der Seile n, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt.

Denn da in dieſer Vorausſetzung die Seile wegen ihrer Biegſamkeit, und wegen der Beweglichkeit der Rollen gleich ſtark geſpannet ſind, ſo trägt jedes Seil einen gleich groſſen Theil der Laſt, und zwar denjenigen Theil, der herauskömmt, wenn man die Laſt Q mit der Zahl n der Seile dividiret, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt, nämlich jedes dieſer Seile trägt $\frac{1}{n} Q$; nun hält die Kraft P dieſem Theile $\frac{1}{n} Q$ das Gleichgewicht, wenn $P = \frac{1}{n} Q$ iſt; folglich iſt $P : Q = 1 : n$.

Die-

Dieſes läßt ſich auch auf folgende Art erweiſen. Fig. Die Kraft P, womit das Seil wegen ſeiner Biegſamkeit, und wegen der Beweglichkeit der Rollen nach ſeiner ganzen Länge gleich ſtark geſpannet wird, erhält in Fig. 76 und 78 an der Rolle 1 die Laſt 2P, an der Rolle 3 die Laſt 2P, und an der Rolle 5 auch die Laſt 2P im Gleichgewichte vermög (§. 164.); es iſt alſo P mit 2P + 2P + 2P = 6P im Gleichgewichte; iſt daher Q = 6P, ſo iſt auch P mit Q im Gleichgewichte, und es iſt P : Q = 1 : 6 **wie eins zur Zahl der Seile, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt.**

In Fig. 77, wo das Seil an die bewegliche Flaſche geknüpfet iſt, erhält die Kraft P an dem Hacken a die Laſt P, an der Rolle 2 die Laſt 2P, und an der Rolle 4 auch die Laſt 2P im Gleichgewichte; es iſt alſo P mit P + 2P + 2P = 5P im Gleichgewichte; iſt daher Q = 5P, ſo iſt auch P mit Q im Gleichgewichte, und es iſt P : Q = 1 : 5 **wie eins zur Zahl der Seile, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt.**

I. Wären die Seile nicht parallel, ſo müßte man vermög (§. 164. II.) ſuchen, was für einer Laſt an jeder beweglichen Rolle die Kraft P das Gleichgewicht zu halten im Stande ſey, und müßte alle dieſe Laſten zuſammen addiren um die Laſt zu finden, welche mit der Kraft P das Gleichgewicht hält. Eine geringe Abweichung der Seile von der parallelen Lage kann in der Ausübung bey der Anordnung eines Flaſchenzugs, und Berechnung des Gleichgewichts an demſelben auſſer Acht gelaſſen werden. Derowegen iſt nicht nothwendig, daß in Fig. 76 und 77 die Halbmeſſer der Rollen genau ſo zu nehmen wie die natürlichen Zahlen, weil ſie ſonſt zu groß anwachſen; es iſt genug, wenn die Rollen nur

Fig. 79 dergeſtalt zunehmen, daß die Seile einander ausweichen können.

II. Steigt die Laſt um einen Fuß, ſo muß ſich jedes Seil, woran die bewegliche Flaſche mit der Laſt hängt, um einen Fuß verkürzen, und folglich muß die Kraft um ſo viel Fuß ſinken, als Seile an der beweglichen Flaſche angebracht ſind. **Es verhalten ſich demnach auch am Flaſchenzuge Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts, wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, oder wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten bey einer gleichförmigen Bewegung.**

Anmerk. Die Rollen kann man noch auf andere Arten mit einander verbinden; ſo kann man z. B. Fig. 79 das Seil einer Zugrolle A, woran die Laſt Q hängt, an den Kloben einer zweyten Zugrolle B knüpfen, und das Seil der zweyten an eine dritte C u. ſ. w. Alsdann iſt, wenn die Zahl der Zugrollen $= n$ iſt, im Stande des Gleichgewichts $P : Q = 1 : 2^n$, weil Q an der erſten Zugrolle A von $\frac{1}{2}Q$, an der zweyten von $\frac{1}{4}Q = \frac{Q}{2^2}$, an der dritten von $\frac{Q}{2^3}$, und an der $n$ten Zugrolle von $\frac{Q}{2^n} = P$ im Gleichgewichte erhalten wird. Allein dieſe Anordnung hat in der Ausübung viele Unbequemlichkeiten, und wird faſt niemals gebraucht.

§. 174.

Eine Schraube ohne Ende iſt eine Spindel BF Fig. 83 mit Schraubengängen verſehen, womit ſie ſtatt eines gewöhnlichen Getriebes in ein Stirnrad N eingreift, an deſſen Welle S eine Laſt Q entweder mittelſt

telſt eines Seils oder ſonſt auf eine andere Art angebracht iſt. Die Spindel iſt am Umfange des Rades in der Ebene desſelben als eine Tangente angebracht, und wird gemeiniglich mittelſt der Kurbel **C** von einer Kraft **P** umgedrehet; dadurch greifen die Schraubengänge zwiſchen die Zähne des Rades, deren Figur darnach eingerichtet ſeyn muß, ſchieben einen Zahn nach dem anderen fort, und bringen auf dieſe Art das Rad in Umlauf. Wenn an der Schraube ein einfaches Gewinde befindlich iſt, ſo wird bey jedem Umlaufe der Spindel nur ein einziger Zahn fortgeſchoben; bey einem Umlaufe des Rades muß demnach die Spindel ſo vielmal umlaufen, als das Rad Zähne enthält; wenn aber die Spindel mit einem 2fachen, 3fachen, *n*fachen Gewinde verſehen iſt, ſo werden bey jedem Umlaufe der Spindel 2, 3, *n* Zähne des Rades fortgeſchoben, und die gleichzeitigen Umlaufszahlen des Rades und der Spindel von einem *n*fachen Gewinde (ſo wie auch die Umlaufszeiten der Spindel und des Rades bey einer gleichförmigen Bewegung) verhalten ſich wie der **Gewindezeiger** *n* zur Zahl der Zähne des Rades. Die Aufgabe §. 171. VII. läßt ſich demnach auch genau auflöſen, wenn man an die Achſe des Minutenrades eine Schraubenſpindel mit einem einfachen Gewinde befeſtiget, und ſelbe in ein Rad von 101, oder eine Schraubenſpindel mit einem 2fachen Gewinde in ein Rad von 202 Zähnen eingreifen läßt. In dergleichen Fällen, wo die Schraubenſpindeln ſtatt der Getriebe gebrauchet werden, ſind die Schraubenſpindeln mit mehrfachen Gewinden den Schraubenſpindeln mit einfachen Gewinden vorzuziehen, weil ſie williger und leichter umlaufen. Fig. 83

§ 175.

§. 175.

Fig. 83 **An der Schraube ohne Ende verhält ſich im Stande des Gleichgewichtes die Kraft zur Laſt, wie das Produkt aus dem Halbmeſſer der Welle, woran die Laſt angebracht iſt, multipliciret mit der Höhe des Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde zum Produkte aus dem Halbmeſſer des Stirnrades multipliciret mit dem Umkreiſe, deſſen Halbmeſſer dem Hebelsarm der Kraft gleich iſt.**

Es ſey Fig. 83 die Kraft P mit der Laſt Q im Gleichgewichte; der Druck der Zähne des Rades gegen die eingreifenden Schraubengänge der Spindel ſey $= p$, der Halbmeſſer der Welle bis zur Mitte des ſich aufwindenden Seiles $= S$, der Halbmeſſer des Rades bis zur Mitte der Zähne $= R$, die Höhe eines Schraubenganges $= a$, und der Hebelsarm der Kraft an der Spindel, nämlich der Kurbelbug $= C$, ſo iſt vermög (§. 163.) am Wellrade $p : Q = S : R$, folglich $p = \frac{Q.S}{R}$; dieſen Druck $p = \frac{Q.S}{R}$ erhält die Kraft P mittelſt der Schraube im Gleichgewichte; folglich iſt $P : p = a : 2C.\pi$ vermög (§. 166.), nämlich $P = \frac{a.p}{2C.\pi} = \frac{S.aQ}{R.2C\pi}$; es iſt demnach $P : Q = S.a : R.2C\pi$. Oder noch kürzer,

es iſt $p : Q = S : R$,
und $P : p = a : 2C\pi$;

folglich auch $P : Q = S.a : R.2C\pi$.

I. Anſtatt der Laſt Q, kann man auch die Welle mit Zähnen oder Triebſtecken verſehen, und ſolche noch in ein anderes Räderwerk eingreifen laſſen. Man kann auch die Laſt mittelſt eines Flaſchenzugs mit der Welle verbinden. Das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt in dergleichen Fällen iſt leicht zu finden, wenn man zu erſt unterſuchet, was für eine Kraft am Umfange des Stirnrades, worein die Schraubenſpindel greifet, zum Gleichgewichte mit der Laſt erforderlich ſey; dieſe gefundene Kraft iſt die Laſt an der Schraubenſpindel, welche von der Kraft an der Kurbel im Gleichgewichte erhalten wird. Fig.

II. Damit die Schraubengänge gehörig zwiſchen die Zähne eingreifen, muß die Höhe eines Schraubenganges bey einem einfachen Gewinde, nämlich die Zwiſchenweite von der Mitte eines Gewindes bis zur Mitte des nächſt folgenden, genau ſo groß ſeyn, als die Entfernung der Mittelpunkte zweyer auf einander folgenden Zähne; bey einem mehrfachen Gewinde muß auch die Zwiſchenweite von der Mitte eines Gewindes bis zur Mitte des nächſt folgenden eben ſo groß, und folglich die Höhe eines Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde einer $n$fachen Schraube $n$mal ſo groß ſeyn als die Entfernung der Mittelpunkte zweyer auf einander folgender Zähne. Wenn daher das Rad, deſſen Halbmeſſer $= R$ iſt, an ſeinem Umfange N Zähne hat, ſo iſt die Zwiſchenweite der Gewinde $= \frac{2R\pi}{N}$, und die Höhe eines Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde bey einer $n$fachen Schraube $a = \frac{n.2R\pi}{N}$; daraus folgt $\frac{a}{R} = \frac{n.2\pi}{N}$; nun iſt vermög vorhergehenden

im

im Stande des Gleichgewichts $P = \frac{S.a.Q}{R.2C\pi}$; folglich auch $P = \frac{nSQ}{NC}$, und $P : Q = n.S : N.C$, nämlich **die Kraft verhält ſich zur Laſt, wie das Produkt aus dem Hebelsarm der Laſt multipliciret mit dem Gewindezeiger *n* zum Produkt aus dem Hebelsarm der Kraft multipliciret mit der Zahl der Zähne des Rades.** Ferner iſt vermög vorhergehenden $P : p = a : 2C\pi$; folglich auch $P : p = n.R : N.C$, nämlich **die Kraft an der Schraubenſpindel zur Laſt am Umfange des Stirnrades, wie das Produkt aus dem Halbmeſſer des Stirnrades multipliciret mit dem Gewindezeiger *n* zum Produkte aus dem Hebelsarm der Kraft multipliciret mit der Zahl der Zähne des Rades.** Auch iſt nun leicht einzuſehen, daß auch an der Schraube ohne Ende Kraft und Laſt einander im Gleichgewichte erhalten, wenn ſie ſich verhalten wie umgekehrt ihre in einerley Zeit zurückgelegten Wege, oder auch wie umgekehrt ihre Geſchwindigkeiten bey einer gleichförmigen Umdrehung der Schraubenſpindel.

§. 176.

Durch Hilfe der bisher vorgetragenen Sätze iſt es nun ſehr leicht an den zuſammengeſetzten Maſchinen, wenn ſie aus noch ſo vielen einfachen Maſchinen von einerley oder von verſchiedener Art zuſammengeſetzt ſind, das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt im Stande des Gleichgewichts zu beſtimmen. So z. B. läßt ſich bey dem Schiebrade Fig. 85. das Gleichgewicht mittelſt der Winkelhebel RCN, SCM, und mittelſt des Wellrades ſehr leicht beſtimmen.

Der Artillerie-Hebzeug iſt eine Maſchine, welche aus einem Flaſchenzuge, und aus einem Wellrade zuſammengeſetzt iſt; dieſer Hebzeug beſteht bey uns aus vier, ſonſt auch nur aus drey Stützen, die unten ſo weit von einander ſtehen, daß man mit einem Wagen dazwiſchen fahren kann um ein Kanonenrohr auf- und abzuladen, oder auch um ſelbes in die Laffete zu legen, und daraus zu nehmen. Oben kommen die Stützen in Geſtalt einer Pyramide zuſammen, und werden mit einem durchgeſteckten eiſernen Polzen verbunden. An dieſem Polzen hängt eine unbewegliche Flaſche mit vier Rollen an einem gemeinſchaftlichen Polzen nebſt einer kleinen Rolle nach der Quer unten am äuſſern Boden dieſer Flaſche; die untere bewegliche Flaſche enthält ebenfalls vier Rollen an einem gemeinſchaftlichen Polzen. Die zwey Flaſchen ſind mit einem Seile verbunden, welches zu erſt durch die kleine Rolle am unteren Boden der oberen Flaſche bis zur Hälfte ſeiner Länge durchgezogen, ſodann mit beyden Enden wechſelweis über zwey Rollen der unteren und über zwey Rollen der oberen Flaſche geführet, und endlich mit beyden Enden an eine horizontale Welle befeſtiget iſt, welche in ihren Pfahnen ſeitwärts an den Stützen mittelſt durchgeſteckter Hebel, oder mittelſt eines angeſteckten Kreutzes umgedrehet wird. An einem Ende der Welle iſt eine Sperrſcheibe mit einem Sperr- oder Einfallhacken angebracht um die aufgezogene Laſt in jeder Höhe ohne Beyhilfe einer ſonſtigen Kraft zu erhalten. Alles iſt ſo eingerichtet, daß man es bequem zuſammen legen, von einem Orte zum anderen überführen, und allenthalben leicht aufrichten kann. Wenn man die ganze Laſt, das Gewicht der beweglichen Flaſche ſamt dem Gewichte der herabhangenden Seile mitgerechnet, $= Q$ ſetzet, ſo iſt am Umfange der Welle eine Kraft $= \frac{1}{4}Q$ zum

Fig.

Fig. zum Gleichgewichte erforderlich, weil die Laſt an vier Paar Seilen hängt, wovon ein Paar ſich auf die Welle windet; ſo groß iſt demnach auch die Laſt, welche am Wellrade mittelſt der angebrachten Kraft zu überwinden iſt; ſetzet man nun den Halbmeſſer der Welle $= a$, und den Hebelsarm für die Kraft $= A$, ſo iſt die Kraft $P : \frac{1}{4}Q = a : A$; folglich $P = \frac{aQ}{4A}$; wenn z. B. der Halbmeſſer der Welle $a = 4$ Zoll, und der Hebelsarm der Kraft $A = 18$ Zoll geſetzet wird, ſo iſt an einem ſolchen Hebzeuge eine Kraft $P = \frac{1}{18}Q$ zum Gleichgewichte mit der Laſt Q erforderlich. Bey einem *unausgebohrten* 24pfündigen Kanonenrohre iſt beyläufig $Q = 6000$ Pfund; folglich iſt die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft $P = 333\frac{1}{3}$ Pfund. Wenn man daher ſechs Menſchen, an jedem Ende der Welle drey, anſtellet, deren jeder beyläufig eine Kraft von 60 Pfund anwenden kann, ſo werden ſie die Laſt von 6000 Pfund im Gleichgewichte erhalten, und auch bewegen können, wenn der Ueberſchuß von 360 Pfund über $333\frac{1}{3}$ für die Ueberwindung der Reibung zureichend iſt. Wenn es erforderlich wäre die Laſt von 6000 Pfund mit einer noch kleineren Kraft zu bewegen, ſo darf man nur am Ende der Welle ein Stirnrad mit einem eingreifenden Getriebe, oder auch mit einer Schraube ohne Ende anbringen.

§. 177.

Eine andere ſehr einfache und nutzbare Einrichtung eines ſolchen Hebzeugs iſt aus Fig. 84 zu erſehen. Das Geſtelle iſt überhaupt wie bey dem vorigen Hebzeuge beſchaffen; nur werden oben zwey Rollen A, B nebeneinander, und in C eine Zugrolle angebracht. Die Länge

Fig. 84 der Welle iſt in zwey Theile abgetheilet, und der eine, der kürzere Theil der Welle hat einen gröſſeren Durchmeſſer als der andere, ſo zwar daß der kleinere Durchmeſſer nur $\frac{2}{3}$ von dem gröſſeren iſt. Beyde Ende des Seiles werden an die Welle, und zwar das eine an den dickern, und das andere Ende an den düneren Theil befeſtiget, aber dabey auf ſolche verkehrt aufgewickelt, ſo daß wenn die Welle gedrehet wird, und die Laſt gehoben werden ſoll, ſich das Seil an dem dicken Theile aufwinden, und an dem dünen abwickeln muß; ſoll man aber die Laſt ſinken laſſen, ſo geſchieht es umgekehrt. Nebſt dem, daß man bey dieſer Maſchine an der Kraft gewinnet, hat ſie auch noch die beſondere Eigenſchaft, daß die Laſt wegen der unvermeidlichen Reibung in den Zapfenlagern, und wegen der Steifigkeit der Seile nie für ſich zurückſinket, wenn ſchon die am Hebelsarm der Welle angebrachte Kraft zu wirken aufhöret. Man hat alſo dabey keine Sperrſcheibe mit dem Einfallhacken nöthig, wie bey dem vorigen Hebzeuge.

Um das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt an einer ſolchen Maſchine zu finden ſey die Laſt an der Zugrolle $= Q$, der Hebelsarm der Kraft an einer ſolchen Welle A, und der Halbmeſſer des düneren Theils der Welle $= a$, ſo iſt der Halbmeſſer des dickeren Theils $= \frac{3}{2}a$; jedes Seil ſtrebet wegen der Zugrolle die Welle mit der Kraft $\frac{1}{2}Q$ auf ſeine Seite zu drehen; das Moment an dem dünnern Theile iſt $= a.\frac{1}{2}Q$ $= \frac{1}{2}aQ$, und an dem dickeren Theil der Welle $= \frac{3}{2}a.\frac{1}{2}Q = \frac{3}{4}aQ$, und das Moment der Kraft P am Hebelsarm A iſt $= AP$; im Stande des Gleichgewichts muß vermög der Lehre des Hebels das Moment der Laſt am dickeren Theile gleich ſeyn dem Momente der Laſt am düneren Theile mehr dem Momente der Kraft, weil bey der Erhebung einer Laſt die Kraft

Fig. 84 an ihrem Hebelsarm, und der Theil $\frac{1}{2}Q$ der Laſt am düneren Theile wegen dem verkehrt aufgewundenen Seile die Welle auf einerley Seite zu drehen ſtreben; folglich iſt $\frac{3}{4}aQ = \frac{1}{2}aQ + AP$; daraus folgt $P = \frac{aQ}{4A}$, und $Q = \frac{4AP}{a}$.

Eben dieſes erhellet auch aus folgenden. Durch die Kraft P am Hebelsarm A der Welle wird an dem dickeren Theile eine Laſt $q = \frac{2AP}{3a}$ wegen $q : P = A : \frac{3}{2}a$ (§. 163.) im Gleichgewichte erhalten; durch die Laſt $\frac{1}{2}Q$ aber am düneren Theile, welche mit der Kraft P nach einerley Seite wirket, wird am dickeren Theile eine Laſt $q' = \frac{1}{3}Q$ wegen $q' : \frac{1}{2}Q = a : \frac{3}{2}a$ im Gleichgewichte erhalten; nun iſt die geſammte Laſt am dickeren Theile $q + q' = \frac{1}{2}Q$; folglich $\frac{2AP}{3a} + \frac{1}{3}Q = \frac{1}{2}Q$; daraus folgt $P = \frac{aQ}{4A}$, und $Q = \frac{4AP}{a}$.

Es ſey z. B. $Q = 6000$ Pfund, $a = 4$, und $A = 18$ Zoll, ſo iſt $P = 333\frac{1}{3}$ Pfund wie oben bey einem Flaſchenzuge von vier Rollen in jeder Flaſche. Wenn man an der Kraft noch mehr gewinnen will, ſo kann man auch bey einer ſolchen Welle ein Stirnrad mit einem eingreifenden Getriebe, oder mit einer Schraube ohne Ende anbringen. Man gewinnt auch ſchon an der Kraft, wenn der Halbmeſſer des dickeren Theils der Welle nicht um $\frac{1}{2}a$, ſondern nur um $\frac{1}{3}a$, oder um $\frac{1}{4}a$, oder allgemein um $\frac{1}{n}a$ gröſſer iſt als der Halbmeſſer a des düneren Theils; in einem ſolchen

Falle iſt für den Stand des Gleichgewichts $P = \frac{aQ}{2nA}$. Auch könnte man ſtatt der einzigen Zugrolle eine bewegliche Flaſche von m Rollen anbringen; ſodann wäre $P = \frac{aQ}{2mnA}$; allein das Seil müßte in dergleichen Fällen gar zu lang ſeyn; auch wird der von der Reibung und von der Steifigkeit der Seile herrührende Widerſtand gar zu groß, wenn man die Rollen zu ſtark vervielfältiget.

Dieſes Wellrad mit zwey ungleichen Wellen an einer nämlichen Achſe befeſtiget iſt auch noch in anderen Fällen als z. B. bey dem **Krahn** mit Vortheil zu gebrauchen. Der **Krahn** beſteht aus einer lothrecht ſtehenden Welle; mit dieſer vertikalen Welle wird das angeführte Wellrad in horizontaler Lage verbunden; an dem oberen Theile der vertikalen Welle iſt ein ſeitwärts weit hervorragender Balken (der **Schnabel**) befeſtiget; an jedem Ende des Schnabels ſind zwey Rollen eingeſetzet; das Seil, woran eine Zugrolle ſamt der Laſt am hervorragenden Ende des Schnabels hängt, wird über die Rollen am Schnabel geführet, und mit beyden Enden an das angeführte horizontale Wellrad verkehrt aufgewickelt; alles iſt ſo eingerichtet, daß die vertikale Welle ſamt dem Schnabel und dem Wellrade ſich horizontal herumdrehen laſſe.

Eben dieſes Wellrad kann auch mit Vortheil gebraucht werden, wenn eine Laſt auf Walzen, auf einem Schlitten, oder auf einem ordentlichen Wagen entweder auf einer horizontalen Fläche, oder über eine ſchiefe Ebene, als z. B. das Geſchütz über die Auffarthen ſehr enger Befeſtigungswerker, durch eine geringe Kraft herbey geſchaft werden ſoll. Eine ſolche Maſchine hat auch den weſentlichen Vortheil, daß ſie von einem jeden

Fig. Zimmermann und Schmiede ohne Schwierigkeit verfertiget werden kann.

Anmerk. Der Endzweck gegenwärtiger Abhandlung iſt, nur die nothwendigſten Gründe der mechaniſchen Wiſſenſchaften anzuführen, wodurch ein Anfänger in den Stand geſetzet wird ausführlichere Werke über verſchiedene Theile der mechaniſchen Wiſſenſchaften mit Nutzen leſen zu können; das Ziel würde daher weit verfehlet ſeyn, wenn man hier die Anordnungen auch der am meiſten gebräuchlichen Maſchinen z. B. verſchiedener Mühlenwerke, beſchreiben wollte. Dergleichen Anordnungen kennen zu lernen dienet zum Theil des Herrn Joſ. **Walcher kurzer Inhalt der mechaniſchen Collegien Wien bey Kurzböck gedruckt**, vorzüglich aber des Herrn **Leupold** Theatrum Machinarum, des Herrn **Belidor** Architectura hydraulica, und die neue franzöſiſche **Encyclopödie**. Nur von dem Widerſtande, welchen die Reibung, und die Steifigkeit der Seile bey den Maſchinen verurſachen, muß noch das nothwendigſte berühret werden.

XII. Vorleſung.

Die Reibung, und Unbiegſamkeit der Seile.

§. 178.

Die **Reibung**, oder die **Friktion** (Frictio) wovon bereits §. 101 etwas erwähnet worden, iſt ein Widerſtand, welchen ein Körper leidet, da er auf einer nicht vollkommen glatten Fläche entweder wirklich ſich beweget, oder doch zur Bewegung angetrieben wird; ſie iſt eine **Kraft**, welche den bewegten Körper während ſeiner Bewegung nach entgegengeſetzter Richtung preſſet. **Man hat durch Verſuche gefunden, daß die Reibung bey mittelmäſſig pollirten, über einander glitſchenden, oder gleitenden Flächen gemeiniglich dem dritten, zuweilen auch nur dem vierten, oder noch einem kleineren Theile des ſenkrechten Druckes gleich ſey.** Aus der im §. 101 angegebenen Grundurſache der Reibung ſcheinet es beym erſten Anblicke, daß die Reibung bey einerley Gattung der reibenden Flächen nicht bloß allein von dem ſenkrechten Drucke, ſondern auch von der Gröſſe der ſich berührenden Flächen abhange; allein die Verſuche zeigen das Gegentheil; bey einem nämlichen länglichten Parallelepipedum auf einer nämlichen ſchiefen Ebene iſt der **Reibungswinkel** beynahe immer der nämliche, man mag das Parallelepipe-

Fig. pedum mit einer kleinen, oder mit einer groſſen Fläche auflegen; welches auch daher begreiflich wird, weil bey einer gröſſeren Fläche eines nämlichen Körpers zwar mehrere Hervorragungen und Vertiefungen in einander eingreifen, allein wegen der Vertheilung des Druckes über die ganze berührende Fläche das Eingreifen auch nicht ſo tief, und nicht ſo ſtark ſeyn kann, als bey einer kleineren Fläche des nämlichen Körpers.

Man unterſcheidet die **abſolute**, und **relative Reibung**; jene iſt die Reibung bey ebenen über einander gleitenden Flächen, wenn ſie bey der Bewegung eines Körpers nach gerade entgegengeſetzter Richtung ohne Beyhilfe eines Hebelsarmes wirket; dieſe, die **relative** entſteht, wenn die abſolute Reibung mittelſt eines Hebelsarmes bey der Bewegung eines Körpers einen Widerſtand verurſachet.

Wären die Theile einer Maſchine vollkommen hart und glatt, ſo wäre die bisher vorgetragene Theorie vom Gleichgewichte hinreichend, zu jeder gegebenen Laſt die gleichvermögende Kraft zu finden, ſo daß, wenn man ſolche nur noch um ein geringes vermehrte, die Bewegung ſogleich erfolgen müßte; aber ſo ſetzt die Reibung noch ein groſſes Hinderniß in den Weg. Die Berechnung dieſes Hinderniſſes gehört noch zu der ſtatiſchen Unterſuchung der Maſchinen, weil das Gleichgewicht ſolang verbleibet, bis auch dieſes Hinderniß überwunden wird.

Ohngeachtet das Reiben die Schwierigkeiten bey Berechnung der Maſchinen vermehret, und meiſtentheils für die Kraft ſehr nachtheilig iſt, ſo iſt es doch auch in manchen Fällen wieder nützlich. Ein Seil, das einigemal um einen Cylinder gewunden iſt, oder ein Seil ohne Ende, das man über ein Rad zwiſchen eiſerne Hacken geſchlagen hat, wird durch das Reiben feſtgehalten. So werden auch z. B. die gröſten Schiffe, von denen ein Seil einigemal um mehrere Pfähle gewunden iſt, gegen die größte Gewalt der Wellen und des Windes geſichert; und wir könnten eine Anhöhe weder hinauf noch herabgehen, wenn uns das Reiben gegen die Fußſohlen nicht hielte; u. ſ. w. Fig.

Wie das Verhältniß der abſoluten Reibung zum ſenkrechten Drucke, nämlich der **Reibungs-Coefficient**, oder die **Reibungszahl**, die im §. 101 mit k bezeichnet worden, bey verſchiedenen reibenden Flächen durch Verſuche zu beſtimmen ſey, iſt bereits in eben dem §. 101 gezeiget worden. Dieſer **Reibungs-Coefficient** oder **Reibungszeiger** ſoll auch noch in der Folge jederzeit mit k bezeichnet werden, ſo daß, wenn man den ſenkrechten Druck $= Q$, und die Reibung $= R$ ſetzet, $R = k.Q$ ſey, wo nach Beſchaffenheit der reibenden Flächen $k = \frac{1}{3}$, oder $k = \frac{1}{4}$, *zuweilen auch nur* $k = \frac{1}{8}$, *oder gar nur* $= \frac{1}{10}$ *iſt*, wenn die reibenden Flächen gut polliret, und gehörig eingeſchmieret ſind.

§. 179.

Aufgabe. Die Kraft V zu beſtimmen, welche auf einer ſchiefen Ebene nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Aufl. Wenn der ſchiefen Ebene Neigungswinkel $= m$ geſetzet wird, ſo iſt zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ohne Reibung eine Kraft $P = Q.\tan m$ erforderlich (§. 98. 1.), und die ſchiefe Ebene leidet einen ſenkrechten Druck $= \frac{Q}{\cos m}$; daher iſt die Reibung

Fig. $= \frac{kQ}{\cos m}$; wenn man nun um dieſe im Gleichgewichte zu erhalten, mit der Länge der ſchiefen Ebene eine Kraft R anbringen wollte, ſo wäre ſolche Kraft $R = \frac{kQ}{\cos m}$; da aber die zur Länge der ſchiefen Ebene parallele Kraft R zu einer gleichgeltenden Kraft P' nach der zur Grundlinie parallelen Richtung ſich verhält, wie $Q.\sin m : Q.\tang m$ (§. 98. II. und I.) nämlich $R : P' = Q.\sin m : Q.\tang m = \cos m : 1$, ſo iſt nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung zum Gleichgewichte mit der **erſten** Reibung die Kraft $P' = \frac{R}{\cos m} = \frac{kQ}{\cos^2 m}$ erforderlich. Hieraus entſteht ein neuer Druck auf die ſchiefe Ebene; er iſt $= P'.\sin m$ (§. 71.), und die davon herrührende Reibung $= k.P'.\sin m = \frac{k^2.Q.\sin m}{\cos^2 m}$; um dieſe zweyte Reibung im Gleichgewichte zu erhalten wäre nach einer zur Länge der ſchiefen Ebene parallelen Richtung eine Kraft $R' = \frac{k^2.Q.\sin m}{\cos^2 m}$ erforderlich; nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung aber iſt zum Gleichgewichte mit dieſer **zweyten** Reibung die Kraft $P'' = \frac{k^2.Q.\sin m}{\cos^3 m} = \frac{kQ}{\cos^2 m}.k\tang m$ erforderlich, weil $P'' : R' = \cos m : 1$ wie ehevor ſich verhält. Daraus entſteht abermal ein neuer Druck $= P'.\sin m = \frac{k^2 Q.\sin^2 m}{\cos^3 m}$, und eine dritte Reibung $= \frac{k^3 Q.\sin^2 m}{\cos^3 m}$; um dieſe **dritte** Reibung im Gleichgewichte zu erhalten iſt nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung eine Kraft $P'' = \frac{k^3 Q.\sin^2 m}{\cos^4 m}$ $= \frac{kQ}{\cos^2 m}.k^2 \mathrm{tang}^2 m$ erforderlich; und ſo weiter fort, ſo daß die Kraft X, welche der geſammten Reibung das Gleichgewicht hält, durch folgende unendliche Reihe ausgedrückt ſey

$$X = \frac{kQ}{\cos^2 m}\left(1 + k.\mathrm{tang}\,m + k^2.\mathrm{tang}^2 m + k^3.\mathrm{tang}^3 m \right.$$
$$\left. + k^4.\mathrm{tang}^4 m + \ldots\ldots + k^{\infty}\mathrm{tang}^{\infty} m\right);$$

dieſe unendliche. Reihe läßt ſich ſummiren, wenn $k\mathrm{tang}\,m < 1$ iſt, welches bey der ſchiefen Ebene angeht, weil ihr Neigungswinkel, wenn ſie als eine Maſchine gebrauchet wird, niemals ſo groß wird, daß $k\mathrm{tang}\,m = 1$, nämlich $\cot m = k$ ſey, ſondern der Neigungswinkel iſt gemeiniglich kleiner als 45°. Daher iſt vermög

$$(208.\ \mathrm{IV.})\ X = \frac{kQ}{\cos^2 m}\left(\frac{1.\frac{1}{k\mathrm{tang}\,m} - k^{\infty}\mathrm{tang}^{\infty} m}{\frac{1}{k.\mathrm{tang}\,m} - 1}\right)$$

$$= \frac{kQ}{\cos^2 m - k.\sin m \cos m}.$$

Es iſt alſo auf einer ſchiefen Ebene die geſuchte Kraft nach einer zur Grundlinie parallelen Richtung, damit ſie einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung das Gleichgewicht hält, $V = Q.\mathrm{tang}\,m + \frac{kQ}{\cos^2 m - k.\sin m.\cos m}$

$$= Q.\left(\frac{\sin m.\cos m - k.\sin^2 m + k}{\cos^2 m - k\sin m.\cos m}\right)$$

nämlich $V = Q.\left(\frac{\sin m.\cos m + k\cos^2 m}{\cos^2 m - k\sin m.\cos m}\right)$

$= Q.\left(\frac{\mathrm{tang}\, m + k}{1 - k.\mathrm{tang}\, m}\right).$

Setzet man die Höhe der ſchiefen Ebene $= a$, und ihre Grundlinie $= b$, ſo iſt $\mathrm{tang}\, m = \frac{a}{b}$; daher iſt auch $V = Q\,.\,\frac{a+bk}{b-ak}$.

Iſt im vorigen Falle $m = 0$, oder hier $a = 0$, ſo iſt $V = kQ$; mit m im vorigen Falle, und hier mit a bey unverändertem b wächſt auch V; bey $m = 45°$, oder bey $a = b$, und dabey $k = \frac{1}{3}$ iſt $V = 2Q$; zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ohne Reibung iſt bey $m = 45°$ nur die Kraft $P = Q$ erforderlich; folglich iſt in einem ſolchen Falle zur überwindung der Reibung eine eben ſo groſſe Kraft erforderlich als zur Uiberwindung der Laſt ſelbſt. Wenn man nun die Kraft $V = 2Q$ noch um etwas ſehr weniges vermehret, ſo wird endlich die Bewegung erfolgen. Bey einem gröſſeren m oder a wird V noch gröſſer bis endlich $\cot m = k$, oder $a = \frac{b}{k}$ wird, wo ſodann keine Kraft mehr möglich iſt, die im Stande wäre nach einer zur Grundlinie der ſchiefen Ebene parallelen Richtung die Laſt und die Reibung dergeſtalt zu überwinden, daß endlich eine Bewegung erfolgete, wenn man eine ſolche Kraft noch um etwas weniges vermehrte; in einem ſolchen Falle iſt die Bewegung längſt der ſchiefen Ebene hinaufwärts gänzlich unmöglich, weil die Reibung immer gröſſer wird, je mehr man die Kraft vermehret.

I. Die Formel $V = Q.\frac{a+bk}{b-ak}$ iſt auch bey der Schraube zu gebrauchen, wenn a die Höhe eines Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde, und b den Umfang der Spindel bedeutet. Dieſe Kraft $V = Q.\frac{a+bk}{b-ak}$ müßte unmittelbar an dem Umfange der Spindel angebracht werden, damit ſie der Laſt Q ſamt der Reibung zwiſchen den Schraubengängen das Gleichgewicht halten könnte. Daraus ergiebt ſich die gleichgeltende Kraft P an einem Hebelsarm A der Spindel, wenn deren Halbmeſſer $= r$ geſetzet wird,

$$P = Q \cdot \frac{a+bk}{b-ak} \cdot \frac{r}{A} = \frac{aQr}{bA} + \frac{kQr(a^2+b^2)}{bA(b-ak)}.$$

Es iſt bey der Schraube gemeiniglich a in Rückſicht b ſehr klein; daher iſt beynahe $P = \frac{aQr}{bA} + \frac{kQr}{A}$, oder wegen $b = 2r\pi$, $P = \frac{aQ}{2A\pi} + \frac{kQr}{A}$, wo $\frac{kQr}{A}$ die Kraft anzeiget, welche zur Ueberwindung der Reibung erforderlich iſt.

Das relative Gewicht, oder das Beſtreben einer Laſt Q an einer Schraubenſpindel längſt den Schraubengängen der Mutterſchraube herunter zu ſteigen, nämlich die Spindel aus der Mutterſchraube heraus zuwinden iſt $= \frac{aQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ vermög (§. 91.), und die Reibung, wodurch dieſes Beſtreben aufgehalten wird, iſt $= \frac{kbQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ vermög (§. 91 u. 100); ſolange $\frac{kbQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{aQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

iſt

Fig. iſt, bleibt die Schraube ſamt der Laſt ohne Beyhilfe einer fremden Kraft in Ruhe; damit ſie von ſelbſt umlaufen könne muß $\frac{aQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{kbQ}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, und folglich auch $a > kb$ ſeyn. **Iſt nun $k = \frac{1}{3}$, ſo muß die Höhe eines Schraubenganges gröſſer ſeyn als der dritte Theil des Umfanges der Spindel, und folglich auch gröſſer als der Durchmeſſer derſelben, damit die Schraube von ſelbſt umlaufen könne, wenn ſie nicht von einer fremden Kraft gehalten wird.** Bey den Schrauben der Münz-Preſſen, die aus flachen Schraubengängen von einem mehrfachen Gewinde beſtehen, dabey ſehr genau ausgearbeitet, gut polliret, und gehörig eingeſchmieret ſind, iſt vielleicht nur $k = \frac{1}{6}$ oder noch kleiner; daher laufen ſie ſo willig um, wenn ſchon die Höhe eines Schraubenganges an einem nämlichen Gewinde nicht auſſerordentlich groß iſt.

II. Wenn die Kraft auf einer ſchiefen Ebene mit der Länge derſelben parallel angebracht wird, ſo iſt vermög (§. 100.) eine ſolche Kraft $V = Q.\sin m + kQ.\cos m$, damit ſie der Laſt Q ſamt der Reibung das Gleichgewicht zu halten im Stande ſey. Wenn man dieſe Kraft nur noch um etwas weniges vermehret, ſo wird endlich die Bewegung erfolgen.

Es iſt nicht gewöhnlich bey der ſchiefen Ebene, wenn ſie als eine Maſchine gebraucht wird, die Kraft nach einer anderen Richtung als entweder zur Grundlinie oder zur Länge derſelben parallel anzubringen; derowegen wollen wir uns nicht länger dabey aufhalten.

§. 180.

Fig. 87

Aufgabe. Die Kraft V zu berechnen, welche bey der feſten Rolle einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung des Gleichgewicht hält.

Auflöſ. Es ſey der Halbmeſſer der Rolle **CA**$=A$ Fig. 87, und der Halbmeſſer des Polzens **CD** $= \alpha$, das Gewicht der Rolle ſamt dem Seile $= q$, die Laſt an dem vertikalen Seile **BQ** $= Q$, die zum Gleichgewichte mit dieſer Laſt ohne Reibung an dem parallelen Seile **AP** erforderliche Kraft $= P$, und endlich die zum Gleichgewichte mit der Reibung erforderliche Kraft am nämlichen Seile **AP** angebracht ſey $= p$, ſo entſteht in dem Punkte **D** des Polzens ein Druck $= P + Q + p + q$, oder $= 2Q + p + q$ wegen $P = Q$; folglich iſt die Reibung $= k(2Q+p+q)$, welche mittelſt des Hebelsarmes **CD** nach der Richtung **DE** ſenkrecht auf **CD** die Umdrehung der Rolle um den Punkt C verhindert, wenn die Rolle ſamt dem Polzen gemeinſchaftlich in dazu gehörigen Pfannen umläuft; wenn aber die Rolle auf dem feſten Polzen umlaufbar iſt, ſo iſt die Reibung ebenfalls $= k(2Q+p+q)$; und wirkt auf den Halbmeſſer **CF** nach der Richtung **FG** in **F** ſenkrecht auf **FC**; das Moment der Reibung iſt in beyden Fällen $= \alpha k(2Q+p+q)$; das Moment der Kraft p aber am Hebelsarm A iſt $= Ap$; im Stande des Gleichgewichts iſt $\alpha k(2Q+p+q) = Ap$; daraus folgt die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft $p = \frac{\alpha k(2Q+q)}{A-\alpha k}$. Es iſt demnach die geſammte Kraft, welche bey der feſten Rolle einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung das

Gleich-

Gleichgewicht hält, $V = Q + p = \frac{\alpha k(Q+q)+AQ}{A-\alpha k}$
$= Q \cdot \left(\frac{A+\alpha k}{A-\alpha k}\right) + \frac{\alpha kq}{A-\alpha k}$.

I. Aus der Formel $p = \frac{\alpha k(2Q+q)}{A-\alpha k}$ iſt es zu erſehen, daß die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft deſto kleiner ſey, je kleiner der Halbmeſſer des Polzens, oder je gröſſer der Halbmeſſer der Welle wird. Eben dieſe Formel gilt für die Berechnung der Reibung an einem doppelarmigen-Hebel von gleichen Hebelsarmen, der ſich auf einem cylindriſchen Zapfen drehen läßt. Wenn man den Halbmeſſer α des Zapfens unendlich klein ſetzen, oder den Hebel auf eine mathematiſche Schärfe eines dreyſeitigen Priſma auflegen könnte, ſo würde die Reibung gänzlich verſchwinden.

II. Dieſe nämliche Formel $p = \frac{\alpha k(2Q+q)}{A-\alpha k}$ iſt alſo auch bey der Krammerwaage zu gebrauchen, wenn Q die abzuwägende Laſt, q das Gewicht des Waagebalkens ſamt den Schnüren und Schalen, A die halbe Länge des Waagebalkens, und α den Halbmeſſer der herzförmigen Abrundung an den Zapfen anzeiget, womit der Waagebalken in den Pfannen der Scheere ruhet. Es ſey z. B. $Q = \frac{1}{4}$ Loth $= 1$ Quintel $= 60$ Gran, $q = 2$ Loth $= 480$ Gran, $A = 4$ Zoll, und $\alpha = 0{,}001$ Zoll; ferner kann $k = \frac{1}{10} = 0{,}1$ geſetzet werden, weil bey ſehr feinen Waagen die herzförmigen Zapfen des Waagebalkens ſehr gut polliret ſind, und in ſehr gut pollirten, meiſtens in chryſtallenen Pfannen ruhen; derowegen iſt die zur Ueberwindung

dung der Reibung erforderliche Kraft $p = \frac{0{,}0001 . 600}{4 - 0{,}0001}$ Fig.
$= \frac{6}{399{,}99} = \frac{1}{67}$ Gran beynahe; $\frac{1}{64}$ Gran müßte demnach bey dieſer Vorausſetzung ſchon einen Ausſchlag geben, und folglich könnte das Gewicht einer Laſt, die nicht über 1 Quintel beträgt, bis auf $\frac{1}{64}$ Gran zuverläſſig angegeben werden; wäre hingegen das Gewicht der abzuwägenden Laſt $Q = 2$ Loth $= 480$ Gran, ſo wäre bey der nämlichen Vorausſetzung die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft $p = \frac{0{,}0001 . 1440}{4 - 0{,}0001}$ $= \frac{2\frac{1}{3}}{64}$ Gran beynahe, und ohngefähr $\frac{3}{64}$ Gran könnten erſt einen Ausſchlag geben, ſo daß man das Gewicht einer Laſt, die ſchon 2 Loth beträgt, mittelſt einer ſolchen Waage nur bis auf $\frac{3}{64}$ Gran zuverläſſig beſtimmen könnte.

III. Wenn man das geſammte Gewicht der Laſt, der Rolle, und der Kraft, womit die Laſt ohne Reibung im Gleichgewichte erhalten wird, mit M bezeichnet, und dabey noch immer den Halbmeſſer des Zapfens $= \alpha$, den Halbmeſſer der Rolle aber, oder den Hebelsarm der zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen Kraft p mit A benennet, ſo iſt $p = \frac{akM}{A - ak}$. Dieſe Formel gilt nicht nur allein für die feſte Rolle, und für den doppelarmigen Hebel von gleichen Hebelsarmen, ſondern iſt auch bey dem doppelarmigen Hebel von ungleichen Hebelsarmen, und alſo auch bey dem horizontalen Wellrade zu gebrauchen. Denn es ſey am doppelarmigen Hebel, oder am horizontalen Wellrade die Kraft P am Hebelsarm A (Halbmeſſer des Rades) mit

Fig. der Laſt Q am Hebelsarm a (Halbmeſſer der Welle) ohne Reibung im Gleichgewichte; ferner ſey das Gewicht des ganzen Hebels, oder des ganzen Wellrades $= q$, und die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft $= p$, ſo leiden die Zapfenlager einen Druck $= Q + P + q + p$, wenn Kraft und Laſt beyde nach vertikalen Richtungen abwärts ziehen. Daher iſt die Reibung $= k(Q+P+q+p)$, und ihr Moment $= \alpha k(Q+P+q+p)$, wenn der Halbmeſſer des Zapfens $= \alpha$ geſetzet wird; das Moment der Kraft p aber am Hebelsarm A iſt $= Ap$; nun iſt im Stande des Gleichgewichts $\alpha k(Q+P+q+p) = Ap$; folglich $p = \frac{\alpha k(Q+P+q)}{A-\alpha k}$, oder wenn man $Q+P+q = M$ ſetzet, $p = \frac{\alpha kM}{A-\alpha k}$.

Es iſt am Wellrade $P = \frac{aQ}{A}$; folglich

$$M = Q + \frac{aQ}{A} + q = \frac{Q(A+a)+Aq}{A},$$

und

$$p = \frac{\alpha k[(A+a)Q+Aq]}{A(A-\alpha k)}.$$

Daraus folgt die zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ſamt der Reibung am horizontalen Wellrade erforderliche Kraft

$$V = P + p = \frac{aQ}{A} + \frac{\alpha k[(A+a)Q+Aq]}{A(A-\alpha k)} = \frac{\alpha k(Q+q)+aQ}{A-\alpha k}.$$

IV. Wenn an der Rolle, an dem Hebel, und am Wellrade Kraft und Laſt nicht nach parallelen Richtungen abwärts ziehen, ſo fällt die zur Ueberwindung der Reibung nöthige Kraft anders aus; ſie iſt jederzeit kleiner als die eben berechnete, und kann durch Beyhilfe

des

Fig. 88 des Kräftenparallelograms im erforderlichen Falle beſtimmet werden. Es iſt zwar für die Ausübung hinlänglich, wenn man die größte Reibung, die an der feſten Rolle, am Hebel, und am Wellrade ſich ergeben kann, zu berechnen im Stande iſt. Dabey aber iſt doch aus nachſtehender Aufgabe zu erſehen, wie man die Reibung in dergleichen Fällen genau berechnen könne.

§. 181.

Aufgabe. Die Kraft zu berechnen, welche am horizontalen Wellrade der Reibung das Gleichgewicht hält, die Richtungen der Kraft und Laſt in vertikalen Ebenen mögen wie immer gegen den Horizont geneigt ſeyn.

Auflöſ. Es ſey AbA Fig. 88. eine vertikale Ebene durch den Schwerpunkt des Wellrades ſenkrecht auf deſſen Achſe gelegt; in dieſer Ebene kann man die Richtungen der Kraft und Laſt, und auch den geſammten Druck auf die Zapfenlager vereinigt gedenken; die Richtung der Laſt Q ſey BQ, und die Richtung der damit im Gleichgewichte ſtehenden Kraft P ſey Aa; CB $= a$ als der Hebelsarm der Laſt ſey ſenkrecht auf BQ, und CA $= A$ als der Hebelsarm der Kraft ſey ſenkrecht auf Aa; CA ſey gegen die Horizontallinie ba unter dem Winkel ACa $= m$, und CB unter dem Winkel BCb $= n$ geneigt; P ſey mit Q, und p nebſt P an einerley Hebelsarm CA angebracht ſey mit der Reibung $= R$ im Gleichgewichte.

Man ziehe CD der Aa, und CF der BQ parallel; gedenke CD, CF von ſolcher Länge, daß CD : CF $= P + p : Q$ ſich verhalte, ſo iſt CD die Gröſſe und Richtung des von $P + p$ herrührenden Druckes vermög (§. 142.), ſo wie CF die Gröſſe und Rich-

Fig. 88 tung des von Q herrührenden Druckes auf den Schwerpunkt des Wellrades, und folglich auch auf die Zapfenlager; denn obſchon der Kraft $P + p$ Richtung Aa nicht durch den Schwerpunkt geht, ſo leidet doch vermög (§. 142.) der Schwerpunkt nach einer zu Aa parallelen Richtung einen Druck CD, welcher der Kraft $P + p$ gleich iſt; aus dem nämlichen Grunde iſt $CF = Q$. Ferner ſey DE, FG ſenkrecht auf ba, um die Rechtecke D'E, F'G zu erhalten, ſo iſt der Druck CD in die Seitenkräfte CE, CD', ſo wie der Druck CF in CG, CF' zerlegt; man hat alſo einen horizontalen Druck $= CG - CE = CM$ wenn $GM = CE$ gemacht wird, und einen vertikalen Druck $= CD' + CF' = CH$ wenn $D'H = CF'$ gemacht wird, wozu auch noch das Gewicht $q = HK$ des Wellrades hinzuzuſetzen iſt, ſo daß der geſammte vertikale Druck $= CK$ ſey. Ergänzt man nun das Rechteck KM, ſo iſt die Diagonale CL die Gröſſe und Richtung des vereinigten horizontalen und vertikalen Druckes; $k.CL = R$ iſt alſo der Widerſtand oder die Reibung, welche am Halbmeſſer des Zapfens $= \alpha$ ſenkrecht angebracht ſich der Umdrehung des Wellrades widerſetzet, und von der Kraft p am Halbmeſſer $= A$ im Gleichgewichte erhalten wird; damit dieſes ſtatt finde, muß das Moment der Reibung αR dem Momente der Kraft p gleich ſeyn, nämlich $\alpha R = Ap$; und folglich iſt $p = \frac{\alpha R}{A}$.

Die Reibung $R = k.CL$ wird auf folgende Art berechnet. Es iſt $CE = CD.\sin m = (P+p) \sin m$, und $CG = CF.\sin n = Q.\sin n$; folglich iſt der horizontale Druck $CM = Q \cdot \sin n - (P+p).\sin m = KL$.

Ferner iſt $CD' = CD.\cos m = (P+p).\cos m$, und $CF' = CF.\cos n = Q.\cos n = D'H$; alſo iſt der

ge-

geſammte vertikale Druck $CK = CD' + D'H + HK$ Fig. 88
$= (P+p)\cos m + Q.\cos n + q$.

Daraus folgt der vereinigte Druck $CL = \sqrt{(CK^2+KL^2)}$
$= \sqrt{[(Q\cos n + (P+p)\cos m + q)^2 + (Q\sin n - (P+p)\sin m)^2]}$, und die Reibung $R = k\sqrt{[(Q\cos n+(P+p)\cos m+q)^2+(Q\sin n-(P+p)\sin m)^2]}$ und endlich die geſuchte Kraft

$$p = \frac{\alpha k}{A} \cdot \sqrt{[(Q\cos n+(P+p)\cos m+q)^2 + (Q\sin n-(P+p)\sin m)^2]}.$$

Bey der wirklichen Berechnung kann man in den meiſten Fällen die Gröſſe p unter dem Wurzelzeichen gänzlich hinweglaſſen, weil ſie in Rückſicht P und Q gemeiniglich ſehr klein iſt. Will man es genauer haben, ſo kann man den dadurch gefundenen Werth von p in der Formel dafür ſubſtituiren, und dieſes Verfahren ſolange widerhohlen, bis der Werth für p ſich nicht mehr merklich ändert.

I. Sind AC und BC horizontal, nämlich m und $n = 0$, alſo P und Q am horizontalen doppelarmigen Hebel nach vertikalen Richtungen abwärts angebracht, ſo iſt $\sin m$ und $\sin n = 0$, hingegen $\cos m$, und auch $\cos n = 1$; folglich $p = \frac{\alpha k(Q+P+q)}{A-\alpha k}$ wie oben.

II. Iſt aber $m = 180^\circ$, und auch $n = 180^\circ$, nämlich Kraft und Laſt am horizontalen doppelarmigen Hebel nach vertikalen Richtungen aufwärts angebracht, ſo iſt $\sin m$, und auch $\sin n = 0$, hingegen $\cos m$ und auch $\cos n = -1$; folglich $p = \frac{\alpha k(q-Q-P)}{A+\alpha k}$, wenn $q > Q + P$; iſt aber $q < Q + P$, ſo iſt $p = \frac{\alpha k(Q+P-q)}{A-\alpha k}$.

Fig. 88 III. Iſt $n = 0$ und $m = 180^{\circ}$, oder $m = 0$ und $n = 180^{\circ}$, nämlich Kraft und Laſt am einarmigen horizontalen Hebel nach vertikalen Richtungen ſenkrecht angebracht, ſo iſt im erſten Falle, wo die Laſt abwärts und die Kraft aufwärts zieht $p = \frac{\alpha k(Q-P+q)}{A+\alpha k}$, und im zweyten Falle wo die Laſt aufwärts, und die Kraft abwärts zieht, iſt $p = \frac{\alpha k(Q-P-q)}{A+\alpha k}$.

Wenn der einarmige Hebel in ſeinem Schwerpunkte ſo wie das Wellrad unterſtützet iſt, ſo bedeutet q das ganze Gewicht des Hebels; iſt aber der horizontale einarmige Hebel an ſeinem Endpunkte, oder überhaupt auſſer ſeinem Schwerpunkte unterſtützet, ſo muß q nach (§. 145.), oder überhaupt der ganze Druck auf dieſe Art beſtimmet, und daraus die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft geſucht werden.

IV. Iſt $m = 90^{\circ}$, und auch $n = 90^{\circ}$, imgleichen $m = -90^{\circ}$, und auch $n = -90^{\circ}$, nämlich Kraft und Laſt an einem vertikalen Halbmeſſer nach entgegengeſetzten horizontalen Richtungen, alſo am einarmigen vertikalen Hebel ſenkrecht angebracht, ſo iſt $p = \frac{\alpha k}{A}\sqrt{[q^2+(Q-(P+p))^2]}$, wo q das Gewicht des Hebels bedeutet.

V. Iſt aber $n = 90^{\circ}$ und $m = -90^{\circ}$, oder $n = -90^{\circ}$, und $m = +90^{\circ}$, nämlich Kraft und Laſt am vertikalen doppelarmigen Hebel ſenkrecht angebracht, ſo iſt $p = \frac{\alpha k}{A}\sqrt{[q^2+(Q+P+p)^2]}$.

VI. Iſt $n = 0$ und $m = 90^{\circ}$, ſo iſt $p = \frac{\alpha k}{A}\sqrt{[(Q+q)^2+(P+p)^2]}$; iſt aber $n = 90^{\circ}$

und $m = 0$, ſo iſt $p = \frac{\alpha k}{A} \surd[(P+p+q)^2 + Q^2]$; Fig. 88 u. ſ. w. Es iſt überflüſſig zu erinnern, daß $P = \frac{aQ}{A}$ ſey, wo a den Hebelsarm der Laſt bedeutet.

VII. Wenn man m und $n = 0$ ſetzet, und dabey die Halbmeſſer der Zapfen, der Welle, und des Rades alle gleich groß macht, ſo iſt $p = \frac{k(2Q+q)}{1-k}$ wegen $P = Q$; daraus folgt $k = \frac{p}{2Q+q+p}$ eine Formel, wodurch ſich mittelſt verſchiedener Cylinder in verſchiedenen Fällen der Reibungszeiger k durch Verſuche beſtimmen läßt, wo aber die auf beyden Seiten herabziehenden Gewichte an ſehr biegſamen Fäden, oder an ſeidenen Bändern hängen müſſen, damit der von der Unbiegſamkeit der Seile, Schnüre oder Bänder herrührende Widerſtand unmerklich ſey; p bedeutet denjenigen Zuſatz auf der einen Seite der herabhangenden gleichen Gewichte, bey deſſen geringſter Vermehrung die Welle ſich zu drehen anfängt.

Setzet man hingegen in dieſem Falle das herabhangende Gewicht auf der einen Seite der Welle $= Q$, und auf der anderen Seite das ganze größere Gewicht $= P$, bey deſſen geringſter Vermehrung die Welle ſich zu drehen anfängt, ſo iſt $P - Q = p$, und folglich der Reibungszeiger $k = \frac{P-Q}{P+Q+q}$.

§. 182.

An einem ſtehenden Wellrade, wenn es auf Cylindriſchen Zapfen in cylindriſchen Pfannen umläuft, äuſſert ſich eine zweyfache Reibung. Die eine an den Seitenflächen der cylindriſchen Zapfen, welche bloß von dem Drucke der Kraft und Laſt herrühret; das Gewicht das Wellrades hat darauf keinen Einfluß. Dieſe Reibung wird am größten, wenn Kraft und Laſt in parallelen Richtungen nach einerley Gegend ziehen, alſo mittelſt eines doppelarmigen Hebels wirken. Die zur Ueberwindung dieſer Reibung erforderliche Kraft iſt $p = \frac{\alpha k(Q+P)}{A-\alpha k}$, wenn der Hebelsarm der Kraft $= A$, und der Halbmeſſer des Zapfens $= \alpha$ iſt, weil in dieſem Falle die Zapfen mit einer Gewalt $= Q+P+p$ an die Seitenflächen der Pfannen angedrücket werden. Ziehen hingegen Kraft und Laſt in parallelen Richtungen nach entgegengeſetzten Gegenden, nämlich wenn ſie mittelſt eines einarmigen Hebels wirken, ſo iſt $p = \frac{\alpha k(Q-P)}{A+\alpha k}$, weil in einem ſolchen Falle der Druck gegen die Seitenflächen der Pfannen $= Q-P-p$ iſt. Sind aber die Richtungen der Kraft und Laſt unter dem Winkel $= m$ gegen einander geneigt, ſo iſt $p = \frac{\alpha k}{A} \cdot \sqrt{[Q^2+(P+p)^2+2Q(P+p).\cos m]}$ vermög (§. 64. und §. 142.), wo man bey der wirklichen Berechnung des Werthes für p eben ſo zu verfahren hat wie im §. 181. Aus dieſer Gleichung iſt es zu erſehen, daß p am größten wird, wenn man $m = 0$ ſetzet; hingegen bey $m = 180°$, nämlich am einarmigen Hebel wird p am kleinſten.

Die andere Reibung bey dem ſtehenden Wellrade äuſſert ſich an der Grundfläche des unteren cylindriſchen Zapfens; ſie rühret bloß von dem Gewichte des Wellrades her; Kraft und Laſt haben darauf keinen Einfluß. Wenn man das Gewicht des Wellrades $= q$, und

den Halbmeſſer der Grundfläche des Zapfens $= \alpha$ ſe- Fig.
tzet, ſo iſt die zur Ueberwindung dieſer Reibung am 89
Hebelsarm A erforderliche Kraft $p = \frac{\frac{2}{3}\alpha k q}{A}$.

Um dieſes einzuſehen, ſey Fig. 89 CA $= A$ der Hebelsarm der Kraft, CB $= \alpha$ der Halbmeſſer der Grundfläche des vertikalſtehenden cylindriſchen Zapfens, CE $= x$, und Ee $= \mathrm{d}x$, ſo iſt die Grundfläche des cylindriſchen Zapfens $= \alpha^2\pi$, und die Fläche des Ringes Ee iſt $= 2\pi x \mathrm{d}x$; daraus folgt der Druck auf dieſen Ring $= \frac{2qx\mathrm{d}x}{\alpha^2}$, weil wegen der gleichförmigen Vertheilung des Druckes q über die ganze Grundfläche des cylindriſchen Zapfens $\alpha^2\pi : 2\pi x \mathrm{d}x = q$ zum Druck auf dieſen Ring Ee ſich verhält. Es iſt alſo bey dieſem Ringe Ee die Reibung $= \frac{2kqx\mathrm{d}x}{\alpha^2}$, welche mittelſt des Hebelsarmes CE die Umdrehung des Rades verhindert; ihr Moment iſt demnach $= \frac{2kqx^2\mathrm{d}x}{\alpha^4}$, welches dem Momente $A \cdot dp$ einer gleichgeltenden Kraft dp am Hebelsarm A im Stande des Gleichgewichts gleich iſt, nämlich $\frac{2kqx^2\mathrm{d}x}{\alpha^2} = A dp$; daraus folgt durch die Integrirung $p = \frac{\frac{2}{3}kqx^3}{A\alpha^2}$ die zur Ueberwindung der Reibung an der Kreisfläche CE erforderliche Kraft, allwo Conſt. $= 0$ iſt; ſetzet man nun $x = \alpha$, ſo iſt die zur Ueberwindung der Reibung an der ganzen Grundfläche des cylindriſchen Zapfens erforderliche Kraft $p = \frac{\frac{2}{3}\alpha k q}{A}$.

Fig. 90 Dieſe ſowohl als auch die vorhergehende Reibung wird um ſo kleiner, je kleiner der Halbmeſſer α des Zapfens wird; beyde würden gänzlich verſchwinden, wenn $\alpha = 0$ wäre, oder wenn das Wellrad auf vollkommen harten ſpitzigen Zapfen umliefe.

§. 183.

An Räderwerken giebt es auſſer der Reibung an den Zapfenlagern auch noch eine da, wo Zähne und Triebſtecken zuſammengreifen. Es ſey Fig. 90 BC der Halbmeſſer eines Stirnrades, AC der Halbmeſſer des Getriebes, B, A die Mittelpunkte des Rades und des Getriebes, C aber ſey der Punkt, wo der Zahn BC gegen den Triebſtecken AC drucket unter dem Winkel ECA. Die Laſt MQ am Wellrade BC drücke den Punkt C mit einer auf BC ſenkrechten Gewalt $DC = Q$, ſo iſt die davon entſtehende Reibung $= kQ = k.DC$, welche den Fortgang des Punktes C nach der Richtung CE verhindert, nämlich das Abglitſchen des Triebſteckens CA über den Zahn BC erſchweret. Es ſey $EC = k.DC$, und das Rechteck ED ergänzet, ſo iſt am Hebelsarm AC der vereinigte Widerſtand $= FC = Q\sqrt{(1+k^2)}$, wegen $DC = Q$, und $EC = kQ$. Wenn man nun CH ſenkrecht auf AC, FH mit CA parallel zieht, und das Rechteck GH ergänzet, ſo wird der Widerſtand FC in HC und GC zerlegt; der Widerſtand GC wird vom Unterſtützungspunkte B aufgehalten, der Widerſtand HC aber wirket auf den Hebelsarm AC in C ſenkrecht; dieſer Widerſtand HC iſt jederzeit kleiner als FC, wenn nicht FC ſenkrecht auf CA ſteht; iſt aber FC ſenkrecht auf CA, ſo iſt HC mit FC einerley, und dabey $GC = 0$. Es iſt demnach FC der größte Widerſtand, der ſich in dergleichen

Fäl-

Fällen eräugnen kann. In der Ausübung bey der wirklichen Berechnung kann man ohne merklichen Fehler jederzeit HC = FC ſetzen, weil FC gemeiniglich auf CA ſenkrecht ſteht, oder doch von der ſenkrechten Lage ſehr wenig abweichet; derowegen iſt in C am Hebelsarm AC der geſuchte Widerſtand = $Q\sqrt{(1+k^2)}$ ſenkrecht angebracht; da aber $\sqrt{(1+k^2)} = 1+\frac{1}{2}k^2$ beynahe, ſo kann man auch mit hinlänglicher Genauigkeit den in C ſenkrecht auf den Hebelsarm AC wirkenden Widerſtand = $Q+\frac{1}{2}k^2.Q$ ſetzen, wo Q die Kraft bedeutet, welche am Hebelsarm BC in C ſenkrecht auf CB angebracht der gegebenen Laſt MQ ſamt der Reibung an den Zapfen des Wellrades BC das Gleichgewicht hält; und folglich iſt $\frac{1}{2}k^2.Q$ die geſuchte Reibung bey dem Zuſammengreifen der Zähne und Triebſtecken. Aus dem Widerſtande $Q+\frac{1}{2}k^2.Q$, oder genauer aus $Q\sqrt{(1+k^2)}$ am Hebelsarm AC iſt nun leicht die Kraft zu finden, welche mittelſt eines gegebenen Hebelsarmes AP dieſem Widerſtande ſamt der Reibung an den Zapfen des Wellrades AP das Gleichgewicht hält. Fig. 90

I. Aus dem bisher angeführten iſt es nun leicht zu erſehen, wie man an einem gegebenen Räderwerke die Kraft berechnen könne, welche einer gegebenen Laſt nebſt der geſammten Reibung das Gleichgewicht hält. Man muß nämlich zu erſt an demjenigen Wellrade die geſuchte Kraft berechnen, woran die Laſt unmittelbar angebracht iſt; dieſe Kraft iſt die Laſt an dem nächſtfolgenden Wellrade, wozu man wieder die Kraft finden kann, welche dieſer Laſt nebſt der Reibung ſowohl in den Zapfenlagern als auch zwiſchen den Zähnen und Triebſtecken das Gleichgewicht hält; dieſe Kraft iſt die Laſt am dritten Wellrade; u. ſ. w.

§. 184.

Fig. 68 **Aufgabe.** Die Kraft V zu finden, welche an der beweglichen Rolle (an der Zugrolle) bey der parallelen Lage der Seile einer gegebenen Laſt Q das Gleichgewicht hält.

Auflöſ. Wenn man an der Zugrolle Fig. 68 die am Polzen angebrachte Laſt $= Q$ ſetzet, ſo wird im Stande des Gleichgewichtes das Seil BF mit $\frac{1}{2}Q$, und das Seil AG mit $\frac{1}{2}Q+p$ geſpannet, wenn p am Seile AG der Reibung das Gleichgewicht hält; der vereinigte Druck an dem Polzen iſt demnach $= \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q + p = Q + p$, (es iſt nämlich eben ſo viel, als wenn die Rolle in D befeſtiget wäre, und am Seile BF nach der Richtung BF die Kraft $\frac{1}{2}Q$, am Seile AG aber nach der parallelen Richtung AG die Kraft $\frac{1}{2}Q + p$ zöge, wo offenbar die vereinigte Wirkung am Polzen $= \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q + p$ iſt); es iſt demnach die Reibung $= k.(Q+p)$, und ihr Moment am Halbmeſſer des Polzens $= \alpha k(Q+p)$; das Moment aber der gleichgeltenden Kraft p am Halbmeſſer a der Rolle iſt $= ap$; nun iſt im Stande des Gleichgewichts $\alpha k(Q+p) = ap$, folglich iſt $p = \frac{\alpha k Q}{a - \alpha k}$. Ferner iſt vermög (§. 164) zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ohne Reibung eine Kraft $P = \frac{1}{2}Q$ erforderlich; es iſt demnach am Seile AG die geſuchte Kraft, welche der Laſt Q ſamt der Reibung das Gleichgewicht hält, $V = P + p = \frac{1}{2}Q + \frac{\alpha k Q}{a - \alpha k} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{a + \alpha k}{a - \alpha k}\right)$, wo das Gewicht der Rolle auſſer Acht gelaſſen iſt, welches in dergleichen Fällen in Rückſicht der Laſt Q unmerklich iſt; will man es genauer haben, ſo muß man zu dem gefundenen Werthe für V noch das halbe Gewicht der Rolle addiren, wenn die Laſt Q vertikal herabhänget. Fig. 68

Die geſuchte Kraft V kann man auch auf folgende Art finden. Die Kraft p zieht den Polzen aufwärts, und die Laſt Q zieht ihn abwärts; derowegen leidet der Polzen eigentlich nur einen Druck $= (Q-p)$, woraus die Reibung $= k(Q-p)$ entſpringt; ihr Moment $\alpha k(Q-p)$ iſt im Stande des Gleichgewichts gleich dem Momente ap der gleichgeltenden Kraft p, nämlich $\alpha k(Q-p) = ap$; und folglich $p = \frac{\alpha kQ}{a+\alpha k}$; ferner iſt zum Gleichgewichte ohne Reibung eine Kraft $P = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}q$ erforderlich, wenn q das Gewicht der Rolle bedeutet; derowegen iſt $V = P + p = \frac{1}{2}Q + \frac{\alpha kQ}{a+\alpha k} + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}Q\left(\frac{a+3\alpha k}{a+\alpha k}\right) + \frac{1}{2}q$.

Nun wird dieſer wahre Werth für V gar nicht merklich geändert, wenn man bey dem uneigentlichen Bruche $\frac{a+3\alpha k}{a+\alpha k}$ ſowohl vom Zähler als auch vom Nenner die Gröſſe $2\alpha k$ abzieht, und dabey $\frac{1}{2}q$ gänzlich hinwegläßt, weil $2\alpha k$ in Rückſicht a ſehr klein iſt, und über dieſes auch noch der eine unbedeutende Fehler den anderen beynahe aufhebt; es iſt demnach für die Ausübung hinlänglich genau $V = \frac{1}{2}Q\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)$ am Seile **AG** nach der Richtung **AG** angebracht.

Vermög (§. 180.) iſt an einer feſten Rolle **G** wenn am Seile **AG** eine Laſt V hängt, am parallelen Seile **GP** zum Gleichgewicht mit dieſer Laſt ſamt der Reibung eine Kraft erforderlich $V' = \frac{\alpha k(V+q)+aV}{a-\alpha k}$,

wo

Fig. 68 wo a den Halbmeſſer der Rolle, α den Halbmeſſer des Polzens, und q das Gewicht der Rolle G bedeutet; nun iſt q in Rückſicht V oder Q gemeiniglich ſehr klein, und kann in der Ausübung ohne merklichen Fehler gänzlich auſſer Acht gelaſſen werden; derowegen iſt $V' = V . (\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k})$; es iſt aber $V = \frac{1}{2}Q(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k})$; folglich iſt, wenn die Rollen C und G einander gleich ſind, oder wenn nur die Halbmeſſer der Rollen mit den Halbmeſſern der Polzen in Proportion ſtehen, zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ſamt der Reibung am Seile GP eine Kraft erforderlich $V' = \frac{1}{2}Q . (\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k})^2$.

§. 185.

An der loſen Rolle Fig. 68 iſt die Spannung des Seiles BF $= \frac{1}{2}Q$, und die zum Gleichgewichte mit dieſer Spannung ſamt der Reibung am anderen parallelen Seile AG erforderliche Kraft iſt $V = \frac{1}{2}Q . (\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k})$. An der feſten Rolle Fig. 67 iſt die Spannung des Seiles BQ $= Q$, und die zum Gleichgewichte mit dieſer Spannung ſamt der Reibung am anderen parallelen Seile AP erforderliche Kraft iſt $V = Q(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k})$ weil das Gewicht der Rolle in Rückſicht der Spannung Q meiſtens unmerklich iſt. Es iſt demnach an der loſen ſowohl als auch an der feſten Rolle, wenn man die Spannung des einen Seiles $= X$ ſetzet, am anderen parallelen Seile zum Gleichgewichte mit dieſer Spannung ſamt der Reibung eine Kraft erforderlich

$$V = X . (\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}).$$

§. 186.

Nun iſt es leicht auch am Flaſchenzuge die Kraft V zu berechnen, welche einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung das Gleichgewicht hält. Es hänge Fig. 76, 77, oder 78 die Laſt Q, wozu auch das Gewicht der beweglichen Flaſche gehöret, an n Seilen, ſo iſt die Spannung des erſten Seiles a1, ehe ſolches über die Rolle 1 geführet iſt, = $\frac{1}{n}Q$; dazu iſt am anderen parallelen Seile wegen der Rolle 1 zum Gleichgewichte ſamt der Reibung erforderlich eine Kraft $= \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right) = A$ vermög (§. 185.); ſo groß muß demnach die Spannung des Seiles 1,2 ſeyn. Um dieſe Spannung A hervorzubringen muß an der 2ten Rolle am Seile 2,3 eine Kraft $= A\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right) = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^2 = B$ ziehen; mit dieſer Kraft oder Spannung B iſt an der dritten Rolle am Seile 3,4 eine Kraft $= B.\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)$ $= \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^3 = C$ ſamt der Reibung im Gleichgewichte, womit das Seil 3,4 geſpannet wird; dieſe Spannung C am Seile 3,4 mittelſt einer Rolle hervorzubringen iſt an der vierten Rolle am Seile 4,5 eine Kraft $= C.\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right) = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a-\alpha k}{a+\alpha k}\right)^4 = D$ erforderlich; mit dieſer Kraft oder Spannung D iſt an der fünften Rolle zum Gleichgewichte erforderlich eine Kraft $= D\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right) = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^5$; u. ſ. w.

Fig. w. wovon der Fortgang einleuchtend iſt. Es iſt demnach am Flaſchenzuge, wenn ſolcher aus m Rollen beſteht, und die Laſt Q an n Seilen hänget, die zum Gleichgewichte mit der Laſt ſamt der Reibung erforderliche Kraft am letzten Seile angebracht

$$V = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^m.$$

Bey dieſer Formel wird vorausgeſetzt, daß entweder alle Rollen einander gleich wie Fig. 78, oder doch die Verhältniſſe der Halbmeſſer der Rollen zu den Halbmeſſern der Polzen bey allen Rollen eines nämlichen Flaſchenzugs einerley ſind. Iſt dieſes nicht, ſo iſt es für die Ausübung hinlänglich genau, wenn man das Mittel aus allen Halbmeſſern der Rollen $= a$, und das Mittel aus allen Halbmeſſern der Polzen $= \alpha$ ſetzet.

In Fig. 76 und 78 iſt n und auch $m = 6$; in Fig. 77 aber iſt n und auch $m = 5$; wenn man hingegen die Kraft V aufwärts ziehen läßt, ſo iſt m um 1 kleiner als n. Bey dem Flaſchenzuge an unſerem Artillerie-Hebzeuge, wo beyde Ende des Seiles ſich auf die Welle winden, nachdem jedes über zwey untere und über zwey obere Rollen geführet worden, iſt $n = 8$, und für jedes Seil $m = 4$; derowegen iſt an jedem Ende des Seiles zum Gleichgewichte mit der Laſt Q ſamt der Reibung eine Kraft $= \frac{1}{8} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a--\alpha k}\right)^4$, und folglich an beyden Seilen zuſammen die Kraft

$$V = \tfrac{1}{4} Q \,.\, \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^4$$

erforderlich, welche für die Laſt an der horizontalen Welle anzuſehen iſt; dazu läßt ſich ferner die Kraft berechnen, welche dieſer Laſt ſamt der Reibung am Wellrade das Gleichgewicht hält. Es ſey z. B.

$a = 3$ Zoll, $\alpha = \frac{1}{4}$ Zoll, und $k = \frac{1}{5}$, ſo iſt Fig. $\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^4 = 1{,}14164 = 1 + \frac{1}{7}$ beynahe; folglich iſt $V = \frac{1}{4}Q(1+\frac{1}{7})$; ohne Reibung wäre $V = \frac{1}{4}Q$; es wird demnach bey ſolchen Umſtänden die Laſt an der Welle durch die Reibung um $\frac{1}{7}$ gröſſer als ohne derſelben.

I. Wenn man $m = n$ ſetzet, ſo iſt $V = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^n$; ohne Reibung wäre $V = \frac{1}{n} Q$, und zwar V wäre deſto kleiner, je gröſſer n wird, ſo daß endlich V unendlich klein wäre, wenn man $n = \infty$ ſetzte. Bey dem Werthe $V = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)^n$, wo die Reibung mit in die Rechnung genommen wird, iſt es nicht ſo, da nimmt V nur bis zu einem beſtimmten Werthe von n ab; von da wächſt weiter V mit n ohne Ende. Um dieſen Werth für n zu finden, ſetze man $\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k} = f$ und differenzire die Gleichung $V = \frac{1}{n} f^n . Q$ dergeſtalt, daß nur V und n veränderlich ſey; es iſt nämlich bey demjenigen Werthe von n, wo V ein Kleinſtes wird,

$$\frac{dV}{Q dn} = - n^{-2} f^n + \frac{1}{n} . f^n . \mathrm{Log} f = 0;$$

folglich $n = \frac{1}{\mathrm{Log} f}$.

Eben ſo findet man, daß Q in der Gleichung $Q = \frac{n.V}{f^n}$ bey dem Werthe $n = \frac{1}{\mathrm{Log} f}$ ein Größtes

wird

Fig. wird, wenn man dieſe Gleichung dergeſtalt differenziret, daß nur Q und n veränderlich ſey.

Es ſey z. B. $a = 3$ Zoll, $\alpha = \frac{1}{2}$ Zoll, und $k = \frac{1}{3}$, ſo iſt $f = \frac{a + \alpha k}{a - \alpha k} = \frac{19}{17}$, $\text{Log} f = 0{,}111$; und folglich $n = 9$. Es wird demnach in einem ſolchen Falle eine gegebene Laſt Q ſamt der Reibung mit der möglichſt kleinſten Kraft im Gleichgewichte erhalten, wenn man in dem dazugehörigen Flaſchenzuge 9 Rollen anbringt; die zum Gleichgewichte ſamt der Reibung erforderliche Kraft iſt $V = \frac{1}{9} Q \left(\frac{19}{17}\right)^9 = \frac{1}{9} Q (1 + 1\frac{5}{7})$ beynahe, wo $\frac{1}{9} Q$ mit der Laſt, und $\frac{1}{9} Q . 1\frac{5}{7}$ mit der Reibung im Gleichgewichte iſt. Wenn man bey den nämlichen Umſtänden einen Flaſchenzug von mehr als 9 Rollen anordnet, ſo entſteht ein doppelter Nachtheil; erſtens daß die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft gröſſer ſeyn muß, und zweytens daß dabey doch die Bewegung langſamer iſt, als im vorigen Falle bey 9 Rollen.

II. Wenn man in der Gleichung $V = \frac{1}{n} . f^n Q$ ſtatt n den gefundenen Werth ſetzet, ſo iſt die möglichſt kleinſte Kraft $V = Q . f^{\frac{1}{\text{Log} f}} . \text{Log} f$; daraus folgt $Q = \frac{V}{f^{\frac{1}{\text{Log} f}} . \text{Log} f}$ eine Gleichung für die möglichſt größte Laſt, die ſamt der Reibung von einer gegebenen Kraft V mittelſt eines Flaſchenzuges im Gleichgewichte erhalten wird.

Es iſt aus dieſer Unterſuchung zu erſehen, daß es am Flaſchenzuge für eine gegebene Kraft eine beſtimmte möglichſt größte Laſt giebt, die ſamt der Reibung im Gleichgewichte erhalten, und auch beweget werden kann, wenn man die Kraft nur noch um etwas weniges vermehret, oder die Laſt um etwas weniges vermindert, oder auch ſonſt durch eine fremde Kraft der Laſt und Kraft die verhältnißmäſſigen Geſchwindigkeiten beybringet, welche, da die Laſt ſamt der Reibung von der Kraft im Gleichgewichte erhalten wird, ungeändert verbleiben müßten, wenn nicht noch andere Hinderniſſe, als z. B. die Unbiegſamkeit der Seile, der Widerſtand der Luft, und mehr dergleichen die Bewegung verzögerten.

Bey den obangeführten Umſtänden, wo $a = 3$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{3}$, und $f = \frac{19}{17}$ war, iſt es zu erſehen, daß eine gegebene Kraft $V = 100$ Pfund mittelſt eines Flaſchenzugs keiner gröſſeren Laſt als $Q = 330{,}7$ Pfund ſamt der Reibung das Gleichgewicht halten könne, und daß die Laſt an 9 Seilen hängen müſſe, wo das Seil über 9 Rollen geführet iſt. Setzet man $n = 11$ in der Gleichung $Q = \frac{n.100}{f^n}$ bey eben dem Werthe $f = \frac{19}{17}$, ſo iſt $Q = 328{,}8$; bey $n = 8$ iſt $Q = 328{,}6$; ſetzet man n noch gröſſer oder noch kleiner, ſo iſt Q jederzeit kleiner; bey $n = 20$ iſt nur noch $Q = 216{,}2$ Pfund, wo bey der Laſt $Q = 216{,}2$ auch das Gewicht der unteren Flaſche mit begriffen iſt, wenn die Laſt vertikal herabzieht.

III. Eine andere Gleichung ohne natürlichen Logarithmen für die Zahl der Rollen bey der möglichſt kleinſten Kraft, womit eine gegebene Laſt ſamt der Rei-

Fig. bung am Flaſchenzuge im Gleichgewichte erhalten wird, findet man auf folgende Art.

Bey der möglichſt kleinſten Kraft $V = \frac{1}{n} f^n Q$ iſt $\frac{1}{n} f^n Q = \frac{1}{n+1} f^{n+1} Q$ ohne merklichen Fehler; folglich $n = \frac{1}{f-1}$; eben da iſt $\frac{1}{n} f^n Q = \frac{1}{n-1} f^{n-1} Q$ beynahe; folglich auch $n = \frac{f}{f-1}$ ohne merklichen Fehler. Der eine Werth für n iſt etwas zu klein, und der andere etwas zu groß; man kömmt daher der Wahrheit ſehr nahe, wenn man aus beyden das Mittel nimmt; es iſt demnach $n = \frac{1}{2}(\frac{f+1}{f-1})$ hinlänglich genau, woraus ſich ſodann für eine gegebene Laſt Q die möglichſt kleinſte Kraft $V = \frac{1}{n} f^n Q$, und auch für eine gegebene Kraft V die möglichſt größte Laſt $Q = \frac{nV}{f^n}$ berechnen läßt, die ſamt der Reibung von dieſer Kraft im Gleichgewichte erhalten wird.

Die Gleichung $V = \frac{f^n}{n}.Q$ nebſt allen ihren Folgen findet am Flaſchenzuge auch noch ſtatt, wenn man auch noch den von der Unbiegſamkeit der Seile herrührenden Widerſtand in die Rechnung mitnimmt; nur bekömmt f ſodann einen anderen Werth, wie es weiter unten zu erſehen ſeyn wird.

Anmerk. Einſt verlangte ein Mathematiker, man ſolle ihm einen feſten Platz, einen Unterſtützungspunkt anweiſen (als z. B. einen feſtgemachten Hacken um ei-

nen

nen Flaſchenzug daran zu hängen), ſo wolle er mit ſeiner eigenen Kraft Himmel und Erde bewegen (da ubi conſiſtam, cœlum, terramque movebo); daß dieſe Forderung bey dem Flaſchenzuge ungereimt ſey, iſt aus dem vorhergehenden zu erſehen. Ob aber dieſe Forderung bey anderen zuſammengeſetzten Maſchinen z. B. bey den Räderwerken ſtatt finde, wolle der Leſer ſelbſt prüfen, nämlich unterſuchen, ob eine gegebene Kraft mittelſt des Räderwerkes eine jede noch ſo groſſe Laſt ſamt der vollſtändigen Reibung ſowohl in den Zapfenlagern als auch zwiſchen den Zähnen und Triebſtecken überwinden könne. Fig.

§. 187.

Da die Reibung an den Maſchinen ein ſo gewaltiges Hinderniß abgiebt, ſo muß man bey Anordnung der Maſchinen ſorgfältig bedacht ſeyn, die Reibung ſo viel möglich zu vermindern. Einige Hilfsmittel dazu ſind folgende.

1) Hat man ſo viel möglich Sorge zu tragen, daß ſich nicht gleichartige Materien auf einander reiben, z. B. Eiſen auf Eiſen, Meſſing auf Meſſing, Holz auf Holz von der nämlichen Gattung. Die Erfahrung lehret, daß ſich Eiſen auf Meſſing, Stahl auf Zinn, hartes Holz auf einem Holz von einer anderen Gattung weniger reibe.

2) Soll man die ſich reibenden Theile einer Maſchine ſo glatt als möglich machen, und zu verhindern trachten, daß ſich nicht fremde harte Körperchen, als z. B. Sand und Staub dazwiſchen ſetzen.

3) Soll man die Zapfen der Wellräder und Rollen ſo dünne machen, als es die Laſt, die ſie zu tragen haben, und die Dauerhaftigkeit nur immer erlaubet. Auch wird die Reibung noch um vieles vermindert, wenn man jeden Zapfen einer horizontalen Welle

nicht in Pfannen, ſondern auf zweyen nebeneinander geſtellten Rollen umlaufen läßt.

4) Wird die Reibung vermindert, wenn man die ſich reibenden Theile mit ſchicklichen Materien einſchmieret. Die Erfahrung lehret, daß wenn ſich Holz auf Holz reibet, man ſolches mit Saife, oder noch beſſer mit zerriebenen **Saifenſtein**, oder auch mit **Federweiß** (alumen plumoſum) beſtreichen müſſe. Eiſen auf Meſſing wird gewöhnlich mit Baumöhl, Meſſing auf Meſſing mit Wachs beſtrichen, und Eiſen auf Holz zuweilen nur mit Waſſer begoſſen; groſſe Maſchinen endlich werden meiſtens mit Wagenſchmiere, oder mit Schweinsfette eingeſchmieret.

5) Wird die Reibung vermindert, wenn man die **glitſchende, gleitende**, oder **ſchleifende** Bewegung einer Laſt in eine **rollende**, oder **fortwälzende** verwandelt, wenn man zwiſchen den reibenden Flächen Rollen oder Walzen anbringt. Um einen Wagen, deſſen Gewicht ſamt der aufgeladenen Laſt $= Q$ iſt, auf einem horizontalen Boden mit **geſperrten** Rädern fortzuziehen, iſt eine nur um etwas ſehr weniges gröſſere Kraft als die Reibung kQ erforderlich; durch das Umlaufen der Räder um die Achsſtingel wird dieſe zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft kQ nach dem Verhältniſſe des Halbmeſſers des Rades zum Halbmeſſer des Achsſtingels vermindert. Hingegen um den Wagen bergauf, nämlich längſt einer ſchiefen Ebene hinaufwärts zu ziehen, muß nebſt der Reibung auch noch das relative Gewicht überwunden werden.

6) Die Reibung bey dem Zuſammengreifen der Zähne und Triebſtecken wird beynahe gänzlich aufgehoben, wenn man den Zähnen und Triebſtecken eine ſolche Figur zu geben bedacht iſt, daß ſie ſich nicht übereinander **ſchleifen**, ſondern ohne Schleifen über einander **wälzen**. Zuweilen laſſen ſich auch bey den Getrie-

trieben mit nicht geringen Nutzen cylindriſche Triebſtecken anbringen, die um ihre Achſen umlaufbar ſind.

7) Um endlich überhaupt die Reibung ſo gering zu machen als möglich iſt, hat man nebſt Beobachtung der angeführten Hilfsmittel zu trachten, die Maſchinen ſo einfach zu machen, als es nur immer die Umſtände zu laſſen.

§. 188.

Auſſer der Reibung giebt es bey den Maſchinen noch einen Widerſtand, welcher von der **Unbiegſamkeit**, oder **Steifigkeit** der Seile herrühret. Man hat durch Verſuche gefunden, daß die zur Biegung eines Seiles über einen Cylinder erforderliche Kraft deſto gröſſer ſey 1) je dicker das Seil, 2) je ſtärker ſolches geſpannet, und 3) je dünner der Cylinder iſt, über welchen das Seil gebogen wird, nämlich **daß die zur Biegung verſchiedener verſchiedentlich geſpannter Seile über verſchiedene Wellen, Rollen, oder Räder erforderlichen Kräfte den Produkten aus den Halbmeſſern der Seile multipliciret mit ihren Spannungen und dividiret durch die Halbmeſſer der Wellen, Rollen, oder Räder proportional ſind;** wenn demnach die Halbmeſſer zweyer Seile $= r, R$, ihre Spannungen $= q, Q$, die Halbmeſſer der Cylinder $= a, A$, worüber die Seile gebogen werden, und die zur Biegung erforderlichen Kräfte $= p, P$ geſetzet werden, ſo iſt $p : P = \frac{qr}{a} : \frac{QR}{A}$; daraus folgt

$$P = \frac{ap}{qr} \cdot \frac{R}{A} \cdot Q.$$

Fig. Nimmt man nun a, p, q, r aus einem abgeführten Verſuche für bekannt an, ſo iſt auch $P = \frac{ap}{qr} \cdot \frac{R}{A} \cdot Q$ bey gegebenen A, R, Q bekannt. Setzet man $\frac{ap}{qr} = c$, ſo iſt $P = \frac{cR}{A} \cdot Q$, wo c der **Biegungszeiger** heiſſen kann.

Um nun den Biegungszeiger $c = \frac{ap}{qr}$ durch einen Verſuch zu finden, um ſodann in jedem vorkommenden Falle bey einem gegebenen Seile von einer gegebenen Spannung an einer gegebenen Rolle oder Welle die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft beſtimmen zu können, ſey an der Rolle D Fig. 67 die Spannung des Seiles BQ = q, wo q das Gewicht der am Seile BQ hangenden Laſt ſamt dem Gewichte des Seiles EBQ bedeutet; am Seile AP ſey eine Kraft = q' von der Beſchaffenheit angebracht, daß bey der geringſten Vermehrung dieſer Kraft die Rolle ſich zu drehen anfängt; q' bedeutet das Gewicht der am Seile AP hangenden Laſt, und des Seiles EAP zuſammengenommen. Bey dieſen Umſtänden iſt q' mit der Laſt q ſamt der Reibung und Unbiegſamkeit des Seiles im Gleichgewichte; $q' - q$ an AP angebracht iſt die zur Aufhebung der Reibung und zur Biegung des Seiles über den Bogen BEA erforderliche Kraft. Setzet man nun den Halbmeſſer der Rolle bis zur Mittellinie des gebogenen Seiles = a, den Halbmeſſer des Polzens = α, den Reibungszeiger = k, das Gewicht der Rolle = b, die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft = p, und die mit der Reibung im Gleichgewichte ſtehende Kraft = p', ſo iſt $p' = \frac{\alpha k}{a}(q'+q+b)$,

weil

weil der Polzen einen Druck $= q' + q + b$ leidet; Fig.
ferner iſt $p' + p = q' - q$; folglich $p = q' - q - p'$, 67
und endlich, wenn man ſtatt p' ſeinen Werth ſetzet,

$$p = q' - q - \frac{\alpha k}{a} (q' + q + b).$$

Iſt nun k bekannt, ſo iſt bey dem Seile QB, deſſen Halbmeſſer $= r$, Spannung $= q$, und Halbmeſſer der Biegung $= a$ gegeben iſt, die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft p vermög der gefundenen Gleichung leicht zu berechnen, woraus ſich ſodann der Biegungszeiger $c = \frac{ap}{qr}$ ergiebt.

Man kann k für die Rolle D auf folgende Art durch einen Verſuch beſtimmen. Man hänge bey der nämlichen Rolle mittelſt eines ſehr biegſamen Bandes auf der einen Seite ein Gewicht Q an BQ, und auf der anderen Seite an AP ein Gewicht P von der Beſchaffenheit, daß letzteres bey der geringſten Vermehrung zu ſinken anfängt (Q iſt das Gewicht der Laſt Q ſamt dem Bande EBQ, ſo wie P das Gewicht der Laſt P ſamt dem Bande EAP); ferner ſey das Gewicht der Rolle $= b$, der Halbmeſſer der Rolle $= a$ (wo nun a mit dem vorigen a nicht einerley ſeyn kann); und endlich ſey der Halbmeſſer des Polzens $= \alpha$, ſo iſt die mit der Reibung im Gleichgewichte ſtehende Kraft $P - Q = \frac{\alpha k}{a} (P + Q + b)$, weil der Polzen einen Druck $= P + Q + b$ leidet, und wegen dem ſehr biegſammen Bande die zur Biegung deſſelben erforderliche Kraft $= 0$ geſetzet werden kann; es iſt demnach

$$k = \frac{a(P-Q)}{\alpha(P+Q+b)}.$$

Fig. 67 Wenn man auf dieſe Art bey mehreren Rollen k beſtimmet, ſodann auf dergleichen Rollen für verſchiedene verſchiedentlich geſpannte Seile die zur Biegung derſelben erforderlichen Kräfte nach der angeführten Art ſuchet, und endlich bey jedem Verſuche den Biegungszeiger berechnet, ſo wird daraus zu erſehen ſeyn, wie nahe das obangeführte Geſetz von der Unbiegſamkeit der Seile zutreffe; bey denjenigen Umſtänden nämlich, wo der Biegungszeiger $c = \frac{ap}{qr}$ beynahe einerley verbleibt, iſt das obangeführte Geſetz richtig; im Gegentheile iſt es unrichtig.

Es ſey z. B. $k = \frac{1}{5}$ bey der Rolle D durch einen vorläufigen Verſuch gefunden; ferner ſey der Halbmeſſer eines Seiles $r = 6$ Linien, $q = 108$, $q' = 115$, $b = 3\frac{1}{2}$ Pfund, der Halbmeſſer der Rolle bis zur Mittellinie des umgebogenen Seiles $a = 72$ Lin. und der Halbmeſſer des Polzens $\alpha = 4$ Lin. ſo iſt vermög obiger Gleichung die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft $p = q' - q - \frac{\alpha k}{a}(q' + q + b)$ $= 4{,}48$ Pfund.

Daraus folgt der Biegungszeiger $c = \frac{ap}{qr} = \frac{4{,}48}{9}$ $= \frac{1}{2}$ beynahe; und ferner die zur Biegung eines mit Q geſpannten Seiles, wenn deſſen Halbmeſſer $= R$, und Halbmeſſer der Rolle oder Welle $= A$ iſt, erforderliche Kraft $P = \frac{cR}{A} \cdot Q = \frac{RQ}{2A}$. Es iſt demnach bey dem Werthe $c = \frac{1}{2}$, welcher in der Ausübung von der Wahrheit nicht viel abweichen dürfte, die zur Biegung eines Seiles erforderliche Kraft gleich der Spannung

nung multipliciret mit dem Halbmeſſer des Seiles und getheilt durch den Durchmeſſer der Rolle oder Welle, über welche das Seil gebogen wird.

§. 189.

Nach den angeführten Gründen iſt es nun ſehr leicht am Wellrade die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft zu finden. Dieſe gefundene Kraft wird zu der Spannung des Seiles addiret, um die ganze auf die Welle wirkende Laſt zu erhalten; woraus ſich ſodann die Kraft berechnen läßt, welche am Wellrade zum vollſtändigen Gleichgewichte erforderlich iſt.

Auch am Flaſchenzuge iſt es ſehr leicht die Kraft V zu berechnen, welche einer gegebenen Laſt Q ſamt der Reibung und Unbiegſamkeit des Seiles das Gleichgewicht hält; wenn nämlich der mittlere Halbmeſſer der Rollen bis zur Mittellinie des umgebogenen Seiles $= a$, der mittlere Halbmeſſer der Polzen $= \alpha$, die Zahl der Seile woran die Laſt hängt $= n$, die Zahl der Rollen $= m$, der Reibungszeiger $= k$, der Biegungszeiger $= c$, der Halbmeſſer des Seiles $= r$, und bey der vertikal herunter hangenden Laſt das Gewicht der Laſt ſamt der unteren Flaſche $= Q$ geſetzet wird, ſo iſt die geſuchte Kraft $V = \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k} + \frac{cr}{a}\right)^m$, oder wenn man $\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k} + \frac{cr}{a}\right) = f$ ſetzet, ſo iſt $V = \frac{f^m}{n} . Q$.

Denn es iſt Fig. 76, 77, 78 die Spannung des erſten Seiles a1 $= \frac{1}{n} Q$; folglich iſt an der erſten Rolle am Seile 1·2 zum ſämtlichen Gleichgewichte eine Kraft $= \frac{1}{n} Q \left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right) + \frac{1}{n} Q . \frac{cr}{a} =$

Fig. 76 77 78 $\frac{1}{n}Q\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}+\frac{cr}{a}\right)=A$ erforderlich, wo $\frac{1}{n}Q\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}\right)$ vermög (§. 186.) mit der Spannung $\frac{1}{n}Q$ ſamt der Reibung, und $\frac{1}{n}Q.\frac{cr}{a}$ vermög (§. 188.) mit der Unbiegſamkeit des Seiles im Gleichgewichte iſt. Dieſe Kraft A iſt die Spannung des Seiles 1.2; dazu iſt an der zweyten Rolle am Seile 2.3 zum ſämtlichen Gleichgewichte eine Kraft $= A.\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}+\frac{cr}{a}\right)$ $=\frac{1}{n}Q\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}+\frac{cr}{a}\right)^2 = B$ erforderlich; fährt man ſo weiter fort, ſo findet man endlich, daß an der *m*ten Rolle zum ſämtlichen Gleichgewichte die Kraft $\frac{1}{n}Q\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}+\frac{cr}{a}\right)^m = V$ erforderlich ſey, oder wenn man $\left(\frac{a+\alpha k}{a-\alpha k}+\frac{cr}{a}\right)=f$ ſetzet, ſo iſt $V=\frac{f^m}{n}.Q.$

Bey $m=n$ iſt $V=\frac{f^n}{n}.Q$, und $Q=\frac{nV}{f^n}$; daraus folgt ferner die Zahl der Seile, oder Rollen bey der möglichſt größten Laſt Q, die ſamt der Reibung und Unbiegſamkeit der Seile von einer gegebenen Kraft V am Flaſchenzuge kann im Gleichgewichte gehalten werden, $n=\frac{1}{\text{Log} f}$, oder beynahe eben ſo genau $n=\frac{1}{2}\left(\frac{f+1}{f-1}\right)$, wie oben (§. 186. III.).

I. Anmerk. Wenn man nach den bisher angeführten Gründen bey verſchiedenen Maſchinen, welche ohne Reibung und Unbiegſamkeit der Seile einerley Wirkung leiſten würden, z. B. bey unſerem in (§. 176.) beſchriebenen Artillerie-Hebzeuge, und bey der in Fig. 84 abgebildeten Hebmaſchine zu einer nämlichen Laſt für den Zuſtand des ſämtlichen Gleichgewichts die erforderliche Kraft berechnet, ſo wird man daraus erſehen, warum es ſo ſehr rathſam ſey die Maſchinen jederzeit ſo einfach zu machen, als es nur immer die Umſtände erlauben. Fig.

II. Anmerk. Einige Schriftſteller ſetzen bey den Flaſchenzügen die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft bey einerley Spannung an den Rollen der beweglichen Flaſche nur halb ſo groß, als an den Rollen der unbeweglichen Flaſche. Allein es iſt offenbar bey der beweglichen ſowohl als auch bey der unbeweglichen Rolle die zur Biegung des Seiles erforderliche Kraft an dem einen Seile $= \frac{cr}{a} \cdot q$, wenn die Spannung des anderen Seiles $= q$, der Halbmeſſer des Seiles $= r$, der Rolle $= a$, und der Biegungszeiger $= c$ iſt, vorausgeſetzt daß das obangeführte Geſetz von der Unbiegſamkeit der Seile ſtatt finde, und daß der Biegungszeiger c nach der gegebenen Vorſchrift richtig beſtimmt ſey. Denn wenn man in Fig. 68 am Seile AG nach der Richtung AG eine Kraft anbringt, ſo iſt es (die Reibung, wie auch das Gewicht des Seiles und der Rolle indeſſen bey Seite geſetzt) für dieſe Kraft in Rückſicht der Biegung des Seiles in B völlig einerley, ob das Seil in F befeſtiget, und die Laſt Q in D angebracht, oder aber die Rolle in D befeſtiget und in F nach der Richtung BF eine Laſt $\frac{1}{2}$Q angebracht iſt; in

bey-

Fig. beyden Fällen iſt die Spannung des Seiles nebſt allen
91 übrigen Umſtänden eben dieſelbe.

§. 190.

Wenn ein Seil, an deſſen einem Ende eine ſehr groſſe Laſt angebracht iſt, etlichemal um einen unbeweglichen Cylinder gewunden iſt, ſo kann am anderen Ende eine ſehr geringe Kraft die Bewegung der Laſt aufhalten, nämlich verhindern, daß die aus dem aufgewikelten Seile gebildete Röhre auf dem unbeweglichen Cylinder ſich nicht umdrehen könne, weil in dergleichen Fällen an der äuſſeren Oberfläche des unbeweglichen Cylinders, und an der inneren Fläche der aufgewikelten Seil-Röhre eine gewaltige Reibung entſteht, welche ſamt der angebrachten Kraft das Zurückſinken der Laſt verhindert.

Wenn Fig. 91 an einem gegebenen unbeweglichen Cylinder **MN** bey der halben Aufwindung eines gegebenen Seiles der Reibungszeiger $= k$ geſetzet wird, der mittelſt eines Verſuches ſehr leicht zu beſtimmen iſt, und am Seile **MA** eine Kraft $= P$ angebracht wird, ſo iſt bey n halben Aufwindungen dieſes Seiles nach einer zu **MD** parallelen Richtung aufwärts, oder nach einer zu **NB** parallelen Richtung abwärts eine Laſt $Q = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^n . P$ mit P ſamt der Reibung im Gleichgewichte, oder wenn man $\frac{1+k}{1-k} = m$ ſetzet, ſo iſt $Q = m^n P$.

Denn ohne Reibung iſt mit der Kraft **P** an **MA**, bey der halben Aufwindung **ARB** an **NB** eine Laſt $= P$, und wegen der Reibung ein Gewicht oder eine Laſt $p = k(P+P+p)$, nämlich $p = \frac{2kP}{1-k}$, zum Gleichgewichte erforderlich; es iſt demnach die ganze

Laſt

Laſt $P' = P + p = \left(\frac{1+k}{1-k}\right).P' = m.P$, welche bey Fig. 91 einer halben Aufwindung von der Kraft P in Ruhe erhalten wird. Aus der nämlichen Urſache wird an einem eben ſolchen Seile CSD am nämlichen Cylinder von der Kraft mP an NC, eine Laſt $= m.mP = m^2P$ an MD bey einer halben Aufwindung in Ruhe erhalten. Bey den Kräften P an BRA, mP an ARB, mP an DSC, und m^2P an CSD bleibt demnach alles in Ruhe. Dieſe Ruhe verbleibet auch noch, wenn man die zwey Seile ARB und CSD in N vereiniget. Nun ſind mP an NB, und mP an NC einander gleich und gerade entgegengeſetzt; folglich kann man ſie nach vereinigtem Seile beyde hinwegnehmen ohne die Ruhe zu ſtöhren; ſodann wird von der Kraft P bey zwey halben Aufwindungen die Laſt m^2P in Ruhe erhalten. Fährt man ſo weiter fort, ſo findet man endlich, daß bey n halben Aufwindungen von der Kraft P die Laſt $Q = m^nP$ in Ruhe erhalten werde, weil nämlich, wenn man hinter dem Seile DSC ein eben ſolches Seil nach der Richtung ARB ſich vorſtellet, wieder von einer Kraft m^2P in der Richtung MA bey einer halben Aufwindung eine Laſt $= m.m^2P = m^3P$ in der Richtung NB in Ruhe erhalten wird.

Aus der gefundenen Gleichung $Q = m^nP$ folgt auch die Kraft $P = \frac{Q}{m^n}$, welche bey n halben Aufwindungen zur Erhaltung einer gegebenen Laſt Q erforderlich iſt; und ferner $n = \frac{\log Q - \log P}{\log m}$ die Zahl der halben Aufwindungen, welche erforderlich ſind um eine gegebene Laſt Q mittelſt einer gegebenen Kraft P in Ruhe zu erhalten.

Fig. In dergleichen Fällen iſt k niemals kleiner als $\frac{1}{3}$, ſondern gemeiniglich gröſſer; iſt $k = \frac{1}{3}$, ſo iſt $m = \frac{1+k}{1-k} = 2$; iſt aber $k = \frac{1}{2}$, ſo iſt $m = 3$. Setzet man nur $m = 2$, $P = 10$ Pfund, und $n = 9$, ſo iſt ſchon $Q = 5120$ Pfund.

Um bey einem gegeben Seile an einem gegebenen Cylinder m durch einen Verſuch zu finden, ſey bey einer halben Aufwindung die zur Erhaltung einer gegebenen Laſt Q erforderliche Kraft $= P$, ſo iſt $Q = mP$; daraus folgt $m = \frac{Q}{P}$; und ferner auch $k = \frac{Q+P}{Q-P}$.

Aus der hier vorgetragenen Unterſuchung wird nun die Wirkung der Erdwinde begreiflich (156. II.). Auch andere dergleichen Erfolge, z. B. das Herablaſſen der vollen Fäſſer in die Keller, die Befeſtigung der Schiffe mittelſt eines um einen oder mehrere Pfähle gewundenen Seiles u. ſ. w. können nun gründlich eingeſehen werden.

XIII. Vor-

XIII. Vorleſung.

Die Feſtigkeit der Materialien.

§. 191.

Eine Kraft, welche bey der geringſten Vermehrung den Zuſammenhang der Theile eines Körpers trennet, heißt das **Maaß der Feſtigkeit**, oder auch die **Feſtigkeit** dieſes Körpers. Man nennt die Feſtigkeit **abſolut**, wenn eine Kraft, deren Richtung durch den Schwerpunkt und Unterſtützungspunkt des Körpers geht, denſelben **zerreiſſet**; **relativ** aber, wenn die Kraft, da ſie mittelſt eines Hebelsarmes wirket, den Körper **zerbricht**.

Befeſtiget man einen Körper in vertikaler Lage mit ſeinem oberen Ende, und hänget an ſein unteres Ende ein ſolches Gewicht, welches bey der geringſten Vermehrung den Körper zerreiſſet, ſo iſt dieſes Gewicht nebſt dem Gewichte des abgeriſſenen Stückes das Maaß ſeiner **abſoluten Feſtigkeit**. Befeſtiget man aber den Körper, als z. B. ein Priſma, in horizontaler Lage an dem einen Ende, und hänget ein ſolches Gewicht an das andere Ende, welches bey der geringſten Vermehrung den Körper abbricht, ſo iſt dieſes Gewicht nebſt dem halben Gewichte des abgebrochenen Stückes des prismatiſchen Körpers das Maaß ſeiner **relativen Feſtigkeit**.

Bey Maſchinen ſowohl, als auch in der Baukunſt iſt es von groſſer Wichtigkeit die Feſtigkeit der Materialien gehörig in Erwägung zu ziehen. Die bisherigen Theorien und Verſuche ſind zwar noch nicht hinreichend um daraus in jedem vorkommenden Falle die Feſtigkeit zuverläſſig beſtimmen zu können, weil die Feſtigkeit eines nämlichen Materials, z. B. einer nämlichen Holzgattung, eines nämlichen Mettals nicht an allen Orten und zu allen Zeit gleich iſt. Jedoch iſt es gewiß nicht ohne Nutzen wenigſtens auch nur zu ſehen, worauf es bey ſolcher Beſtimmung ankomme, um doch einigermaſſen etwas zu haben, worauf man ſeine Einrichtung im Maſchinenweſen, und in der Baukunſt gründen könne. Die in der Folge vorkommenden Sätze dienen zu einer Richtſchnur um im erforderlichen Falle die Feſtigkeit eines vorgegebenen Materials, mittelſt eines vorläufigen im Kleinen abgeführten Verſuches, beſtimmen zu können.

§. 192.

Die abſoluten Feſtigkeiten zweyer Körper von einerley Materie verhalten ſich gegeneinander wie die kleinſten Durchſchnitte der Körper auf die Richtungen der zerreiſſenden Kräfte ſenkrecht gelegt.

Daß bey einem gleichförmig dichten vertikal herabhangenden Körper der Riß in dem kleinſten horizontalen Durchſchnitte geſchehen müſſe, erhellet daher, weil daſelbſt die kleinſte Anzahl der zu trennenden phyſiſchen Punkte ſich befindet. Iſt nun bey einem abgeriſſenen Körper die Fläche, worin der Riß geſchah, die **Trennungsfläche** $= f$, und ſeine abſolute Feſtigkeit $= p$; ferner bey einem anderen gleichartigen Körper die Trennungsfläche $= F$, und abſolute Feſtigkeit $= P$, und es iſt $F = n.f$, ſo muß auch offenbar $P = n.p$

ſeyn,

ſeyn, wenn alle die übrigen Umſtände einerley ſind, weil in einem ſolchen Falle um eine $n$mal gröſſere Anzahl phyſiſcher Punkte zu trennen, wo jedes Paar mit einerley Gewalt zuſammen hänget, offenbar eine $n$mal gröſſere Kraft erforderlich iſt. Da nun $P = n.p$ ſeyn muß, wenn $F = n.f$ iſt, ſo iſt auch $P = \frac{F}{f}.p$, und folglich $P : p = F : f$. Iſt nun f, p, und F bekannt, ſo läßt ſich $P = \frac{p}{f}.F$ finden; eben ſo läßt ſich aus f, p, und P der Durchſchnitt $F = \frac{f}{p}.P$ berechnen.

Anmerk. Hier folgen Hrn. **Muſchenbröcks** Verſuche über das Zerreiſſen einiger Holzgattungen, einiger Metalle, und auch einiger Seile. Beym Holze ware die Trennungsfläche = 0,0729, und beym Metalle = 0,01 rheinländiſchen Quadratzoll; die Durchmeſſer der Seile folgen in rheinländiſchen Duodecimallinien. Die Körper wurden von folgenden Gewichten zerriſſen vermuthlich in kölniſchen Pfunden ausgedrückt.

Holz		Metall		Seil	
Buchen von	1250	Gold von	500	8 L. v.	330 Pf.
Eſchen —	1250	Eiſen —	457	12 —	750
Eichen —	1150	Silber —	370	16 —	1030
Linden —	1000	Meſſing —	360	20 —	2080
Erlen —	1000	Kupfer —	299	24 —	3000
Ulmen —	950	Zinn —	49	30 —	4730
Tannen —	600	Bley —	29	36 —	7900
Fichten —	550				

Herr Papacino d'Antoni hat aus ſeinen Verſuchen folgendes abgeleitet. Bey der Trennungsfläche von einem Turiner Quadratfuß iſt die Feſtigkeit in Turinerpfunden ausgedrückt bey dem Bley 1555200; bey dem engliſchen Zinn = 2592000; bey gegoſſenem Eiſen = 6220800; bey dem Stuckmetall nämlich bey gemeinem Kupfer mit $\frac{1}{6}$ engliſchen Zinn vermiſcht = 8087040; bey dem ſchwediſchen Kupfer mit $\frac{1}{8}$ engliſchen Zinn vermiſcht = 9331200; bey gut gereinigtem Kupfer = 1555000; bey dem gemeinen geſchmiedeten Eiſen = 17625600 Pfund. Dabey iſt zu merken, daß 14400 Pariſ. Fuß = 22737 Tur. Fuß; 14400 Wien. Fuß. = 14013 Pariſ. Fuß; 100 Tur. Pfund = $67\frac{5}{11}$ Pariſ. Pfunden; 10202 Köln. Pfund = 9728 Pariſ. Pfunden; und 196161 Köln. Pfund = 163840 Wien. Pfund.

§. 193.

Die relativen Feſtigkeiten zweyer Körper von einerley Materie verhalten ſich wie die Trennungsflächen multipliciret mit dem Abſtande ihres Schwerpunktes von dem Unterſtützungspunkte, wo der Bruch ſich endiget, getheilet durch die Längen der Körper.

Ein Körper AB Fig. 86 ſey in horizontaler Lage mit dem einen Ende in einer vertikalen Wand hinreichend befeſtiget, und ein Gewicht v, welches am anderen Ende in B herabhänget, bricht bey der geringſten Vermehrung das Stück AB ab, ſo daß die Trennungsfläche AC = f ſey. Es ſey die abſolute Feſtigkeit dieſes Körpers = p, welche man ſich im Schwerpunkte G der Trennungsfläche in der Erhöhung CG = a vereiniget vorſtellen kann, ſo daß p mittelſt des Hebelsarmes GC das Abbrechen des Stückes AB hindert, wo der Punkt C in der Vertikallinie AC der Unterſtützungspunkt iſt. Fig. 86 Die Kraft v, wozu auch das halbe Gewicht des Körpers gehöret, wenn ſolcher priſmatiſch iſt, am Hebelsarm CB $= l$ iſt am Winkelhebel ACB mit p im Gleichgewichte; derowegen iſt $p.a = v.l$, und ferner $v = \frac{pa}{l}$. Aus der nämlichen Urſache iſt bey einem anderen Körper von einerley Materie, deſſen Trennungsfläche $= F$, abſolute Feſtigkeit $= P$, Erhöhung des Schwerpunktes $= A$, und Länge $= L$ iſt, bey einerley Umſtänden die relative Feſtigkeit $V = \frac{P.A}{L}$; folglich $v : V = \frac{pa}{l} : \frac{PA}{L}$; es iſt aber vermög (§. 192.) $p : P = f : F$; folglich auch $v : V = \frac{fa}{l} : \frac{FA}{L}$.

I. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß es nicht gleichgiltig ſey, mit welcher Seite ein Körper aufliege; bey einem nämlichen dreyſeitigen Prisma, wenn ſolches in horizontaler Lage mit dem einen Ende ſo befeſtiget wird, daß eine nämliche Seitenfläche einmal oberhalb, und ein andermal unterhalb zu liegen komme, iſt die relative Feſtigkeit im erſten Falle gröſſer als im zweyten; im erſten Falle wird das Priſma nicht ſo leicht abgebrochen als im zweyten.

Auch eine cylindriſche Röhre, die mit einem ganzen Cylinder von der nämlichen Länge gleichviel Materie von der nämlichen Gattung enthält, iſt der Zerbrechlichkeit nicht ſo ſehr unterworfen, als der ganze Cylinder. Aus dieſer Urſache hat der groſſe Baumeiſter der Natur ſolchen Körpern, die bey einer geringen Maſſe eine hinlängliche Feſtigkeit haben müſſen, als den Flügelfedern der Vögel, den Beinen der Thiere, den

Fig. 86 Halmen des Getreides u. m. d. Körpern eine Röhrengeſtalt gegeben.

Ein vierſeitiges hölzernes Prisma, ein **Balken**, kann eine gröſſere Laſt tragen, wenn er mit der kürzern Seite der Grundfläche aufliegt, das iſt wenn er auf die hohe Kante gelegt wird. Wenn ein nämlicher Balken einmal mit der kürzern, und ſodann mit der längern Seite der Grundfläche aufliegt, ſo verhalten ſich die relativen Feſtigkeit des Balkens im erſten und im zweyten Falle, wie die längere Seite der Grundfläche zur kürzern.

II. **Bey zwey Balken von einerley Art verhalten ſich die relativen Feſtigkeiten, wie die Quadrate der Höhen multipliciret mit den Breiten (mit den Seiten nämlich, womit ſie aufliegen) getheilet durch die Längen der Balken.** Denn wenn ihre Höhen $= A, a$, Breiten $= B, b$, und Längen $= L, l$ geſetzet werden, ſo ſind die Trennungsflächen $= AB, ab$, und die Erhöhungen der Schwerpunkte $= \frac{1}{2}A, \frac{1}{2}a$; folglich iſt

$$V:v = \frac{AB.\frac{1}{2}A}{L} : \frac{ab.\frac{1}{2}a}{l} = \frac{A^2B}{L} : \frac{a^2b}{l}.$$

III. Sind nun a, b, l, und v aus einem abgeführten Verſuche bekannt, ſo läßt ſich auch aus A, B, L die geſuchte relative Feſtigkeit $V = \frac{vl}{a^2b} \cdot \frac{A^2B}{L}$ finden, oder wenn man $\frac{vl}{a^2b} = m$ ſetzet, ſo iſt $V = m.\frac{A^2B}{L}$, **nämlich die relative Feſtigkeit eines Balkens iſt gleich dem Produkte aus dem Quadrate der Höhe in die Breite des Balkens, womit ſolcher aufliegt, multipliciret mit einem unveränderlichen Coefficienten** m **und getheilet durch**

durch die Långe des Balkens. Daraus folgt die richtige Aufloͤſung der Aufgabe (604. IV.), **aus einem runden Baume den moͤglichſt ſtårkſten Balken auszuhauen.** Fig. 86

IV. Aus der Gleichung $V = m.\frac{A^2B}{L}$, folgt auch $A^2B = \frac{VL}{m}$ eine Gleichung, **wodurch ſich aus der gegebenen Långe des Balkens, und aus der Laſt, die er zu tragen hat, die Dicke deſſelben, nåmlich ſein Durchſchnitt beſtimmen låßt.** Da aber wirklich angeſtellte Verſuche die relative Feſtigkeit zuweilen etwas geringer geben, als die Rechnung ſie giebt, wenn man aus kleinem auf das groſſe ſchlieſſet; da ein Balken nach langer Zeit von einer Laſt gebrochen wird, die er bis dahin trug; und da endlich nicht bloß das Brechen, ſondern auch das merkliche Biegen zu vermeiden iſt, ſo iſt fuͤr die Ausuͤbung am ſicherſten bey der Gleichung $V = m.\frac{A^2B}{L}$, die gefundene Feſtigkeit des Balkens nur fuͤr halb ſo groß anzunehmen, als die Rechnung ſie giebt; wie auch bey der Gleichung $A^2B = \frac{VL}{m}$ die Laſt V doppelt ſo groß anzuſetzen als ſie wirklich iſt.

V. Sind in der Proportion $V : v = \frac{A^2B}{L} : \frac{a^2b}{l}$ die Laͤngen gleich, ſo iſt $V : v = A^2B : a^2b$; ſind Laͤngen und Breiten gleich, ſo iſt $V : v = A^2 : a^2$; ſind Laͤngen und Hoͤhen gleich, ſo iſt $V : v = B : b$; ſind Breiten und Hoͤhen gleich, ſo iſt $V : v = \frac{1}{L} : \frac{1}{l} = l : L$ u. ſ. w.

VI.

Fig. 86 VI. Iſt ein Balken in horizontaler Lage an beyden Enden befeſtiget, und in ſeiner Mitte mit einer Laſt beſchweret, ſo iſt in einem ſolchen Falle ſeine relative Feſtigkeit beynahe viermal ſo groß, als im vorigen Falle, wo der Balken nur mit dem einen Ende befeſtiget, und am anderen mit einer Laſt beſchweret iſt. Denn wenn der Balken AB in B mit v beſchweret in AC abbricht, ſo iſt in der halben Entfernung AD dazu eine Kraft $= 2v$ erforderlich; eben ſo iſt in D eine Kraft $= 2v$ erforderlich um eben dieſen Balken abzubrechen, wenn er nur an dem Ende BE befeſtiget iſt; wird daher der Balken an beyden Enden befeſtiget, ſo iſt wegen beyden Befeſtigungen zuſammen in der Mitte D zum Brechen eine Kraft $= 2v + 2v = 4v$ erforderlich. Jedoch iſt es ſicherer, wenn man in dergleichen Fällen, wo bey einem an beyden Enden entweder feſt eingeklammerten oder nur an beyden Enden bloß unterſtützten Balken, der in ſeiner Mitte eine Laſt zu tragen hat, die relative Feſtigkeit oder der Durchſchnitt zu berechnen iſt, auf eben die Art den Verſuch im Kleinen anſtellet, als der groſſe Balken die Laſt zu tragen hat; dadurch erhält man für einen ſolchen Fall $m = \frac{vl}{a^2 b}$, woraus ſich ſodann bey dem groſſen Balken $V = m . \frac{A^2 B}{L}$, und auch $A^2 B = \frac{VL}{m}$ ergiebt. Verſuche geben zu erkennen, daß ein an beyden Enden feſt eingeklammerter oder eingemauerter Balken beynahe eine $\frac{3}{2}$mal ſo groſſe Laſt zu tragen im Stande ſey, als ein mit beyden Enden frey aufliegender Balken.

VII. Sind bey zwey Körpern von einerley Art, die beyde in einerley Lage auf einerley Art befeſtiget ſind, die Trennungsflächen ähnlich, ſo iſt $F : f = A^2 : a^2$,

wo

wo A, a die Erhöhungen der Schwerpunkte bedeutet; Fig. folglich auch $V : v = \frac{A^1}{L} : \frac{a^3}{l}$, weil $V : v = \frac{FA}{L} : \frac{fa}{l}$ ſich verhält; ferner iſt $A^3 : a^3$ wie die dritten Potenzen von was immer für gleichnamigen Linien; **es verhalten ſich demnach bey dergleichen Körpern z. B. bey Cylindern die relativen Feſtigkeiten wie die 3ten Potenzen der gleichnamigen Linien der Trennungsflächen getheilet durch die Längen der Körper.**

Anmerk. Wenn der Zuſammenhang aller phyſiſchen Punkte der Trennungsfläche eines abzubrechenden Körpers wirklich genau in dem Schwerpunkte der Trennungsfläche vereiniget wäre, ſo könnte man bey jedem Körper aus ſeiner abſoluten Feſtigkeit ſeine relative berechnen ſowohl für den Fall, wo er mit dem einen Ende in einer Wand befeſtiget iſt, und am anderen Ende eine Laſt zu tragen hat, als auch für den Fall, wo er an beyden Enden befeſtiget oder unterſtützet iſt, und in ſeiner Mitte eine Laſt zu tragen hat. Allein dieſes ſtimmet mit den Verſuchen nicht genau überein; denn die Biegſamkeit verurſachet, daß der Vereinigungspunkt des Zuſammenhanges in der Trennungsfläche mit dem Schwerpunkte nicht genau zuſammenfällt, ſondern daß der erſte gemeiniglich etwas niedriger liegt als der letzte; dabey aber kann doch der gegebene Beweis des im §. 193 angeführten Satzes nebſt allen daraus abgeleiteten Folgen noch immer beſtehen, weil man ohne merklichen Fehler annehmen kann, daß die Erhöhungen der Vereinigungspunkte des Zuſammenhanges in den Trennungsflächen über die Unterſtützungspunkte, wo die Brüche ſich endigen, bey Körpern von einerley Materie den Erhöhungen der Schwerpunkte multipliciret mit einem nämlichen Coefficienten gleich ſind; nur ſind für jede Gat-tungen groſſer Balken auf die nämliche Art, als ſolche eine Laſt zu tragen haben, im Kleinen genau abgeführte Verſuche erforderlich.

Bey einigen Verſuchen des Hrn. **Muſchenbröck** wurden hölzerne Parallelepipeda, deren Länge = 10 rheinl. Zolle und am Kopfe jede Seite des Quadrates = 0,27 Zoll war, mit dem einen Ende befeſtiget, und mittelſt nachſtehender am anderen Ende herabhangender Gewichte abgebrochen: Tannen von $36\frac{1}{2}$, Fichten von 40, Ulmen von 44, Eichen und Erlen von 48, und Buchenholz von $56\frac{1}{2}$ Unzen.

Herr **Belidor** Ingen. Wiſſ. IV. Buch 3 Kap. hat mit Parallelepipeden von Eichenholz, die in der Mitte beſchweret, und an beyden Enden theils eingeklammert, theils nur bloß unterſtützet waren, Verſuche angeſtellet; ſie ſind aus folgender Tabelle zu erſehen, wo l die Länge, a die Höhe, b die Breite des Balkens, v das Gewicht, womit ſolcher zerbrochen wurde, A **aufliegend** oder bloß unterſtützet, und E **eingeklammert** bedeutet; l, a, b ſind in Pariſ. Zollen, und v in Par. Pfunden ausgedrückt.

Verſuch		l	a	b	v
1	A	18	1	1	406
2	E	18	1	1	600
3	A	18	1	2	805
4	A	18	2	1	1580
5	A	36	1	1	187
6	E	36	1	1	283
7	A	36	2	2	1585
8	A	36	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	1660

Wenn man einen dieſer Belidoriſchen Verſuche für bekannt annimmt, und daraus für die übrigen v berechnet, ſo iſt daraus zu erſehen, daß die Abweichungen der Rechnung von der Erfahrung immer erträglich ſind. Der 7te und 8te Verſuch beſtättigen die Auflöſung der Aufgabe (604. IV.), aus einem runden Baume den ſtärkſten vierſeitigen Balken auszuhauen. Fig. 59

§. 194.

Aufgabe. Ein horizontaler an beyden Enden Unterſtützter Balken AB Fig. 59 wird von einer Laſt R, die in ſeiner Mitte D angebracht iſt, gebrochen; man ſoll die Laſt Q finden, welche in irgend einem anderen Punkte C angebracht ſolchen brechen kann.

Auflöſ. Es ſey AB $= a$, und AC $= b$, ſo iſt $Q = \frac{\frac{1}{4}a^2R}{ab-b^2}$. Denn wegen der Befeſtigung A iſt in D in der Entfernung DA $= \frac{1}{2}a$ eine Laſt $= \frac{1}{2}R$, und folglich in C in der Entfernung CA $= b$ eine Laſt $= \frac{\frac{1}{2}R . \frac{1}{2}a}{b} = \frac{\frac{1}{4}aR}{b}$ zum Brechen erforderlich; eben ſo iſt wegen der Befeſtigung B, in D in der Entfernung DB $= \frac{1}{2}a$ eine Laſt $= \frac{1}{2}R$, und folglich in C, in der Entfernung CB $= a - b$ eine Laſt $= \frac{\frac{1}{2}R . \frac{1}{2}a}{a-b} = \frac{\frac{1}{4}aR}{a-b}$ zum Brechen erforderlich. Es iſt demnach wegen beyden Befeſtigungen oder Unterſtützungen zum Brechen in C die geſammte Laſt $Q = \frac{\frac{1}{4}aR}{b} + \frac{\frac{1}{4}aR}{a-b} = \frac{\frac{1}{4}a^2 \cdot R}{ab-b^2}$ erforderlich.

Fig. 59 Es iſt daraus zu erſehen, daß Q deſto gröſſer wird, je kleiner b iſt; das heißt die Gefahr des Zerbrechens wird deſto geringer, je näher die Laſt bey dem Unterſtützungspunkte liegt.

I. Aus R, a, Q läßt ſich auch b finden. Imgleichen läßt ſich aus der Laſt Q, aus ihrem Abſtande b von der nächſten Unterſtützung, und aus der Länge des Balkens a die in D in der Mitte deſſelben anzubringende Laſt R berechnen, welche mit Q in C angebracht **gleichgeltend** iſt, ſo daß R in D auf beyde Befeſtigungen zuſammen eben ſo wirket, als Q in C; es iſt nämlich $R = \frac{Qb(a-b)}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{Q.AC.BC}{AD^2}$. Wären mehrere Laſten auf dem nämlichen an beyden Enden unterſtützten Balken an verſchiedenen Stellen angebracht, ſo läßt ſich auf dieſe Art für jede derſelben eine gleichgeltende in der Mitte des Balkens anzubringende Laſt finden. Wäre über den Balken AB eine ſchwere nicht zuſammenhängende Maſſe, z. B. eine Menge Getreides, gleichförmig vertheilet, ſo kann ihr Gewicht $Q = \frac{3}{2}R$ ſeyn ohne daß der Balken abbricht, wenn dieſer Balken in ſeiner Mitte ohne zu brechen die Laſt R ertragen kann. Denn wenn man $AC = x$, das Gewicht der ganzen gleichförmig vertheilten Maſſe $= Q$, und mit der über AC vertheilten Maſſe die in D gleichgeltende Laſt $= y$ ſetzet, ſo iſt das Gewicht eines Theilchens einer ſolchen Maſſe, ſo auf ein Element dx des Balkens in C wirket, $= \frac{Q\,dx}{a}$; daraus folgt in D die Gleichgeltende Laſt

$$dy = \frac{Q\,dx}{a} \cdot \frac{x(a-x)}{\frac{1}{4}a^2};$$ und ferner

$$y = \frac{2}{3}Q \cdot \frac{x^2(3a-2x)}{a^3},$$ allwo Conſt. $= 0$ iſt;

ſe-

ſetzet man nun $x = a$, ſo iſt $y = R$, nämlich Fig.
$R = \frac{2}{3}Q$, und folglich $Q = \frac{3}{2}R$. 21

§. 195.

Wenn ein Balken CB Fig. 21 in horizontaler Lage von einer Laſt p in M angebracht gebrochen wird, ſo iſt bey der Neigung des Balkens gegen den Horizont unter dem Winkel CBA $= m$ zum Brechen eine Laſt $q = \frac{p}{\cos m}$ an der nämlichen Stelle angebracht erforderlich.

Denn die Laſt MN $= q$ nach vertikaler Richtung angebracht zerfällt in DM $= q.\cos m$, und in die Laſt FM $= q.\sin m$, wovon die letzte nach der Länge des Balkens wirket, und von der Befeſtigung in B aufgehalten wird, die erſte aber $q.\cos m$ ſtrebet nach einer ſenkrechten Richtung den Balken abzubrechen; damit ſie dieſes bewirken könne, muß ſie der gegebenen Laſt p gleich ſeyn, nämlich $q.\cos m = p$; und folglich iſt $q = \frac{p}{\cos m}$.

Ein Balken z. B. der in horizontaler Lage 1000 Centner zu tragen vermögend iſt, kann bey einer Neigung von 60 Graden eine Laſt von 2000 Centnern erhalten ohne zu brechen.

Anmerk. Bey ſenkrecht ſtehenden Pfeilern oder Säulen, die daher mit dem Horizont einen Winkel von 90 Graden machen, iſt $q = \frac{p}{0} = \infty$, das iſt ſie können jede noch ſo groſſe Laſt erhalten ohne davon abgebrochen zu werden, ſie ſcheinen unzerbrechlich

Fig. zu ſeyn. Allein dieſes findet nicht ſtatt, weil ſie niemals vollkommen gleichförmig dicht ſind; und daher eine zu groſſe Laſt, welche auf einem ſenkrecht ſtehenden Pfeiler liegt, einige Theile zuſammendrücket, da andere noch widerſtehen; der Pfeiler biegt ſich aus dieſer Urſache nach der Seite hin, wo die Theile nachgegeben haben, und bricht ab.

Ueber die Stärke ſenkrecht ſtehender Pfeiler iſt noch keine zuverläſſige Regel bekannt, wie man aus der bekannten Stärke eines Pfeilers für einen anderen Pfeiler die Laſt berechnen könnte, die er ohne zu brechen tragen kann. Gemeiniglich nimmt man an, daß bey Pfeilern von ähnlichen Durchſchnitten, wenn ſie aus einerley Materie beſtehen, die Laſten, welche ſie ohne zu brechen erhalten können, den 3ten Potenzen ihrer Durchmeſſer getheilt durch die Quadrate ihrer Längen proportional ſind.

XIV.

XIV. Vorleſung.

Die Kreisbewegung.

I. Die gleichförmige Kreisbewegung.

§. 196.

Wenn ein Körper in der geraden Linie AB Fig. 92 mit der Geſchwindigkeit *c* ſich gleichförmig fortbeweget, und in B genöthiget wird in dem Kreiſe BMDB umzulaufen, wo AE den Kreis in B berühret, ſo iſt von B angefangen eine Kraft erforderlich, die unaufhörlich nach geraden Richtungen wirket, welche alle in dem Mittelpunkte C zuſammenſtoſſen. Eine ſolche unaufhörlich wirkende Kraft muß in jedem Augenblicke den bewegten Körper dergeſtalt von ſeiner geradlinigten Richtung ablenken, daß er von dem Punkte C immer gleichweit entfernet verbleibet. Weil nämlich der bewegte Körper **vermög ſeiner Geſchwindigkeit nach der Richtung AE, vermög ſeiner Tangentialgeſchwindigkeit** in dem Zuſtande ſich befindet während einem unendlich kleinen Zeittheilchen τ von B nach N zu kommen, und folglich ſeine Entfernung von dem Punkte C um das Stückchen MN zu vergröſſern, ſo iſt eine immer auf den Punkt C gerichtete Kraft erforderlich, welche den bewegten Körper während dem nämlichen Zeitelemente τ um das Stückchen

Fig. NM gegen den Mittelpunkt C treibt, oder anzieht,
92 damit er von dem Punkte C immer gleichweit entfernet verbleiben könne. Würde die gegen den Punkt C gerichtete Kraft den bewegten Körper während dem Zeitelemente τ um ein kleineres oder gröſſeres Stückchen als NM gegen den Mittelpunkt C treiben, ſo würde im erſten Falle ſeine Bahn zwiſchen der Tangente BN und dem Bogen BM durchlaufen, im zweyten Falle aber innerhalb des Bogens BM fallen. Eine ſolche Kraft, welche einen bewegten Körper immer gegen einen nämlichen Punkt treibt oder anzieht, heißt eine **Centralkraft**, und der Punkt, wo die Richtungen der Centralkraft zuſammenlaufen, der **Mittelpunkt** der Centralkraft.

Die Centralkraft im Kreiſe, weil ſie immer auf der Tangente des Kreiſes als auf der Richtung der Bewegung ſenkrecht iſt, hat auf die Aenderung der Tangentialgeſchwindigkeit keinen Einfluß, ſo wie die Schwerkraft auf die Aenderung der Geſchwindigkeit eines auf einer vollkommen glatten horizontalen Fläche bewegten Körpers keinen Einfluß hat. Denn es iſt keine Urſache vorhanden, warum die Geſchwindigkeit eines bewegten Körpers von einer Kraft, die auf die Richtung des bewegten Körpers ſenkrecht wirket, vielmehr vermehret als vermindert würde. **Die Kreisbewegung, wenn auſſer der Centralkraft ſonſt gar keine Kraft auf den mit einer Geſchwindigkeit verſehenen Körper wirket, iſt demnach eine gleichförmige Bewegung**, und folglich iſt

$$s = ct$$

wie bey der geradlinigten Bewegung, wo aber nun c und s die Längen der in 1 und in t Sekunden zurückgelegten Bögen bedeuten. Nur muß die Centralkraft von der Beſchaffenheit ſeyn, daß der bewegte Körper bey der gegebenen Geſchwindigkeit immerfort von dem Punkte C um den gegebenen Abſtand CB entfernet verbleiben könne. Wie man aus der gegebenen Geſchwindigkeit des bewegten Körpers, und aus dem Halbmeſſer des Kreiſes die Gröſſe der für einen ſolchen Kreis erforderlichen Centralkraft finden könne, iſt aus nachſtehender Aufgabe zu erſehen. Fig. 92

§. 197.

Aufgabe. Die Maſſe eines unſchweren Körpers = m, ſeine Geſchwindigkeit = c in B nach der Richtung BE ſenkrecht auf BC, und des Kreiſes BMDB Halbmeſſer CB = r iſt gegeben; man ſoll die Gröſſe einer Kraft finden, welche den bewegten Körper unaufhörlich nach der Richtung des Halbmeſſers gegen den Mittelpunkt von ſeiner geradlinigten Richtung dergeſtalt ablenket, daß er immer in dem Umkreiſe BMDB verbleibet.

Auflöſ. Die Maſſe = m, welche hier nur als ein materieller Punkt betrachtet, oder in ihrem Schwerpunkte vereiniget gedacht wird, laufe in einer unendlich kleinen Zeit = τ vermög ihrer Geſchwindigkeit von B bis N, ſo muß die **geſuchte Kraft** = p von der Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie den bewegten Körper in eben dieſer nämlichen unendlich kleinen Zeit τ gegen den Mittelpunkt C um NM treibt oder anzieht, damit ſolcher nach Verlauf dieſer unendlich kleinen Zeit τ in M ſich befinden könne. Die Kraft p kann während der unendlich klein angenommenen Zeit τ für unveränderlich angeſehen werden; derowegen iſt NM = $\frac{gp\tau^2}{m}$ vermög (§. 49.).

Es iſt aber vermög (311) NM : BN = BN : MD oder zu MD + MN; folglich iſt NM $= \frac{BN^2}{MD+MN}$, oder weil MN in Rückſicht MD unendlich klein iſt, ſo iſt auch NM $= \frac{BN^2}{MD} = \frac{BN^2}{2r}$.

Es iſt demnach auch $\frac{BN^2}{2r} = \frac{gp\tau^2}{m}$.

Ferner iſt BN $= c\tau$ wegen der gleichförmigen Bewegung von B nach N, und $BN^2 = c^2\tau^2$.

Folglich auch $\frac{c^2\tau^2}{2r} = \frac{gp\tau^2}{m}$. Daraus folgt endlich die geſuchte Kraft $p = \frac{mc^2}{2gr}$; und ihre Beſchleunigung $G = \frac{gp}{m} = \frac{c^2}{2r}$.

Daß man bey der Kreisbewegung die Maſſe des herumlaufenden Körpers in deſſen Schwerpunkte vereiniget annehmen könne, wo der Halbmeſſer des Kreiſes dem Abſtande des Schwerpunktes von dem Mittelpunkte der Centralkraft oder von der Umlaufsachſe gleich iſt, läßt ſich auf folgende Art darthun. Wenn mehrere materielle Punkte P, Q, R Fig. 43, welche entweder alle in einer geraden Linie, oder alle in einer nämlichen Ebene, oder auch in verſchiedenen Ebenen liegen, um eine Achſe AB in concentriſchen Kreiſen gleichförmig herumlaufen **ohne ihre Lage gegeneinander zu ändern**, ſo müſſen wegen der Aehnlichkeit der Kreisausſchnitte die zurückgelegten Wege, und folglich auch die Geſchwindigkeiten dieſer Punkte ſich gegeneinander verhalten wie ihre Abſtände von der Umlaufsachſe; ſetzet man nun des Schwerpunktes G Geſchwindigkeit $= c$,

$= c$, ſo ſind der Punkte P, Q, R Geſchwindigkeiten $= \frac{P'P}{EG} . c, \frac{Q'Q}{EG} . c, \frac{R'R}{EG} . c$; daraus folgen für dieſe Punkte, wenn ihre Maſſen $= P, Q, R$ geſetzet werden, die erforlichen Centralkräfte $= \frac{P}{2g.P'P} \cdot \frac{P'P^2}{EG^2} . c^2, \frac{Q}{2g.Q'Q} \cdot \frac{Q'Q^2}{EG^2} . c^2, \frac{R}{2g.R'R} \cdot \frac{R'R^2}{EG^2} . c^2$; ihre Summe iſt daher $= \frac{c^2}{2g.EG^2} . (P.P'P + Q.Q'Q + R.R'R)$; es iſt aber wegen dem Schwerpunkte $P.P'P + Q.Q'Q + R.R'R = EG.(P+Q+R)$; folglich iſt die geſammte Centralkraft $= \frac{c^2(P+Q+R)}{2g.EG}$ ſo groß, als wenn alle materielle Punkte in dem Schwerpunkte vereiniget wären.

I. Aus der gefundenen Gleichung für die Centralkraft $p = \frac{mc^2}{2gr}$ laſſen ſich nun verſchiedene Folgen ableiten als z. B. $p : m = \frac{c^2}{4g} : \frac{1}{2}r$, das iſt **die Centralkraft im Kreiſe verhält ſich zur Maſſe nämlich zum Gewichte des umlaufenden Körpers, welches derſelbe an der Erdfläche hätte, wie die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{4g}$ zur Hälfte des Halbmeſſers des Kreiſes, worin der Körper umläuft.** Iſt nun $\frac{c^2}{4g} = \frac{1}{2}r$, ſo iſt auch $p = m$. Und umgekehrt wenn die Centralkraft dem Gewichte des Körpers gleich iſt, ſo muß die der Tangentialgeſchwindigkeit zugehörige Höhe der Hälfte des Halbmeſſers gleich ſeyn.

II. Aus der nämlichen Gleichung $p = \frac{mc^2}{2gr}$ folgt auch $c = \sqrt{(\frac{gp}{m} . 2r)}$, nämlich aus der Beſchleunigung $\frac{gp}{m}$ einer gegebenen Centralkraft, und aus dem Durchmeſſer $2r$ des Kreiſes läßt ſich die Geſchwindigkeit c berechnen, welche man dem Körper nach der Richtung einer Tangente dieſes Kreiſes beybringen muß, damit er in dieſem Kreiſe umlaufen könne; **dieſe Geſchwindigkeit iſt gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Beſchleunigung der Centralkraft multipliciret mit dem Durchmeſſer des Kreiſes.**

Der Durchmeſſer der Erde iſt beynahe = 40326000 Fuß, und die Beſchleunigung der Centralkraft an der Erdfläche, die Beſchleunigung der Schwere $\frac{gp}{m} = \frac{gm}{m} = g = 15\frac{1}{2}$ Fuß; daraus folgt die Geſchwindigkeit $c = 25000$ Fuß beynahe, die man einem ſchweren Körper an der Erdfläche etwan an der Spitze eines der höchſten Berge nach horizontaler Richtung beybringen müßte, damit er in einem Kreiſe um die Erdkugel immerfort herumlaufen könnte, wenn der Widerſtand der Luft ſeine Bewegung nicht verzögerte. Iſt die Geſchwindigkeit kleiner als 25000 Fuß, ſo fällt der Körper ſo wie eine abgeſchoſſene Kanonkugel nach einer gewiſſen Zeit auf die Erde; wäre aber die Geſchwindigkeit gröſſer als 25000 Fuß, ſo würde der Körper ſich von der Erdfläche immer weiter entfernen.

III. Bey einem anderen Körper $= M$, der mit der Geſchwindigkeit $= C$ in einem Kreiſe umläuft, deſſen Halbmeſſer $= R$ iſt, iſt die Centralkraft $P = \frac{MC^2}{2gR}$, und ihre Beſchleunigung $G' = \frac{gP}{M} = \frac{C^2}{2R}$; folglich iſt $p : P = \frac{mc^2}{r} : \frac{MC^2}{R}$, und $G : G' = \frac{c^2}{r} : \frac{C^2}{R}$, wie auch $c^2 : C^2 = rG : RG'$ **nämlich die Centralkräfte in verſchiedenen Kreiſen verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen der umlaufenden Körper multipliciret mit den Quadraten ihrer Geſchwindigkeiten getheilet durch die Halbmeſſer der Kreiſe; die Beſchleunigungen dieſer Kräfte aber verhalten ſich wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten getheilt durch die Halbmeſſer der Kreiſe; oder die Quadrate der Geſchwindigkeiten wie die Produkte aus den Halbmeſſern in die Beſchleunigungen.** Iſt nun $m = M$, und dabey $r = R$, ſo iſt $p : P = c^2 : C^2 = G : G'$; iſt $c = C$, und dabey auch $r = R$, ſo iſt $p : P = m : M$, und $G = G'$; u. ſ. w. Fig.

§. 198.

Man ſetze die Zeit $= t$, in welcher der Körper in dem Kreiſe einmal herumläuft, nämlich den Umkreis $s = 2r\pi$ einmal beſchreibt, ſo iſt $2r\pi = ct$ wegen $s = ct$; daraus folgt $c = \frac{2r\pi}{t}$ eine Gleichung für die Tangentialgeſchwindigkeit durch die Umlaufszeit und den Halbmeſſer des Kreiſes ausgedrückt; und auch $t = \frac{2r\pi}{c}$ eine Formel für die Umlaufszeit durch die Tangentialgeſchwindigkeit und den Halbmeſſer des Kreiſes aus-

ausgedrückt; die Umlaufszeit des oberwähnten mit einer Geſchwindigkeit von 25000 Fuß nach horizontaler Richtung geworfenen Körpers wäre daher = 5067 Sek. = 1 St. 24 M. 27 S.

I. Man ſubſtituire den Werth $c = \frac{2r\pi}{t}$ in der obigen Gleichung $p = \frac{mc^2}{2gr}$ ſtatt c^2, ſo iſt

1) die Centralkraft $p = \frac{2\pi^2 rm}{gt^2}$,

2) ihre Beſchleunigung $G = \frac{gp}{m} = \frac{2\pi^2 r}{t^2}$

3) die Umlaufszeit $t = \pi.\sqrt{(2r:\frac{gp}{m})} = 2\pi.\sqrt{\frac{r}{2G}}$

doppelt ſo groß, als die Dauerzeit $\pi.\sqrt{\frac{r}{2G}}$ eines Pendelſchlages von der Länge r bey der Beſchleunigung G in einem ſehr kleinen Schwingungsbogen vermög §. 106.

II. Wenn man wieder wie ehevor bey einem anderen Körper $= M$, den Halbmeſſer des Kreiſes $= R$, die Umlaufszeit $= T$, und die Centralkraft P ſetzet, ſo iſt ebenfalls 1) die Centralkraft $P = \frac{2\pi^2 RM}{gT^2}$, 2) ihre Beſchleunigung $G' = \frac{2\pi^2 R}{T^2}$, und 3) das Quadrat der Umlaufszeit $T^2 = \frac{2\pi^2 R}{G'}$, ſo wie ehevor $t^2 = \frac{2\pi^2 r}{G}$.

III. Daraus laſſen ſich nun mehrere Folgen ableiten; als z. B. $t^2 : T^2 = \frac{r}{G} : \frac{R}{G'}$; iſt dabey $G = G'$, ſo iſt $t^2 : T^2 = r : R$. Iſt aber $G : G' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$,

wie

wie bey der Schwere in verſchiedenen Erhöhungen über der Erdfläche, ſo iſt $G' = \frac{Gr^2}{R^2}$, und folglich $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$, wenn man in voriger Proportion ſtatt G' ſeinen Werth ſetzet. Nämlich wenn die Beſchleunigung einer Centralkraft im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernungen von dem Mittelpunkte abnimmt, ſo verhalten ſich die Quadrate der Umlaufszeiten bey mehreren Körpern, die um den nämlichen Mittelpunkt in verſchiedenen Kreiſen gleichförmig herumlaufen, wie die Würfel ihrer Entfernungen von dem nämlichen Mittelpunkte.

Und umgekehrt, wenn die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln der Entfernungen proportional ſind, ſo verhalten ſich die Beſchleunigungen der Centralkraft in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte verkehrt wie die Quadrate dieſer Entfernungen. Denn wenn $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$ bey der gleichförmigen Bewegung in zwey verſchiedenen Kreiſen ſtatt findet, ſo muß auch $\frac{r}{G} : \frac{R}{G'} = r^3 . R^3$ ſich verhalten wegen $t^2 : T^2 = \frac{r}{G} : \frac{R}{G'}$; und folglich auch $G : G' = R^2 : r^2$, oder $G : G' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$.

Bey der oben berechneten Umlaufszeit 1 St. 24 M. 27 Sek. oder genauer 1 St. 24 M. 25 Sek. nach der Formel $t = 2\pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$ eines mit der dazu erforderlichen Geſchwindigkeit nahe an der Erdfläche nach ho-

Fig. horizontaler Richtung geworfenen Körpers, und bey der Umlaufszeit des Mondes 27 T. 7 St. 43 M. 5 Sek. in der mittleren Entfernung von beyläufig 60 Erdhalbmeſſern von dem Mittelpunkte der Erde ſind die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln der Entfernungen proportional; derowegen verhalten ſich die Beſchleunigungen der Schwere an der Erdfläche in der Entfernung von 1 Erdhalbmeſſer, und in der Entfernung von 60 Erdhalbmeſſern wie umgekehrt die Quadrate dieſer Entfernungen, weil nämlich bloß allein die Erdſchwere mit der angeführten Eigenſchaft als eine Centralkraft nebſt einer dazu erforderlichen Tangentialgeſchwindigkeit, welche der Mond bey ſeiner Erſchaffung erhielt, nothwendig ſind ſolchen in ſeiner kreisförmigen Bahn zu erhalten.

Auch bey den vier um den Jupiter, und bey den fünf um den Saturn in beynahe kreisförmigen Bahnen herumlaufenden Monden ſind die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln ihrer Entfernungen proportional; derowegen iſt auch bey dieſen Monden nichts anders nothwendig um ſie in ihren Bahnen zu erhalten, als eine **Jupitersſchwere** bey den vier erſten, und eine **Saturnſchwere** bey den fünf letzten nebſt ihren Tangentialgeſchwindigkeiten, wo die Schwere des Jupiter und des Saturnus, eben ſo wie die Erdſchwere im verkehrten Quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernungen von ihren Mittelpunkten abnimmt. Aus der Entfernung r eines Mondes des Jupiter, und aus ſeiner Umlaufszeit t läßt ſich die Beſchleunigung der Jupitersſchwere in dieſer Entfernung $G = \frac{2\pi^2 r}{t^2}$ berechnen; daraus läßt ſich ferner die Beſchleunigung in jeder beliebigen Entfernung von dem Mittelpunkte des Jupiter, und folglich auch an deſſen Oberfläche ableiten, wenn deſſen Halbmeſſer bekannt iſt.

Auch die ſieben bis nun entdeckten Hauptplaneten 1) der **Mercur**, 2) die **Venus**, 3) die **Erde** mit ihrem Trabanten dem Monde, 4) der **Mars**, 5) der **Jupiter** mit ſeinen vier Trabanten, 6) der **Saturn** mit ſeinen fünf Trabanten, und 7) der **Uranus** bewegen ſich um ihren gemeinſchaftlichen Mittelpunkt, um die Sonne nämlich, ſo ziemlich gleichförmig beynahe in kreisförmigen Bahnen dergeſtalt, daß die Quadrate ihrer Umlaufszeiten um die Sonne den Würfeln ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkte der Sonne proportional ſind; derowegen können ſie bloß von ihren bey der Erſchaffung erhaltenen Tangentialgeſchwindigkeiten, und von der im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe abnehmenden Anziehung der Sonne in ihren Bahnen erhalten werden.

Die mittleren Entfernungen dieſer Planeten von der Sonne verhalten ſich gegeneinander beynahe wie die Glieder folgender Reihe, **Merkur** 4, **Venus** $4+3.2^0$, **Erde** $4+3.2^1$, **Mars** $4+3.2^2$, **Jupiter** $4+3.2^4$, **Saturn** $4+3.2^5$, **Uranus** $4+3.2^6$; die mittlere Entfernung der Erde iſt beyläufig 20000 Erdhalbmeſſer, und ihre Umlaufszeit 1 Jahr; daraus können die Entfernungen für die übrigen Planeten in Erdhalbmeſſern, und auch ihre Umlaufszeiten in Erdjahren beſtimmet werden; und umgekehrt aus den durch genaue Beobachtung gefundenen Umlaufszeiten können die Entfernungen berechnet werden. Da in dieſer Reihe zwiſchen Mars und Jupiter ein Glied $4+3.2^3$ abgeht, ſo iſt es wahrſcheinlich, daß auch in dieſer Entfernung vormals ein Planet ſich befand, welcher aber in der Folge von einem **Cometen** weggeführet wurde, weil er nicht mehr vorfindig iſt; es iſt möglich, daß ein ſolches Unglück einmal auch unſerer Erde widerfahren kann. Die Planeten drehen ſich während der Fortrückung in ihren Bahnen auch zugleich um ihre Achſen, als z. B. die Erde in 23 St. 56 M. $4\frac{1}{10}$ Sek. und Jupiter in 9 St. 56 M. obwohl ſein Durchmeſſer faſt 11mal gröſſer iſt als der Durchmeſſer der Erde. Die Umdrehungsbewegung eines Planeten um eine durch deſſen Schwerpunkt gehende Achſe kann entſtanden ſeyn, wenn die Richtung ſeiner bey der Erſchaffung erlangten Tangentialgeſchwindigkeit nicht durch deſſen Schwerpunkt gieng vermög (§. 142.).

Die Bahnen der Hauptplaneten um die Sonne, ſo wie die Bahnen der Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten ſind zwar keine vollkomme Kreiſe, ſondern **Ellipſen** von einer ſehr geringen Excentricität, in deren einem Brennpunkte ſich der Mittelpunkt der Centralkraft befindet; allein es läßt ſich zeigen, daß auch bey dem elliptiſchen Umlaufe die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln der mittleren Entfernungen proportional ſind, wenn die Centralkraft im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernungen von ihrem Mittelpunkte abnimmt, und umgekehrt; wie es weiter unten zu erſehen iſt.

§. 199.

Die bisher betrachtete Kreisbewegung, wo eine Centralkraft ganz allein, einen mit der dazu erforderlichen Tangentialgeſchwindigkeit verſehenen Körper, der ſich frey bewegen kann, in ſeiner kreisförmigen Bahn erhält, heißt die **freye Kreisbewegung.** Es giebt auch eine Kreisbewegung, wo ein Körper durch eine beſondere Vorrichtung, als z. B. mittelſt eines Fadens, mittelſt eines Hebels, mittelſt eines cylindriſchen Kanals u. ſ. w. gezwungen wird im Kreiſe umzulaufen;

eine ſolche Kreisbewegung heißt die **Kreisbewegung auf einem vorgeſchriebenen Wege**, oder kürzer die **nicht freye Kreisbewegung.** Z. B. ein hinlänglich ſtarker Faden, woran ein Körper = m in B Fig. 92. befeſtiget iſt, ſey auf einer horizontalen Tafel mit dem anderen Ende an einem Stifte C mittelſt einer Schlinge ſo befeſtiget, daß wenn der Faden gerade ausgeſpannt iſt, er ſich um den Stift C, ohne ſich aufzuwickeln, frey herumdrehen laſſe; nachdem nun der Faden gerade ausgeſpannt iſt, ertheile man dem Körper in B mittelſt eines Stoſſes eine Geſchwindigkeit nach der Richtung BE ſenkrecht auf CB, ſo wird der Körper wegen der unveränderlichen Länge des Fadens CB im Kreiſe herumlaufen, und wenn die Reibung und der Widerſtand der Luft ſeine Bewegung nicht verzögerte, ſo würde eine ſolche Bewegung ohne Ende fortdauern, und immer gleichförmig verbleiben. Eben dieſes würde bey der Kreisbewegung eines Körpers in einem hinlänglich befeſtigten cylindriſchen Kanale auf einer horizontalen Tafel ſtatt finden, in einer cylindriſchen Rinne nämlich, die in Geſtalt eines Ringes in ſich ſelbſt wieder zurückkehrt. In dergleichen Fällen iſt in Fig. 92 die Befeſtigung des Stiftes und der Zuſammenhang des Fadens, bey dem cylindriſchen Kanale aber die Befeſtigung des Kanals und die Feſtigkeit der äuſſeren Wand die zu dem vorgeſchriebenen Kreiſe erforderliche Centralkraft; die innere Wand bey dem cylindriſchen Kanale iſt zur Kreisbewegung gar nicht nothwendig, ſie kann, ohne die Kreisbewegung zu ſtöhren, gänzlich hinwegbleiben. Die Befeſtigung des Stiftes im erſten Falle, und auch die Befeſtigung der cylindriſchen Wand im zweyten Falle bey der nicht freyen Kreisbewegung wirket entweder durch Beyhilfe einer menſchlichen Hand, oder auch nur bloß mittelſt der Elementarkraft der Materie (§. 59.) als eine **mechaniſche Kraft**, nämlich

Fig. 92

Fig. 92 als eine wirkliche bewegende Kraft; im erſten Falle **zieht** ſie mittelſt des Fadens, und im zweyten Falle **preſſet** ſie mittelſt der cylindriſchen Wand den bewegten Körper dergeſtalt gegen den Mittelpunkt, daß er während einem Zeitelemente, worin er vermög der Tangentialgeſchwindigkeit den Weg BN zurücklegen könnte, vermög dieſer Anziehung oder Preſſung um NM von der geradlinigten Richtung abgelenket wird. Iſt nun die Tangentialgeſchwindigkeit $= c$, der Halbmeſſer CB $= r$ als die Länge des Fadens, oder als der Halbmeſſer des cylindriſchen Kanals und die Maſſe des bewegten Körpers $= m$, ſo muß die Befeſtigung des Stiftes, ſo wie die Befeſtigung des cylindriſchen Kanals als mechaniſche oder bewegende Kraft betrachtet $p = \frac{mc^2}{2gr}$ ſeyn wie bey der Beſtimmung der Centralkraft, damit ſolche im erſten Falle mittelſt des Fadens den bewegten Körper gegen den Mittelpunkt mit der Gewalt $\frac{mc^2}{2gr}$ anziehen, und im zweyten Falle mit eben dieſer Gewalt mittelſt der cylindriſchen Wand gegen den Mittelpunkt preſſen könne; im erſten Falle entſteht daher aus der Umlaufsbewegung eine **Spannung** des Fadens $= \frac{mc^2}{2gr}$, und im zweyten Falle zwiſchen dem bewegten Körper und zwiſchen der cylinlindriſchen Wand ein **Druck** $= \frac{mc^2}{2gr}$. Wäre die Feſtigkeit des Fadens nicht ſo groß um dieſe Spannung $\frac{mc^2}{2gr}$ Pfund aushalten zu können, ſo müßte derſelbe zerreiſſen, und der Körper würde ſodann nach der Richtung der Tangente gleichförmig fortgehen, vorausgeſetzt daß

er

Fig. 92

er nach der Richtung des Halbmeſſers von dem Mittelpunkte hinweg noch keine Geſchwindigkeit hat; wenn hingegen der in die Runde herumbewegte Körper nach der Richtung des Halbmeſſers vom Mittelpunkte hinweg ſchon eine beſtimmte Geſchwindigkeit hat, die er dadurch erhält, daß der jederzeit etwas dehnbare Faden ſich allmählig etwas verlängert und endlich abreiſſet, ſo iſt ſeine fernere Bahn nicht mehr eine Tangente des zuletzt beſchriebenen Kreiſes, ſondern ſeine Bewegung iſt nun aus ſeiner Tangentialgeſchwindigkeit, und aus der allmählig erlangten Geſchwindigkeit nach der Richtung des Halbmeſſers zuſammengeſetzt. Eben dieſes erfolgt im zweyten Falle, wenn die cylindriſchen Wand nicht hinlänglich feſt iſt.

§. 200.

Man pflegt auch ſonſten ſich vorzuſtellen, daß aus der Umlaufsbewegung eine mechaniſche Kraft entſtehe, welche den bewegten Körper nach der Richtung des Halbmeſſers vom Mittelpunkte hinwegtreibt, und nennt eine ſolche Kraft die **Fliehekraft**, oder auch die **Schwungkraft**. Weil nämlich bey der Kreisbewegung der bewegte Körper **vermög der Tangentialgeſchwindigkeit** ſich in dem Zuſtande befindet ſeine Entfernung von dem Mittelpunkte C während einem Zeitelemente um MN zu vergröſſern, ſo kann man durch die Rechnung finden, wie groß eine Kraft q ſeyn müßte, welche die Entfernung des Körpers von dem Mittelpunkte C in eben dem Zeitelemente um das nämliche Stückchen MN vergröſſern könnte; es müßte nämlich $q = \frac{mc^2}{2gr}$, alſo eben ſo groß ſeyn als die Centralkraft;

Fig.

dieſe Kraft $q = \frac{mc^2}{2gr}$ wäre die **Fliehe - oder Schwungkraft**; alle Folgen, die man aus der oben gefundenen Gleichung für die Centralkraft ableiten kann, gelten demnach auch bey der Fliehekraft.

Es iſt richtig, daß eine Kreisbewegung erfolgen könne, wenn einen bewegten Körper eine Fliehekraft von einem gegebenen Punkte ſenkrecht auf ſeine Richtung hinwegtreibt, und eine eben ſo groſſe Centralkraft gegen den nämlichen Punkt immer nach gerade entgegengeſetzter Richtung anzieht; oder bey der nicht freyen Kreisbewegung, wenn die Befeſtigung des Stiftes mittelſt des Fadens, ſo wie die Befeſtigung des cylindriſchen Kanals mittelſt der Wand die Fliehekraft aufhält, oder aufhebt. Ob aber aus der Umlaufsbewegung wirklich eine Fliehekraft entſtehe, iſt nicht ſo leicht zu entſcheiden, weil der Erfolg bey der freyen ſowohl als auch bey der nicht freyen Kreisbewegung immer der nämliche verbleibet, es möge eine Fliehekraft vorhanden ſeyn oder nicht. Alle Verſuche, die man anführet um das Daſeyn der Fliehekraft bey der Kreisbewegung zu beweiſen, laſſen ſich durch die Tangentialgeſchwindigkeit, und durch die bloße Centralkraft erklären.

Als z. B. der Faden bey einem mittelſt deſſelben im Kreiſe herumgetriebenen Körper zerreiſſet, wenn ſeine Feſtigkeit geringer iſt, als die Kraft, womit der bewegte Körper mittelſt des Fadens gegen den Mittelpunkte gezogen wird. Eben ſo müßte auch ein Faden zerreiſſen, wenn mittelſt deſſelben an einer vollkommen glatten horizontalen Tafel ohne aller Reibung im luftleren Raume der Zuſtand eines Körpers in Rückſicht der Ruhe oder Bewegung durch eine Kraft geändert werden ſollte, welche gröſſer wäre als die Feſtigkeit oder der Zuſammenhang des Fadens; ſo wie auch wenn man

mit-

Fig. mittelſt eines Fadens einen frey herabfallenden ſchweren Körper mit einer Kraft hinunterwärts anzieht, die gröſſer iſt als die Feſtigkeit des Fadens. In dergleichen Fällen kann man doch nicht ſagen, daß im Körper eine Kraft ſey, die den Faden zerreiſſet; Trägheit iſt es nicht, Trägheit iſt keine Kraft, weil jede noch ſo geringe Kraft den Zuſtand in Rückſicht der Ruhe oder Bewegung einer jeden noch ſo groſſen Maſſe verändern kann, wenn die Reibung und andere auſſer dem Körper befindliche Hinderniſſe nicht entgegen ſind; wäre die Trägheit eine Kraft, oder ein Widerſtand, ſo müßte ſich eine andere Kraft angeben laſſen, die einer ſolchen Trägheitskraft, einem ſolchen von der Trägheit herrührenden Widerſtande das Gleichgewicht halten könnte.

Die wahre Urſache, daß auf einem horizontalen Hebelsarm eines vertikalen Wellrades, oder einer eigens dazu angeordneten **Centralmaſchine** ein frey angeſteckter Körper bey einem gleichförmigen Umlaufe der Maſchine ſich von der Umlaufsachſe nach und nach entfernet, und ſolange er auf dem Hebelsarm verbleibet, eine ſpiralförmige Linie, **und zwar ohne Reibung eine logarithmiſche Spirallinie** beſchreibet, iſt ganz allein ſeine Tangentialgeſchwindigkeit; man iſt zwar genöthiget bey der Unterſuchung einer ſolchen Bewegung und Beſtimmung der Gleichung für die beſchriebene Bahn zur Fliehekraft die Zuflucht zu nehmen; allein da iſt nicht nothwendig, daß die Fliehekraft wirklich vorhanden ſey, ſie iſt nur eine gleichgeltende Kraft, durch deren ſtette Wirkung der bewegte Körper eben ſo vom Mittelpunkte hinweggetrieben **würde**, als er ſich vermög ſeiner bey dem gleichförmigen Umlaufe der Centralmaſchine immer zunehmenden Tangentialgeſchwindigkeit wirklich entfernet.

Fig. Ein frey angeſteckter Körper an einem in Geſtalt einer ſchiefen Ebene in die Höhe gerichteten Hebelsarm einer ſchnell umlaufenden Centralmaſchine ſteigt in die Höhe hinauf, weil er vermög der Tangentialgeſchwindigkeit in dem Zuſtande ſich befindet von der Umlaufsachſe nach horizontaler Richtung ſich immer weiter entfernen zu können, und der Hebelsarm wegen der ſchiefen Stellung ſolches nicht jederzeit gänzlich verhindern kann.

Ein Trinkbecher mit Waſſer gefüllet, wenn ſolcher mittelſt einer Schnur in einer vertikalen Ebene ſehr ſchnell im Kreiſe herumgetrieben wird, verliert keinen Tropfen Waſſer, weil das Gewicht des Waſſers an denjenigen Stellen des vertikalen Kreiſes, wo das Waſſer ſonſt ohne Tangentialgeſchwindigkeit aus dem Becher herausflieſſen müßte, zum Theil die Stelle der Centralkraft vertritt. So iſt es auch bey der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Achſe; da iſt die Beſchleunigung der Schwere, und folglich auch die Länge des Sekundenpendels vermög (§. 108. I) unter dem Aequator am kleinſten, und unter den zwey Polen am größten, weil ein Theil der Schwere unter dem Aequator die Stelle der zu dem vorgeſchriebenen Kreiſe erforderlichen Centralkraft vertritt. Die Beſchleunigung dieſer erforderlichen Centralkraft im Aequator läßt ſich aus dem Halbmeſſer $= r$ des Aequators und aus der Umdrehungszeit $= t$ mittelſt der Formel $G = \frac{2\pi^2 . r}{t^2}$ beſtimmen vermög (§. 198. I. 2); dieſe ſo gefundene Beſchleunigung iſt die **Verminderung der abſoluten Beſchleunigung der Schwere unter dem Aequator**; es muß nämlich dieſe gefundene Beſchleunigung von der **abſoluten** Beſchleunigung der Schwere (die nämlich ſtatt finden würde, wenn ſich die Erde nicht um ihre

Achſe drehete, und die bey der Umdrehung nur unter den Polen ſtatt findet) abgezogen werden, um die wirkliche Beſchleunigung unter dem Aequator zu finden, welche daſelbſt bey dem freyen Falle der Körper ſtatt findet; im Gegentheil muß man zu der durch einen abgeführten Verſuch unter dem Aequator gefundenen Beſchleunigung der Schwere obige Beſchleunigung der erforderlichen Centralkraft addiren, um die abſolute Beſchleunigung der Schwere zu erhalten. Die Verminderung der abſoluten Beſchleunigung der Schwere wird vom Aequator gegen die beyden Pole immer kleiner, weil wegen den immer abnehmenden Parallelkreiſen immer eine kleinere Centralkraft erforderlich iſt, und dabey die Richtung der Schwere mit der Richtung der für einen gegebenen Parallelkreis erforderlichen Centralkraft nicht zuſammenfällt. Aus der durch einen Verſuch gefundenen Beſchleunigung der Schwere unter einem gegebenen Parallelkreiſe, und aus der bekannten Beſchleunigung der Centralkraft in einem ſolchen Parallelkreiſe iſt es ſehr leicht mittelſt des Kräftenparallelograms die abſolute Beſchleunigung der Schwere zu finden; eben dadurch läßt ſich auch die Richtung der fallenden Körper in einem gegebenen Parallelkreiſe beſtimmen, welche auſſer den zwey Polen und auſſer dem Aequator bey der Umdrehungsbewegung nicht mehr gegen den Mittelpunkt gerichtet ſeyn kann, wenn die Erde auch wirklich eine vollkommene Kugelgeſtalt hätte.

Auch iſt es ohne Beyhilfe der Fliehekraft leicht einzuſehen, daß die Erde, wenn ſie auch im Anfange eine Kugelgeſtalt gehabt hätte, aber dabey nicht hinlänglich feſt geweſen wäre, wegen der täglichen Umdrehung um ihre Achſe die Kugelgeſtalt habe verlieren müſſen, daß die Theile bey dem Aequator ſich weiter von dem Mittelpunkte entfernet, und die Theile bey den Polen ſich dieſem Mittelpunkte genähert haben, ſo daß die Kugelgeſtalt endlich in ein abgeplattetes Elliptoides verändert worden.

Anmrk. Herr **Karſten** (Anfangsgr. der mathem. Wiſſ. 2ter B. Seite 319 und 320) hat die Fliehekraft bey der Umlaufsbewegung aus der in einigen mechaniſchen Abhandlungen angenommenen **Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung** (actioni ſemper æqualis & contraria eſt reactio) und aus der **Trägheit** abzuleiten geſucht. Seine Meinung iſt kürzlich folgende: **der an einem Faden befeſtigte im Kreiſe umlaufende Körper wird mittelſt des Fadens gegen den Mittelpunkt gezogen, und widerſteht wegen ſeiner Trägheit nach gerade entgegengeſetzter Richtung eben ſo ſtark, als er mittelſt des Fadens gezogen wird.** Daß ein Körper, wenn auf denſelben eine Kraft wirket, wegen ſeiner Trägheit gar keinen Widerſtand leiſte, iſt eine offenbar ausgemachte Sache. Auch findet der Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung da gar nicht ſtatt, wo ein Körper mittelſt einer Kraft wirklich beweget wird; wenn ein Körper der Anziehungskraft der Erde eben ſo ſtark widerſtünde als dieſe ihn anzieht, ſo könnte er gar nicht fallen; und eben ſo iſt es bey anderen bewegenden Kräften. Nur da, wo zwey oder mehr Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen auf einen Körper ſo wirken, daß ſie einander im Gleichgewichte erhalten, kann man ſagen, daß die Wirkung der Gegenwirkung gleich ſey. Will man dieſen Satz bey einem ſchweren Körper anwenden, der auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt, ſo muß man eingeſtehen, daß die Tafel mittelſt der Undurchdringlichkeit, oder mittelſt der Elementarkraft der Materie vermög (§. 59.) den Körper eben ſo ſtark hinaufwärts drücke, als der Körper die Tafel hinunterwärts preſſet. Mit der Spannung und Zerreiſſung des Fadens bey der Umlaufsbewegung hat es in Rückſicht der Kraft, die dieſes bewirket,

ket, die nämliche Beſchaffenheit, wie auf einer vollkommen glatten horizontalen Tafel, wenn ein mit dem einen Ende an einem Stifte befeſtigter Faden, mit dem anderen Ende einen gleichförmig ohne Reibung und ohne allen anderen Widerſtand bewegten Körper nach gerade entgegengeſetzter Richtung weiter zu gehen verhindert; da kann man doch nicht ſagen, daß in dem bewegten Körper eine Kraft ſey, welche die Spannung des Fadens verurſachet. In dem bewegten ſowohl als auch in dem ruhenden Körper iſt nichts anzutreffen, was einer mechaniſchen Kraft gleich ſieht, als die Undurchdringlichkeit, oder vermög (§. 59.) die Elementarkraft der Materie.

II. Die ungleichförmige Kreisbewegung.

§. 201.

Wenn auf einen mittelſt eines Hebels im Kreiſe herumlaufenden Körper während ſeiner Bewegung immerfort eine Kraft wirket, welche mit dem Hebelsarm nicht einerley Richtung hat, ſo kann ſeine Bewegung nicht gleichförmig ſeyn; ſondern ſie iſt nach Beſchaffenheit der bewegenden Kraft entweder eine **gleichförmig zunehmende**, oder eine **gleichförmig abnehmende**, oder endlich eine **veränderliche** Bewegung; ſie iſt folglich in dergleichen Fällen jederzeit **ungleichförmig**.

§. 202.

Aufgabe. In dem Punkte B Fig. 92 des Hebels CBF, der ſich um C frey drehen läßt, iſt eine kleine körperliche Maſſe = m **be-**

Fig. 92 **findlich, die man für einen einzigen materiellen Punkt anſehen kann; und eine Kraft $= p$ wirket auf ſolche in B immer ſenkrecht auf den umlaufenden Hebelsarm; man ſoll die Umdrehungsbewegung des Hebels beſtimmen.**

Auflöſ. Der materielle Punkt m am Hebel in B beſchreibe in der Zeit $= t$ einen Kreisbogen $= s$, und erlange eine Tangentialgeſchwindigkeit $= v$, ſo wird er in dem darauffolgenden Zeitelemente dt den Weg $ds = vdt$ zurücklegen, und von der Kraft p einen Zuſatz der Geſchwindigkeit $dv = \frac{2gpdt}{m}$ erlangen, vermög (§. 56). Aus der Geſchwindigkeit, und auch aus dem Wege, welchen der Punkt B beſchreibet, läßt ſich die Geſchwindigkeit, und auch der Weg bey einerley Zeit für jeden anderen Punkt des Hebels finden, weil vermög der Unbiegſamkeit des Hebels die von verſchiedenen Punkten deſſelben in einerley Zeit beſchriebenen Kreisbögen, und auch die am Ende einer nämlichen Zeit erlangten Geſchwindigkeiten wegen der Aehnlichkeit der Kreisausſchnitte ſich gegen einander verhalten, wie die Halbmeſſer, nämlich wie die Abſtände der Punkte von dem Unterſtützungspunkte des Hebels. Setzen wir nun die Länge des in der Zeit t mit dem Halbmeſſer $= 1$ beſchriebenen Kreisbogens $= \varphi$, die Geſchwinkeit des Endpunktes dieſes Halbmeſſers $= \omega$, welche die **Winkelgeſchwindigkeit**, oder **Umdrehungsgeſchwindigkeit** genennt wird, und den Abſtand CB $= r$, ſo iſt $\varphi : s = 1 : r$, und $\omega : v = 1 : r$; folglich $s = \varphi r$, $\varphi = \frac{s}{r}$; und $v = \omega r$, $\omega = \frac{v}{r}$.

Fig. 92 Aus der bekannten Umdrehungsgeſchwindigkeit ω eines Hebels läßt ſich demnach die Geſchwindigkeit in jedem gegebenen Abſtande finden, wenn man die Umdrehungsgeſchwindigkeit mit dem gegebenen Abſtande multipliciret; und umgekehrt aus der gegebenen Geſchwindigkeit eines Punktes des Hebels in einem gegebenen Abſtande ergiebt ſich die Umdrehungsgeſchwindigkeit, wenn man die gegebene Geſchwindigkeit mit dem gegebenen Abſtande multipliciret. Eben ſo iſt es auch mit dem zurückgelegten Wege.

Man ſubſtituire nun in den obigen zwey Gleichungen für v, dv, und ds ihre Werthe ωr, $r d\omega$, und $r d\varphi$, ſo ſind die zwey Fundamentalgleichungen für die Umdrehungsbewegung des Hebels in den angeführten Umſtänden folgende

$$\text{I. } d\varphi = \omega dt$$

$$\text{II. } d\omega = \frac{2gpdt}{mr}$$

§. 203.

Aufgabe. Eine Kraft $= P$ wirket nicht unmittelbar auf die im Punkte B des Hebels CF Fig. 92 in dem Abſtande CB $= r$ von dem Unterſtützungspunkte befindliche Maſſe $= m$, die noch immer für einen einzigen materiellen Punkt angeſehen wird, ſondern ſie wirket auf den Punkt F des nämlichen mathematiſchen Hebels in dem Abſtande CF $= R$, immer nach einer auf den umlaufenden Hebel ſenkrechten Richtung; man ſoll die Umdrehungsbewegung des Hebels beſtimmen.

Fig. 92 Auflöſ. Es ſey der Druck $= p$, welchen die in F angebrachte Kraft P wegen der Unbiegſamkeit des Hebels auf die in B befindliche Maſſe m verurſachet; der von einem Punkte des Hebels in dem Abſtande $= 1$ beſchriebene Bogen in der Zeit t aber ſey $= \varphi$, und die erlangte Winkelgeſchwindigkeit ſey $= \omega$, ſo iſt vermög vorhergehenden die erſte Fundamentalgleichung $d\varphi = \omega dt$, und die zweyte $d\omega = \frac{2gpdt}{mr}$. Es iſt aber $p = \frac{PR}{r}$; folglich iſt die zweyte Fundamentalgleichung $d\omega = \frac{2gPRdt}{mr^2}$. Daß $p = \frac{PR}{r}$ ſey, iſt leicht einzuſehen; wenn man nämlich den von der Kraft P herrührenden Druck p in B aufheben wollte, ſo müßte vermög (§. 124.) daſelbſt eine Kraft $= \frac{PR}{r}$ nach entgegengeſetzter Richtung angebracht werden; oder auch wenn man in dem Punkte B ſenkrecht auf AC mit der Kraft P nach einerley Gegend eine Kraft $p = \frac{PR}{r}$, und eine eben ſo groſſe Kraft $p' = \frac{PR}{r}$ eben daſelbſt nach entgegengeſetzter Richtung anbringet, ſo wird die Umdrehungsbewegung eben ſo erfolgen, als wenn die Kraft P in F allein angebracht wäre; aber P iſt mit dem entgegengeſetzten $p' = \frac{PR}{r}$ im Gleichgewichte (§. 123.); folglich kann man dieſe zwey Kräfte hinwegnehmen ohne die Umdrehungsbewegung des Hebels zu ſtöhren, welche nun bey der einzigen Kraft $p = \frac{PR}{r}$ in B eben ſo erfolgen wird, als bey der Kraft P in F.

Aus den zwey Fundamentalgleichungen für die Umdrehungsbewegung in einem ſolchen Falle

$$\text{I. } d\varphi = \omega dt,$$

$$\text{II. } d\omega = \frac{2gPRdt}{mr^2}$$

folgen auch noch nachſtehende zwey Formeln

$$\text{III. } \omega d\omega = \frac{2gPRd\varphi}{mr^2}$$

$$\text{IV. } dd\varphi = \frac{2gPRdt^2}{mr^2}.$$

In dieſen Formeln bedeutet $\frac{gPR}{mr^2}$ die **Umdrehungsbeſchleunigung**, nämlich die Länge des Bogens, welchen ein Punkt des Hebels in dem Abſtande = 1 in 1 Sekunde beſchreiben würde, wenn die Kraft unveränderlich wäre; denn wäre die Kraft unveränderlich, ſo wäre vermög der Formel IV. nach der erſten Integration $d\varphi = \frac{2gPRtdt}{mr^2}$, und nach der zweyten $\varphi = \frac{gPRt^2}{mr^2}$; daraus folgt der Weg in 1 Sekunde $G = \frac{gPR}{mr^2}$, wenn $\varphi = G$, bey $t = 1$ geſetzet wird.

Bey der ungleichförmigen Umdrehungsbewegung kömmt es bloß darauf an, daß man die **Umdrehungsbeſchleunigung** $G = \frac{gPR}{mr^2}$, oder eigentlich nur den **Coeffizienten** der Umdrehungsbeſchleunigung $\frac{PR}{mr^2}$ zu beſtimmen wiſſe, womit man die Beſchleunigung der Schwere g multipliciren muß, um die Umdrehungsbeſchleunigung zu erhalten. Iſt einmal dieſe Umdrehungsbebeſchleunigung gehörig ausgedrückt, ſo läßt ſich vermög den angeführten Formeln die Umdrehungsbewegung ſehr leicht beſtimmen. Wenn man nämlich die Umdrehungsbeſchleunigung $= G$ ſetzet, ſo iſt allgemein bey der ungleichförmigen Kreisbewegung $d\omega = 2Gdt$, $\omega d\omega = 2Gd\phi$, $dd\phi = 2Gdt^2$, ſo wie auch $d\phi = \omega dt$.

§. 204.

Aus der gefundenen Gleichung $G = \frac{gPR}{mr^2}$ für die Umdrehungsbeſchleunigung folgt, daß bey einer anderen Kraft $= P'$ in einem anderen Abſtande $= R'$ des nämlichen Hebels, wo der materielle Punkt m noch immer in dem Abſtande $= r$ verbleibet, die Umdrehungsbeſchleunigung $G' = \frac{gP'R'}{mr^2}$ ſey. Iſt nun $P'R' = PR$, ſo iſt auch $\frac{gP'R'}{mr^2} = \frac{gPR}{mr^2}$, und folglich auch $G' = G$; und umgekehrt, wenn $G' = G$ iſt, ſo iſt auch $P'R' = PR$ **Es ſind demnach Kräfte am Hebel; deren Momente einander gleich ſind, bey der Umdrehungsbewegung des Hebels, ſo wie bey dem Stande des Gleichgewichts einander gleichgeltend.** Wenn daher mehrere Kräfte an einem nämlichen Hebel in verſchiedenen Punkten deſſelben angebracht ſind, oder auch mehrere Kräfte mittelſt verſchiedener Hebel, welche alle mit einer nämlichen hinlänglich feſten Achſe verbunden ſind, eine Umdrehungsbewegung hervorzubringen ſtreben, ſo iſt es ſehr leicht alle dieſe Kräfte in einem einzigen Punkte zu vereinigen, nämlich eine Kraft zu finden, welche in einem gegebenen Abſtande angebracht allen einzelnen

Kräften zuſammengenommen gleichgeltend iſt; **dieſe gleichgeltende Kraft iſt gleich der Summe der Momente aller einzelnen Kräfte getheilt durch den gegebenen Abſtand;** wenn nämlich mehrere Kräfte a, b, c welche bey der Umdrehungsbewegung in den Abſtänden A, B, C ſenkrecht angebracht ſind, in dem Abſtande $= R$ zu vereinigen wären, ſo ſind in dieſem Abſtande die gleichgeltenden Kräfte $\frac{aA}{R}, \frac{bB}{R}, \frac{cC}{R}$, anzubringen, deren Summe $P = \frac{aA+bB+cC}{R}$ iſt (es iſt überflüſſig zu erinnern, daß die Momente bey denjenigen Kräften negativ zu nehmen ſind, welche nach entgegengeſetzter Richtung wirken). Die Umdrehungsbeſchleunigung in einem ſolchen Falle iſt demnach $G = \frac{g(aA+bB+cC)}{mr^2}$, wenn in dem Abſtande $= r$ ganz allein ein einziger materieller Punkt $= m$ befindlich iſt. Setzet man den Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller dieſer Kräfte von der Umlaufsachſe $= f$, ſo iſt vermög (§. 132.) $(a+b+c).f = aA+bB+cC$; folglich iſt die Umdrehungsbeſchleunigung $G = \frac{g(a+b+c).f}{mr^2}$ **ſo groß, als wenn die Kräfte alle in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte vereiniget wären.**

§. 205.

Wäre nicht der materielle Punkt m in dem Abſtande $= r$, ſondern ein anderer materieller Punkt $= M$ in dem Abſtande R des nämlichen Hebels angebracht, ſo wäre die Umdrehungsbeſchleunigung $G' = \frac{gpf}{MR^2}$, Fig. ſo wie bey dem materiellen Punkte m in dem Abſtande r die Umdrehungsbeſchleunigung $G = \frac{gpf}{mr^2}$ iſt, wenn in beyden Fällen die Summe der Kräfte $= p$, und der Abſtand ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunktes $= f$ iſt. Iſt nun $MR^2 = mr^2$, ſo iſt auch $G' = G$, und umgekehrt wenn $G' = G$ iſt, ſo iſt auch $MR^2 = mr^2$. **Es ſind demnach ſolche materielle Punkte am Hebel angebracht, wo die Produkte aus den Maſſen dieſer materiellen Punkte in die Quadrate ihrer Abſtände von der Umlaufsachſe einander gleich ſind, bey der Umdrehungsbewegung in Rückſicht der Umdrehungsbeſchleunigung einander gleichgeltend,** das iſt, die Umdrehungsbewegung wird gar nicht geſtöhret, wenn man die Maſſe m in dem Abſtande r hinwegnimmt, und dafür in dem Abſtande R eine andere Maſſe $M = \frac{mr^2}{R^2}$ anbringt. Wenn daher mehrere körperliche Maſſen, deren jede als ein einziger materieller Punkt betrachtet werden kann, entweder an einem nämlichen Hebel in verſchiedenen Punkten deſſelben angebracht, oder auch mittelſt verſchiedener Hebelsarme mit einer nämlichen hinlänglich feſten Umlaufsachſe verbunden ſind, ſo iſt nun ſehr leicht alle dieſe materielle Punkte in einem einzigen Punkte zu vereinigen, nämlich eine einzige Maſſe zu finden, welche in einem gegebenen Abſtande angebracht allen einzelnen Maſſen gleichgeltend iſt; **dieſe gleichgeltende Maſſe iſt gleich der Summe der Produkte aus den einzelnen Maſſen multipliciret mit den Quadraten ihrer Abſtände von der Umlaufsachſe getheilt durch das Quadrat des gegebenen**

Ab-

Abſtandes; wenn nämlich mehrere Maſſen a, b, c, als materielle Punkte betrachtet, welche bey der Umdrehungsbewegung in den Abſtänden A, B, C angebracht ſind, in dem Abſtande $= r$ zu vereinigen wären, ſo ſind in dieſem Abſtande für die Umdrehungsbewegung die gleichgeltenden Maſſen $\frac{a.A^2}{r^2}$, $\frac{b.B^2}{r^2}$, $\frac{cC^2}{r^2}$; deren Summe $m = \frac{a.A^2+b.B^2+c.C^2}{r^2}$ iſt. Die Umdrehungsbeſchleunigung in einem ſolchen Falle iſt demnach $G = \frac{gpf}{a.A^2+b.B^2+c.C^2}$, wo pf das Moment der Kraft iſt.

§. 206.

Die Summe der Produkte aus den Elementartheilchen eines Körpers multipliciret mit den Quadraten ihrer Abſtände von einer gegebenen Umlaufsachſe kann man, um ſich kurz auszudrücken, das **Drehungsmoment** des Körpers nennen zum Unterſchiede des **ſtatiſchen Momentes**, wo die Elementartheilchen mit den bloſſen Abſtänden multipliciret werden. Das Drehungsmoment heißt bey anderen Schriftſtellern das **Moment der Trägheit**, zuweilen auch **das Moment der Maſſe des Körpers**. Setzet man nun das Drehungsmoment eines Körpers bey einer gegebenen Umlaufsachſe $= Mk^2$, und das ſtatiſche Moment der Kraft $= pf$, welche die Umdrehungsbewegung des Körpers um die gegebene Umlaufsachſe beſchleuniget, ſo iſt die Umdrehungsbeſchleunigung $G = \frac{gpf}{Mk^2}$ = der **Beſchleunigung der Schwere multipliciret mit**

Fig. dem ſtatiſchen Momente der Kraft getheilt durch das Drehungsmoment des Körpers.

Es ſind daher die Fundamentalgleichungen für die Umdrehungsbewegung folgende vermög (§. 203.)

$$\text{I. } d\varphi = \omega dt.$$

$$\text{II. } d\omega = \frac{2gpfdt}{Mk^2}.$$

$$\text{III. } \omega d\omega = \frac{2gpfd\varphi}{Mk^2}.$$

$$\text{IV. } dd\varphi = \frac{2gpfdt^2}{Mk^2}.$$

Es bedeutet φ in dieſen Formeln den in der Zeit t von dem Endpunkte des Hebelsarmes = 1 beſchriebenen Kreisbogen, und ω die erlangte Geſchwindigkeit dieſes Punktes nämlich die Winkelgeſchwindigkeit; pf iſt das Moment der bewegenden Kraft, nämlich p iſt die Summe aller in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte vereinigten Kräfte, f aber die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes von der Umlaufsachſe; und endlich iſt Mk^2 das Drehungsmoment des umlaufenden Körpers, oder die Summe der Drehungsmomente aller Theile des umlaufenden Körpers bey der gegebenen Umlaufsachſe. Es iſt für ſich klar, daß bey der abnehmenden Kreisbewegung pf netativ ſey.

§. 207.

Um dieſe allgemeine Formeln für die ungleichförmige Kreisbewegung auf verſchiedene Fälle anwenden zu können (z. B. auf die gleichförmig beſchleunigte Bewegung der Maſchinen, wenn ſie durch Gewichte getrieben werden, auf die Schwingungsbewegung des zuſammengeſetzten Pendels, u. ſ. w.) iſt es nothwendig, daß man die Drehungsmomente verſchiedener Körper bey verſchiedenen Umlaufsachſen zu beſtimmen wiſſe, welches auf folgende Art geſchehen kann. Fig.

I. Aufgabe. Das Drehungsmoment einer geraden Linie zu finden, nämlich eines materiellen gleichförmig dichten priſmatiſchen Stabes, deſſen Dicke in Rückſicht der Länge unmerklich iſt.

Auflöſ. Es ſey die Maſſe eines für die Einheit angenommenen Theiles dieſer Linie $= m$; die Umlaufsachſe bey einer ſolchen geraden Linie AB Fig. 45 gehe durch den Punkt G ſenkrecht auf AB; AG ſey $= a$, GB $= b$, GP $= x$, und Pp $= \mathrm{d}x$, ſo iſt die Maſſe des Theilchens Pp $= m\mathrm{d}x$ wegen $1 : \mathrm{d}x = m :$ zur geſuchten Maſſe; folglich iſt das Drehungsmoment eben dieſes Elementartheilchens $= mx^2\mathrm{d}x$; daraus folgt das Drehungsmoment des Theiles GP $= \frac{1}{3}mx^3$; ferner wenn man $x = b$ ſetzet, das Drehungsmoment des Theiles GB $= \frac{1}{3}mb^3$; und eben ſo das Drehungsmoment des Theiles GA $= \frac{1}{3}ma^3$; es iſt demnach das Drehungsmoment der ganzen geraden Linie AB bey einer durch G ſenkrecht gezogenen Umlaufsachſe $= ma.\frac{1}{3}a^2 + mb.\frac{1}{3}b^2$, wo ma die Maſſe des Theiles GA, ſo wie mb die Maſſe des Theiles GB bedeutet. Die Drehungsmomente beyder Theile ſind poſitiv, obwohl ſie auf entgegengeſetzten Seiten liegen, weil die Elementartheilchen mit den Quadraten der Abſtände zu multipliciren ſind, welche Quadrate bey den poſitiven ſowohl als auch bey den negativen Abſtänden jederzeit poſitiv ſind.

Aus dem gefundenen Drehungsmomente des Theiles GB $= mb.\frac{1}{3}b^2$ folgt, **daß das Drehungsmoment einer geraden Linie, die ſich um ihren Endpunkt drehet, gleich ſey der Maſſe**

mul-

Fig. multipliciret mit dem dritten Theile des Quadrats ihrer Länge.

II. **Aufgabe. Das Drehungsmoment eines Rechteckes zu finden, wo die eine Seite deſſelben die Umlaufsachſe iſt.**

Auflöſ. Es ſey Fig. 48 AD $= a$ die Umlaufsachſe, AB $= b$, AP $= x$, Pp $= dx$, PQ $= y$, Qq $= dy$, und die Maſſe eines für die Einheit angenommenen Theiles dieſes Rechteckes $= m$, ſo iſt die Maſſe des Elementartheilchens Qr $= mdxdy$, und deſſen Drehungsmoment $= mx^2dxdy$ wegen dem Abſtande FQ $= x$ von der Umlaufsachſe; daraus folgt nach der erſten Integration, wo nur y für veränderlich angeſehen wird, das Drehungsmoment des Theilchens PR $= myx^2dx$, und ferner des Theilchens Pm $= max^2dx$; durch eine fernere Integration ergiebt ſich das Drehungsmoment des Theiles AM $= \frac{1}{3}max^3$, und endlich des ganzen Rechteckes AC $= mab.\frac{1}{3}b^2$, wenn man $x = b$ ſetzet.

Wäre nicht AD die Umlaufsachſe, ſondern ſolche gienge durch A ſenkrecht auf der Ebene AC, ſo wäre der Abſtand des Elementartheilchens Qr gleich der Hypothenuſe eines rechtwinklichten Dreyeckes, wovon AP und QP die Katheten ſind; der Abſtand des Elementartheilchens Qr von der Umlaufsachſe wäre daher $= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, und deſſen Drehungsmoment $= mdx\,y(x^2+y^2) = mx^2dx.dy + mdx.y^2dy$; daraus folgt das Drehungsmoment des Theilchens PR $= myx^2dx + \frac{1}{3}my^3dx$, des Theilchens Pm $= max^2dx + \frac{1}{3}ma^3dx$, des Theiles AM $= \frac{1}{3}max^3 + \frac{1}{3}ma^3x$, und endlich des ganzen Rechteckes $= mab.\frac{1}{3}(a^2+b^2)$.

III. **Aufgabe. Das Drehungsmoment einer Kreisfläche zu finden, wo die Umlaufsachſe**

ſe in dem Mittelpunkte auf der Ebene des Kreiſes ſenkrecht ſteht. Fig.

Aufloͤſ. Es ſey wie ehevor die Maſſe eines fuͤr die Einheit angenommenen Theiles der Kreisflaͤche z. B. eines Quadratfuſſes $= m$, der Halbmeſſer $CB = a$ Fig. 89, das Stuͤck $CE = x$, $Ee = dx$, $EP = y$, $Pp = dy$, ſo iſt das Drehungsmoment des Elementartheilchens $PQ = mx^2dxdy$, des Theilchens $EQ = myx^2dx$, des Ringes $EQSe = 2m\pi x^3dx$ (wenn man $y = 2\pi x$ ſetzet), der Kreisflaͤche $CE = \frac{1}{2}m\pi x^4$, und endlich der ganzen Kreisflaͤche $CB = \frac{1}{2}m\pi a^4 = ma^2\pi.\frac{1}{2}a^2 =$ **der Maſſe der Kreisflaͤche multipliciret mit der Haͤlfte des quadrirten Halbmeſſers.**

a) Und nun iſt es leicht das Drehungsmoment eines ſenkrechten Cylinders zu finden, der ſich um ſeine eigene Achſe drehet; wenn man naͤmlich die Laͤnge des Cylinders $= b$, ſeinen Halbmeſſer $= a$, und die Maſſe eines fuͤr die Einheit angenommenen Theiles, naͤmlich ſein eigenthuͤmliches Gewicht $= m$ ſetzet, ſo iſt das Drehungsmoment $= ma^2b\pi.\frac{1}{2}a^2$, wo $ma^2b\pi$ die Maſſe des Cylinders bedeutet. Denn wenn man ein Stuͤck von der Laͤnge des Cylinders $= x$ ſetzet, und daſelbſt zwey Ebenen in der Entfernung dx ſenkrecht auf die Achſe leget, ſo iſt das Drehungsmoment einer Schichte zwiſchen den zwey gelegten Ebenen $= ma^2\pi dx.\frac{1}{2}a^2$, weil man eine ſolche Schichte fuͤr eine Kreisflaͤche von einer unendlich kleinen Dicke anſehen kann; daraus folgt das Drehungsmoment eines Stuͤckes des Cylinders $= ma^2\pi x.\frac{1}{2}a^2$, und ferner des ganzen Cylinders $= ma^2b\pi.\frac{1}{2}a^2$.

b) Auch das Drehungsmoment eines concentriſch ausgehoͤhlten Cylinders iſt leicht zu finden; dieſes wird erhalten, wenn man von dem Drehungsmomente des vollſtaͤndigen Cylinders das Drehungsmoment des abgaͤngi-

Fig. gigen Cylinders abzieht; iſt nun der innere Halbmeſſer $= a$, der äuſſere $= A$, und die Länge des Cylinders $= b$, ſo iſt das Drehungsmoment des ausgehöhlten Cylinders $= mA^2 b\pi . \frac{1}{2} A^2 - ma^2 b\pi . \frac{1}{2} a^2 = mb\pi(A^2 - a^2) . \frac{1}{2}(A^2 + a^2)$, wo $mb\pi(A^2 - a^2)$ die Maſſe des ausgehöhlten Cylinders bedeutet.

c) Die Wellen und Räder bey den Wellrädern, wenn letztere aus ganzen Scheiben beſtehen, wie auch die Rollen in den Flaſchenzügen ſind theils ganze, theils ausgehöhlte Cylinder; es iſt daher ſehr leicht ihre Drehungsmomente zu berechnen.

d) Wäre endlich das Drehungsmoment einer Kugel bey einer Umlaufsachſe AB Fig. 54 zu beſtimmen, welche durch den Mittelpunkt B durchgeht, ſo ſetze man AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$, ſo iſt das Drehungsmoment der unendlich dünnen Scheibe Mn $= my^2 \pi \mathrm{d}x . \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} m\pi \mathrm{d}x(2ax - x^2)^2$; daraus folgt das Drehungsmoment des Kugelabſchnittes ANM $= \frac{1}{2} m\pi(\frac{4}{3} a^2 x^3 - ax^4 + \frac{1}{5} x^5)$, der Halbkugel $= \frac{4}{15} m\pi a^5$, und der ganzen Kugel $= \frac{4}{3} ma^3 \pi . \frac{2}{5} a^2 =$ **der Maſſe der Kugel multipliciret mit zwey Fünfteln des quadrirten Halbmeſſers.**

IV. Aufgabe. **Eine Kreisfläche GMDN Fig. 93 iſt mit ihrem Mittelpunkte C an einem Hebel CA, deſſen Umlaufsachſe AB iſt, ſo befeſtiget, daß der Hebel ſowohl auf der Ebene des Kreiſes als auch auf der Umlaufsachſe ſenkrecht ſteht; man ſoll das Drehungsmoment der Kreisfläche bey einer ſolchen Umlaufsachſe finden.**

Auflöſ. Es ſey der Halbmeſſer CD $= a$ zur Umlaufsachſe AB parallel, und die ſenkrechte Ordinate EM gezogen; ferner ſey CP $= x$, PM $= y$, PQ $= z$, CA $=$ PB $= b$, und die Maſſe eines für

die

die Einheit angenommenen Theiles der Kreisfläche $= m$, so iſt das Drehungsmoment eines Elementartheilchens in Q $= m\mathrm{d}x\mathrm{d}z \,.\, BQ^2 = m\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,(b^2+z^2)$, weil die Hypothenuſe BQ des in P rechtwinklichten Dreyeckes BPQ den ſenkrechten Abſtand des Elementartheilchens Q von der Umlaufsachſe AB vorſtellet. Daraus folgt das Drehungsmoment des Theilchens PQ $= mb^2z\mathrm{d}x + \frac{1}{3}mz^3\mathrm{d}x$, des Theilchens PM $= mb^2y\mathrm{d}x + \frac{1}{3}my^3\mathrm{d}x$, des Theilchens EM $= 2mb^2y\mathrm{d}x + \frac{2}{3}my^3\mathrm{d}x$

Fig. 93

$$= 2mb^2\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{3}m\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2m(b^2+\tfrac{1}{3}a^2)\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}mx^2\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}};$$

integriret man nun dieſes letzte Drehungsmoment vermög (625 u. 621. IX.), ſo iſt das Drehungsmoment des Kreisſtückes RNEM $= 2m(b^2+\frac{1}{3}a^2).\int\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$+ \tfrac{1}{6}mx(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6}ma^2.\int\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2m(b^2+\tfrac{1}{4}a^2).\int\mathrm{d}x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}mx(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= ma^2(b^2+\tfrac{1}{4}a^2).\arcsin\frac{x}{a} + mx(b^2+\tfrac{1}{4}a^2)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{6}mx(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt, wenn man $x = a$ ſetzet, das Drehungsmoment des Halbkreiſes $= ma^2(b^2+\frac{1}{4}a^2).\frac{1}{2}\pi$, und endlich das Drehungsmoment der ganzen Kreisfläche $= ma^2\pi.(b^2+\frac{1}{4}a^2) =$ **der Maſſe der Kreisfläche multipliciret mit der Summe der Quadrate aus dem Abſtande des Mittelpunktes von der Umlaufsachſe, und aus der Hälfte des Halbmeſſers.**

Wäre GMDN ein Dreyeck, ein Rechteck, oder ſonſt eine bekannte Fläche, ſo iſt es eben ſo leicht das Drehungsmoment bey einer ſolchen Umlaufsachſe zu finden.

Fig. 93 a) Iſt nun GFD ein Körper, der durch die Umdrehung der Fläche FCD um die Achſe AC entſteht, z. B. eine Kugel, ein Cylinder, ein ganzer oder auch ein abgekürzter Kegel u. ſ. w. ſo iſt es nun leicht das Drehungsmoment eines ſolchen Körpers für die Umlaufsachſe AB zu finden, welche die Achſe des Körpers AC in einer gegebenen Entfernung ſenkrecht durchſchneidet. Wäre z. B. GFD ein Stück eines ſenkrechten Cylinders, wo AF $= c$, FC $= x$, der Halbmeſſer des Cylinders CD $= a$, und ſein eigenthümliches Gewicht $= m$ iſt, ſo iſt das Drehungsmoment einer cylindriſchen Elementarſchichte $= ma^2\pi dx\left[(c+x)^2+\frac{1}{4}a^2\right]$; daraus folgt das Drehungsmoment des Cylinderſtückes GFD $= ma^2x\pi(\frac{1}{4}a^2+c^2+cx+\frac{1}{3}x^2)$, und endlich das Drehungsmoment des ganzen Cylinders $= ma^2b\pi(\frac{1}{4}a^2+c^2+bc+\frac{1}{3}b^2)$, wenn deſſen Länge $= b$ iſt. Setzet man $c = 0$, ſo iſt $ma^2b\pi(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}b^2)$ das Drehungsmoment des ſenkrechten Cylinders für eine Umlaufsachſe, welche in der Ebene der Grundfläche durch deren Mittelpunkt geht; iſt dabey $a = 0$ in Rückſicht b, ſo iſt das Drehungsmoment $= ma^2b\pi.\frac{1}{3}b^2$ $= M.\frac{1}{3}b^2$ wie bey der Aufgabe I. Setzet man aber $c = -\frac{1}{2}b$, ſo iſt $ma^2b\pi.(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{12}b^2)$ das Drehungsmoment eines ſenkrechten Cylinders für eine Umlaufsachſe, welche die Achſe des Cylinders in deſſen Schwerpunkte ſenkrecht durchſchneidet. Eben ſo leicht iſt es das Drehungsmoment eines Parallelepipedums oder eines anderen ſenkrechten priſmatiſchen Körpers für eine Umlaufsachſe zu finden, welche die Achſe des Priſma in einer gegebenen Entfernung ſenkrecht durchſchneidet. Und daraus iſt es zu erſehen, wie man die Drehungsmomente der materiellen Hebel, wie auch der Speichen bey den Well- und Schwungrädern u. ſ. w. genau beſtimmen könne; mittelſt der Aufgabe I. werden ſolche nur beynahe gefunden.

b) Iſt GFD ein Kugelabſchnitt, wo AF $= c$, der Halbmeſſer der Kugel $= a$, FC $= x$, CD $= y$ $= (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und das eigenthümliche Gewicht $= m$ iſt, ſo iſt das Drehungsmoment einer Elementarſchichte auf der Grundfläche GMDN $= m\pi y^2 \mathrm{d}x[(c+x)^2 + \frac{1}{4}y^2]$ $= m\pi \mathrm{d}x[2ax - x^2] . [(c+x)^2 + \frac{1}{4}(2ax - x^2)]$; daraus folgt das Drehungsmoment des Kugelabſchnittes GFD $=$ $m\pi.(ac^2x^2 + \frac{4}{3}acx^3 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{1}{3}c^2x^3 - \frac{1}{2}cx^4 - \frac{3}{20}x^5)$; und endlich, wenn man $x = 2a$ ſetzet, das Drehungsmoment der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}ma^3\pi(c^2 + 2ac + \frac{7}{5}a^2)$ $= \frac{4}{3}ma^3\pi[\frac{2}{5}a^2 + (a+c)^2]$. Fig. 93

Die Berechnungen der Drehungsmomente anderer Körper für verſchiedene Umlaufsachſen, und vorzüglich für ſolche, welche durch die Schwerpunkte der Körper gehen, werden dem eigenen Fleiſſe der Anfänger überlaſſen. Iſt einmal das Drehungsmoment eines Körpers für eine Umlaufsachſe bekannt, welche durch deſſen Schwerpunkt geht, ſo iſt ſodann das Drehungsmoment des nämlichen Körpers für jede andere Umlaufsachſe, die mit der vorigen in einer gegebenen Entfernung parallel läuft, mittelſt nachſtehender Aufgabe ſehr leicht zu beſtimmen.

V. Aufgabe. **Es iſt das Drehungsmoment einer Maſſe für eine durch den Schwerpunkt der Maſſe gezogene Umlaufsachſe bekannt; man ſoll das Drehungsmoment der nämlichen Maſſe für eine andere Umlaufsachſe finden, welche mit der erſten in einer gegebenen Entfernung parallel läuft.**

Auflöſ. Es ſey Fig. 93 die gegebene Maſſe TFS $= M$; das bekannte Drehungsmoment dieſer Maſſe für die Achſe GD, welche durch den Schwerpunkt C der Maſſe gezogen iſt, ſey $= Mk^2$, und der Abſtand einer anderen parallelen Achſe AB von der vorigen ſey

Fig. 93 CA $= l$, das geſuchte Drehungsmoment für dieſe zweyte Umlaufsachſe AB ſey endlich $= X$. Durch die zwey parallelen Achſen GD und AB ſey die Ebene CB, und ferner durch die erſte Umlaufsachſe GD die Ebene GMN ſenkrecht auf CB gelegt. In dieſer Ebene GMN ſey Q $= \mathrm{d}M$ ein Elementartheilchen, nämlich das Differenziale der gegebenen Maſſe; der ſenkrechte Abſtand dieſes Elementartheilchens von der erſten Umlaufsachſe GD ſey QP $= x$, ſo iſt der ſenkrechte Abſtand eben dieſes Elementartheilchens von der zweyten Umlaufsachſe $=$ QB $= \sqrt{(x^2+l^2)}$. Das geſuchte Drehungsmoment für die zweyte Umlaufsachſe iſt daher $X = \int \mathrm{d}M(x^2+l^2) = \int x^2 \mathrm{d}M + \int l^2 \mathrm{d}M$; es iſt aber $\int x^2 \mathrm{d}M =$ dem Drehungsmomente der gegebenen Maſſe für die Umlaufsachſe GD, nämlich es iſt $\int x^2 \mathrm{d}M = Mk^2$, und $\int l^2 \mathrm{d}M = l^2 \int \mathrm{d}M = Ml^2$; folglich iſt das geſuchte Drehungsmoment

$$X = Mk^2 + Ml^2 = M.(k^2+l^2).$$

Z. B. da vermög d) bey der Aufgabe III. das Drehungsmoment einer ganzen Kugel für einen Durchmeſſer GD $= M.\frac{2}{5}$CD^2 iſt, ſo iſt das Drehungsmoment dieſer nämlichen Kugel für die Umlaufsachſe AB $= M(\frac{2}{5}$CD$^2+$CA$^2)$ wie bey der Aufgabe IV. b. Imgleichen weil das Drehungsmoment der Kreisfläche GMDN für den Durchmeſſer GD $= M.\frac{1}{4}$CD^2 iſt, wovon man ſich durch eine leichte Rechnung überzeugen kann, ſo iſt das Drehungsmoment eben dieſer Kreisfläche für die Umlaufsachſe AB $= M(\frac{1}{4}$CD$^2+$CA$^2)$ wie bey der Aufgabe IV.

Und nun iſt es leicht die beſchleunigte Bewegung der Maſchinen zu beſtimmen, welche durch Gewichte getrieben werden, wie auch die Schwingungsbewegung eines zuſammengeſetzten Pendels zu unterſuchen, wie es aus nachſtehenden Aufgaben zu erſehen iſt.

§. 208.

Fig. 62

Aufgabe. Am Umfange des Rades GH Fig. 62 hängt eine Maſſe = P, und ihr Druck nach einer auf den Halbmeſſer = A des Wellrades ſenkrechten Richtung, nämlich die Kraft, womit dieſe Maſſe P das Rad mittelſt des Hebelsarmes A zu drehen ſtrebet, iſt = p; am Umfange der zugehörigen horizontalliegenden Welle AB aber hängt die Maſſe = Q, und die Kraft, womit dieſe Maſſe das Wellrad mittelſt des Halbmeſſers der Welle = a auf die entgegengeſetzte Seite zu drehen ſtrebet, iſt = q; und es iſt p gröſſer als eine daſelbſt zum Gleichgewichte mit q ſamt der Reibung und Unbiegſamkeit der Seile erforderliche Kraft; man ſoll die Bewegungen der Maſſe P und Q beſtimmen.

Auflöſ. Es ſey die zum Gleichgewichte mit der Reibung und Unbiegſamkeit der Seile am Halbmeſſer A erforderliche Kraft $= f$, die vermög (§. 189. u. 181.) leicht zu beſtimmen iſt; nämlich der von der Reibung und Unbiegſamkeit der Seile herrührende Widerſtand ſey ſo groß, als eine Kraft f, welche am Umfange des Rades angebracht der Kraft p entgegen wirket, ſo iſt vermög (§. 204.) am Hebelsarm A am Endpunkte deſſelben die vereinigte bewegende Kraft $= p - f - \frac{aq}{A}$.

Wenn die Maſſe Q nicht frey herunter hängt, ſondern längſt einer ſchiefen Ebene hinauf, oder auf einer horizontalen Fläche herüber gezogen wird, ſo muß auch die davon entſtehende Reibung bey der Beſtimmung des Werthes f in Erwägung gezogen werden; bey der ſchie-

Fig. 62 ſen Ebene, wenn ihr Neigungswinkel $= m$ iſt, wäre $q = Q.\sin m$, auf einer horizontalen Fläche aber wäre $q = 0$; eben dieſes iſt bey der Maſſe P zu beobachten. Ferner ſey das Drehungsmoment des Rades, der Speichen deſſelben, und der Welle zuſammengenommen $= Mk^2$, welches vermög (§. 207.) leicht zu berechnen iſt, ſo iſt die ſämmtliche am Endpunkte des Hebelsarmes A, nämlich am Umfange des Rades in einem einzigen Punkte vereinigte Maſſe $= P + \frac{Qa^2}{A^2} + \frac{Mk^2}{A^2}$ vermög (§. 205.); es iſt nämlich das Drehungsmoment der Maſſe $Q = Q.a^2$, ſo wie der Maſſe P für die nämliche Umlaufsachſe des Wellrades $= P.A^2$, weil man jede der zwey Maſſen P, Q am Endpunkte des dazugehörigen Hebelsarmes in der Mittellinie des Seiles als einen materiellen Punkt anſehen kann. Es iſt demnach vermög (§. 203. II.) das Differenziale der Winkelgeſchwindigkeit des Wellrades

$$d\omega = 2gdt(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}).$$

Wird nun ferner die in der Zeit t erlangte Geſchwindigkeit des Endpunktes am Halbmeſſer a der Welle, nämlich die Geſchwindigkeit der hinaufſteigenden Maſſe $= v$ geſetzet, ſo iſt $dv = 2agdt.(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2})$.

Daraus folgt $v = 2agt.(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2})$,

vorausgeſetzt daß f, p, q, unveränderlich, und dabey für $t = 0$ auch $v = 0$ ſey; ferner folgt vermög der Formel $ds = vdt$, wenn in eben dieſer Zeit

t von

t von der Maſſe Q der Weg $=$ s zurückgelegt wird, Fig. 62
$s = agt^2 . \left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$.

Eben ſo findet man die Geſchwindigkeit der herabſinkenden Maſſe P nach Verlauf dieſer nämlichen Zeit $v' = 2Agt . \left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$, und den zurückgelegten Weg $s' = Agt^2 . \left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$, wie ſolches auch ſchon aus §. 163. I. zu erſehen iſt.

I. Aus den gefundenen zwey Fundamentalgleichungen für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung der Laſt Q am Wellrade, laſſen ſich noch mehrere Formeln ableiten; wenn man nämlich in der Tabelle §. 41. ſtatt g den Werth $G = ag\left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$ ſetzet, ſo iſt dieſe Tabelle auch hier anwendbar.

Der Werth $G = ag . \left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$ iſt die **Beſchleunigung** der Laſt Q, oder der in 1 Sek. zurückgelegte Weg. Dieſe Beſchleunigung verſchwindet bey zwey verſchiedenen Werthen von a, einmal wenn man $a = 0$ ſetzet, und dann auch wenn $aq = A(p-f)$ iſt, nämlich wenn $a = \frac{A(p-f)}{q}$ gemacht wird; derowegen giebt es zwiſchen 0 und $\frac{A(p-f)}{q}$ einen Werth für a, wo die Beſchleunigung $G = ag . \left(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2}\right)$ der Laſt Q, und folglich auch die in einer gegebenen Zeit erlangte Geſchwindigkeit, ſo wie der zurückgelegte Weg ein **Größtes** wird. Ein ſolcher Werth für a

Fig. 62 bey gegebenen Mk^2, P, p, Q, q, A, f läßt ſich beſtimmen, wenn man die Gleichung $G = ag.(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2})$ dergeſtalt differenziret, daß nur a veränderlich ſey, und ſodann dieſes Differenzial $= 0$ ſetzet.

Eben ſo läßt ſich aus den gegebenen Mk^2, P, p, Q, q, a, f eine ſolche Länge des Halbmeſſers A des Wellrades beſtimmen, daß die Beſchleunigung der Maſſe P am Umfange des Rades $G' = Ag.(\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2})$ ein größtes wird. Wenn nun bey einer zu machenden Anordnung eines Wellrades der Halbmeſſer entweder des Rades oder der Welle, nach dieſen Gründen beſtimmet, und dabey Mk^2 nebſt f ſo klein als möglich gemacht würde, ſo hätte ein ſolches Wellrad **in Rückſicht der gleichförmig beſchleunigten Bewegung** ganz richtig die **möglichſt beſte** Einrichtung; ob aber eben dieſe Einrichtung des Wellrades bey dem gewöhnlichen Gebrauche deſſelben, wo ſeine Bewegung meiſtens ziemlich gleichförmig iſt, auch die möglichſt beſte ſey, läßt ſich nicht ſo unbedingt annehmen, obſchon **Herr L. Euler** in ſeiner Abhandlung von dem vortheilhafteſten Gebrauche der Maſchinen (de machinarum uſu maxime lucroſo. Comment. Petrop. T. X.) dieſes angenommen hat. Wäre dieſe Vorausſetzung richtig, daß diejenige Anordnung des Wellrades auch bey dem gewöhnlichen Gebrauche deſſelben die möglichſt beſte ſey, wo die Beſchleunigung der Kraft oder der Laſt ein Größtes wird, ſo müßte das Schwungrad, welches in manchen Fällen ſo nützlich iſt, jederzeit nachtheilig ſeyn, weil die Beſchleunigung am Wellrade immer kleiner wird, je gröſſer das Drehungsmoment des Schwungrades iſt.

II. Hängen P, und Q frey herunter, ſo iſt Fig. 62
$P = p$, und $Q = q$; folglich iſt die Beſchleunigung des am Umfange des Rades herabhangenden Gewichtes $G = Ag \cdot (\frac{A(p-f)-aq}{pA^2+qa^2+Mk^2})$. Iſt ferner $A = a$ wie bey der einfachen Rolle, ſo iſt $G = g.(\frac{p-f-q}{p+q+a^{-2}Mk^2})$, und ferner wenn $Mk^2 = 0$ iſt in Rückſicht $p + q$, die Beſchleunigung $G = g.(\frac{p-f-q}{p+q})$ wie (§. 51. II.) wo aber nun die Maſſe der Schnur auſſer Acht gelaſſen iſt. Will man mittelſt der Formel $G = Ag \cdot (\frac{A(p-f)-aq}{PA^2+Qa^2+Mk^2})$ auch die Maſſe der Schnur in Fig. 4 in Erwägung ziehen, ſo iſt, wenn man das Gewicht der Schnur $= b$ ſetzet, $P = p + \frac{1}{2}b$, $Q = q + \frac{1}{2}b$, und dabey $A = a$, $Mk^2 = \frac{1}{2}a^2M$ vermög (§. 207. III. a); folglich iſt $G = g \cdot (\frac{p-f-q}{p+q+b+\frac{1}{2}M})$, wo nun auch die Maſſe der Rolle in Erwägung gezogen iſt; ſetzet man $M = 0$, ſo iſt $G = g \cdot (\frac{p-f-q}{p+q+b})$ wie im §. 51. II.

III. Wäre $aq > A\,(p-f)$ in der Gleichung $G = ag.(\frac{A(p-f)-aq}{pA^2+qa^2+Mk^2})$, wo beyde Maſſen frey herunterhängen, ſo würde das Wellrad ſich auf die entgegengeſetzte Seite drehen. Wenn man nun in einem ſolchen Falle die zum Gleichgewichte mit der Reibung und Unbiegſamkeit des Seiles an dem Halbmeſſer der Welle angebrachte Kraft $= F$ geſetzet wird, ſo ſinket die Laſt

Fig. q in der Zeit t um $s = agt^2(\frac{a(q-F)-Ap}{pA^2+qa^2+Mk^2})$, und erlanget eine Geſchwindigkeit $v = 2agt(\frac{a(q-F)-Ap}{pA^2+qa^2+Mk^2})$. Setzet man $p = 0$, ſo iſt $s = \frac{a^2gt^2(p-F)}{qa^2+Mk^2}$, und $v = \frac{2a^2gt(p-F)}{qa^2+Mk^2}$. Mittelſt dieſer zwey Formeln läßt ſich die gleichförmig beſchleunigte Bewegung des Schwungrades vollkommen beſtimmen. Einige hieher gehörige Verſuche enthält die im §. 51. II. angeführte Abhandlung des Herrn **Schober**.

Anmerk. Alles was hier von der gleichförmig beſchleunigten Bewegung des Wellrades angeführet worden, läßt ſich auch auf den materiellen Hebel anwenden. Die Seile am Umfange des Wellrades und an der Welle deſſelben, da ſich das eine aufwindet, und das andere abwickelt, verurſachen, daß man die bewegende Kraft bey der Umdrehung des Wellrades, wenn ſelbes auch wirklich durch frey herabhangende Gewichte getrieben wird, nicht in allen Fällen für unveränderlich anſehen darf. Man könnte in dergleichen Fällen, wenn es nothwendig wäre, die Veränderung der bewegenden Kraft ohngefähr ſo in Erwägung ziehen, als es im (§. 58. II.) geſchehen iſt.

§. 209.

Aufgabe. Am Umfange des erſten Rades an einem Räderwerke hängt eine Maſſe P, und ihr ſenkrechter Druck gegen den Endpunkt des Halbmeſſers des Rades iſt $= p$, wo $p = P$ iſt, wenn die ſchwere Maſſe P frey herunterhänget; am Umfange der Welle

des letzten Rades aber hängt eine Laſt Q, und die Kraft, womit ſie die Welle zu drehen ſtrebet, iſt $= q$; man ſoll die Bewegung der Laſt Q beſtimmen. Fig. 82

Auflöſ. Man ſetze die Halbmeſſer der Räder Fig. 82 nach der Ordnung $= A, B, C, D$, die Halbmeſſer der damit verbundenen Wellen oder Getriebe aber $= a, b, c, d$, und die Kraft $= f$, welche am Umfange des erſten Rades A angebracht, der ſämmtlichen Reibung das Gleichgewicht hält, ſo iſt am Umfange der Welle d am Endpunkte des Hebelsarmes d die vereinigte bewegende Kraft $= \frac{ABCD(p-f)}{abcd} - q$, weil vermög (§. 169.) die Kraft $p - f$ am Umfange des erſten Rades zu der gleichgeltenden Kraft am Umfange der letzten Welle ſich verhält wie $a.b.c.d$ zu $A.B.C.D$.

Setzet man ferner die Drehungsmomente der Wellräder aA, bB, cC, dD für ihre eigene Umlaufsachſen berechnet nach der Ordnung $= A', B', C', D'$, ſo iſt die ſämmtliche Maſſe am Umfange der letzten Welle am Endpunkte ihres Halbmeſſers vereiniget $= Q + \frac{D'}{d^2} + \frac{D^2.C'}{c^2d^2} + \frac{C^2D^2.B'}{b^2c^2d^2} + \frac{B^2C^2D^2.A'}{a^2b^2c^2d^2} + \frac{A^2B^2C^2D^2.P}{a^2b^2c^2d^2}$.

Denn eine Kraft V an der Welle d des letzten Rades verurſachet vremög (§. 169.) zwiſchen den Zähnen des Rades B und zwiſchen den Triebſtecken der Welle a einen Druck $= \frac{bcd}{BCD}.V$; daraus folgt vermög (§. 206.) bey dem Wellrade Aa die Umdrehungsbeſchleunigung $G = \frac{agV}{A'}.\frac{bcd}{BCD}$ wenn ſein Drehungsmoment Mk^2

Fig. 82 $= A'$ geſetzet, wird und wenn dabey die übrigen Wellräder keine Maſſe hätten, und auch ſonſt kein Widerſtand zu überwinden, auch keine andere Maſſe zu bewegen wäre; wenn hingegen bey der nämlichen Kraft V an der letzten Welle in dem nämlichen Punkte nämlich am Endpunkte des Halbmeſſers d eine einzige Maſſe als ein materieller Punkt betrachtet $= X$ angebracht wäre, und die Wellräder hätten gar keine Maſſe, und es wäre auch ſonſt kein Widerſtand zu überwinden, auch keine andere Maſſe in Bewegung zu ſetzen, ſo wäre vermög (§. 206.) die Umdrehungsbeſchleunigung dieſer letzten Welle $= \frac{gVd}{Xd^2}$; daraus folget vermög (§. 170. I.) für das Wellrad Aa die Umdrehungsbeſchleunigung $G' = \frac{BCD}{abc} \cdot \frac{gV}{Xd}$; damit nun $G' = G$ wird, muß auch $\frac{BCD}{abc} \cdot \frac{gV}{Xd} = \frac{agV}{A'} \cdot \frac{bcd}{BCD}$, und folglich $X = \frac{B^2C^2D^2.A'}{a^2b^2c^2d^2}$ ſeyn; man kann demnach, ohne die Umdrehungsbewegung des Räderwerkes zu ſtöhren, an der Welle d des letzten Rades einen einzigen materiellen Punkt $X = \frac{B^2C^2D^2.A'}{a^2b^2c^2d^2}$ ſtatt der Maſſe des Rades Aa ſubſtituiren. Eben dieſe Beſchaffenheit hat es mit der Ueberſetzung der Maſſe bey den übrigen Wellrädern, und auch der Maſſe P, die man für einen einzigen materiellen Punkt am Umfange des erſten Rades anſehen kann, wenn ſie mittelſt einer Schnur angehänget iſt. A', B', C', D, bedeuten bey den Wellrädern Aa, Bb, Cc, Dd die Drehungsmomente der Räder und der dazugehörigen Wellen zuſammengenommen.

Da nun am Umfange der Welle d die vereinigte bewegende Kraft $V = \frac{ABCD(p-f)}{abcd} - q$, und die vereinigte Maſſe Fig: 82

$$M = Q + \frac{D'}{d^2} + \frac{D^2.C}{c^2d^2} + \frac{C^2D^2.B'}{b^2c^2d^2} + \frac{B^2C^2D^2.A'}{a^2b^2c^2d^2} + \frac{A^2B^2C^2D^2.P}{a^2b^2c^2d^2}$$ iſt,

ſo iſt das Differenziale der Geſchwindigkeit, welche der Endpunt des Halbmeſſers der Welle d, oder die hinaufſteigende Laſt Q in der Zeit t erlanget, $dv = 2gdt.\frac{V}{M}$. Daraus folgt endlich $v = 2gt.\frac{V}{M}$, wenn $\frac{V}{M}$ unveränderlich, und dabey für $t = 0$ auch $v = 0$ iſt; und ferner iſt der zurückgelegte Weg $s = gt^2.\frac{V}{M}$.

§. 210.

Aufgabe. Am Flaſchenzuge hängt eine Laſt q an n Seilen, wo q das Gewicht der beweglichen Flaſche, und des daran hangenden ſchweren Körpers bedeutet; und am letzten Seile, nachdem ſolches über n Rollen geführet worden, hängt ein Gewicht p frey herunter, welches die Laſt überwiegt; man ſoll die Bewegung der Laſt beſtimmen.

Auflöſ. Die Bewegung erfolget eben ſo, als wenn die frey herabhangenden Gewichte q und p an einem Wellrade, und zwar q an einem Hebelsarm a als Halbmeſſer der Welle, p aber an einem Hebelsarm na als Halbmeſſer des Rades angebracht wären, wo a den mittleren Halbmeſſer der Rollen bedeuten kann; die Be-

we-

Fig. wegung der hinaufſteigen Laſt läßt ſich demnach mittelſt der Formeln $v = 2agt.(\frac{A(p-f)-aq}{A^2p+a^2q+Mk})$ vermög (§. 280 II.) beſtimmen, wenn man $A = na$ ſetzet; dabey iſt ohne merklichen Fehler $Mk^2 = \frac{1}{2}a^2m$ vermög (§. 207. III. a), wen m das ſämmtliche Gewicht der oberen Rollen bedeutet; das Gewicht der unteren Rollen iſt bereits ſchon bey q mitgerechnet; und f bedeutet endlich die am letzten Seile zur Aufhebung der Reibung und Unbiegſamkeit des Seiles erforderliche Kraft; derowegen iſt die in der Zeit t erlangte Geſchwindigkeit der hinaufſteigenden Laſt $v = 2gt.(\frac{n(p-f)-q}{n^2p+q+\frac{1}{2}m})$,

und der zurückgelegte Weg $s = gt^2.(\frac{n(p-f)-q}{n^2p+q+\frac{1}{2}m})$.

Wenn hingegen das Uebergewicht auf der Seite der Laſt iſt, und F bedeutet die Kraft, welche am Hacken der beweglichen Flaſche angebracht der Reibung und Unbiegſamkeit des Seiles das Gleichgewicht hält, ſo iſt bey der herabſinkenden Laſt $v = 2gt.(\frac{q-F-np}{n^2p+q+\frac{1}{2}m})$,

und $s = gt^2.(\frac{q-F-np}{n^2p+q+\frac{1}{2}m})$.

Iſt endlich m in Rückſicht n^2p+q ſehr klein, wie es beym Flaſchenzuge gewöhnlich iſt, ſo iſt im erſten Falle bey der aufſteigenden Laſt der zurückgelegte Weg $s = gt^2.(\frac{n(p-f)-q}{n^2p+q})$, und im zweyten Falle bey der ſinkenden Laſt $s = gt^2.(\frac{q-F-np}{n^2p+q})$.

Aus dem Wege, oder der Geſchwindigkeit der Laſt Fig. läßt ſich vermög (§. 173. II.) auch der Weg der Kraft finden. Auch läßt ſich t berechnen, wenn g, n, s, p, q, und f oder F bekannt ſind. Bey einem von Herrn **Schober** in ſeiner Theorie der Ueberwucht abgeführten Verſuche ware $n = 4$, $s = 55$ Pariſ. Fuß, p 68 Loth (nämlich am letzten Seile ein angehängtes Gewicht von 64 Loth, und 4 Loth das Gewicht des Seiles in der Länge von 220 Fuß, weil das letzte Seil von der oberen Rolle durch das daran befeſtigte Gewicht durchgieng, und bis auf den Boden einer Salzgrube in der Tiefe von 220 Fuß reichte, wo es ſodann noch ferner in der Länge von 220 Fuß auf einem Haufen übereinandergelegt war, damit bey dem Herabſinken der Laſt die bewegende Kraft unveränderlich bliebe); ferner ware die niederſteigende Laſt $q = 284\frac{5}{8}$ Loth, nämlich der angehängte Körper nebſt der beweglichen Flaſche als Gegengewicht zu den 68 Lothen betrachtet ware $= 4.68 = 272$ Loth; dabey waren noch angehängt $8\frac{5}{8}$ Loth $= F$, welche zur Ueberwindung der ſämtlichen Reibung durch einen vorläufigen Verſuch nothwendig befunden worden; und endlich ware noch daſelbſt ein Uebergewicht von 4 Loth, alſo zuſammen die Laſt $q = 272 + 8\frac{5}{8} + 4 = 284\frac{5}{8}$ Loth; daraus folgt $t = \surd\left(\frac{s(n^2p+q)}{g(q-F-np)}\right)$ $= \surd\left(\frac{55(16.68+284\frac{5}{8}}{15{,}1\times.4}\right) = 35$ Sek. und der Verſuch gab 34 Sek.

Die Formeln für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung einer Laſt am Flaſchenzuge könnte man auch ohne Beyhilfe der Umdrehungsbewegung des Wellrades finden, wenn man ſo wie oben bey der Bewegung des

Rä-

Fig. Räderwerkes unterſuchet, was für eine Maſſe an der beweglichen Flaſche angebracht mit der Maſſe am letzten Seile in Rückſicht der Beſchleunigung gleichgeltend ſey.

§: 211.

Aufgabe. Die Schwingungsbewegung eines zuſammengeſetzten Pendels zu beſtimmen, eines ſchweren Körpers nämlich, der ſich um eine unbewegliche horizontale Achſe frey drehen läßt, die nicht durch ſeinen Schwerpunkt geht.

Auflöſ. Man ſetze das Drehungsmoment des ganzen Pendels, nämlich die Summe der Drehungsmomente aller ſeiner Theile für die gegebene Schwingungsachſe $= S$, und ſein ſtatiſches Moment, nämlich die Summe der ſtatiſchen Momente aller ſeiner Theile bey der nämlichen Schwingungsachſe ſetze man $= s$, ſo geſchieht die Schwingung des zuſammengeſetzten Pendels eben ſo, als die Schwingung eines einfachen Pendels, deſſen Länge $a = \frac{S}{s}$ iſt, und deſſen Schwingungsbewegung ſich vermög (§. 106. u. 107.) beſtimmen läßt; es iſt nämlich ein zuſammengeſetztes Pendel mit einem einfachen Pendel von der Länge $a = \frac{S}{s}$ gleichzeitig, wie es aus folgenden zu erſehen iſt.

Es werde ein zuſammengeſetztes Pendel aus der vertikalen Lage CA Fig. 27, wo die Vertikallinie CA durch deſſen Schwerpunkt geht, in die Lage CB gebracht, ſo daß es von der vertikalen Lage um den Winkel BCA $= m$ abweiche, und werde in dieſer Lage CB frey ausgelaſſen, ſo kann ſolches in dieſer Lage CB nicht ruhen, weil deſſen Schwerpunkt nicht unterſtützet iſt.

Fig. 27 iſt. Das Gewicht des ganzen Pendels $= P$, welches man ſich in deſſen Schwerpunkte vereiniget als einen einzigen ſchweren Punkt $= P$ vorſtellen kann, zerfällt mittelſt des Kräftenparallelograms in die zwey Seitenkräfte $P.\sin m$ und $P.\cos m$, wo $P.\sin m$ auf CB ſenkrecht wirket, $P.\cos m$ aber mit der Richtung CB zuſammen fällt, und von der Befeſtigung der Achſe C aufgehoben wird. Nur die Kraft $P.\sin m$ iſt es, welche den Hebel CB um die Achſe C gegen der vertikalen Lage zu drehen ſtrebet, nämlich $P.\sin m$ iſt die **drehende Kraft** bey der Lage CB des Pendels. Vermög dieſer anfänglichen drehenden Kraft beſchreibet das Pendel nach einer gewiſſen Zeit den Winkel BCM $= \varphi$, wo die drehende Kraft immer kleiner wird, ſo daß ſolche bey der Lage CM nur noch $= P \sin(m - \varphi)$ iſt; in der vertikalen Lage CA verſchwindet die drehende Kraft gänzlich, weil $P.\sin(m - \varphi) = 0$ wird, wenn man $\varphi = m$ ſetzet. Die Winkelgeſchwindigkeit des Pendels bey der Lage CB iſt $= 0$; bey der Lage CM hat die Winkelgeſchwindigkeit ſchon eine gewiſſe Gröſſe, und wächſt noch immer fort bis zur vertikalen Lage CA des Pendels, wo ſie am größten wird; mit dieſer letzten Geſchwindigkeit würde ſich das Pendel weiter gleichförmig drehen, wenn keine Kraft darauf wirkte; allein ſobald das Pendel um irgend einen Winkel ACN über die Vertikallinie CA hinausgekommen, ſo iſt nach entgegengeſetzter Richtung eine drehende Kraft vorhanden $= P.\sin \text{ACN}$, wodurch die Winkelgeſchwindigkeit des Pendels nach und nach immer vermindert, und endlich gänzlich getilget wird. Geſchieht dieſes in CD, ſo geht ſodann das Pendel wegen der drehenden Kraft von CD gegen CA zurück, ſteigt bis CB, von da wieder bis CD, und ſo weiter wechſelweiſe ohne Ende fort, wenn nicht die Reibung, oder ſonſt ein Hinderniß ſeine Bewegung verzögerte.

Nun

Fig. 27 Nun ſetze man für die gegebene Schwingungsachſe C, das Drehungsmoment des ganzen zuſammengeſetzten Pendels nämlich die Summe der Drehungsmomente aller ſeiner Theile $= S$, ferner den Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes von der nämlichen Schwingungsachſe $= E$, und die in der Zeit $= t$ von CB bis CM erlangte Winkelgeſchwindigkeit $= \omega$, ſo iſt vermög (§. 260. III.) $\omega d\omega = \frac{2gE d\varphi . P\sin(m-\varphi)}{S}$, wo PE das ſtatiſche Moment des ganzen zuſammengeſetzten Pendels, nämlich die Summe der ſtatiſchen Momente aller ſeiner Theile für die gegebene Schwingungsachſe bedeutet. Setzet man dieſe Summe $PE = s$, ſo iſt auch $\omega d\omega = \frac{2gs}{S} . d\varphi \sin(m-\varphi)$.

Daraus folgt, weil für $\omega = 0$ auch $\varphi = 0$ iſt, $\omega = \sqrt{\left(\frac{4gs}{S} . [\cos(m-\varphi) - \cos m]\right)}$; und ferner wegen (206. I.) auch $dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{4gs}{S} . [\cos(m-\varphi) - \cos m]\right)}}$.

Um dieſe Formeln einfacher zu machen, ſetze man $\frac{S}{s} = a$, mache $CA = a$, und gedenke mit dieſem Halbmeſſer $a = \frac{S}{s}$ den Kreisbogen BAD beſchrieben, ziehe BD, MN ſenkrecht auf CA, und ſetze $AE = b$, und $AP = x$, ſo iſt $\cos m = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$, $\cos(m-\varphi) = 1 - \frac{x}{a}$, $\varphi = m - \operatorname{arc}\cos\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, und $d\varphi = - dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Es

Es iſt demnach nach dieſer Bezeichnung die Winkelgeſchwindigkeit des zuſammengeſetzten Pendels Fig. 27

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{4g}{a} \cdot \frac{b-x}{a}\right)} = \frac{1}{a}.\sqrt{4g(b-x)};$$

daraus folgt die Geſchwindigkeit des Endpunktes des Halbmeſſers a, wenn ſie $= v$ geſetzet wird,

$$v = \sqrt{4g(b-x)} = \sqrt{4g \cdot \mathrm{EP}};$$

dieſe Geſchwindigkeit iſt demnach vermög (§. 104.) eben ſo groß, als bey einem einfachen Pendel, deſſen Länge $a = \frac{S}{s}$ iſt; oder welches einerley iſt, die Geſchwindigkeit des zuſammengeſetzten Pendels, nachdem ſelbes den Winkel BCM beſchrieben hat, iſt eben ſo groß, als wenn ſeine ganze Maſſe in dem Abſtande $a = \frac{S}{s}$ von der Schwingungsachſe in einem einzigen Punkte eines mathematiſchen Hebels vereiniget wäre.

Ferner iſt nach eben dieſer Bezeichnung

$$\mathrm{d}t = - a\mathrm{d}x(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}.[4g(b-x)]^{-\frac{1}{2}};$$

daraus folgt $t = -(\frac{a}{8g})^{\frac{1}{2}}.\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(b-x)^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{x}{2a})^{-\frac{1}{2}}$, woraus die Schwingungszeit ſowohl für einen kleinſten Bogen, als auch für einen Bogen von gegebener Gröſſe mittelſt der Integralrechnung eben ſo wie im §. 106. und §. 107 abgeleitet wird. **Es iſt demnach auch die Schwingungszeit bey einem zuſammengeſetzten Pendel eben ſo groß, als bey einem einfachen Pendel, deſſen Länge $a = \frac{S}{s}$ iſt;** oder die Schwingungszeit eines zuſammengeſetzten Pendels iſt eben ſo groß, als wenn ſeine ganze Maſſe in

Fig.

dem Abſtande $a = \frac{S}{s}$ von der Schwingungsachſe in einem einzigen Punkte eines mathematiſchen Hebels vereiniget wäre.

§. 212.

Derjenige Punkt eines zuſammengeſetzten Pendels, worin man ſich die ganze ſchwere Maſſe des Pendels in Rückſicht der Schwingungsbewegung als einen einzigen ſchweren Punkt vereiniget vorſtellen kann, heißt der **Schwingungspunkt des Pendels. Der Abſtand eines ſolchen Schwingungspunktes von der Schwingungsachſe iſt bey jedem zuſammengeſetzten Pendel vermög vorhergehenden gleich dem Drehungsmomente des Pendels getheilt durch deſſen ſtatiſches Moment bey der gegebenen Schwingungsachſe.**

Wenn z. B. ein zuſammengeſetztes Pendel aus einem Faden mit einer daran befeſtigten Kugel beſteht, und es iſt die Länge des Fadens von der Schwingungsachſe bis zur Kugel $= b$, das Gewicht deſſelben $= p$, der Halbmeſſer der Kugel $= c$, und das Gewicht derſelben $= P$, ſo iſt das Drehungsmoment des zuſammengeſetzten Pendels $= \frac{1}{3}b^2p + (b^2 + 2bc + \frac{7}{5}c^2).P$, weil vermög (§.207. I.) das Drehungsmoment des Fadens $= p.\frac{1}{3}b^2$ (da ſeine Dicke in Rückſicht der Länge $= 0$ iſt), und vermög (§. 207. IV. b.) das Drehungsmoment der Kugel für die nämliche Schwingungsachſe $= P.(b^2 + 2bc + \frac{7}{5}c^2)$ iſt. Ferner iſt das ſtatiſche Moment eben dieſes Pendels, nämlich der Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes multipliciret mit dem ſämmtlichen Gewichte deſſelben $= \frac{1}{2}bp + (b + c)P$.

Folg-

Folglich iſt der Abſtand des Schwingungspunktes von Fig. der Schwingungsachſe bey einem ſolchen Pendel

$$a = \frac{\frac{1}{3}b^2p + (b^2 + 2bc + \frac{7}{5}c^2)\,P}{\frac{1}{2}bp + (b + c).P}.$$

Iſt der Faden cylindriſch, woran die Kugel befeſtiget iſt, und ſein Halbmeſſer $= r$ ſo groß, daß man ihn nicht auſſer Acht laſſen darf, ſo iſt vermög (§. 207. IV. a.) das Drehungsmoment des Fadens $= (\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}r^2)p$; und folglich der Abſtand des Schwingungspunktes

$$a = \frac{(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}r^2).p + (b^2 + 2bc + \frac{7}{5}c^2)P}{\frac{1}{2}bp + (b + c).P}.$$

Iſt an einer horizontalen Schwingungsachſe unten eine Kugel $= P$ in dem Abſtande $= B$, und oben auf der entgegengeſetzten Seite der Schwingungsachſe eine andere Kugel $= p$ als ein Gegengewicht in dem Abſtande $= b$ mittelſt ſo dünner Stäbchen angebracht, daß man ihre Dicke, und auch ihr Gewicht auſſer Acht laſſen kann, und auch die Halbmeſſer der Kugeln ſind ſo klein, daß man ſie in Rückſicht der Längen B, b für 0 anſehen kann, ſo iſt der Abſtand a des Schwingungspunktes auf der Seite des gröſſern ſtatiſchen Momentes BP von der Schwingungsachſe $= \frac{B^2P + b^2p}{BP - bp}$ gröſſer als der Abſtand B. Iſt $BP = bp$, ſo iſt $a = \infty$, nämlich eine ſolche Zuſammenſetzung hört in dieſem Falle auf ein Pendel zu ſeyn; iſt a, B, und P bekannt, ſo läßt ſich bp finden. Es iſt aus dieſem zu erſehen, daß man bey den Uhren auch mittelſt eines ſehr kurzen Perpendickels langdauerende Schwingungen zuwege bringen kann.

§. 213.

Und nun iſt es leicht die Länge des einfachen Sekundenpendels, deſſen jede kleinſte Schwingung 1 Sekunde dauert, durch Beobachtung zu finden, und zwar auf folgende Art.

Man wähle ein ſolches zuſammengeſetztes Pendel, wo der Abſtand $= a$ des Schwingungspunktes von der Schwingungsachſe durch Rechnung ſich genau beſtimmen läßt, z. B. einen Faden mit einer daran befeſtigten Kugel. Man bringe das Pendel aus der lothrechten Lage um einen Winkel von einigen wenigen Graden, laſſe es darauf frey fallen, zähle die Schwingungen deſſelben eine zeitlang fort, beobachte zugleich nach einer Uhr, von deren richtigen Gange man ſonſt verſichert iſt, die verfloſſene Zeit, und beſtimme zugleich die mittlere Sehne $= c$ des halben Schwingungsbogens für den Halbmeſſer $= a$. Die beobachtete Zeit drücke man in Sekunden aus, und dividire ſie mit der beobachteten Anzahl der Schwingungen, ſo hat man die Schwingungszeit für ein einfaches Pendel von bekannter Länge $= a$ bey der bekannten Sehne $= c$ des halben Schwingungsbogens. Dieſe bekannte Schwinguugszeit ſey $= T$, ſo iſt vermöge (§. 107.)

$$T = \pi(\frac{a}{2g})^{\frac{1}{2}}.(1 + \frac{c^2}{16a^2} + \frac{9c^4}{1024a^4} + ..)\text{; daraus folgt}$$

$$\pi.(\frac{a}{2g})^{\frac{1}{2}} = \frac{T}{1 + \frac{c^2}{16a^2} + \frac{9c^4}{1024a^4} + \frac{125c^6}{262144a^6} + .} = t$$

die Schwingungszeit für eine kleinſte Schwingung eben dieſes Pendels; es iſt nämlich $t = \pi.(\frac{a}{2g})^{\frac{1}{2}}$ vermög (§. 106.) die Dauerzeit einer ganzen Schwingung in einem unendlich

lich

lich kleinen Bogen des Pendels a, welche Dauer nun Fig. mittelſt der Beobachtung und darauf folgenden Berechnung bekannt iſt. Setzet man ferner die geſuchte Länge des einfachen Sekundenpendels $= l$, deſſen jede kleinſte Schwingung 1 Sekunde dauert, ſo iſt $1 = \pi . (\frac{l}{2g})^{\frac{1}{2}}$ vermög (§. 106.); und dieſe Gleichung $1 = \pi . (\frac{l}{2g})^{\frac{1}{2}}$ mit der vorigen $t = \pi . (\frac{a}{2g})^{\frac{1}{2}}$ verbunden giebt endlich die geſuchte Länge $l = \frac{a}{t^2}$.

Wenn die gezählte Anzahl der Schwingungen des zuſammengeſetzten Pendels $= N$, die beobachtete Dauerzeit in Sekunden ausgedrückt $= n$, und die geſuchte Länge des einfachen Sekundenpendels $= l$ iſt, ſo iſt vermög (§. 108, III.) $n^2 l = N^2 a$, und folglich $l = \frac{N^2 a}{n^2}$. Durch dieſe Formel findet man die Länge des einfachen Sekundenpendels, deſſen jede Schwingung bey einem Schwingungswinkel, der dem mittleren Schwingungswinkel des zur Beobachtung gewählten zuſammengeſetzten Pendels gleich iſt, eine Sekunde dauert. Dieſe Länge iſt ohne merklichen Fehler der vorigen Länge für die kleinſten Schwingungen gleich, wenn der Schwingungswinkel ſehr klein iſt; es iſt nämlich, wenn man bey dem gewählten zuſammengeſetzten Pendel für den Halbmeſſer a die mittlere Sehne des halben Schwingungsbogens $= c$ ſetzet, nach dieſer Bezeichnung die wahre Länge des einfachen Sekundenpendels

$$l = \frac{N^2 a}{n^2}(1 + \frac{c^2}{16 a^2} + \frac{9 c^4}{1024 a^4} + .)^2 = \frac{N^2 a}{n^2} + \frac{N^2 a}{n^2} . \frac{c^2}{8 a^2}.$$

Fig.

Mittelſt der Formel $l = \frac{N^2 a}{n^2}$ hat Herr Abbt **Lieſganig** in **Wien** die Länge des einfachen Sekundenpendels l = 452,739 Duodec. Lin. des Wien. Fuſſes, oder = 440,562 Duodec. Lin. des Pariſ. Fuſſes gefunden. Sein zuſammengeſetztes Pendel beſtund aus einem Aloe-Faden mit einem daran befeſtigten abgekürzten Doppelkegel, ſo daß die Verlängerung des Fadens mit der Achſe des Doppelkegels zuſammentraf. Die Länge des Fadens von der Schwingungsachſe bis zur oberen Grundfläche des Doppelkegels ware b = 431,941 Wien. Lin. und ſein Gewicht $p = \frac{1}{3}$ Gran. Die halbe Achſe des abgekürzten Doppelkegels ware c = 5,922 Wien. Lin., der größte Halbmeſſer nämlich der Halbmeſſer der zuſammengefügten Grundflächen R = 4,26 Wien. Lin. der Halbmeſſer bey jeder der zwey kleinen Grundflächen r = 2,28 Wien. Lin. und das Gewicht des abgekürzten Doppelkegels $P = 2\frac{1}{4}$ Loth = 540 Gran. Daraus ergab ſich der Abſtand des Schwingungspunktes a = 437,903 Wien Lin. vermög der Formel

$$a = \frac{\left[\frac{3(R^5 - r^5) + 2c^2R^2(R+2r) + 6c^2r^2(R-2r)}{20(R^3 - r^3)} + (b+c)^2\right].P + \frac{1}{3}b^2.p}{(b+c).P + \frac{1}{2}b.p}$$

wovon man ſich leicht überzeugen kann, wenn man vermög (§. 207. IV. a.) das Drehungsmoment eines abgekürzten Kegels, deſſen Kubikinhalt nach der angeführten Bezeichnung $= \frac{1}{3}c\pi(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}c\pi\left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right)$ iſt, für eine Umlaufsachſe ſuchet, welche in der gröſſeren Grundfläche durch deren Mittelpunkt geht, und ſodann dieſes Drehungsmoment doppelt nimmt um das Drehungsmoment eines abgekürzten Doppelkegels für eine Umlaufsachſe zu erhalten, welche im Schwerpunkte ſeine Achſe

ſenk-

ſenkrecht durchſchneidet; daraus ergiebt ſich ferner vermög (§. 207. V.) das Drehungsmoment für die Schwingungsachſe, welche mit der vorigen Umlaufsachſe in einem gegebenen Abſtande parallel läuft; dazu addiret man noch das Drehungsmoment des Fadens, und dividiret dieſe Summe der Drehungsmomente durch die Summe der ſtatiſchen Momente des Doppelkegels und des Fadens für die nämliche Schwingungsachſe, ſo erhält man den geſuchten Abſtand des Schwingungspunktes.

Mit einem ſolchen Pendel wurden fünf Beobachtungen gemacht, wovon die kürzeſte faſt eine halbe Stunde, und die längſte noch etwas über eine ganze Stunde dauerte. Daraus ergab ſich im Mittel, daß dieſes Pendel 87861 Schwingungen in der nämlichen Zeit verrichte, als die Uhr, mittelſt der die Zeit beobachtet wurde, 24 ihrer Stunden zurücklege nämlich 86400 Pendelſchläge mache; ferner wurde durch andere Beobachtungen gefunden, daß die Uhr einen gleichförmigen, und zwar einen ſolchen Gang habe, daß die Dauerzeit (23 St. 56 Min. 4 Sek. = 86164 Sek.) zwiſchen zweyen aufeinander folgenden Eintritten eines nämlichen Fixſterns in einen nämlichen Scheitelkreis **nach dieſer Uhr** 23 St. 55 Min. 54,6 Sek. nämlich 86154,6 **Pendelſchläge** betrage; daraus folgt die Dauerzeit von 86400 Pendelſchlägen der Uhr = 86409,4 Sek. (wegen $86154{,}6 : 86164 = 86400 : x = 86409{,}4$); und eben ſo groß iſt auch die Dauerzeit von 87861 Schwingungen des gebrauchten zuſammengeſetzten Pendels, oder des einfachen Pendels von der Länge a; derowegen iſt endlich $l = \frac{(87861)^2 . 437{,}903}{(86409{,}4)^2} =$ 452,739 Wien. Duodec. Lin.

Statt 23 St. 56 Min. 4 Sek. ſollte eigentlich geſetzet werden 23 St. 56 Min. 4,1 Sek.; und auf dieſe Art wäre $l = 452,738$. Wenn man nun annimmt, daß bey dieſen Beobachtungen für den Halbmeſſer a die mittlere Sehne c des halben Schwingungsbogens = 2 Zoll = 24 Lin. geweſen ſey, ſo iſt nach der genauern Formel die Länge des einfachen Sekundenpendels für die kleinſten Schwingungen $l = \frac{N^2 a}{n^2} + \frac{N^2 a}{n^2} \cdot \frac{c^2}{8a^2} = 452,908$; wäre hingegen vielleicht nur $c = 12$ Lin., ſo iſt $l = 452,78$ Linien. Wäre bey dem angeführten Verſuche eine Vorrichtung angebracht geweſen, wodurch der Schwingungspunkt gezwungen wird in einer Cycloide zu ſchwingen, ſo wäre die Länge des einfachen Sekundenpendels richtig = 452,738 Duodec. Lin. des Wien. Fuſſes.

§. 214.

Es iſt von groſſer Wichtigkeit an verſchiedenen Orten der Erde die Länge des einfachen Sekundenpendels für die kleinſten Schwingungen bekannt zu haben; der Gebrauch davon iſt ſehr manigfaltig, als z. B.

I. Aus der an einem gegebenen Orte durch Beobachtung gefundenen Länge l des einfachen Sekundenpendels für die kleinſten Schwingungen läßt ſich daſelbſt vermög (§. 108. II.) die Beſchleunigung der Schwere $g = \frac{1}{2}\pi^2 l$ beſtimmen, welche ſodann bey jeder ungleichförmigen Bewegung als ein Maaßſtab der Beſchleunigung gebraucht wird.

II. Setzet man die Länge des Sekundenpendels = l' für eine Schwingung, wo der halbe Schwingungswinkel, nämlich der Elongationswinkel = φ iſt, und ſub-

ſubſtituiret in (§. 107.) ſtatt t, g, a, $\frac{b}{a}$ ihre Werthe 1 Sekunde, $\frac{1}{2}\pi^2 l$, l', ſinversφ, ſo iſt

$$l' = \frac{l}{\left[1+\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\text{ſinv}\varphi\right)^1+\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}\text{ſinv}\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{2}\text{ſinv}\varphi\right)^3+.\right]^2}$$

eine Formel, wodurch ſich aus der Länge l des Sekundenpendels für die kleinſten Schwingungen, die Länge deſſelben $= l'$ bey verſchiedenen Schwingungswinkeln beſtimmen, und in eine Tabelle eintragen läßt, welche in manchen Fällen nützlich ſeyn kann.

III. Aus der gezählten Anzahl der Schwingungen eines zuſammengeſetzten Pendels bey einem beſtimmten Schwingungswinkel, und aus der beobachteten Dauerzeit in Sekunden ausgedrückt, läßt ſich mittelſt der für den nämlichen Schwingungswinkel bekannten Länge des Sekundenpendels vermög (§. 108. III.) der Abſtand des Schwingungspunktes $= A$ berechnen. Iſt dabey auch der Abſtand des Schwerpunktes $= a$ von der Schwingungsachſe, und das ſämmtliche Gewicht des zuſammengeſetzten Pendels $= P$ bekannt, ſo ergiebt ſich daraus deſſen Drehungsmoment für die Schwingungsachſe ſehr leicht; es iſt nämlich wegen der obenangeführten Formel $\frac{S}{s} = A$ (§. 212.) das Drehungsmoment $S = aAP =$ **dem Produkte aus dem Abſtande des Schwerpunktes in den Abſtand des Schwingungspunktes multipliciret mit dem Gewichte des Pendels.** Der Schwerpunkt wird in dergleichen Fällen ſehr leicht beſtimmet, wenn man das zuſammengeſetzte Pendel Fig. 58. deſſen ſämmtliches Gewicht = R und Länge von der Schwingungsachſe A bis an den Endpunkt B = AB bekannt iſt, mittelſt eines nach vertikaler Richtung aufwärts angebrachten Gewichtes = P in horizontaler Lage ins Gleichgewicht bringet, vorausgeſetzt daß das Pendel nicht biegſam, ſondern

Fig. hinlänglich feſt iſt; daraus folget der Abſtand des Schwerpunktes $AD = \frac{AB . P}{R}$.

IV. Die an einem beſtimmten Orte der Erde einmal gefundene, und nach einem gewählten Maaßſtabe in Zahlen ausgedrückte Länge des Sekundenpendels giebt ein Hilfsmittel ab den nämlichen Maaßſtab jederzeit wieder finden zu können, wenn er verlohren gehen ſollte. Wenn z. B. der Wien. Maaßſtab, worauf nach der Beſtimmung des Herrn **Lieſganig** die Länge des Sekundenpendels 452,739 duodec. Lin. beträgt, nach einer gewiſſen Zeit verlohren gieng, und kein anderer Maaßſtab vorhanden wäre, deſſen Verhältniß zu dem Wien. Maaßſtabe bekannt iſt, ſo müßte man um ſolchen wieder zu finden nach einem willkührlich gezeichneten Maaßſtabe die Länge des Sekundenpendels nach (§. 213.) ſuchen; es ſey z. B. dieſe gefundene Länge 440,562 duodec. Lin. des willkührlich angenommenen Maaßſtabes, ſo ſind 440,562 Lin. des willkührlichen Maaßſt. gleich 452,739. Lin. des geſuchten Wien. Maaßſtabes, oder abgekürzt 36 Lin. oder Zoll des willkührlich angenommenen Fuſſes ſind gleich 37 Lin. oder Zoll des verlohrnen Wien. Fuſſes, der nun auf dieſe Art wieder gefunden iſt, und ſich nach Belieben zu wiederholtenmalen auftragen läßt. Dabey wird vorausgeſetzet, daß die Beſchleunigung der Schwere an einem nämlichen Orte zu allen Zeiten immer die nämliche ſey. Da in der Natur alles ſo ſehr veränderlich iſt, ſo könnte man faſt vermuthen, daß auch vielleicht die Beſchleunigung der Schwere an einem nämlichen Orte einer Veränderung unterworfen ſey, welches ſich erſt in künftigen Zeiten wird entſcheiden laſſen, wenn mehrere an einem nämlichen Orte zu verſchiedenen Zeiten zuverläſſig beſtimmte Längen des Sekundenpendels bekannt ſeyn werden.

§. 215.

Nun iſt es auch leicht einzuſehen, worauf die ſehr ſinnreiche Erfindung des **baliſtiſchen Pendels** beruhe. Es hat nämlich zu erſt Herr **Robin** (neue Grundſätze der Artillerie von Herrn **L. Euler** überſetzt und erläutert) mittelſt einer ſtarken eiſernen Pendelſtange, welche an ihrem unteren Ende mit einem groſſen hölzernen Blocke verſehen ware, die Geſchwindigkeiten der abgeſchoſſenen Flintenkugeln bey verſchiedenen Ladungen beſtimmet. Er richtete den Flintenlauf in einer auf die horizontale Schwingungsachſe des Pendels ſenkrechten Ebene in horizontaler Lage gegen den Block des ruhenden Pendels; nach geſchehenem Schuſſe drang die Kugel in den Block bis auf eine gewiſſe Tiefe hinein, und brachte das Pendel um einen gewiſſen Elongationswinkel aus der anfänglichen vertikalen Lage; aus der gemeſſenen Gröſſe dieſes Elongationswinkels, und aus anderen bekannten Gröſſen berechnete er ſodann die anfängliche Geſchwindigkeit, womit die Kugel auf das Pendel anſtieß. Nach Herrn **Robin** hat Herr **Arcy** (Verſuch einer Theorie der Artillerie von Hrn. **Lambert** überſetzt) auch bey verſchiedenen Flintenläufen und verſchiedenen Ladungen die erlangten Geſchwindigkeiten mittelſt des baliſtiſchen Pendels unterſuchet. Ferner hat Herr Papacino d'Antoni (phyſik. mathem. Grundſätze der Artillerie von Herrn **Tempelhof** überſetzt) auch bey Flintenläufen die Geſchwindigkeiten der abgeſchoſſenen Kugeln mittelſt des baliſtiſchen Pendels beſtimmet, und daraus die Geſchwindigkeiten verſchiedener Kanonkugeln bey verſchiedenen Ladungen mittelſt des Satzes geſucht, daß **die Tiefen der Löcher, welche verſchiedene gleichartige Kugeln mit verſchiedenen anfänglichen Geſchwindigkeiten bey dem Eindringen in ein nämliches gleichförmig dichtes Erdreich verurſachen, ſich**

Fig. **verhalten wie die Produkte aus den Quadraten der anfänglichen Geſchwindigkeiten in die Durchmeſſer der Kugeln.** Allein eine ſolche Beſtimmung der anfänglichen Geſchwindigkeit der abgeſchoſſenen Kanonkugeln kann wegen §. 59. I. nicht allerdings richtig ſeyn. Endlich hat Herr **Hutton** (**Böhms** Magazin für Ing. und Artill.) auch bey kleinen Kanonkugeln die von verſchiedenen Ladungen erlangten Geſchwindigkeiten mittelſt des baliſtiſchen Pendels beſtimmet. Wie nun die Geſchwindigkeit einer abgeſchloſſenen Kugel mittelſt des baliſtiſchen Pendels zu beſtimmen ſey, iſt aus nachſtehender Aufgabe zu erſehen.

§. 216.

Aufgabe. Eine abgeſchloſſene Kugel hat ein baliſtiſches Pendel AC Fig. 27 um den Elongationswinkel ACD = m aus der vertikalen Lage gebracht; man ſoll die Geſchwindigkeit finden, mit welcher die Kugel an das Pendel geſtoſſen.

Auflöſ. Es ſey das ſämmtliche Gewicht des Pendels = P, der Abſtand des Schwingungspunktes = A, und der Abſtand des Schwerpunktes = a, welche beyde vermög (§. 214. III.) leicht zu beſtimmen ſind; ferner ſey der Abſtand desjenigen Punktes des Pendels von der Schwingungsachſe = b, wo die Kugel das Pendel trifft; das Gewicht der Kugel ſey = p, und die geſuchte Geſchwindigkeit der Kugel, womit ſie auf das Pendel anſtößt, ſey endlich = V, ſo iſt

$$V = \frac{(aAP + 2b^2p) . \sqrt{[4g(aP + bp)(1 - \cos m)]}}{bp\sqrt{(aAP + b^2p)}}$$

wenn der Elongationswinkel ACD = m iſt; ſetzet man aber bey dieſem Elongationswinkel für einen bekannten

Halb-

Halbmeſſer CD = f die gegebene Sehne AD = c, Fig. 27
ſo iſt $V = \frac{c(aAP+2b^{2}p).\sqrt{[2g(aP+bp)]}}{bpf\sqrt{(aAP+b^{2}p)}}$,
oder wenn p in Rückſicht P ſehr klein iſt, ſo iſt hinlänglich genau $V = \frac{acP.\sqrt{2gA}}{bpf}$,
wovon man ſich auf folgende Art überzeugen kann.

Die Kugel treffe in horizontaler Richtung in einer auf die Schwingungsachſe ſenkrechten Ebene das ruhende Pendel in A, wo CA = b iſt. Die Kugel dringt da in den hölzernen Block hinein, und bringt das Pendel aus der vertikalen Lage. In einer gewiſſen Zeit = t, wo das Eindringen noch nicht gänzlich aufgehöret hat, ſey das Pendel in die Lage CN gebracht, und der Bogen AN ſey = S, der Winkel ACN aber = φ, und folglich $S = b.\varphi$; in eben der Zeit = t ſey die Kugel um eine gewiſſe Tiefe = s in den hölzernen Block hineingedrungen. Die erlangte Winkelgeſchwindigkeit des Pendels am Ende eben dieſer Zeit ſey = ω, die Geſchwindigkeit aber der noch immer weiter eindringenden Kugel am Ende der nämlichen Zeit ſey = v. In dem darauffolgenden Zeitelemente dt rückt das Pendel um den Winkel $d\varphi$ weiter fort, und die Kugel beſchreibt in dieſem Zeitelemente den Weg $dS + ds = bd\varphi + ds$, nämlich ds wegen dem noch fortdaurenden Eindringen, und dS wegen der Verrückung des Pendels. Während dem Eindringen der Kugel in den hölzernen Block des Pendels wirket eine **wahre mechaniſche Kraft** ſowohl auf die Kugel als auch auf das Pendel; durch die Wirkung dieſer Kraft (welche aus der **Boscovichiſchen** Elementarkraft der Materie §. 59 und zwar im gegenwärtigen Falle aus den **abſtoſſenden Kräften** in den kleinſten Entfernungen kann abgeleitet werden) wird die Ge-

Fig. 27 ſchwindigkeit v der noch immer weiter eindringen Kugel **vermindert**, die Winkelgeſchwindigkeit ω aber des Pendels **vermehret**, und zwar ſolange bis die Geſchwindigkeit v der eindringenden Kugel, und die Geſchwindigkeit $b\omega$ des ausweichenden Pendels in der Entfernung b an der Stelle der Kugel einander gleich werden; ſind einmal ſolche einander gleich, ſo hört die Wirkung dieſer Kraft gänzlich auf, weil das Eindringen nun geendiget iſt, und das Pendel bewegt ſich ſodann eben ſo als ein freyes zuſammengeſetztes Pendel.

Während dem Zeitelemente dt ſey dieſe Kraft $= R$, durch deren Wirkung die Geſchwindigkeit v vermindert, und ω vermehret wird, ſo iſt vermög (§. 56.)
$dv = -\frac{2gRdt}{p}$, und vermög (§. 206.) $d\omega = \frac{2gbRdt}{aAP + b^2p}$,
weil aAP das Drehungsmoment des Pendels ohne der Kugel iſt vermög (§. 214. III.), die Kugel p aber in Rückſicht des Pendels ohne merklichen Fehler als ein materieller Punkt kann angeſehen werden. Es iſt demnach auch, wenn man den Werth ſtatt $2gRdt$ aus der erſten Gleichung in die zweyte ſetzet,
$bpdv + (aAP + b^2p)d\omega = 0$.

Daraus folgt durch die Integration
$bpv + (aAP + b^2p)\omega = bpV$, weil $v = V$ iſt, wenn man $\omega = 0$ ſetzet.

In dieſer Gleichung ſetze man ſtatt v den Werth $b.\omega$, wo nun ω die nach geendigtem Stoſſe, nämlich nach vollendetem Eindringen erlangte Winkelgeſchwindigkeit des Pendels bedeutet, ſo iſt dieſe Winkelgeſchwindigkeit $\omega = \frac{bpV}{aAP+2b^2p}$.

Dieſe Winkelgeſchwindigkeit $\omega = \frac{bpV}{aAP + 2b^2p}$ erlanget das Pendel in iner ſo kurzen Zeit, daß ſich

ſel-

Fig. 27 ſelbes noch nicht merklich von der vertikalen Lage verrücket hat, wo der Stoß ſchon geendiget iſt. Aus dieſer Urſache hat man bey der Kraft R, welche die Geſchwindigkeit der eindringenden Kugel vermindert, und die Winkelgeſchwindigkeit des Pendels vermehret, die drehende Kraft des Pendels ſelbſt $P.\text{ſin}\phi$, oder genauer $(P + p).\text{ſin}\phi$ gänzlich auſſer Acht gelaſſen, weil ſie im Anfange $= 0$ iſt, wo ſich das Pendel noch nicht merklich verrücket hat.

Mit dieſer in der vertikalen Lage erlangten Winkelgeſchwindigkeit $\omega = \frac{bpV}{aAP+2b^2p}$ ſchwinget ſich das Pendel ſo weit hinaus, bis von ſeiner drehenden Kraft $(P + p).\text{ſin}\phi$ dieſe Geſchwindigkeit gänzlich getilget iſt, wo ſodann das Pendel wieder zurück geht. Geſchieht dieſes in der Lage CD, wo der Winkel ACD$=m$ iſt, ſo iſt $\omega = \sqrt{[\frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1 - \cos m)]}$, nämlich $\frac{bpV}{aAP+2b^2p} = \sqrt{[\frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1 - \cos m)]}$; denn wenn man bey einem zuſammengeſetzten Pendel, welches in der vertikalen Lage durch einen Stoß eine Winkelgeſchwindrgkeit $= \omega$ erhielt, bey der Lage ACN $= \phi$ deſſen noch übrige Winkelgeſchwindigkeit $= u$ ſetzet, wo $AP + bp$ das ſtatiſche Moment, und $aAP + b^2p$ das Drehungsmoment des Pendels iſt, ſo iſt vermög (§. 206.) $udu = -\frac{2g(aP+bp).d\phi\text{ſin}\phi}{aAP+b^2p}$, und ferner $u^2 = \omega^2 - \frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1 - \cos\phi)$ weil $u=\omega$ iſt wenn man $\phi=0$ ſetzet; iſt nun $u=0$ bey dem Winkel $\phi = m$, ſo iſt $0=\omega^2 - \frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1 - \cos m)$,

näm-

Fig.

nämlich $\omega = \sqrt{[\frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1-\cos m)]}$, woraus ſich auch m finden läßt, wenn ω bekannt iſt.

Aus der Gleichung

$$\frac{bpV}{aAP+2b^2p} = \sqrt{[\frac{4g(aP+bp)}{aAP+b^2p}.(1-\cos m)]}$$ folgt endlich die geſuchte Geſchwindigkeit, womit die abgeſchoſſene Kugel an das Pendel anſtößt,

$$V = \frac{(aAP+2b^2p).\sqrt{[4g(aP+bp)(1-\cos m)]}}{bp.\sqrt{(aAP+b^2p)}}.$$

Iſt aber bey dem Elongationswinkel m für einen bekannten Halbmeſſer f die gegebene Sehne $= c$, ſo iſt $1-\cos m = 2\sin^2\frac{1}{2}m = \frac{c^2}{2f^2}$; und folglich

$$V = \frac{c(aAP+2b^2p).\sqrt{[2g(aP+bp)]}}{bpf\sqrt{(aAP+b^2p)}}.$$

Iſt endlich p in Rückſicht P ſehr klein, ſo iſt hinlänglich genau $V = \frac{acP.\sqrt{2gA}}{bpf}$.

I. Bey der Beſtimmung der Winkelgeſchwindigkeit $\omega = \frac{bpV}{aAP+2b^2p}$, welche ein ruhendes Pendel erhält, wenn eine Kugel mit der Geſchwindigkeit V daran ſtößet, iſt vorausgeſetzt worden, daß die Wirkung der Kraft R gänzlich aufhöre, ſobald die Geſchwindigkeit der eindringenden Kugel v, und die Geſchwindigkeit $b\omega$ des Pendels an derjenigen Stelle, wo die Kugel hineindringet, einander gleich ſind. Dieſes wäre nur richtig, wenn der hölzerne Block des Pendels, und auch die eindringende Kugel mit gar keiner Elaſticität verſehen wäre. Da aber gar kein Körper in der Natur bekannt iſt, der gänzlich unelaſtiſch wäre, ſo iſt die

ge-

gefundene Formel $\omega = \frac{bpV}{aAP+2b^2p}$ nicht allerdings richtig. Wäre der Block an dem Pendel oder die Kugel vollkommen elaſtiſch, ſo wäre $\omega = \frac{2bpV}{aAP+2b^2p}$, weil durch die Kraft, womit bey dem Stoſſe die Theilchen zuſammengedrücket werden, dem Pendel die Geſchwindigkeit $\frac{bpV}{aAP+2b^2p}$, und durch die **eben ſo groſſe Kraft**, womit bey der **vollkommenen Elaſticität** die Theilchen ſich wieder herſtellen, auch noch ferner eine eben ſo groſſe Geſchwindigkeit $\frac{bpV}{aAP+2b^2p}$, alſo zuſammen $\omega = \frac{2bpV}{aAP+2b^2p}$ ertheilet wird. Daraus folgete die geſuchte Geſchwindigkeit V der abgeſchoſſenen Kugel nur halb ſo groß, als ſie oben gefunden worden (wie es ſchon bereits Herr **Lambert** in ſeinen Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers erinnert hat) nämlich $V = \frac{c(aAP+2b^2p).\sqrt{[2g(aP+bp)]}}{2bpf\sqrt{(aAP+b^2p)}}$. Allein auch eine vollkommene Elaſticität bey dem baliſtiſchen Pendel anzunehmen iſt man nicht berechtiget; derowegen iſt auch dieſe letzte Formel nicht allerdings richtig. Die richtige Formel für die Geſchwindigkeit V einer abgeſchoſſenen Kugel bey dem Anfange ihres Anſtoſſes an das baliſtiſche Pendel iſt

$$V = \frac{c(aAP+2b^2p).\sqrt{[2g(aP+bp)]}}{n.bpf\sqrt{(aAP+b^2p)}},$$

wo n eine Zahl bedeutet, die gröſſer als 1 aber kleiner als 2 iſt, und im erfoderlichen Falle durch Verſuche beſtimmet werden muß.

II. Die oben gefundene Geſchwindigkeit $\omega = \frac{bpV}{aAP+2b^2p}$, oder bey der vollkommenen Elaſticität $\omega = \frac{2bpV}{aAP+2b^2p}$ und bey der unvollkommenen Elaſticität $\omega = \frac{n.bpV}{aAP+2b^2p}$, welche ein gegebenes Pendel erhält, wenn eine gegebene Kugel mit einer gegebenen Geſchwindigkeit V daran ſtöſſet, verſchwindet ſowohl bey $b = 0$ als auch bey $b = \infty$; hingegen bey $b = \sqrt{\frac{aAP}{2p}}$ erhält ſie den größten Werth, und derjenige Punkt des Pendels, wo ſich dieſes eräugnet, iſt weder mit dem Schwerpunkte noch auch mit dem Schwingungspunkte einerley; man kann ihn den **kräftigſten Stoßpunkt** (punctum percuſſionis maximæ) nennen.

Anmerkung. So wie man die Geſchwindigkeit $\omega = \frac{nbpV}{aAP+2b^2p}$, welche ein Pendel durch den Stoß einer mit der Geſchwindigkeit V darauf abgeſchoſſenen Kugel erhält, mittelſt der **Boscovichiſchen Elementarkraft der Materie** §. 59 beſtimmet hat, eben ſo laſſen ſich auch die zwey Fundamentalſätze von dem **geraden und centralen Stoſſe** der unelaſtiſchen ſowohl als auch der elaſtiſchen Körper ableiten. Man ſagt aber, daß ein Körper an einen anderen **gerade und central** ſtoſſe, wenn die Richtungen der Schwerpunkte beyder Körper, welche während der Bewegung an einander ſtoſſen, in einer nämlichen geraden Linie liegen, und dieſe gerade Linie auf einer Ebene ſenkrecht ſteht, welche beyde zuſammenſtoſſende Körper in demjenigen Punkte berühret, wo die Körper bey dem Anfange ihres Stoſſes zu erſt an einander treffen. Die zwey Fundamentalſätze ſind folgende.

1) Bey dem geraden und centralen Stoſſe unelaſtiſcher Körper iſt die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach geendigtem Stoſſe gleich der Summe der Produkte aus den Maſſen der Körper in ihre Geſchwindigkeiten, welche ſie bey dem Anfange des Stoſſes hatten nach einerley Richtung genommen getheilt durch die Summe der Maſſen. Mittelſt dieſes Satzes läßt ſich die Aenderung der Geſchwindigkeit bey jedem der zwey zuſammenſtoſſenden Körper berechnen, wo die eine Geſchwindigkeit um etwas vermehret, und die andere um etwas vermindert wird. Wenn z. B. eine unelaſtiſche Maſſe $= M$ mit der Geſchwindigkeit $= C$ eine andere mit der Geſchwindigkeit $= c$ vorausgehende Maſſe $= m$ einhohlet, und die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoſſe $= u$ geſetzet wird, ſo iſt $u = \frac{MC+mc}{M+m}$; und folglich iſt die Vermehrung der Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers $= u - c = \frac{MC+mc}{M+m} - c = \frac{M(C-c)}{M+m}$, und die Verminderung der Geſchwindigkeit des nacheilenden Körpers $= C - u = C - \frac{MC+mc}{M+m} = \frac{m(C-c)}{M+m}$.

2) Bey dem geraden und centralen Stoſſe vollkommen elaſtiſcher Körper leidet die Geſchwindigkeit eines jeden doppelt ſo viele Aenderung, als ſie leiden würde, wenn die Körper unelaſtiſch wären. Wenn demnach die Maſſen der zuſammenſtoſſenden vollkommen elaſtiſchen Körper $= M, m$, und ihre Geſchwindigkeiten vor dem Stoſſe $= C, c$ ſind, ſo verliert der nacheilende Körper M durch den Stoß von ſeiner Geſchwindigkeit den

Theil = $\frac{2m(C-c)}{M+m}$, und m gewinnt bey ſeiner Geſchwindigkeit den Zuſatz = $\frac{2M(C-c)}{M+m}$. Die Geſchwindigkeit V des Körpers M nach dem Stoſſe iſt daher $V = C - \frac{2m(C-c)}{M+m}$, und die Geſchwindigkeit v des Körpers m nach dem Stoſſe iſt $v = c + \frac{2M(C-c)}{M+m}$. Sind die Richtungen der Geſchwindigkeiten C, c vor dem Stoſſe einander entgegengeſetzt, ſo iſt im erſten ſowohl als auch im zweyten Falle eine von beyden Geſchwindigkeiten für negativ anzuſehen; iſt aber die eine Maſſe z. B. m vor dem Stoſſe in Ruhe, ſo iſt ihre Geſchwindigkeit $c = 0$. Iſt endlich die ruhende Maſſe m in Rückſicht der bewegten unendlich groß, oder auch ſonſt unbeweglich, ſo ſetze man $m = \infty$.

Daß die zwey angeführten Sätze richtig ſeyn, erhellet auf folgende Art.

Bey dem geraden und centralen Stoſſe der zwey Körper M, m, wo der mit der Geſchwindigkeit c vorangehende Körper m von dem mit einer gröſſern Geſchwindigkeit C nacheilenden Körper M eingehohlet wird, werden während dem Stoſſe die Theile der Körper an denjenigen Stellen, wo ſie zuſammentreffen, etwas zuſammengedrückt, weil die Körper hier betrachtet werden, wie ſie in der Natur angetroffen werden, wo ſie niemals vollkommen hart, ſondern jederzeit etwas weich ſind. Nach Verlauf einer gewiſſen Zeit t vom Anfange des Stoſſes gerechnet, wo aber der Stoß doch noch nicht geendiget iſt, ſey der Maſſe M Geſchwindigkeit $= V$, und der Maſſe m Geſchwindigkeit $= v$, die Kraft aber $= R$, wodurch die Geſchwindigkeit v der vorangehenden Maſſe m vermehret, und die Geſchwindigkeit V der nacheilenden

Maſſe M vermindert wird (nämlich die Kraft, womit die Körper wegen den abſtoſſenden Kräften der Elementartheilchen der Materie in den kleinſten Entfernungen §. 59. während dem Stoſſe am Ende der Zeit t gegeneinander drucken, ſey $= R$) ſo iſt $dv = \frac{2gRdt}{m}$, und $dV = - \frac{2gRdt}{M}$ vermög (§. 56 I.); folglich auch $MdV + mdv = 0$, wenn man den Werth für $2gRdt$ aus der erſten Gleichung in die zweyte ſetzet. Daraus folgt durch die Integration $MV + mv = MC + mc$, weil im Anfange des Stoſſes $V = C$, und $v = c$ iſt. Nun iſt der Stoß bey unelaſtiſchen Körpern geendiget, wenn die Geſchwindigkeiten beyder Körper einander gleich ſind; weil nämlich bey den unelaſtiſchen Körpern die durch den Stoß zuſammengedrückten Theile gar kein Beſtreben äuſſern ſich wieder herzuſtellen, ſo hört die Wirkung der Kraft R gänzlich auf, ſobald, beyde Körper einerley Geſchwindigkeit haben. Setzet man daher die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit beyder Körper nach geendigtem Stoſſe $= u$, ſo iſt ſodann ſowohl $V = u$, als auch $v = u$; und folglich $u(M+m) = MC + mc$, nämlich $u = \frac{MC+mc}{M+m}$; der vorangehende Körper m hat demnach an ſeiner Geſchwindigkeit den Zuſatz $= u - c = \frac{M(C-c)}{M+m}$ erhalten, und der nacheilende Körper M den Theil $C - u = \frac{m(C-c)}{M+m}$ verlohren.

Sind die Körper elaſtiſch, ſo dauert die Zuſammendrückung der Theile ſo lange, bis beyde Geſchwindigkeiten einander gleich ſind, und es iſt bey der größ-

Fig. ten Zuſammendrückung die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit $u = \frac{MC+mc}{M+m}$ eben ſo groß als bey unelaſtiſchen Körpern, nämlich der vorangehende Körper m gewinnet durch die Zuſammendrückung der Theile einen Zuwachs an ſeiner Geſchwindigkeit $= \frac{M(C-c)}{M+m}$, und der nacheilende Körper M verliert eben dadurch einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit $= \frac{m(C-c)}{M+m}$, weil die obige Gleichung $M\mathrm{d}V+m\mathrm{d}v=0$ auch bey dem Stoſſe elaſtiſcher Körper ſtatt findet. Sind einmal beyde Geſchwindigkeiten einander gleich, ſo ſtreben ſodann die Theile ſich nach und nach wieder herzuſtellen; dadurch dauert der Druck R gegen beyde Körper noch immer fort; und deßwegen wird die Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers noch weiters vermehret, die Geſchwindigkeit des nacheilenden Körpers aber vermindert, und zwar ſo lange, bis bey vollkommen elaſtiſchen Körpern die zuſammengedrückten Theile ſich wieder gänzlich hergeſtellet haben, nämlich bis die Entfernung der Schwerpunkte eben ſo groß geworden iſt, als ſie im Anfange des Stoſſes war, weil während dem Stoſſe bey der Zuſammendrückung der Theile die Schwerpunkte ſich einander nähern, und bey der Herſtellung ſich wieder von einander entfernen. Iſt einmal dieſes geſchehen, ſo iſt der Stoß der elaſtiſchen Körper zu Ende, und der Druck R der Körper gegen einander höret ſodann gänzlich auf; und zwar durch die Herſtellung der zuſammengedrückten Theile bey vollkommen elaſtiſchen Körpern erhält der vorangehende Körper m einen eben ſo groſſen Zuwachs, und der nacheilende M verliert einen eben ſo groſſen Theil an ſeiner Geſchwindigkeit als bey der Zuſammendrückung, ſo daß der ſämmtliche Zuwachs der Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers $= \frac{2M(C-c)}{M+m}$, und der ſämmtliche Verlurſt der Geſchwindigkeit des nacheilenden Körpers $= \frac{2m(C-c)}{M+m}$ ſey, weil in dergleichen Fällen der Erfolg der nämliche iſt, als wenn zwiſchen den zwey zuſammenſtoſſenden Körpern eine elaſtiſche Feder befindlich wäre, wo vermög (§. 58. IV.) durch die Herſtellung der Feder einem Körper eine Geſchwindigkeit beygebracht wird, welche genau derjenigen Geſchwindigkeit gleich iſt, ſo durch die Zuſammendrückung der Feder dem nämlichen Körper nach der nämlichen Richtung ertheilet worden. Es iſt daher nach geendigtem Stoſſe des vorhergehenden Körpers m Geſchwindigkeit $y = c + \frac{2M(C-c)}{M+m}$, und des nachfolgenden Körpers M Geſchwindigkeit $V = C - \frac{2m(C-c)}{M+m}$.

Sind endlich die Körper unvollkommen elaſtiſch, ſo iſt die Veränderung einer jeden der zwey Geſchwindigkeiten bey der Herſtellung der Theile kleiner als bey der Zuſammendrückung, ſo daß nach geendigtem Stoſſe der ſämmtliche Zuwachs der Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers $= \frac{n.M(C-c)}{M+m}$, und der ſämmtliche Verlurſt der Geſchwindigkeit des nacheilenden Körpers $= \frac{n.m(C-c)}{M+m}$ ſey, wo n eine Zahl bedeutet, die gröſſer als 1 und kleiner als 2 iſt, und im erforderlichen Falle durch Verſuche beſtimmet werden muß.

Man nimmt ſonſt an, daß die Geſetze des Stoſſes vollkommen harter Körper, obſchon dergleichen in der Natur nicht anzutreffen ſind, mit den Geſetzen des Stoſ-

Stoſſes weicher unelaſtiſcher Körper einerley ſeyn, und daß die Veränderung der Geſchwindigkeiten **plötzlich** geſchehe, welches unbegreiflich iſt, weil die Kraft, welche eine gegebene Geſchwindigkeit eines gegebenen Körpers um eine gegebene Gröſſe **plötzlich**, nämlich in einem unendlich kleinen Zeittheilchen zu verändern im Stande wäre, **unendlich groß** ſeyn müßte. Bey dem Stoſſe vollkommen harter Körper muß man ſich vorſtellen, daß die Wirkung derjenigen Kraft R, wodurch während dem Stoſſe die Geſchwindigkeit des vorangehenden Körpers vermehret, und des nachfolgenden vermindert wird, ſich auf eine gewiſſe Entfernung über die Oberflächen der Körper hinaus erſtrecke; bey dieſer Vorſtellung geſchieht die Veränderung der Geſchwindigkeiten auch bey dem Stoſſe vollkommen harter Körper **nicht plötzlich**, ſondern in einer beſtimmten, obſchon ſehr kleinen Zeit; daher können die Fundamentalgleichungen der Bewegung (§. 56.) auch bey dem Stoſſe vollkommen harter Körper gebrauchet werden. Der Stoß wird in dergleichen Fällen geendiget ſeyn, wenn die Kraft R zu wirken aufhört, ſobald beyde Geſchwindigkeiten einander gleich ſind; dauert hingegen die Wirkung dieſer Kraft von demjenigen Augenblicke, wo beyde Geſchwindigkeiten einander gleich geworden ſind, noch weiter fort, ſo wird der Stoß auch bey vollkommen harten Körpern, ſo wie bey vollkommen elaſtiſchen, erſt damals gänzlich zu Ende ſeyn, wenn die Entfernung der Schwerpunkte der zwey zuſammenſtoſſenden Körper wieder ſo groß geworden iſt, als ſie im Anfange des Stoſſes ware, wo die Kraft R zu wirken anfieng.

Aus den angeführten zwey Fundamentalſätzen laſſen ſich nun eine Menge Folgen herleiten, als zum z. B. Bey dem Stoſſe der unelaſtiſchen ſowohl als auch der vollkommen elaſtiſchen Körper iſt die Summe der Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten nach

ei-

einerley Richtung genommen vor und nach dem Stoſſe gleich groß; und bey dem Stoſſe vollkommen elaſtiſcher Körper iſt dabey auch die Summe der Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten nach dem Stoſſe eben ſo groß als vor demſelben. Wenn zwey unelaſtiſche Körper, wo die Maſſen ſich verkehrt verhalten wie die Geſchwindigkeiten vor dem Stoſſe, nach gerade entgegengeſetzten Richtungen central zuſammenſtoſſen, ſo kommen dadurch beyde in Ruhe; ſind aber ſolche vollkommen elaſtiſch, ſo geht nach geendigtem Stoſſe ein jeder mit der anfänglichen Geſchwindigkeit wieder zurück. Wenn zwey vollkommen elaſtiſche Körper, deren Maſſen gleich ſind, an einander ſtoſſen, ſo verwechſeln ſie ihre Geſchwindigkeiten. Wenn ein elaſtiſcher Körper an einen unbeweglichen Gegenſtand ſenkrecht anſtöſſet, ſo ſpringet er mit der anfänglichen Geſchwindigkeit wieder zurück; wenn er hingegen ſchief anſtöſſet, ſo prellet er unter einem ſolchen Winkel zurück, daß der Abprellwinkel dem Einfalswinkel gleich iſt; u. ſ. w.

Es iſt überflüſſig die Lehre von dem Stoſſe der Körper weiter auszuführen, da ſolche von keinem erheblichen Nutzen iſt, wenn man die mechaniſchen Wiſſenſchaften ſo vorzutragen ſucht, als es in dieſem Werke bis hieher nun bereits geſchehen iſt.

XV.

XV. Vorleſung.

Die Centralbewegung.

§. 217.

Wenn auf einen mit einer Geſchwindigkeit verſehenen Körper, der ſich frey bewegen kann, eine Centralkraft wirket, eine Kraft nämlich, deren Richtung bey was immer für einer Stellung des Körpers immer gegen einen nämlichen auſſer der Richtung des bewegten Körpers befindlichen Punkt gerichtet iſt, ſo kann man die daher entſtehende krummlinigte Bewegung des Körpers eine **Centralbewegung** nennen; und der Punkt, wo die Richtungen der Centralkraft zuſammenſtoſſen, heißt der **Mittelpunkt der Centralkraft.** Ein Beyſpiel von einer Centralbewegung haben wir an der bereits ſchon vorgetragenen freyen Kreisbewegung gehabt. Nun iſt es noch erforderlich theils die allgemeinen Eigenſchaften einer jeden Centralbewegung, und theils insbeſondere einige Eigenſchaften der elliptiſchen Centralbewegung zu entwickeln, welches auf folgende Art geſchehen kann.

Einem frey beweglichen Körper werde in dem Punkte A Fig. 94 nach der Richtung AS entweder durch einen Stoß oder ſonſt auf eine andere Art die Geſchwindigkeit $= c$ beygebracht, und in dem nämlichen Augenblicke fange eine Centralkraft auf ihn zu wirken, deren Mittelpunkt in F iſt, ſo daß der Winkel SAF

= m ſey, wo AS eine Tangente der krummen Linie in A iſt, welche der Körper vermög ſeiner in A erlangten Tangentialgeſchwindigkeit = c, und vermög der Wirkung der Centralkraft beſchreibet. Fig. 94 Der Bogen AM = s ſey der Weg, welchen der Körper in der Zeit = t zurückleget, und am Ende dieſer Zeit ſey in dem Punkte M nach der Richtung der Tangente MT des bewegten Körpers Geſchwindigkeit = v; die ſenkrechte Ordinate ſey MP = y, und die zugehörige Abſciſſe AP = x, die Entfernung des Punktes A von dem Mittelpunkte F der Centralkraft AF = a, der Fahrſtrich (radius vector) FM = z, der Winkel AFM = φ, nämlich der Kreisbogen mit dem Halbmeſſer = 1 zwiſchen den Schenkeln des Winkels AFM beſchrieben ſey = φ; und endlich ſey an der Stelle M bey dem gegebenen Körper die Beſchleunigung der Centralkraft = p, nämlich es ſey $\frac{gP}{M} = p$, wo M die Maſſe des bewegten Körpers, und P die Gröſſe der Centralkraft an der Stelle M in der Entfernung FM nach der Richtung MF bedeutet.

Die Gröſſe der Centralkraft an der Stelle M, und folglich auch ihre Beſchleunigung = p, die man durch MG abbilden, nämlich MG = p ſetzen kann, läßt ſich mittelſt des Kräftenparallelograms in zwey andere zerlegen, nämlich in die Beſchleunigung MN = $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{FM}} . \mathrm{MG} = \frac{py}{z}$ ſenkrecht auf AF, und in die Beſchleunigung ME = $\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FM}} . \mathrm{MG} = \frac{p(a-x)}{z}$ parallel mit AF. Folglich iſt vermög (§. 56. IV.)

$$\text{I. } d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{2py\,dt}{z}, \quad \text{II. } d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{2p(a-x)dt}{z},$$

weil die erſte Seitenkraft die Ordinate MP zu vermin-

Fig. 94 dern, und die zweyte Seitenkraft die Abſciſſe AP zu vergröſſern ſtrebet.

Der Werth für $\frac{2p\,dt}{z}$ aus der erſten Gleichung in die zweyte geſetzet giebt $y.\,d(\frac{dx}{dt}) + (a-x).\,d(\frac{dy}{dt}) = 0$. Daraus folgt durch die Integration, weil dt unveränderlich iſt, $y.\frac{dx}{dt} + (a-x).\frac{dy}{dt} = \text{Conſt.}$ *), wo $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ die Geſchwindigkeiten nach den Richtungen ME,

PM

---

*) Das Integrale wird in dergleichen Fällen oft ſehr leicht auf folgende Art gefunden.

$$\int[y.d(\frac{dx}{dt}) + a.d(\frac{dy}{dt}) - x.d(\frac{dy}{dt}) = y.\frac{dx}{dt} - x.\frac{dy}{dt} + a.\frac{dy}{dt}$$

$$\pm\, y.\, d(\frac{dx}{dt}) \pm dx.\,\frac{dy}{dt}$$

$$- dx.\,\frac{dy}{dt} + a.\,d(\frac{dy}{dt}) - x.\,d(\frac{dy}{dt})$$

$$\mp\, dx.\,\frac{dy}{dt} \mp x.\,d(\frac{dy}{dt})$$

$$+ a.\,d(\frac{dy}{dt})$$

$$\pm\, a.d(\frac{dy}{dt})$$

$$0$$

Es wird nämlich im erſten Gliede zu erſt ein Faktor für unveränderlich angeſehen; dadurch erhält man das erſte Glied $y.\frac{dx}{dt}$;

ſo

PM bedeuten; nun iſt im Umfange der Bewegung Fig. 94 $y = 0$, $x = 0$, und die Geſchwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ nach der auf AF ſenkrechten Richtung $= c.\sin m$ wegen dem Winkel SAF$=m$, und wegen der anfänglichen Tangentialgeſchwindigkeit $=c$ nach der Richtung AS; nämlich es iſt im Anfange $0 + (a-0).c\sin m =$ Conſt.; folglich Conſt. $= ac\sin m$, und $y.\frac{dx}{dt}+(a-x).\frac{dy}{dt}=ac\sin m$, oder $ydx + ady - xdy = acdt.\sin m$.

Daraus folgt durch eine fernere Integration
$(a - x)y + 2 . \int ydx = act\sin m$,
allwo Conſt. $= 0$ iſt, weil für $t = 0$
auch x und $y = 0$ ſind; es iſt demnach
$t = \frac{\frac{1}{2}(a-x)y+\int ydx}{\frac{1}{2}ac\sin m}$; nun iſt aber $\frac{1}{2}(a - x)y$ $=$ PMF, und $\int ydx =$ PMAP, nämlich $\frac{1}{2}(a-x)y$ $+ \int ydx =$ AMFA; folglich iſt $t = \frac{\text{AMFA}}{\frac{1}{2}ac\sin m}$.

Aus der nämlichen Urſache iſt die Dauerzeit der Bewegung von A bis Q, wenn ſolche $= T$ geſetzet wird, T

ſodann wird dieſes Glied differenziret um $y.d(\frac{dx}{dt})+dx.\frac{dy}{dt}$ zu erhalten; dieſes Differenziale wird von dem vorgegebenen abgezogen, und ein Glied des Ueberreſtes z. B. $- dx . \frac{dy}{dt}$ wieder ſo integriret, als wenn $\frac{dy}{dt}$ unveränderlich wäre. Auf die nämliche Art findet man das darauffolgende Integrale. Auch das Integrale im 2ten Bande (637), ſo wie auch bey den zwey letzten Beyſpielen in (642) iſt auf dieſe Art ſehr leicht zu entwickeln.

Fig. 94 $T = \frac{AQFA}{\frac{1}{2}ac\sin m}$. Daraus folgt $t : T =$ AMFA : AQFA, nämlich **die Dauerzeiten, in welchen der Fahrſtrich bey was immer für einer Centralbewegung eines nämlichen Körpers verſchiedene Centralausſchnitte beſchreibet, verhalten ſich wie die Flächenräume dieſer Centralausſchnitte** (radius vector deſcribit areas temporibus proportionales). Dieſer Satz wird die **erſte Kepleriſche Regel** genennt, weil ſie zu erſt von Herrn Kepler aus Beobachtungen bey der Centralbewegung der Planeten um die Sonne abgeleitet wurde. Es folgt daraus, daß die freye Kreisbewegung gleichförmig ſeyn müſſe, welches mit (§. 196.) übereinſtimmet.

§. 218.

Es iſt der Flächenraum AMFA $= \frac{1}{2}\int z^2 d\phi$ vermög (645), weil in dieſem Falle für die Ordinaten aus einem Punkte der Halbmeſſer des Abſciſſenkreiſes $= 1$, und die zur Ordinate z gehörige Abſciſſe $= \phi$ iſt. Folglich iſt auch $t = \frac{\int z^2 d\phi}{ac\sin m}$; und daraus folgt $\frac{d\phi}{dt} = \frac{ac\sin m}{z^2}$; es iſt aber $\frac{d\phi}{dt}$ die Winkelgeſchwindigkeit des Fahrſtriches z bey der Lage FM; **folglich verhält ſich bey einer jeden Centralbewegung eines nämlichen Körpers die Winkelgeſchwindigkeit des Fahrſtiches in verſchiedenen Lagen deſſelben, wie umgekehrt das Quadrat der Entfernung des Körpers von dem Mittelpunkte der Centralkraft.**

§. 219.

Fig. 94

Man gedenke auf die Tangente MT eine Senkrechte FT $= u$, und aus dem Endpunkte m des Elementes Mm $=$ ds die Senkrechte mR auf FM, nämlich den Kreisbogen mR aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmeſſer Fm $= \mathfrak{z} - \mathrm{d}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$, ſo iſt Mm(d$s$: mR($\mathfrak{z}\mathrm{d}\varphi$ = FM($\mathfrak{z}$: FT(u, nämlich $u\mathrm{d}s = \mathfrak{z}^2\mathrm{d}\varphi$; es iſt aber vermög der vorigen Gleichung im (§. 218.) $\mathfrak{z}^2\mathrm{d}\varphi = ac\ \mathrm{d}t\,.\,\text{ſin}\,m$; folglich auch $u\mathrm{d}s = ac\mathrm{d}t.\text{ſin}\,m$, und $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{ac\,.\,\text{ſin}\,m}{u}$; nun iſt $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ = der Tangentialgeſchwindigkeit an der Stelle M $= \nu$; daher iſt auch $\nu = \frac{ac\,.\,\text{ſin}\,m}{u}$; **und folglich verhalten ſich bey einer jeden Centralbewegung eines nämlichen Körpers die Tangentialgeſchwindigkeiten deſſelben in verſchiedenen Punkten ſeiner Bahn wie umgekehrt die ſenkrechten Linien, welche aus dem Mittelpunkte der Centralkraft auf die Tangenten dieſer Punkte gezogen werden.** Dieſer Satz heißt die zweyte **Kepleriſche Regel**, weil ſie auch von Herrn **Kepler** aus Beobachtungen abgeleitet worden, ehe noch die Geſetze der Centralbewegung bekannt waren. Daraus folgt wieder, daß die freye Kreisbewegung gleichförmig ſeyn müſſe.

§. 220.

Es iſt $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$; daraus folgt $\mathrm{d}s\mathrm{dd}s = \mathrm{d}x\mathrm{dd}x + \mathrm{d}y\mathrm{dd}y$. In dieſer Gleichung ſetze man ſtatt dd$x$, und dd$y$ ihre Werthe aus den Gleichungen II und I in §. 217 $\mathrm{dd}x = \frac{2p(a - x)\mathrm{d}t^2}{\mathfrak{z}}$, und

dd$y$

Fig. 94 $ddy = -\frac{2py dt^2}{z}$, ſo iſt $\frac{ds dds}{dt^2} = \frac{2p(a-x)dx - 2py dy}{z}$,

oder $d(\frac{ds}{dt})^2 = (\frac{(a-x)dx - y dy}{z}) . 4p$.

Nun iſt $(a-x)^2 + y^2 = z^2$ wegen dem rechtwinklichten Dreyecke PMF; daraus folgt durch die Differenzirung $(a-x)dx - y dy = - z dz$; es iſt demnach auch $d(\frac{ds}{dt})^2 = - 4p dz$. Dieſe Gleichung integriret giebt $\frac{ds^2}{dt^2} = C - 4\int p dz$; oder weil $\frac{ds}{dt} = v =$ der Tangentialgeſchwindigkeit iſt, ſo iſt auch $v^2 = C - 4\int p dz$; **es iſt demnach die Tangentialgeſchwindigkeit bey einer jeden Centralbewegung eines nämlichen Körpers in verſchiedenen Entfernungen von dem Mittelpunkte der Centralkraft eben ſo groß als ſie in eben den Entfernungen ſeyn würde, wenn der nämliche Körper mit der nämlichen anfänglichen Geſchwindigkeit gerade gegen den Mittelpunkt der nämlichen Centralkraft wäre geworfen worden**, weil die Gleichung $v^2 = C - 4\int p dz$ auch in einem ſolchen Falle ſtatt findet, und Conſt. in beyden Fällen einerley Werth erhält.

§. 221.

Wenn die Centralkraft von der Entfernung ihres Mittelpunktes abhänget, nämlich wenn p eine Funktion von z iſt, ſo läßt ſich für die krumme Linie, welche der Körper bey der Centralbewegung beſchreibet, eine abgeſönderte Differenzialgleichung auf folgende Art ableiten.

In

In der vorigen Gleichung $\frac{ds^2}{dt^2} = C - 4\int p dz$ im §. 220 ſubſtituire man ſtatt ds^2 den Werth $ds^2 = dz^2 + z^2 d\phi^2$ wegen dem rechtwinklichten Dreyecke MmR, und ſtatt dt^2 den Werth $dt^2 = \frac{z^4 d\phi^2}{a^2 c^2 \sin^2 m}$ aus der Gleichung $\frac{d\phi}{dt} = \frac{ac \,.\, \sin m}{z^2}$ im §. 118., ſo iſt Fig. 94

$(dz^2 + z^2 d\phi^2) \,.\, \frac{a^2 c^2 \sin^2 m}{z^4 d\phi^2} = C - 4\int p dz$; daraus folgt die abgeſönderte Differenzialgleichung für die Bahn

$$d\phi = \frac{ac dz . \sin m}{z\sqrt{[z^2(C - 4\int p dz) - a^2 c^2 \sin^2 m]}}.$$

Wenn man in dieſer Gleichung ſtatt p den Werth durch z ausgedrückt ſetzet, und ſodann die Gleichung integriret, ſo kömmt die geſuchte krumme Linie zum Vorſchein, wo die Ordinaten z alle in dem Mittelpunkte der Centralkraft zuſammenſtoſſen. Aus der einmal gefundenen Gleichung für die Ordinaten aus einem Punkte iſt es ſodann ſehr leicht auch die Gleichung für ſenkrechte Ordinaten zu finden. Bey der Integration dieſer Gleichung für die Bahn muß vorläufig der Werth für C geſuchet werden, welcher ſich mittelſt der vorigen Gleichung im (§. 220.) $v^2 = C - 4\int p dz$ beſtimmen läßt. Die Gleichungen

I. $v^2 = C - 4\int p dz$

II. $d\phi = \frac{ac dz . \sin m}{z\sqrt{[z^2(C - 4\int p dz) - a^2 c^2 \sin^2 m}}$

III. $t = \frac{AMFA}{\frac{1}{2} ac \sin m}$

ſind die Fundamentalgleichungen, wodurch ſich die Centralbewegung vollkommen beſtimmen läßt, wenn die Beſchleunigung p der Centralkraft eine Funktion von der Entfernung z iſt. Mittelſt der Formel I findet man die

Fig. 94 Tangentialgeſchwindigkeit des Körpers; daraus läßt ſich ferner, weil ſodann C bekannt iſt, mittelſt der Formel II. die Gleichung für die Bahn ableiten. Iſt einmal dieſe gefunden, ſo läßt ſich mittelſt der Integralrechnung der Flächeninhalt AMFA berechnen, und daraus folgt auch die Zeit t mittelſt der Formel III.

§. 222.

In der Gleichung $v^2 = \mathrm{C} - 4\int p\,\mathrm{d}z$ ſetze man ſtatt v^2 den Werth $v^2 = \frac{a^2c^2\sin^2 m}{u^2}$ aus §. 219., ſo iſt $\frac{a^2c^2\sin^2 m}{u^2} = \mathrm{C} - 4\int p\,\mathrm{d}z$; daraus folgt durch die Differenzirung $\frac{a^2c^2\mathrm{d}u\sin^2 m}{u^3} = 2p\,\mathrm{d}z$; und endlich

$$p = \frac{a^2c^2\sin^2 m}{2u^3} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}.$$

Mittelſt dieſer Formel läßt ſich bey einer gegebenen krummen Linie die dazu erforderliche Beſchleunigung der Centralkraft beſtimmen, wenn man aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie den Werth für u und $\mathrm{d}u$ durch z und andere bekannte Gröſſen ausdrücket, und in der Formel ſubſtituiret; dadurch erhält man p als eine Funktion von z. Sodann ergiebt ſich durch eine bloſſe Vergleichung, wie ſich die Beſchleunigung der Centralkraft in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte verhalte. Dadurch findet man z. B. daß, wenn ein Körper eine Ellipſe beſchreiben ſollte, wo der Mittelpunkt der Centralkraft ſich in dem Mittelpunkte der Ellipſe befindet, die Beſchleunigungen der Centralkraft in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte ſich gerade ſo verhalten müſſen wie dieſe Entfernungen. Man kann bey dieſer Unterſuchung den Abſtand a in der angeführten Formel, der halben Achſe gleich ſetzen; ſodann iſt c = der Tangentialgeſchwindig-

keit

Fig. 94 keit in dem Scheitel der Ellipſe, und ſin $m = 1$ wegen $m = 90^\circ$, weil die Tangente in dem Scheitel der Ellipſe auf der Achſe ſenkrecht ſteht. Eben dadurch findet man, daß, wenn der Körper mittelſt einer Centralkraft eine Ellipſe, oder eine Hyperbel, oder auch eine Parabel beſchreibet, wo der Mittelpunkt der Centralkraft ſich in dem einen Brennpunkte befindet, die Beſchleunigungen der Centralkraft in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte ſich verhalten müſſen wie **umgekehrt die Quadrate** dieſer Entfernungen; und da iſt $a =$ dem Abſtande des Brennpunktes von dem einen Scheitel, $c =$ der Tangentialgeſchwindigkeit in dem Scheitel, und $m = 90^\circ$. Iſt die Bahn ein Kreis, und in deſſen Mittelpunkte die Centralkraft befindlich, ſo iſt $a =$ dem Halbmeſſer, ſin $m = 1$, uud $u = a$, $du = 0$ und auch $dz = 0$; folglich iſt $p = \frac{a^2c^2}{2a^3} \cdot \frac{0}{0} = \frac{c^2}{2a}$, weil in dieſem Falle wegen $u = z$ und $du = dz$ der Zähler des Bruches $\frac{0}{0}$ dem Nenner gleich, nämlich $\frac{0}{0} = 1$ iſt. Die Centralkraft möge demnach wie immer beſchaffen ſeyn, ſo iſt doch zur Beſchreibung eines Kreiſes nichts anderes nothwendig, als daß $m = 90$, und $p = \frac{c^2}{2a}$ ſey, ſo wie im (§. 197.)

§. 223.

Aus dem angeführten iſt es zu erſehen, daß bey der elliptiſchen, paraboliſchen, und hyperboliſchen freyen Centralbewegung, wenn der Mittelpunkt der Centralkraft ſich in dem Brennpunkte befindet, die Beſchleunigungen der Centralkraft in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte ſich verhalten, wie umgekehrt die Quadrate dieſer Entfernungen. Nun iſt vermög aſtronomiſchen Beobachtungen die Centralbewegung der Planeten

Fig. 94 um die Sonne eine freye elliptiſche Centralbewegung, wo der Mittelpunkt der Sonne ſich in dem einen Brennpunkte befindet. **Folglich verhalten ſich die Beſchleunigungen der Anziehungskraft der Sonne, nämlich der Sonnenſchwere,** welche nebſt einer bey der Erſchaffung erlangten Tangentialgeſchwindigkeit hinreichend iſt einen Planeten in ſeiner Bahn zu erhalten, **in verſchiedenen Entfernungen von dem Mittelpunkte der Sonne wie umgekehrt die Quadrate dieſer Entfernungen.** Eben ſo iſt es mit der Erdſchwere, weil vermög derſelben, und vermög einer bey der Erſchaffung erlangten Tangentialgeſchwindigkeit der Mond um die Erde in einer Ellipſe umläuft, wo der Mittelpunkt der Erde ſich in dem einen Brennpunkte befindet. Die Kometen bewegen ſich um die Sonne in beynahe paraboliſchen Bahnen; weil aber doch einige derſelben wieder zurück kommen, ſo müſſen ihre Bahnen ſehr excentriſche Ellipſen ſeyn, welche bey ihren Scheiteln von einer Parabel nicht merklich verſchieden ſind.

Anmerk. Das Begehren zu einer gegebenen krummen Linie die Eigenſchaft der dazu erforderlichen Centralkraft zu finden, heißt ſonſt die **gerade Aufgabe von Centralkräften,** die ſich vermög der angeführten Formel $p = \frac{a^2c^2\sin^2 m}{2u^3}\cdot\frac{du}{dz}$ durch die bloſſe Differenzialrechnung auflöſen läßt. Das Begehren aber aus der gegebenen Beſchaffenheit der Centralkraft die Gleichung für die krumme Linie zu finden, welche ein frey beweglicher Körper mittelſt der gegebenen Centralkraft beſchreibet, wird die **verkehrte Aufgabe von Centrafkräften** genennt; dieſe läßt ſich vermög den angeführten Fundamentalgleichungen im §. 221 mittelſt der Integralrechnung auflöſen, wenn die Beſchleunigung der Central-

kraft

kraft eine Funktion von der Entfernung iſt, wie es aus nachſtehendem Beyſpiele zu erſehen iſt. Fig. 94

§. 224.

Man ſetze, daß auf einen frey beweglichen Körper eine Centralkraft wirke, bey der die Beſchleunigungen in verſchiedenen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte ſich verhalten, wie umgekehrt die Quadrate dieſer Entfernungen, ſo läßt ſich mittelſt der Formeln im §. 221. ſeine Bewegung auf folgende Art beſtimmen.

Es ſey in irgend einem Punkte A der Bahn, wo der Fahrſtrich $AF = a$ auf der Tangente AS ſenkrecht ſteht, nach der Richtung AS die Tangentialgeſchwindigkeit $= c$, ſo iſt $SAF = m = 90°$, und $\sin m = 1$. Es ſey ferner in einer gewiſſen Entfernung $= f$ die Beſchleunigung der Centralkraft $= g$, nämlich eben ſo groß als die Beſchleunigung der Schwere an der Erdfläche, ſo iſt bey der feſtgeſetzten Beſchaffenheit der Centralkraft wegen $p : g = f^2 : \mathfrak{z}^2$, in der Entfernung $\mathfrak{z}$ die Beſchleunigung $p = f^2 g \mathfrak{z}^{-2}$. Die Fundamentalgleichungen zur Beſtimmung der Bewegung ſind demnach

1) $v^2 = C - 4f^2 g . \int \mathfrak{z}^{-2} d\mathfrak{z}$,

2) $d\phi = \dfrac{ac\, d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}\sqrt{[\mathfrak{z}^2(C - 4f^2 g . \int \mathfrak{z}^{-2} d\mathfrak{z}) - a^2 c^2]}}$,

3) $t = \dfrac{AMFA}{\frac{1}{2}ac}$ = der Dauerzeit von A bis M.

I. Aus der Gleichung 1) folgt $v^2 = C + \dfrac{4f^2 g}{\mathfrak{z}}$; nun iſt für $\mathfrak{z} = a$, die Tangentialgeſchwindigkeit $v = c$; folglich $C = \dfrac{ac^2 - 4f^2 g}{a}$. Es iſt demnach

Fig. 94 in dem Punkte M das Quadrat der Tangentialgeſchwindigkeit $v^2 = \frac{ac^2-4f^2g}{a} + \frac{4f^2g}{z}$.

II. Es iſt alſo auch $C-4f^2g.\int z^{-2}dz = \frac{ac^2-4f^2g}{a} + \frac{4f^2g}{z}$ Setzet man nun dieſen Werth in die Gleichung 2), und ſchaffet ſodann die veränderliche Grösſe z^2 inner den Klammern aus einem Gliede in das andere, ſo iſt

$$d\varphi = z^{-2}dz[a^{-2}-4a^{-3}c^{-2}f^2g+4a^{-2}c^{-2}f^2gz^{-1}-z^{-2}]^{-\frac{1}{2}};$$

dieſe Gleichung läßt ſich vermög (632) integriren, wenn man $z^{-1} = q^{-1}+2a^{-2}c^{-2}f^2g$ ſetzet; es iſt ſodann

$$d\varphi = q^{-2}dq[a^{-2}-4a^{-3}c^{-2}f^2g+4a^{-4}c^{-4}f^4g^2-q^{-2}]^{-}$$

$$= q^{-2}dq[(a^{-1}-2a^{-2}c^{-2}f^2g)^2-q^{-2}]^{-\frac{1}{2}};$$

und ferner, wenn man wieder die veränderliche Grösſe inner den Klammern aus einem Gliede in das andere ſchaffet,

$$d\varphi = \frac{a^2c^2}{ac^2-2f^2g} \cdot q^{-1}dq(q^2-\frac{a^4c^4}{(ac^2-2f^2g)^2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt vermög (621. V.)

$$\varphi = \text{arc cos}(\frac{a^2c^2}{q(ac^2-2f^2g)});$$ unt endlich,

wenn man aus der Gleichung $z^{-1} = q^{-1}+2a^{-2}c^{-2}f^2g$ ſtatt q den zugehörigen Werth $q = \frac{a^2c^2z}{a^2c^2-2f^2gz}$ wieder herſtellet, $\varphi = \text{arc cos}(\frac{a^2c^2-2f^3gz}{z(ac^2-2f^2g)}$, allwo Conſt. = 0 iſt, weil bey $\varphi = 0$ der Fahrſtrich $z = a$ iſt.

Vermög dieſer Gleichung iſt nun

$\cos\varphi = \frac{a^2c^2-2f^2gz}{z(ac^2-2f^2g)}$; und daraus folgt endlich die ge-

geſuchte Gleichung für die krumme Linie AM

$$z = \frac{a^2c^2}{2f^2g + (ac^2 - 2f^2g).\cos\varphi},$$

wo die Ordinaten z in dem Mittelpunkte der Centralkraft zuſammenlaufen. Eben ſo läßt ſich bey der feſtgeſetzten Eigenſchaft der Centralkraft mittelſt der Fundamentalgleichungen im §. 221. die Gleichung für die Ordinaten aus einem Punkte bey der krummen Linie AM ableiten, wenn der Fahrſtrich FA $= a$ an derjenigen Stelle der Bahn, wo die Tangentialgeſchwindigkeit $= c$ für bekannt angenommen wird, auch nicht auf der Tangente ſenkrecht ſteht, ſondern mit derſelben einen gegebenen Winkel FAS $= m$ einſchlieſſet.

III. Um nun eine Gleichung für ſenkrechte Ordinaten zu erhalten, ſchreibe man die gefundene Gleichung auf folgende Art $2f^2gz = a^2c^2 - (ac^2 - 2f^2g).z\cos\varphi$, und ſetze ſtatt z, und $z.\cos\varphi$, ihre Werthe $z = \surd[(a-x)^2 + y^2]$ und $z.\cos\varphi = a - x$ wegen dem rechtwinklichten Dreyecke FPM, ſo iſt

$$2f^2g.\surd[(a-x)^2 + y^2] = 2af^2g + ac^2x - 2f^2gx;$$

und daraus folget endlich, wenn man beyde Theile dieſer letzten Gleichung quadriret, die geſuchte Gleichung für ſenkrechte Ordinaten

$$y^2 = \frac{a^2c^2}{f^2g}.x + \frac{a^2c^2}{f^4g}(\frac{c^2}{4g} - \frac{f^2}{a}).x^2,$$

woraus es zu erſehen iſt, daß bey der angenommenen Beſchaffenheit der Centralkraft die krumlinigte Bahn AM eines frey beweglichen Körpers ein **Kegelſchnitt** ſeyn müſſe, nämlich entweder eine Ellipſe, oder eine **Parabel**, oder eine **Hyperbel**, oder endlich eine **Kreislinie**, wo AFB die Lage der Hauptachſe, und A der Scheitel der Kegelſchnittslinie iſt. Und zwar die Bahn iſt eine Ellipſe, wenn in dem Scheitel die der Tangentialgeſchwin-

Fig. 94 ſchwindigkeit zugehörige Höhe $\frac{c^2}{4g} < \frac{f^2}{a}$, nämlich wenn $\frac{c^2}{4g} - \frac{f^2}{a}$ negativ iſt; hingegen iſt die Bahn eine Parabel wenn $\frac{c^2}{4g} = \frac{f^2}{a}$ iſt, eine Hyperbel aber, wenn $\frac{c^2}{4g} > \frac{f^2}{a}$ iſt. Die Ellipſe verwandelt ſich endlich in einen Kreis, wenn $\frac{c^2}{4g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{a}$ iſt, weil alsdann die Beſchleunigung $\frac{f^2g}{a^2} = \frac{c^2}{2a}$ wird.

§. 225.

Wenn nun $\frac{c^2}{4g} < \frac{f^2}{a}$ iſt, ſo iſt die Gleichung für die Ellipſe

$$y^2 = \frac{a^2c^2}{f^2g} \cdot x - \frac{a^2c^2}{f^4g}\left(\frac{f^2}{a} - \frac{c^2}{4g}\right).x^2$$

woraus ſich verſchiedene Folgen ableiten laſſen, als

I. Um die Länge der Hauptachſe AB zu finden ſetze man $y = 0$, ſo iſt $x = \frac{4af^2g}{4f^2g - ac^2} =$ AB; und folglich iſt die halbe Hauptachſe AC, die man mit A bezeichnen kann, $A = \frac{2af^2g}{4f^2g - ac^2}$.

II. Man ſetze $x =$ AC $= \frac{2af^2g}{4f^2g - ac^2}$ in der angeführten Gleichung, ſo iſt die halbe Nebenachſe $y = \frac{ac\sqrt{a}}{\sqrt{(4f^2g - ac^2)}}$; wenn man daher die halbe Nebenachſe CD mit B bezeichnet, ſo iſt $B = \frac{ac\sqrt{a}}{\sqrt{(4f^2g - ac^2)}}$.

III.

III. Ferner iſt FB = AB — AF Fig. 94

$$= \frac{4af^2g}{4f^2g - ac^2} - a = \frac{a^2c^2}{4f^2g - ac^2} = \frac{a^3c^2}{4f^2g - ac^2} \cdot \frac{1}{a}$$

$= \frac{CD^2}{AF}$, und folglich FB : CD = CD : AF. **Es iſt demnach vermög (535) der Mittelpunkt der Centralkraft F ein Brennpunkt der Ellipſe;** und zwar F iſt der von A weiter entfernte Brennpunkt, wenn $\frac{4af^2g}{4f^2g - ac^2} - a < a$, nämlich wenn die der Tangentialgeſchwindigkeit in A zugehörige Höhe $\frac{c^2}{4g} < \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{a}$ iſt; wenn hingegen $\frac{c^2}{4g} > \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{a}$, aber dabey doch $\frac{c^2}{4g} < \frac{f^2}{a}$ iſt, ſo iſt der Mittelpunkt der Centralkraft in dem bey A anliegenden Brennpunkte. Eben ſo findet man, daß auch bey der paraboliſchen und hyperboliſchen Centralbewegung eines Körpers, wenn eine Centralkraft von der angenommenen Eigenſchaft auf denſelben wirket, der Mittelpunkt der Centralkraft ſich in dem Brennpunkte befinden müſſe.

§. 226.

Nun iſt es leicht auch die Umlaufszeit bey der elliptiſchen Centralbewegung zu finden; es iſt die ganze Umlaufszeit T = **der ganzen elliptiſchen Fläche getheilet durch** $\frac{1}{2}ac$ vermög der Formel 3) im §. 224, nämlich $T = \frac{AB.\pi}{\frac{1}{2}ac}$, oder wenn man ſtatt B aus §. 225. II. den Werth $B = \frac{ac\sqrt{a}}{\sqrt{(4f^2g - ac^2)}}$ ſetzet, ſo iſt $T^2 = \frac{4aA^2\pi^2}{4f^2g - ac^2}$; und endlich wenn man mittelſt der

Fig. 94 Gleichung §. 225. I. die Gröſſe c wegſchaffet, nämlich ſtatt $4f^2g - ac^2$ den gleichen Werth $\frac{2af^2g}{A}$ ſetzet, iſt $T^2 = \frac{2\pi^2A^3}{f^2g}$.

Eben ſo iſt bey der nämlichen Centralkraft in einer anderen Ellipſe, wenn ihre halbe Hauptachſe CA, oder FD, nämlich der mittlere Abſtand des Körpers vom Mittelpunkte der Centralkraft $= \alpha$, und die Umlaufszeit $= \tau$ geſetzet wird, $\tau^2 = \frac{2\pi^2\alpha^3}{f^2g}$.

Folglich iſt auch $T^2 : \tau^2 = A^3 : \alpha^3$; nämlich auch bey der elliptiſchen Centralbewegung ſind die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln der mittleren Entfernungen der umlaufenden Körper von dem Mittelpunkte der Centralkraft proportional, wenn die Centralkraft die angeführte Eigenſchaft hat. Dieſer Satz, weil ſolchen Herr **Kepler** der erſte bey dem elliptiſchen Umlaufe der Planeten um die Sonne aus Beobachtungen abgeleitet hat, heißt die dritte **Kepleriſche Regel**.

§. 227.

Aus der Gleichung $T^2 = \frac{2\pi^2A^3}{f^2g}$, folgt auch $f = \frac{\pi A\sqrt{2A}}{T\sqrt{g}}$ eine Formel, wodurch ſich aus der Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne, und aus ſeiner mittleren Entfernung vom Mittelpunkte derſelben diejenige Entfernung berechnen läßt, wo die Beſchleunigung der Sonnenſchwere eben ſo groß iſt, als die Beſchleunigung der Erdſchwere an der Erdoberfläche; daraus läßt ſich ferner die Beſchleunigung der Sonnenſchwere in jeder be-

beliebigen Entfernung $\mathfrak{z}$ von ihrem Mittelpunkte mittelſt obiger Formel $p = \frac{f^2 g}{\mathfrak{z}^2}$ ableiten. Fig. 94

§. 228.

Der Ort A eines Planeten in ſeiner Bahn, wo er von der Sonne am weiteſten entfernet iſt, heißt die **Sonnenferne** (Aphelium), der entgegengeſetzte Ort B aber die **Sonnennähe** (Perihelium).

Die Beſchleunigung der Centralkraft iſt bey der Sonnenferne am Kleinſten, und bey der Sonnennähe am Größten; und doch nähert ſich von der Sonnenferne A angefangen der bewegte Körper dem Mittelpunkte der Centralkraft; von der Sonnennähe B aber entfernet ſich derſelbe von dem nämlichen Mittelpunkte F, welches auch ſo ſeyn muß, weil in A die Beſchleunigung $p > \frac{c^2}{2\mathrm{AF}}$, hingegen in B die Beſchleunigung $P < \frac{C^2}{2\mathrm{BF}}$ iſt, wenn C die Tangentialgeſchwindigkeit in B bedeutet. Denn es iſt in A die Beſchleunigung $p = \frac{f^2 g}{a^2}$, und das Quadrat der Tangentialgeſchwindigkeit vermög der Gleichung im §. 225. I. wenn man c^2 daraus ſuchet, $c^2 = \frac{2f^2 g(2A - a)}{Aa}$; es iſt alſo $\frac{c^2}{2a} = \frac{f^2 g}{a^2} - \frac{f^2 g}{a^2}\left(\frac{a - A}{A}\right)$, nämlich $\frac{c^2}{2\mathrm{AF}} = p - p . \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}} < p$. Ferner iſt in B die Beſchleunigung $P = \frac{f^2 g}{(2A - a)^2}$ wegen $\mathrm{FB} = \mathrm{AB} - \mathrm{FA} = 2A - a$, und vermög (§. 219.) das Quadrat der Tangentialgeſchwindigkeit $C^2 = c^2 . \frac{\mathrm{FA}^2}{\mathrm{FB}^2} = \frac{2f^2 g(2A-a)}{Aa} . \frac{a^2}{(2A-a)^2} = \frac{2af^2 g}{A(2A-a)}$, wel-

Fig. 94 welches man auch vermög der Fundamentalformel (§. 224. I.) $v^2 = \frac{ac^2 - 4f^2g}{a} + \frac{4f^2g}{z}$ finden kann; und folglich iſt $\frac{C^2}{2(2A - a)} = \frac{f^2g}{(2A - a)^2} \cdot \frac{a}{A}$, nämlich $\frac{C^2}{2BF} = P \cdot \frac{FA}{CA} > P$. Damit der umlaufende Körper von B angerechnet ſeine Entfernung von dem Mittelpunkte der Centralkraft nicht veränderte, müßte $P = \frac{C^2}{2BF}$ ſeyn vermög (§. 197); und damit er ſich dieſem Punkte F, von B angerechnet nähern könnte, müßte $P > \frac{C^2}{2BF}$, oder $\frac{C^2}{2BF} < P$ ſeyn.

§. 229.

Der Winkelabſtand eines Planeten in dem Punkte M ſeiner Bahn von der Sonnenferne A, nämlich der Winkel MFA heißt ſeine **wahre Anomalie** (Ausweichung) zum Unterſchiede der **mittleren Anomalie**, welche der Winkelabſtand des Planeten von dem feſtgeſetzten Punkte A iſt, wenn ſeine Umlaufsbewegung um den Punkt F eine gleichförmige Kreisbewegung wäre.

Aus der wahren Anomalie $= \varphi$ iſt die mittlere $= \psi$ leicht zu finden; denn aus der ganzen elliptiſchen Fläche, aus der Fläche AFMA (welche ſich bey einer gegebenen Ellipſe, aus dem Winkel AFM $= \varphi$ als der wahren Anomalie ergiebt) und aus der bekannten Umlaufszeit $= T$ läßt ſich die Zeit $= t$ von A bis M berechnen vermög (§. 217), woraus nun ferner der geſuchte Winkel $= \psi$ als die mittlere Anomalie bey der gleichförmigen Kreisbewegungen durch eine einzige Proportion ſich ableiten läßt $T : t = 360^\circ : \psi$

nämlich $\psi = \frac{360t}{T}$. Die Fläche AFMA, wenn ſolche bey Fig. 94 einer gegebenen Ellipſe mit R bezeichnet wird, wo die halbe Hauptachſe AC $= A$, die halbe Nebenachſe CD $= B$, die Excentricität CF $= \frac{1}{2}(\mathrm{FA} - \mathrm{FB}) = E$, und der Winkel MAF $= \phi$ iſt, findet man durch eine leichte Rechnung

$$R = \tfrac{1}{2}BE \,.\, \frac{B\sin\phi}{A - E\cos\phi} + \tfrac{1}{2}AB \,.\, \operatorname{arcſin} \frac{B\sin\phi}{A - E\cos\phi}$$

Nicht ſo leicht iſt es aus der bekannten mittleren Anomalie die wahre zu finden. Dieſe Aufgabe heißt die **Kepleriſche Aufgabe**, weil ſelbe zu erſt von dem berühmten Hrn. **Kepler** den Meßkünſtlern zum Auflöſen vorgelegt wurde. Bey der Auflöſung dieſer Aufgabe kömmt es darauf an, daß man bey einer gegebenen Ellipſe aus der gegebenen Fläche AFMA den Winkel MFA beſtimme; denn aus der gegebenen mittleren Anomalie, und aus der bekannten Umlaufszeit ergiebt ſich vermög obiger Proportion die Dauerzeit von A bis M; daraus folgt ferner vermög (§. 217.) aus der ganzen Umlaufszeit bey der gegebenen Ellipſe, aus der nun bekannten Dauerzeit von A bis M, und aus der ganzen elliptiſchen Fläche der Centralausſchnitt MAFM.

Und nun iſt in der angeführten Gleichung

$$\tfrac{1}{2}BE \,.\, \frac{B\sin\phi}{A - E\cos\phi} + \tfrac{1}{2}AB \,.\, \operatorname{arcſin} \frac{B\sin\phi}{A - E\cos\phi} = R$$

auſſer dem geſuchten Winkel ϕ alles bekannt. Die Kepleriſche Aufgabe würde daher aufgelöſet ſeyn, wenn man aus dieſer Gleichung, ϕ entwickeln könnte, welches aber unmittelbar nicht angeht.

Um ϕ im erforderlichen Falle zu berechnen, kann man der angeführten Gleichung folgende Geſtalt geben

Fig. 94 $$\frac{B\sin\phi}{A-E\cos\phi} - \sin\text{arc}\left(\frac{2R}{AB} - \frac{E}{A}.\frac{B\sin\phi}{A-E\cos\phi}\right) = 0;$$

ſodann muß man durch wiederhohltes Verſuchen einen ſolchen Werth (einen Decimalbruch) für $\frac{B\sin\phi}{A-E\cos\phi}$ ausfindig zu machen trachten, daß dieſe Gleichung ohne merklichen Fehler = 0 wird; bey dem elliptiſchen Umlaufe der Planeten um die Sonne iſt dieſer Werth gemeiniglich entweder etwas weniges gröſſer oder etwas weniges kleiner als der Sinus der gegebenen mittleren Anomalie, weil da die Excentricität E in Rückſicht A ſehr klein, und folglich beynahe $A = B$ iſt. Iſt nun dieſer Decimalbruch $= n$, nämlich $\frac{B\sin\phi}{A-E\cos\phi} = n$, ſo folgt daraus

$$\sin\phi + \frac{nE}{B}.\cos\phi = \frac{nA}{B},$$

und endlich wenn $\frac{nE}{B} = \text{tang}\, m$ geſetzet wird,

$$\sin(\phi + m) = \frac{A}{E}.\sin m.$$

§. 230.

Bey der freyen Bewegung geworfener Körper an der Erdfläche, wo der Widerſtand der Luft auſſer Acht gelaſſen wird, iſt die der Tangentialgeſchwindigkeit in dem Scheitelpunkte der Bahn zugehörige Höhe gewiß jederzeit kleiner als $\frac{1}{2}\frac{f^2}{a}$, oder $\frac{1}{2}a$, wo a den Halbmeſſer der Erdkugel bedeutet; derowegen iſt im ſtrengen Verſtande die Bahn keine Parabel, ſondern eine Ellipſe, wo der entferntere Brennpunkt ſich in dem Mittelpunkte der Erde befindet. Eine ſolche Ellipſe aber hat eine ſo groſſe Excentricität, daß man denjenigen Bogen, Fig. 94 der ſich ober der Erdfläche befindet, ohne merklichen Fehler für eine Parabel anſehen kann.

Anmerk. Wenn bey dem elliptiſchen Umlaufe, wo die Centralkraft im Brennpunkte ſich befindet, die Tangentialgeſchwindigkeit in irgend einem Punkte der Bahn z. B. in A **plötzlich** getilget würde, ſo müßte ſodann der frey bewegliche Körper mit einer mehr als gleichförmig beſchleunigten Bewegung in geradlinigter Richtung AB gegen den Mittelpunkt der Centralkraft ſich hinbewegen.

Wenn der Körper in der Zeit t von A bis C kömmt, nämlich AC $= s = a - z$ zurückleget, wo FC $= z$ iſt, und daſelbſt die Geſchwindigkeit $= v$ erlanget, ſo iſt $v^2 = C - 4f^2g.\int z^{-2}dz$, nämlich

$$v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}}(a - z)^{\frac{1}{2}}.$$ Ferner iſt

$$dt = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2fg^{\frac{1}{2}}}.z^{\frac{1}{2}}dz(a-z)^{-\frac{1}{2}};$$

daraus folgt vermög (625 u. 621. VIII.)

$$t = \frac{a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}}{2fg^{\frac{1}{2}}}(a-z)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}}{4fg^{\frac{1}{2}}}.[\tfrac{1}{2}\pi + \text{arcſin}(1 - \frac{2z}{a})].$$

Für $z = 0$ iſt $t = \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{8fg^{\frac{1}{2}}}$, und $v = \infty$ **unendlich groß**; ſetzet man z negativ, ſo iſt v und t **unmöglich**; derowegen kann der Körper über F gegen B nicht hinausgehen, ob er ſchon bey dem Anlangen in F nach der Richtung FB eine unendlich groſſe Geſchwindigkeit erlanget. Was hat es nun mit der ferneren Bewegung des Körpers für eine Beſchaffenheit?

H.

Fig. 94 H. L. Euler (ſcientia motus Tom. I. pag. 268 §. 655.) ſagt, daß der Körper von F bis A wieder zurückkehre, und ſodann wieder von A gegen F ſich bewege, ſo daß er eine unendlich ſchmale Ellipſe AF, deren Brennpunkte mit den Scheiteln einerley ſind, unaufhörlich beſchreibe. Allein dieſes kann nicht richtig ſeyn, ſondern der Körper verbleibet in dem Punkte F gänzlich ohne Bewegung; denn vermög der in F erlangten Geſchwindigkeit, welche ein unendlich Groſſes von der Ordnung $\frac{1}{2}$ iſt, hätte zwar der Körper die Fähigkeit nach der Richtung FB weiter zu gehen; allein weil die Kraft daſelbſt auch unendlich groß iſt, und zwar ein unendlich Groſſes der zweyten Ordnung, ſo wird durch eben dieſe Kraft, ſobald ſich der Körper auch nur um ein unendlich Kleines über F gegen B entfernete, demſelben vermög der Formel $v^2 = \frac{4gPs}{M}$ (§. 50.) nach der entgegengeſetzten Richtung eine unendlich groſſe Geſchwindigkeit von der Ordnung $\frac{1}{2}$ ertheilet, und folglich die vorige unendlich groſſe Geſchwindigkeit von der nämlichen Ordnung gänzlich getilget. Dieſer ſcheinbare Widerſpruch, **die Geſchwindigkeit in dem Mittelpunkte der Centralkraft bey der angenommenen Eigenſchaft, iſt $=\infty$, und auch** $= 0$, wird ſich ſchwer ohne Beyhilfe der Lehre von dem mathematiſchen unendlich Groſſen und unendlich Kleinen heben laſſen.

Ende.

Verbeſſerung einiger Druckfehler.

Seite	Zeile	Anſtatt	Soll ſeyn
8	10	$(3R^2)$	$(3R)^2$
53	10	$a+b+f$	$a+b+p$
64	8	CEGD	CFGD
74	15	$2(m-n)s]$	$2(m-n)]s$
80	20	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{k+1}$
148	tang85°55'	13,01	14,01
151	D, Z. 152	132	182
159	1	$15''$	$30'''$
172	1	$\frac{c}{q}$	$\frac{c}{b}$

Vollſtändiges Verzeichniß

Der in meinen Logarithmen Tafeln befindlichen Fehler, wovon einige in dem Buche ſelbſt, einige im 2ten Bande der Mathem., und einige endlich in einer beſondern Beylage angezeiget ſind.

Seite.	Zeile.	Spalte	Anſtatt	Muß ſeyn.
VIII	33	..	dem	den
IX	7	..	ſchell	ſchnell
XI	18	..	dem	den
XXV	5	..	enthalten	erhalten
XXIX	6	..	nach	noch
XL	15	..	$\frac{n}{n+\frac{1}{2}d}$	$\frac{d}{n+\frac{1}{2}d}$
XLV	16	..	Secungen	Secunden
XLVI	3	..	26''	20''
XLVII	28	..	dis	bis
LVIII	12	..	42763,2	427673,2
LXVI	9	..	374	372
3	15	N	464	364
15	14	N	1493	1463
48	..	..	L. 291	L.491
51	3281	6	9856	0856
59	..	..	N. 20500	N 36500
61	3766	3	9141	9149
64	3905	0	6220	6210
97	5589	4	2652	3652
102	5836	5	..	1525
107	6034	4	2177	2178
114	6444	5	1992	1892
135	7470	3	3480	3380
143	7858	3	8286	3286
172	9344	8	5600	5700
176	9501	6	9767	7967
185	9986	4	5090	4090
186	10036	0	5606	5607
—	10039	0	6904	6905
372	17	4	2214	2244
374	30	26	21880	21080
—	39	23	37770	37700
391	3. 4	..	$\int ax^{-1}$	$\int ax^{-1}dx$
396	2	..	(x^2-c^2)	(x^2+c^2)
409	21	7	49	48
—	23	7	59	52
413	20	..	1109,86	1109,66

Seite.		Fehler bey	Stel der Zifer	anſtat	Muß ſeyn.
224	Logarith.	tang 1°. 18'. 50''	1	3	8
254		Sin. 5. 14. 30	4	9	0
266		Cot. 9 55.	6	..	3
290		tang. 28 21	8	0	4
321	Tang.	13°. 51'	4	9	6
330		34. 23	4	5	4
353		86. 30	8	6	5
354		89. 56	7.8	28	30
359	Potenzen.	$(22)^8$	10	5	3
—		$(22)^9$	10.12	823	779
—		$(26)^9$	10.11	94	89
—		$(33)^9$	11.13	217	195
361		$(58)^8$	12	9	8
—		$(58)^9$	11.13	702	644
—		$(76)^8$	13	5	4
—		$(76)^9$	12.14	654	578
—		$(86)^9$	9	9	7
—		$(96)^9$	13	5	4
370		$\sqrt[3]{2}$	7.8	05	10
371		31 Sec.	5	0	6

Ferner Seite XVI. bey Log. 7 die 8te bis 10te Dec. Zifer ſtatt 372 muß ſeyn 491; Seite LX. Zeile 33 anſtatt Log. Sin. a – Log. Sin. A muß ſeyn Log. Sin. A – Log. Sin. a. Seite 26 Diff. 216. bey 2, anſtatt 42 muß ſeyn 43. Seite 307 bey Log. Cos. 40°. 57'. und 58' ſind die erſten 3 Zifern aus ihrer Stelle verrückt. Bey Diff. 1''. von Log. Tang. 0°. 16'. 20''. Log. Sin. 1°, 20'. 40''. Log. Sin. 0°, 50'. 50''. Log. Tang. 0°. 58'. 40''. Log. Sin. 1°. 1'. 20''. und bey Tang. 86°. 30'. iſt das (,) verſetzt. Seite 397. Zeile 8. im Zähler muß $(p - 3)$ wegbleiben. Seite 405. die Länge der Sternwarte von Berlin, anſtatt 31°. 0'. 0''. muß ſeyn 31°. 2'. 30''. Seite 406. nach der neueſten Beſtimmung der Sternwarte von Prag. Länge = 32°. 10'. 30''. und Breite = 50°. 5'. 46''. Seite 416 Trieſt und Wien anſtatt 11672 muß ſeyn 11647. Seite 417. England und London anſtatt 135,0 muß ſeyn 135,12.

Beylage

zum

dritten Bande

der

Vorleſungen

über die

Mathematik

des

Georg Vega.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1790.

Vorbericht.

Als ich in den erſten Monathen des 1788$^{\text{ten.}}$ Jahres die zwey letzten Vorleſungen des dritten Bandes bearbeitete, und dabey die Herausgabe dieſes nämlichen Bandes beſorgte, hatte ich nicht mehr Muſſe genug einige Gegenſtände mit der gehörigen Vollſtändigkeit zu bearbeiten, weil ich mich zugleich zum Ausmarſche in den Feldzug gegen die Türken in Bereitſchaft zu ſetzen hatte. Um nun dieſem Theile der angewandten Mathematik mehr Vollkommenheit zu verſchaffen be-

benützte ich einige müſſige Stunden in den Feldzügen, wo ich zu mathematiſchen Unterſuchungen aufgelegt war. Auf dieſe Art entſtand gegenwärtige Beylage, welche ich hiemit den geneigten Leſern überliefere.

Dergleichen Unterſuchungen führten mich auch auf eine merkwürdige Entdeckung, wodurch man im Stande iſt, die im §. 171. vorgetragene Aufgabe (**aus den gegebenen Umlaufszeiten oder gleichzeitigen Umlaufszahlen des erſten und letzten Rades eines anzuordnenden Räderwerkes die Anordnung deſſelben zu berechnen**) bloß durch gemeine Getriebe und Stirnräder, deren keines über 100 Zähne enthält **vollkommen** genau aufzulöſen, wenn die gegebenen Umlaufszahlen auch **wie immer groſſe Primzahlen** ſeyn ſollten, welches bisher für unmöglich gehalten wurde. Z. B. man hielt bisher für unmöglich mittelſt eines Getriebes an der Welle des Minutenrades, welches in 1 Stunde einmal herumkömmt, ein Räderwerk dergeſtalt **ununterbrochen** zu bewegen, daß das letzte Rad in 1009

Stun-

Stunden vollkommen genau einmal herumkömmt, weil 1009 eine Primzahl iſt, die ſich folglich in keine Faktoren zerlegen läßt, und welche dabey ſo viele Einheiten enthält, daß ſich in ein Rad eines Uhrwerkes nicht ſo viele Zähne einſchneiden laſſen. Ich bin im Stande dieſe Umlaufszeit von 1009 Stunden bloß durch drey Getriebe und drey Stirnräder mittelſt einer ununterbrochenen Bewegung des Räderwerkes im mathematiſchen Verſtande genau auszuführen; und was am ſonderbareſten iſt, und Kennern am meiſten parador, ja vielen gänzlich unmöglich ſcheinen wird (wodurch man, wenn es unter Mathematikern üblich wäre, anſehnliche Wetten gewinnen könnte) ſo verhalten ſich die Getriebe zu den ergriffenen Rädern wie 1, 1, 1 zu 8, 9, 14, oder welches einerley iſt wie 8, 9, 10 zu 84, 90, 96. Eben ſo läßt ſich der ſynodiſche Monath = 29 Tagen 12 Stunden 44 Minuten 3 Sekunden, ſo wie jede andere gegebene Umlaufszeit, vom Stundenrade oder vom Tagrade oder von jedem anderen beliebigen Rade eines Uhrwerkes, durch eine ununterbrochene Bewegung des Räderwerkes vollkommen

men genau ausführen, woraus auch ſchon Kenner die Brauchbarkeit dieſer Entdeckung erſehen, um ſo mehr da man dadurch auch in den Stand geſetzet wird, die gemeinen Stockuhren mit Schlagwerken zu der nämlichen Vollkommenheit zu bringen, die ſonſt bey aſtronomiſchen Pendeluhren ſtatt findet. Ich bin willens mit der Zeit, wenn ich wieder Gelegenheit haben werde mathematiſche Ausarbeitungen auf mich zu nehmen, dieſe Entdeckung öffentlich bekannt zu machen, wo indeſſen die Liebhaber mathematiſch-mechaniſcher Wiſſenſchaften ihre eigenen Kräfte prüfen können.

In der Kantonirung zu Leipnick in Mähren
am 10ten Julii 1790.

Georg Vega,
Hauptm. und Profeſſor der Math.
beym Bombardierkorps Sr. K.
Apoſt. Majeſtät.

Einige Zuſätze und Verbeſſerungen

im dritten Bande

meiner Vorleſungen über die Mathematik.

I.

Auf der 176ten Seite am Schluſſe der fünften Vorleſung, und auch in meiner **praktiſchen Anweiſung zum Bombenwerfen mittelſt dazu eingerichteter Hilfstafeln Wien bey Johann Thom. von Trattnern** 1787 am Ende dieſes Werkchens, kann man noch folgendes hinzuſetzen.

Aus der angeführten Gleichung $\tan n =$ u. ſ. w. folgt auch

$$b = \frac{p(2c\,\mathrm{tg}\,n-p)+p\sqrt{[(2c\,\mathrm{tg}\,n-p)^2+2(p-q\,\mathrm{tg}\,n).2c\,\mathrm{tg}\,n]}}{2(p-q\,\mathrm{tg}\,n)}$$

und folglich auch für die Ausübung hinlänglich genau

$$b = \frac{p(2c\,\mathrm{tang}\,n -- p)}{p - q\,\mathrm{tang}\,n} + \tfrac{1}{2}p,$$

eine Formel, wodurch man bey einer anzulegenden Ricoſchettbatterie

1) aus dem angenommenen Richtwinkel $= n$ von der Vertikallinie,

2) aus der Erhöhung $= c$ der oberſten Kante der vorliegenden Bruſtwehre über den Horizont des Kanonenrohres der anzulegenden Ricoſchettbatterie,

3) aus dem Abſtande $= p$ desjenigen Punktes auf dem Wallgange von der inneren Seite der Bruſtwehre, wo die Kugel zum erſtenmale aufſchlagen ſoll,

4) aus der Vertiefung $= q$ dieſes Punktes unter der höchſten Kante der Bruſtwehre, die Entfernung $= b$ von eben dieſer Bruſtwehre berechnen kann, wo die Ricoſchettbatterie anzulegen iſt, damit die verlangte Abſicht erreichet werden könne, vorausgeſetzt, daß der Widerſtand der Luft auf die ziemlich langſame Bewegung der Ricoſchettkugeln keinen beträchtlichen Einfluß habe. Weiter zurück von der Feſtung kann man immer die Ricoſchettbatterie anlegen, aber näher nicht als die angeführte Gleichung zeiget; ſonſt iſt es unmöglich bey dem angenommenen, und folglich auch bey jedem gröſſeren Richtwinkel von der Vertikallinie die verlangte Abſicht zu erreichen, ſo wie ſolches auch unmöglich iſt, wenn $p = q\,\mathrm{tang}\,n$, oder gar $p < q\,\mathrm{tang}\,n$ angenommen wird.

Z. B. Es wird verlangt, daß man einen mit Traverſen verſehenen Wallgang dergeſtalt ricoſchettiren ſolle, daß die Kugeln hinter den Traverſen, deren jeder 1 Klafter hoch iſt, in einer Entfernung von 5 Klaftern aufſchlagen; es iſt daher $p = 5$ und $q = 1$. Daraus ergiebt ſich nun, daß der **Erhöhungswinkel gröſſer ſeyn müſſe als 11° 18'**; es ſey daher der Erhöhungswinkel $= 14°$, ſo iſt $n = 76°$, und folglich ſehr nahe $\mathrm{tang}\,n = 4$. Es iſt demnach für die Erhöhung $= c$ der oberſten Kante der Traverſen über den Horizont derjenigen Gegend, wo die Ricoſchettbatterie anzulegen iſt, die geſuchte **kleinſte Entfernung** der anzulegenden Ricoſchettbatterie von dem erſten Traverſe $b = 40c - 22$ Klafter.

Wenn z. B. die Erhöhung $c = 15$ Klafter beträgt, ſo iſt $b = 578$ Klafter; in einem ſolchen Falle darf man daher mit der Ricoſchettbatterie nicht näher gegen die Feſtung rücken als bis 578 Klafter, und dabey keinen kleineren Erhöhungswinkel gebrauchen als 14 Grad, ſonſt iſt es nicht möglich die verlangte Abſicht zu erreichen, ausgenommen man wollte einen beträchtlich größeren Erhöhungswinkel annehmen als 14˘; in der Entfernung von 300 Klaftern müßte der Erhöhungswinkel wenigſtens $= 16\frac{1}{2}$ Grad ſeyn. Sollte man aber bey ſolchen Umſtänden ſich nicht getrauen wirkſam ricoſchettiren zu können, ſo iſt es vortheilhafter den nämlichen Traverſirten Wallgang mit Bomben zu beunruhigen, wo man in Rückſicht der Entfernung nicht ſo eingeſchränket iſt, ſondern die Bombenbatterie ſo nahe an der Feſtung anlegen kann, daß die aus der Feſtung zurückgeſprungenen Stücke von den eigenen Bomben bey den Ohren vorbey ſauſen.

Wenn man aus obiger Gleichung den Werth für p herausſuchet, ſo findet man auch die Länge des gänzlich unbeſtrichenen Raumes hinter den Traverſen. Man kann auch q daraus ſuchen um die erforderliche Höhe für die Traverſen zu erhalten, damit man hinlänglich gedeckt ſey.

II.

Seite 289 anſtatt (dieſe gefundene Differenzialgleichung für u. ſ. w. bis zu Ende des laufenden 146ten §.) ſoll folgendes geſetzet werden.

Dieſe gefundene Differenzialgleichung läßt ſich abkürzen, wenn man im zweyten Theile rechter Hand den Zähler und Nenner mit dem Zähler dividiret, und darauf die Quadratwurzel wirklich heraus zieht: es iſt nämlich ſodann

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{c\mathrm{d}x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{c-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und folglich auch

$$\frac{c(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = c\mathrm{d}x;$$

daraus folgt durch die Integration

$$c(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 = cx,$$

allwo Conſt. $= 0$ iſt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ angenommen wird.

Um nun aus dieſer Gleichung y zu finden, ordne man ſie folgender Geſtalt

$$(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}} - 2c(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = -2cx,$$

und ergänze das Quadrat,

$$(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}} - 2c(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + c^2 = c^2 - 2cx,$$

ſo iſt ſodann auch

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = c \pm \sqrt{(c^2-2cx)},$$

und folglich auch

$$x^2+y^2 = [c\pm\sqrt{(c^2-2cx)}]^2;$$

und daraus folgt endlich

$$y^2 = [c-\sqrt{(c^2-2cx)}]^2-x^2$$

die geſuchte Gleichung für die Gleichgewichtslinie, allwo bey der Wurzelgröſſe das Zeichen — aus der Urſache beybehalten wird, damit für $x = 0$ auch $y = 0$ werde.

Mittelſt dieſer Gleichung läßt ſich nun die krumme Linie in einem erforderlichen praktiſchen Falle leicht verzeichnen, wenn man zu mehreren angenommenen Abſciſſen die zugehörigen Ordinaten nach der angeführten Formel berechnet.

net. Noch leichter iſt die Rechnung, wenn man in der obigen Differenzialgleichung den für x^2+y^2 angenommenen abgekürzten Ausdruck z^2 beybehält, und auch für $xdx+ydy$ den gleichen Werth zdz ſetzet; es iſt ſodann

$$\frac{dz}{cdx} = \left(\frac{c^2+2cz^2-z^2}{c^4-4c^2z^2+4cz^3-z^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{c^2-2cz+z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c-z},$$

nämlich $cdz - zdz = cdx$;

folglich auch $cz - \frac{1}{2}z^2 = cx$,

und endlich $z = c - c^{\frac{1}{2}}.(c-2x)^{\frac{1}{2}}$;

und nun iſt es ſehr leicht für jede angenommene Abſciſſe x die zugehörige Hypothenuſe z zu berechnen, und ſodann die geſuchte krumme Linie zu zeichnen.

Dieſe geſundene krumme Linie muß eigentlich der Schwerpunkt des Gegengewichtes beſchreiben; die andere krumme Linie, (eigentlich die krumme Fläche) auf welcher die Oberfläche des Gegengewichtes ſich fortbeweget, muß zu der gefundenen Gleichgewichtslinie in der Entfernung des Halbmeſſers des Gegengewichtes parallel gezeichnet werden.

III.

Im §. 216. auf der 492ten Seite bey der Unterſuchung über die Geſchwindigkeit, womit eine abgeſchoſſene Kugel an ein baliſtiſches Pendel anſtößt, iſt es wahrſcheinlicherweiſe überflüſſig, vielleicht gar fehlerhaft, daß bey der Beſtimmung des Differenzials der Winkelgeſchwindigkeit $d\omega$ auch das Drehungsmoment der Kugel b^2p in Erwägung gezogen worden, weil während der Wirkung der Kraft R (welche aus den Elementarkräften der Materie und zwar im gegenwärtigen Falle nach H. **Boſcovichs** Syſteme me aus den abſtoſſenden Kräften der materiellen Punkte entſpringet) die Kugel ſich geſchwinder beweget als das Pendel. Es muß daher auf der 494ten Seite in der 14ten Zeile ſtatt $d\omega = \frac{2gbR\,dt}{aAP+b^2p}$ geſetzet werden $d\omega = \frac{2gbR\,dt}{aAP}$; daraus folget, daß man auf der 494ten Seite in der 21ten und 23ten Zeile das Glied $+b^2p$ gänzlich auslaſſen, und auf der 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498ten Seite, in der zweynamigen Gröſſe $aAP + 2b^2p$, wo ſie nur immer vorkömmt, wie auch auf der 498ten Seite in der 7ten Zeile, den Coefficienten 2 ausſtreichen muß; ferner müſſen auf der 494ten Seite in der 16ten 17ten und 18ten Zeile die Worte (die Kugel p aber in Rückſicht des Pendels ohne merklichen Fehler als ein materieller Punkt kann angeſehen werden) ausgelaſſen werden: dafür kann man auf der 495ten Seite in der 23ten Zeile nach dem Worte (iſt,) noch hinzufügen (weil die Kugel p in Rückſicht des Pendels ohne merklichen Fehler als ein einziger materieller Punkt kann angeſehen werden).

IV.

Auf der 515ten Seite in der 13ten Zeile nach $m = 90^\circ$ kann noch folgendes hinzugeſetzet werden.

Um dieſe Behauptung bey der eben angeführten elliptiſchen Umlaufsbewegung darzuthun, wird die Rechnung auf folgende Art geführet. Die Senkrechte FT = u Fig. 94 läßt ſich durch FM = z ausdrücken, wenn man die Tangente TM bis an die verlängerte Abſciſſenlinie FA hinauszieht, und auch aus dem Punkte M die Normale errichtet; daraus ergiebt ſich vermög der Aehnlichkeit der Dreyecke folgende Proportion; **die Normale verhält ſich zur Subnormale, gleichwie das Stück der Ab-**

Abſciſſenlinie von ihrem Durchſchnittspunkte mit der Tangente bis zum Mittelpunkte der Centralkraft F gerechnet ſich zu FT = u verhält; dadurch erhält man I. eine Gleichung, wo u durch CP = x und unveränderliche Gröſſen ausgedrückt iſt, wenn man den Mittelpunkt C der Ellipſe für den Anfangspunkt der Abſciſſen annimmt; ferner hat man aus der Lehre von den Kegelſchnittslinien II. eine Gleichung zwiſchen CP = x und zwiſchen dem Fahrſtrich (radius vector) FM = z; ſubſtituiret man nun aus der Gleichung II. den Werth für x in die Gleichung I. ſo erhält man endlich u durch z und unveränderliche Gröſſen ausgedrückt, woraus ſich durch die Differenzirung auch du ergiebt. Es ſey nun in der Ellipſe die groſſe Halbachſe CA = A, die kleine CD = B, und die Excentricität CF = E, ſo iſt vermög (2ten Band 543. II.) die Normale $= A^{-2}B(A^4 - E^2x^2)^{\frac{1}{2}}$, die Subnormale $= A^{-2}B^2x$ vermög (543. I.), und das erwähnte Stück der Abſciſſenlinie vermög (543. IV.) iſt

$$= \frac{A^2}{x} + E = (A^2 + Ex).x^{-1};$$ es iſt demnach

$$A^{-2}B(A^4 - E^2x^2)^{\frac{1}{2}} : A^{-2}B^2x = (A^2 + Ex).x^{-1} : u,$$

nämlich I. $$u = \frac{B(A^2 + Ex)^{\frac{1}{2}}}{(A^2 - Ex)^{\frac{1}{2}}},$$

wenn man $(A^4 - E^2x^2)^{\frac{1}{2}}$ in die Faktoren $(A^2 + Ex)^{\frac{1}{2}}.(A^2 - Ex)^{\frac{1}{2}}$ zerfället. Ferner iſt vermög (534. VI.) der Fahrſtrich $$\text{FM} = \text{CA} + \frac{\text{CF}.\text{CP}}{\text{CA}},$$

nämlich II. $A^2 + Ex = Az$, und $A^2 - Ex = 2A^2 - Az$; es iſt alſo auch, wenn man dieſe Werthe in die vorige Gleichung I. ſetzet,

$$u = \frac{B(Az)^{\frac{1}{2}}}{(2A^2 - Az)^{\frac{1}{2}}} = Bz^{\frac{1}{2}}(2A-z)^{-\frac{1}{2}},$$

und $du = \frac{1}{2}Bdz[z^{-\frac{1}{2}}(2A-z)^{-\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}(2A-z)^{-\frac{3}{2}}]$; daraus folgt endlich $\frac{du}{u^3dz} = \frac{A}{B^2z^2}$;

es iſt demnach die geſuchte Beſchleunigung

$p = \frac{a^2c^2}{2} \cdot \frac{du}{u^3dz} = \frac{a^2c^2A}{2B^2z^2}$, oder auch wenn man vermög (535) ſtatt B^2 den Werth $a(2A-a)$ ſetzet, $p = \frac{Aac^2}{2(2A-a)z^2}$; eben ſo iſt in einem anderen Punkte der nämlichen Ellipſe die Beſchleunigung der gegen F gerichteten Centralkraft $P = \frac{Aac^2}{2(2A-a)Z^2}$; und folglich iſt bey einer ſolchen elliptiſchen Umlaufsbewegung $P:p = \frac{1}{Z^2}:\frac{1}{z^2}$. Auf die nämliche Art wird die Rechnung bey der Hyperbel geführet. Bey der Parabel iſt es noch leichter, weil vermög (527. IV.) die Senkrechte $u = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ ſchon durch z ausgedrücket iſt. Wenn die Ordinaten der krummen Linie in dem Punkte F zuſammenlaufen, und die Gleichung für ſolche Ordinaten bekannt iſt, ſo kann man u ſehr leicht mittelſt der Differenzialrechnung beſtimmen; denn in einem ſolchen Falle verhält ſich das Differenziale des Bogens AM zum Differenziale des Abſciſſenbogens für den Halbmeſſer FM, gleichwie die Ordinate FM zu FT. Auf dieſe Art läßt ſich die Beſchleunigung der Centralkraft in verſchiedenen Spirallinien beſtimmen.

V.

Um eine vollſtändigere Kenntniß von der Auflöſung des **Kepleriſchen Problems** zu erlangen, kann man auf der 525ſten Seite im §. 229. in der vorletzten Zeile ſtatt (um Φ im erforderlichen Falle zu berechnen u. ſ. w. bis zu Ende dieſes §.) folgendes ſetzen.

Daß der Flächeninhalt R eines Focalausſchnittes AFMA Fig. 94. bey der Ellipſe durch die Gleichung richtig ausgedrückt ſey,

$$R = \tfrac{1}{2}be \,.\, \frac{b\,\text{ſin}\,\Phi}{a - e\cos\Phi} + \tfrac{1}{2}ab \,.\, \text{arc ſin}\, \frac{b\,\text{ſin}\,\Phi}{a - e\cos\Phi},$$

allwo Φ den Winkel AFM nämlich die **wahre Anomalie**, e die Excentricität, a die groſſe und $b = \sqrt{(a^2 - e^2)}$ die kleine Halbachſe bedeutet, läßt ſich auf folgende Art darthun.

Es iſt $R =$ FMPF $+$ MPAM, oder wenn man CP $= x$ ſetzet,

$$R = \tfrac{1}{2}(e + x)\,\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \int -\frac{b}{a}\,dx\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

nämlich

$$R = \tfrac{1}{2}(e + x)\,\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2}ab.\text{arccos}\frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}x\,\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}be}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2}ab.\text{arc cos}\frac{x}{a} \text{ vermög (621. X.)},$$

oder auch $R = \tfrac{1}{2}be.\sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \tfrac{1}{2}ab.\text{arcſin}\sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})}$.

Nun läßt ſich x durch Φ ausdrücken, wenn man ſich nur erinnert, daß vermög (534. IV.) der Fahrſtrich (radius vector) FM $=$ CA $+ \frac{\text{CF . CP}}{\text{CA}}$, nämlich $z = \frac{a^2 + ex}{a}$ ſey, und daß ferner FM : ſintot $=$ FP : ſin PMF, näm-

nämlich $\frac{a^2+ex}{a} : 1 = e+x : \cos\phi$ ſich verhalte; woraus $\frac{x}{a} = \frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi}$, und $\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})} = \frac{b\sin\phi}{a-e\cos\phi}$ folget; es iſt demnach $R = \frac{1}{2}be.\frac{b\sin\phi}{a-e\cos\phi} + \frac{1}{2}ab.\text{arc}\sin\frac{b\sin\phi}{a-e\cos\phi}$.

Setzet man in der Gleichung $z = \frac{a^2+ex}{a}$ für x den gleichen Werth durch ϕ ausgedrückt $\frac{a^2\cos\phi - ae}{a-e\cos\phi}$, ſo erhält man

$$z = \frac{b^2}{a-e\cos\phi}$$

eine Gleichung für die Ellipſe, wo die Ordinaten im Brennpunkte zuſammenlaufen. Mittelſt dieſer Gleichung läßt ſich nun bey einer gegebenen elliptiſchen Umlaufsbahn eines Planeten zu jeder wahren Anomalie ϕ die zugehörige Entfernung z deſſelben von dem Centralpunkte der Anziehungskraft finden.

Eben dieſe Gleichung für die Ellipſe $z = \frac{b^2}{a-e\cos\phi}$ läßt ſich aus dem Dreyecke FMf ableiten, wenn man die Linie Mf ausgezogen gedenket; denn es iſt vermög (459. I.) $\cos fFM = \frac{FM^2+Ff^2-fM^2}{2FM.Ff}$, nämlich $\cos\phi = \frac{z^2+4e^2-(2a-z)^2}{2z.2e}$, woraus $z = \frac{b^2}{a-e\cos\phi}$ folget.

Mittelſt dieſer Gleichung, und mittelſt der allgemeinen Formel für die Ordinaten aus einem Punkte $R = \int\frac{1}{2}z^2 d\phi$ vermög (645) wo ϕ die Länge des Abſciſſenbogens für den Halbmeſſer = 1 bedeutet, läßt ſich auch R beſtimmen; es iſt nämlich, wenn man ſtatt z den angeführten Werth ſetzet,

$R = \int \frac{1}{2} b^4 d\varphi (a - e\cos\varphi)^{-2}$,
oder $2Rb^{-4} = \int d\phi (a - e\cos\phi)^{-2}$.

Um dieſe Gleichung zu integriren ſetze man

$$a - e\cos\phi = x,$$

ſo iſt $2Rb^{-4} = \int x^{-2} dx (-x^2 + 2ax - b^2)^{-\frac{1}{2}}$;
ſo wie dieſe verwandelte Gleichung da liegt, läßt ſich ſolche nicht integriren, wenn man auch das 2te Glied inner den Klammern wegſchaffet; wenn man hingegen die veränderliche Gröſſe x^2 überträgt, um

$$2Rb^{-4} = \int x^{-3} dx (-1 + 2ax^{-1} - b^2 x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

zu erhalten, ſo ſieht man alſogleich, daß das Integrale ſich nach (632) behandeln laſſe, und daß man um ſolches zu erhalten ſetzen müſſe

$$x^{-1} = y^{-1} + ab^{-2};$$

alsdann iſt

$$2Rb^{-4} = \int y^{-3} dy (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \int ab^{-2} y^{-2} dy (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{-\frac{1}{2}},$$

nämlich

$$2Rb^{-2} = (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{\frac{1}{2}}$$
$$+ a.\int y^{-2} dy (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{-\frac{1}{2}},$$
$$= (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{\frac{1}{2}}$$
$$+ ab.\int y^{-2} dy (e^2 - b^4 y^{-2})^{-\frac{1}{2}},$$
$$= (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{\frac{1}{2}}$$
$$+ ab.\int y^{-1} dy (e^2 y^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}},$$

und endlich vermög (621. V.),

$$2Rb^{-2} = (-1 + a^2 b^{-2} - b^2 y^{-2})^{\frac{1}{2}} + ab^{-1}.\mathrm{arccos}\, b^2 e^{-1} y^{-1}.$$

Nun ſtelle man x wieder her, nämlich man ſetze für y^{-1} den zugehörigen Werth $x^{-1} - ab^{-2}$, ſo iſt

$$\frac{2R}{b^2} = (-1+2ax^{-1} - b^2x^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{a}{b} \cdot \text{arc cos} \left(\frac{b^2}{ex} - \frac{a}{e}\right)$$

$$= \frac{(-x^2 + 2ax - b^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$+ \frac{a}{b} . \text{arc sin} \frac{b(-x^2 + 2ax - b^2)^{\frac{1}{2}}}{ex}.$$

Endlich ſetze man für x und für $(-x^2+2ax-b^2)^{\frac{1}{2}}$ die zugehörigen Werthe $a - e\cos\varphi$ und $e\sin\varphi$, ſo iſt

$$\frac{2R}{b^2} = \frac{e\sin\varphi}{a-e\cos\varphi} + \frac{a}{b} . \text{arcsin} \frac{b\sin\varphi}{a-e\cos\varphi}, \text{ nämlich}$$

$$R = \tfrac{1}{2}be . \frac{b\sin\varphi}{a-e\cos\varphi} + \tfrac{1}{2}ab . \text{arc sin} \frac{b\sin\varphi}{a-e\cos\varphi}.$$

Um nun dieſe Gleichung auf die Auflöſung des Kepleriſchen Problems anzuwenden, ſetze man die **mittlere Anomalie** $= m$ (es bedeute nämlich m einen Winkelabſtand in F von A nach der Seite AMQ gerechnet, welchen der in der Ellipſe umlaufende Körper in der mit der wahren Anomalie zuſammengehörigen Dauerzeit **beſchreiben würde**, wenn ſolcher um den Punkt F eine gleichförmige Kreisbewegung hätte, deren Umlaufzeit mit jener der Ellipſe einerley wäre), und es ſey m ſo wie auch φ nach Beſchaffenheit der Umſtände entweder durch Grade Minuten und Sekunden, oder durch die wirkliche Länge des Bogens für den Halbmeſſer $= 1$ ausgedrückt; ferner ſetze man die ganze Umlaufszeit $= T$, und die zur wahren ſowohl als auch zur mittleren Anomalie zugehörige Dauerzeit $= t$,

ſo iſt $t : T = R : ab\pi$ vermög (§. 217.)
und $T : t = 2\pi : m$ vermög der gleichf. Kreisb.
folglich auch $1 : 1 = 2R : abm$, und es iſt $R = \frac{1}{2}abm$.

Subſtituiret man nun dieſen Werth in der obigen Gleichung für R, ſo iſt endlich

$$m = \text{arc ſin} \frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi} + \frac{e}{a} \cdot \frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi}$$

die geſuchte Gleichung zwiſchen der wahren und mittlere Anomalie bey einer gegebenen Ellipſe.

Mittelſt dieſer Gleichung läßt ſich aus der gegebenen wahren Anomalie ϕ die mittlere m zwar unmittelbar berechnen; nur iſt bey der wirklichen Berechnung in Zahlen die Arbeit ziemlich weitläuftig; im umgekehrten Falle, wo m gegeben, und das zugehörige ϕ zu ſuchen iſt, da iſt die Schwierigkeit noch gröſſer, weil ſich in der angeführten Gleichung ϕ nicht unmittelbar entwickeln läßt. Man kann die Rechnung auf folgende Art abkürzen. Man ſetze

$$\text{arc ſin} \frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi} = n, \text{ ſo iſt } \frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi} = \text{ſin}\, n;$$

es iſt daher die abgekürzte Gleichung

$$m = n + \frac{e}{a} . \text{ſin}\, n.$$

Dieſe Gleichung iſt nun viel einfacher; es bedeutet in derſelben n einen Bogen oder Winkel, deſſen Sinus gleich iſt $\frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi}$, nämlich $\text{ſin}\, n = \frac{b\,\text{ſin}\phi}{a - e\cos\phi}$; der Coſinus dieſes nämlichen Bogens oder Winkels hingegen iſt gleich $\frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi}$, nämlich $\cos n = \frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi}$, weil $\cos n = \sqrt{(1 - \text{ſin}^2 n)}$ iſt.

Den angeführten Bogen oder Winkel n kann man dem gegenwärtigen Vortrage gemäß, um ſich in der Folge kürzer ausdrücken zu können, die **Hilfsanomalie** nennen (dieſer Bogen oder Winkel n heißt bey anderen Schriftſtellern ihrem Vortrage gemäß die **excentriſche Anomalie**). Wenn die Hilfsanomalie n bekannt iſt, ſo läßt ſich die zugehörige mittlere Anomalie m ſehr leicht berechnen; man darf nur $\frac{e}{a} \cdot \sin n$ in Zahlen entwickeln, und darauf in der Tafel VII. von meinen **Logarith. Tafeln** nachſehen, wie viele Grade, Minuten, und Sekunden dazu gehören, welche zu der Anzahl Grade, Minuten, und Sekunden von n hinzuaddiret, vermög der obangeführten abgekürzten Gleichung die mittlere Anomanie m geben.

Nun kömmt es darauf an, wie man n mittelſt ϕ, und umgekehrt ϕ mittelſt n auf eine leichte Art berechnen kann. Die Formeln

$$\cos n = \frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi},$$ und die daraus abgeleitete

$$\cos\phi = \frac{a\cos n + e}{a + e\cos n},$$ ſind zwar beyde ziemlich geſchmeidig, nur laſſen ſich dabey die Logarithmen nicht unmittelbar gebrauchen. Durch folgendes Verfahren erhält man eine ſehr einfache Formel.

Da $\sin n = \frac{b\sin\phi}{a - e\cos\phi}$, und $\cos n = \frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi}$,

und ferner $1 + \cos n = \frac{(a-e)(1+\cos\phi)}{a - e\cos\phi}$,

ſo iſt auch $\frac{\sin n}{1+\cos n} = \frac{b}{a-e} \cdot \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}$,

oder wenn man ſtatt b den gleichen Werth $(a^2 - e^2)^{\frac{1}{2}} = (a-e)^{\frac{1}{2}}.(a+e)^{\frac{1}{2}}$ ſetzet,

$$\frac{\sin n}{1+\cos n} = \left(\frac{a+e}{a-e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi},$$

und endlich, wenn mon aus den trigonometriſchen Verwandlungsformeln für $\frac{\sin n}{1+\cos n}$ und auch für $\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}$, ihre gleichen

chen Werthe $\text{tang}\frac{1}{2}n$, und $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$ ſetzet,

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}n = \left(\frac{a+e}{a-e}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots \text{A}$$

Mittelſt dieſer Formel A ergiebt ſich nun aus der wahren Anomalie φ die Hilfsanomalie n unmittelbar durch Logarithmen; woraus ſich ferner die mittlere Anomalie $= m$ mittelſt nachſtehender Formel ſehr leicht berechnen läßt

$$m = n + \text{ang}.\text{arc}.\frac{e}{a}\,\text{ſin}n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{B}$$

wo nun m und n ſo wie in der vorigen Formel φ in Graden, Minuten, und Sekunden ausgedrückt ſind, und die lateiniſche Bezeichnung $\text{ang}.\text{arc}.\frac{e}{a}\text{ſin}n$ nichts anders bedeutet, als der Winkel in Graden, Minuten, und Sekunden ausgedrückt, welcher zur Bogenlänge $\frac{e}{a}\text{ſin}n$ für den Halbmeſſer 1 gehöret.

Um nun auch aus der mittleren Anomalie m die wahre φ beſtimmen zu können, muß man zuerſt trachten aus der gegebenen mittleren Anomalie m die zugehörige Hilfsanomalie n abzuleiten; ſodann ergiebt ſich aus der einmal gefundenen Hilfsanomalie n die wahre φ mittelſt der Gleichung A ſehr leicht unmittelbar durch Logarithmen.

Die Hilfsanomalie n läßt ſich aus der mittleren m auf folgende Art ableiten.

Aus der angeführten Gleichung B folget

$m - n = \text{ang}.\text{arc}.\frac{e}{a}\text{ſin}n$; es iſt daher auch

$\text{ſin}(m - n) = \text{ſin}(\text{ang}.\text{arc}.\frac{e}{a}\text{ſin}n)$; nun iſt bey den Planetenbahnen der Bogen $\frac{e}{a}\text{ſin}n$ wegen der geringen Excentricität jederzeit ein ſehr kleiner Bogen, und folglich der Si-

Sinus dieſes kleinen Bogens beynahe dem Bogen ſelbſten gleich, nämlich $\sin(\text{ang}\,.\,\text{arc}\,.\,\frac{e}{a}\sin n) = \frac{e}{a}\sin n$ beynahe;

folglich auch $\sin(m - n) = \frac{e}{a}\sin n$,

nämlich $\sin m \cos n - \cos m \sin n = \frac{e}{a}\sin n$;

und daraus folgt endlich, wenn man alle Glieder mit $\cos n$ dividiret, $\text{tang}\, n = \frac{\sin m}{\frac{e}{a} + \cos m}$.

Nach dieſer Formel iſt es nun leicht die Hilfsanomalie n zu berechnen; nur laſſen ſich dabey die Logarithmen nicht unmittelbar anwenden. Durch nachſtehendes Verfahren kömmt eine Formel zum Vorſchein, wodurch ſich n unmittelbar durch Logarithmen beſtimmen läßt.

Aus der Formel $\text{tang}\, n = \frac{\sin m}{\frac{e}{a} + \cos m}$ folgt

$n = \text{arc}\,.\,\text{tang}\,.\,\frac{a\sin m}{e + a\cos m}$, und ferner

$n - \frac{1}{2}m = \text{arc}\,.\,\text{tang}\,.\,\frac{a\sin m}{e + a\cos m} - \frac{1}{2}m$;

es iſt demnach auch

$\text{tang}(n - \frac{1}{2}m) = \text{tang}(\text{arc}\,.\,\text{tang}\,.\,\frac{a\sin m}{e + a\cos m} - \frac{1}{2}m)$,

und folglich auch

$$\text{tang}(n - \tfrac{1}{2}m) = \frac{\frac{a\sin m}{e + a\cos m} - \text{tang}\tfrac{1}{2}m}{1 + \frac{a\sin m}{e + a\cos m}\,.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}m}$$

wegen der bekannten Verwandlungsformel

tang

$$\mathrm{tang}(x-y) = \frac{\mathrm{tang}x - \mathrm{tang}y}{1+\mathrm{tang}x\,\mathrm{tang}y};$$

ſubſtituiret man nun ſtatt $\mathrm{tang}\frac{1}{2}m$ den gleichen Werth $\frac{\text{ſin}m}{1+\cos m}$, bringet alle Glieder auf eine gleiche Benennung, und ſetzet zuletzt ſtatt $\text{ſin}^2 m$ den gleichen Werth $1-\cos^2 m$, ſo iſt nach vorgenommener Reduktion

$\mathrm{tang}(n-\frac{1}{2}m) = (\frac{a-e}{a+e}) \cdot \frac{\text{ſin}m}{1+\cos m}$; und endlich, wenn man wieder ſtatt $\frac{\text{ſin}m}{1+\cos m}$ den gleichen Werth $\mathrm{tang}\frac{1}{2}m$ ſetzet, $\mathrm{tang}(n-\frac{1}{2}m) = \frac{a-e}{a+e}.\mathrm{tang}\frac{1}{2}m$, oder vielmehr $\mathrm{tang}(n'-\frac{1}{2}m) = \frac{a-e}{a+e}.\mathrm{tang}\frac{1}{2}m$, wenn man n' ſtatt n ſetzet, um dadurch anzuzeigen, daß die gefundene Formel für die Hilfsanomalie nur eine Annäherung ſey.

Mittelſt dieſer gefundenen Formel iſt es nun ſehr leicht die Hilfsanomalie n' unmittelbar durch Logarithmen zu berechnen; man darf nämlich nur zum Logarithmus der Tangente von der halben mittleren Anomalie den unveränderlichen Logarithmus von $\frac{a-e}{a+e}$ hinzuaddiren, ſo erhält man den Logarithmus der Tangente eines Winkels $n'-\frac{1}{2}m$, und folglich findet man auch den Winkel $n'-\frac{1}{2}m$ ſelbſten; addiret man endlich zu dieſem gefundenen Winkel $n'-\frac{1}{2}m$ noch die gegebene halbe mittlere Anomalie $\frac{1}{2}m$ hinzu, ſo ergiebt ſich die Hilfsanomalie n', nämlich

$$n' = \mathrm{ang.\,tang.}[\frac{a-e}{a+e}.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}m] + \tfrac{1}{2}m \,\ldots\ldots\ldots\, \mathrm{C}$$

Die Hilfsanomalie n', welche man mittelſt der angeführten Näherungsformel C berechnet iſt jederzeit etwas zu klein; jedoch iſt auch ſogar bey der elliptiſchen Bahn des Merkurs, wel-

welche unter allen Planetenbahnen am meiſten excentriſch iſt, der größte Fehler kleiner als 6 Minuten, und ergiebt ſich dort, wo die Hilfsanomalie $n = 90^\circ$ iſt; wenn hingegen n beträchtlich von 90° verſchieden iſt, ſo iſt auch der Fehler beträchtlich kleiner, ſo daß derſelbe bey kleinen ſowohl als auch bey groſſen Anomalien, die nämlich nicht mehr viel von 180° verſchieden ſind, gänzlich unmerklich wird.

Nun kömmt es noch darauf an eine Formel zu finden, um die noch wenigen Minuten oder Sekunden berechnen zu können, welche zu der nach der Formel C berechneten etwas zu kleinen Hilfsanomalie n' addiret werden müſſen um die genaue Hilfsanomalie n zu erhalten; dieſes kann auf folgende Art geſchehen.

Man ſetze den geſuchten noch abgängigen Winkel $= u$, ſo iſt $n = n' + u$; dieſen Werth ſetze man in der obigen Gleichung

$m = n + \frac{e}{a} \sin n$ für n, ſo iſt

$$m = n' + u + \frac{e}{a} . \sin(n' + u)$$

$$= n' + u + \frac{e}{a} . (\sin n' \cos u + \cos n' \sin u);$$

nun iſt $\cos u = 1$ und $\sin u = u$ ohne merklichen Fehler, weil u ein ſehr kleiner Winkel iſt;

folglich auch $m = n' + u + \frac{e}{a} \sin n' + \frac{eu}{a} \cos n'$;

daraus folgt $u = \frac{a(m - n') - e \sin n'}{a + e \cos n'}$,

nämlich $u = \text{ang.arc} \frac{\text{arc}(m -- n') - \frac{e}{a} \sin n'}{1 + \frac{e}{a} \cos n'}$,

wo die Bezeichnung ang.arc aus dem vorhergehenden erhellet, und arc$(m-n')$ anzeiget, daß man $m-n'$ im Längenmaſſe für den Halbmeſſer 1 ausdrücken ſoll.

Es iſt demnach die geſuchte Formel für die verbeſſerte Hilfsanomalie

$$n = n' + \text{ang.arc}\frac{\text{arc}(m-n') - \frac{e}{a}\text{ſin}\,n'}{1+\frac{e}{a}\cos n'} \ldots\ldots\ldots \text{D}$$

wodurch die Hilfsanomalie bey allen Planetenbahnen mit hinlänglicher Genauigkeit gefunden wird. Dabey iſt es zu bemerken, daß in jenen Fällen, wo der Zähler

$$\text{arc}(m-n') - \frac{e}{a}\text{ſin}\,n'$$

kleiner gefunden wird als 0,0000048 = arc 1 Sek. die nach der Formel C berechnete Hilfsanomalie n' von der genauen Hilfsanomalie n um keine ganze Sekunde verſchieden ſey, und daß folglich in dergleichen Fällen die Verbeſſerung mittelſt der Formel D wegfalle.

Wenn es bey mehr excentriſchen Ellipſen als die Planetenbahnen ſind, noch zweifelhaft wäre, ob die nach den Formeln C, D berechnete Hilfsanomalie n hinlänglich genau ſey, darf man nur in der Formel D ſtatt n' den berechneten Werth n ſetzen, ſo wird ſich gleich zeigen, ob das Glied

$$\text{ang.arc}\frac{\text{arc}(m-n) - \frac{e}{a}\text{ſin}\,n}{1+\frac{e}{a}\cos n}$$

noch einige Minuten oder Sekunden betrage, die man zu n mit dem gehörigen Zeichen hinzufüget, um die Hilfsanomalie mit hinlänglicher Genauigkeit zu erhalten; dieſes Verfahren kann man ſolang wiederholen, bis der Zähler $\text{arc}(m-n) - \frac{e}{a}\text{ſin}\,n$ keine ganze Sekunde mehr austrägt.

Iſt einmal die Hilfsanomalie n gefunden, ſo ergiebt ſich die geſuchte wahre Anomalie ϕ unmittelbar durch Logarithmen mittelſt nachſtehender Formel, welche aus der obangeführten Gleichung A abgeleitet iſt, nämlich

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\phi = \left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}n.$$

Bey der elliptiſchen Umlaufsbewegung iſt in dem entfernteren Scheitel von demjenigen Brennpunkte, wo die Centralkraft ſich befindet, nämlich in dem **Aphelio** die wahre ſowohl als auch die mittlere Anomalie = 0; von da wächſt mit der wahren Anomalie auch die mittlere, jedoch die letzte ungleich ſtärker als die erſte; im **Perihelio** (im anliegenden Scheitel) iſt wieder die mittlere Anomalie der wahren gleich, nämlich für $\phi = 180^{\circ}$ iſt auch $m = 180^{\circ}$, welches aus der obangeführten Formel

$$m = \text{arc ſin}\frac{b\,\text{ſin}\phi}{a-e\cos\phi} + \frac{e}{a}.\frac{b\,\text{ſin}\phi}{a-e\cos\phi},$$

oder

$$m = \text{arc cos}\frac{a\cos\phi-e}{a-e\cos\phi} + \frac{e}{a}.\frac{b\,\text{ſin}\phi}{a-e\cos\phi}$$

deutlich erhellet. Die Dauerzeit der elliptiſchen Bewegung von dem einen Scheitel der Hauptachſe bis zum anderen iſt demnach genau der Hälfte der ganzen Umlaufszeit gleich, oder die Dauerzeit vom Aphelio bis zum Perihelio iſt genau ſo groß als die fernere Dauerzeit vom Perihelio bis zum Aphelio. Die Dauerzeit hingegen vom Aphelio bis zum Scheitel der kleinen Achſe iſt nach Beſchaffenheit der Excentricität beträchtlich gröſſer, als von da bis zum Perihelio, welches man leicht findet, wenn man bey einer gegebenen Ellipſe zu der mit dem Scheitel der kleinen Achſe zuſammengehörigen wahren Anomalie die entſprechende mittlere Anomalie berechnet, und ſodann aus der Umlaufszeit = T unterſuchet, was für eine Dauerzeit = t mit

der

der berechneten mittleren Anomalie zuſammengehöret, nämlich $360^\circ : m = T : t$; dieſe Zeit t von $\frac{1}{2}T$ abgezogen giebt die Dauerzeit vom Scheitel der kleinen Achſe bis zum Perihelio.

Der Unterſchied zwiſchen der mittleren und wahren Anomalie wird in der Aſtronomie die **Mittelpunktsgleichung** (æquatio centri) genennet. Seſzet man die Mittelpunktsgleichung $= p$, ſo iſt $p = m - \phi$, $m = \phi + p$, und $\phi = m - p$, allwo aber, wenn man m oder ϕ gröſſer als 180° annimmt (die Anomalien werden nämlich von 0° bis 360° in einem ſortgezählet) p das entgegengeſetzte Zeichen erhält, weil alsdann über 180° die wahre Anomalie gröſſer iſt als die zugehörige mittlere.

Wenn man nun in der Formel für die Mittelpunktsgleichung $p = m - \phi$ ſtatt m den zugehörigen Werth ſetzet, ſo iſt

$$p = \text{arccos}\,\frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi} + \frac{e}{a} . \frac{b\sin\phi}{a - e\cos\phi} - \phi$$

eine Formel, wo die Mittelpunktsgleichung durch die wahre Anomalie ϕ ausgedrückt iſt.

Will man hingegen die Mittelpunktsgleichung durch die Hilfsanomalie n ausdrücken, ſo iſt wenn man in der Gleichung $p = m - \phi$ ſtatt m und ϕ die zugehörigen Werthe durch n ausgedrückt ſubſtituiret

$$p = n + \text{ang. arc.} \frac{e}{a} \sin n - 2\,\text{ang. tang}\left[\left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}} . \text{tang} \tfrac{1}{2} n\right] . \;. \text{E.}$$

Mittelſt dieſer Formel E iſt es nun leicht zu jeder gegebenen wahren Anomalie ϕ die zugehörige Mittelpunktsgleichung p zu berechnen, wenn man vorher zu der gegebenen wahren Anomalie ϕ die zugehörige Hilfsanomalie n nach der Formel A beſtimmet, und ſodann die Formel E aufſöſet, wo das letzte Glied die gegebene wahre Anomalie ϕ bedeutet.

Wenn hingegen zur gegebenen mittleren Anomalie m die Mittelpunktsgleichung zu berechnen iſt, wie ſolches bey der Berechnung der Planetentafeln eingeführet iſt, ſo muß man zu erſt die Hilfsanomalie mittelſt der Formel C beſtimmen, ſelbe nach der Formel D verbeſſern, wenn ſie einer Verbeſſerung bedarf, und endlich die Formel E entwikeln.

Durch die mittlere Anomalie läßt ſich die Mittelpunktsgleichung nicht unmittelbar ausdrücken, weil ſich auch die wahre Anomalie φ aus der gegebenen mittleren m nicht unmittelbar berechnen läßt. Man kann zwar die Mittelpunktsgleichung p durch die gegebene mittlere Anomalie m mittelſt einer unendlichen Reihe ausdrücken, welche aber nicht hinlänglich zuſammenläuft, ſobald die Excentricität etwas beträchtlich groß iſt, wie es in der Folge zu erſehen ſeyn wird.

In der obangeführten Formel für die Mittelpunktsgleichung ſowohl durch φ als auch durch n ausgedrückt iſt für φ und $n = 0$ auch $p = 0$; von da wächſt p mit φ und n bis auf eine gewiſſe Gröſſe fort; ſodann nimmt p wieder ab, und wird für φ oder $n = 180^\circ$ wiederum $p = 0$; derowegen muß in einem gewiſſen Falle p ein **Größtes** werden. In einem ſolchen Falle iſt $dp = 0$, und folglich auch $dm - d\varphi = 0$, weil $p = m - \varphi$ iſt, und endlich $dm = d\varphi$;

es iſt aber $dm = \frac{b^3}{a} d\varphi (a - e\cos\varphi)^{-2}$, wenn man in der gleich anfänglich angeführten Gleichung

$$R = \int \tfrac{1}{2} b^4 d\varphi (a - e\cos\varphi)^{-2}$$

ſtatt R den auch ſchon oben beſtimmten Werth $\frac{1}{2}abm$ ſetzet, und ſodann Differenziret;

folglich iſt bey dem größten Werth von p auch

$$\frac{b^3}{a} d\varphi (a - e\cos\varphi)^{-2} = d\varphi;$$

und

und daraus folgt endlich

$$\cos\phi = \frac{a}{e} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}e}$$

die Formel wodurch ſich die wahre Anomalie ϕ berechnen läßt, welche mit der größten Mittelpunktsgleichung bey einer gegebenen Ellipſe zuſammengehöret.

Wenn man nun in der obangeführten Gleichung für die Ellipſe

$$z = \frac{b^2}{a - e\cos\phi},$$

wodurch ſich bey einer gegebenen elliptiſchen Planetenbahn aus der bekannten wahren Anomalie ϕ die Entfernung z des Planeten von dem Brennpunkte berechnen läßt, ſtatt $\cos\phi$ den gefundenen Werth ſubſtituiret, ſo iſt die Entfernung z, welche mit der größten Mittelpunktsgleichung zuſammengehöret, $z = \sqrt{ab}$; **dieſe Entfernung iſt alſo dem Halbmeſſer eines Kreiſes gleich, welcher mit der gegebenen Ellipſe gleichen Flächeninhalt enthält**; und der Winkel, welchen dieſe Entfernung (dieſer mit der größten Mittelpunktsgleichung zuſammengehörige Fahrſtrich) im Brennpunkte mit der Hauptachſe einſchließt, nämlich die zugehörige wahre Anomalie ϕ läßt ſich jederzeit aus der bekannten Gleichung $z = \frac{b^2}{a - e\cos\phi}$ ableiten, wenn man darinnen für z den zugehörigen Werth $\sqrt{ab}$ ſetzet; woraus ſich ferner die Hilfsanomalie, darauf die mittlere Anomalie, und endlich die größte Mittelpunktsgleichung ergiebt.

Will man nun auch eine Formel für die Hilfsanomalie haben, welche mit der größten Mittelpunktsgleichung zuſammengehöret, ſo darf man nur in der obangeführten Formel $\cos n = \frac{a\cos\phi - e}{a - e\cos\phi}$ den gefundenen Werth für $\cos\phi$ ſubſtituiren, und darauf für b den gleichen Werth $[(a+e)(a-e)]^{\frac{1}{2}}$ ſetzen, ſo erhält man

$$\cos n = \frac{-a+a^{\frac{1}{2}}.[(a+e)(a-e)]^{\frac{1}{4}}}{e} \ldots\ldots\ldots \text{F}$$

eine Formel wodurch ſich die zur größten Mittelpunktsgleichung zugehörige Hilfsanomalie n ſehr leicht berechnen läßt; daraus ergiebt ſich ferner die mittlere ſowohl als auch die wahre Anomalie, und folglich auch die größte Mittelpunktsgleichung.

Es ſey z. B. $a = 1$, und $e = 0{,}9$, ſo iſt $\cos n = -0{,}3775339$, und folglich $n = 112^\circ\, 10'\, 52''$; daraus folgt vermög der Formel B die zugehörige mittlere
Anomalie $m = 112^\circ\, 10'\, 52'' + 47^\circ\, 45' = 159^\circ\, 55'\, 52''$
und vermög A die wahre Anomalie $\varphi \ldots = 37\ \ 41\ \ 16$
folglich iſt die größte Mittelpunktsgl. $p \ldots = 122\ \ 14\ \ 36.$

In der Gleichung $z = \frac{b^2}{a-e\cos\varphi}$ ſubſtituire man ſtatt $\cos\varphi$ den obangeführten Werth durch n ausgedrückt $\frac{a\cos n+e}{a+e\cos n}$ ſo erhält man eine ſehr einfache Formel für die Entfernung z durch n ausgedrückt, nämlich

$$z = a + e\cos n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{G}$$

wodurch ſich zu jeder gegebenen Hilfsanomalie n der zugehörige Fahrſtrich ſehr leicht berechnen läßt.

Nun wollen wir auch noch ſehen, wie die Mittelpunktsgleichung und folglich auch die wahre Anomalie φ aus der mittleren m durch unendliche Reihen unmittelbar abzuleiten ſey; wenn nämlich die Excentricität e ſehr klein iſt, ſo läßt ſich p durch m auf folgende Art durch eine Annäherung unmittelbar beſtimmen.

In der obangeführten Gleichung

$$dm = \frac{b^3}{a}\, d\phi(a - e\cos\phi)^{-2}$$

ſetze man Kürze halber $a = 1$, **ſo daß in der Folge e eigentlich nur den Bruch $\frac{E}{A}$ die Excentricität getheilt durch die Halbachſe bedeute,** und verwandle die Gröſſe $(1 - e\cos\phi)^{-2}$ in eine unendliche Reihe, wovon indeſſen nur die Glieder bis zur 3ten Potenz von e beybehalten werden, ſo iſt

$$b^{-3}dm = d\phi(1 + 2e\cos\phi + 3e^2\cos^2\phi + 4e^3\cos^3\phi);$$

nun ſetze man ſtatt $\cos^2\phi$ und $\cos^3\phi$ ihre Werthe $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi)$ und $(\frac{3}{4}\cos\phi + \frac{1}{4}\cos 3\phi)$, ſo iſt auch

$$b^{-3}dm = (1 + \tfrac{3}{2}e^2)d\phi + (2e + 3e^3)d\phi\cos\phi + \tfrac{3}{2}e^2 d\phi\cos 2\phi$$
$$+ e^3 d\phi\cos 3\phi;$$

daraus folgt durch die Integration

$$b^{-3}m = (1 + \tfrac{3}{2}e^2)\phi + (2e + 3e^3)\sin\phi + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi$$
$$+ \tfrac{1}{3}e^3\sin 3\phi;$$

nun ſubſtituire man auch noch ſtatt b^{-3} den gleichen Werth $(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{35}{16}e^6 + \ldots\ldots = 1 + \frac{3}{2}e^2$, weil indeſſen über e^3 alle höhere Potenzen auſſer Acht gelaſſen werden, ſo iſt

$$m = \phi + 2e\sin\phi + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi + \tfrac{1}{3}e^3\sin 3\phi,$$

und folglich auch

$$m - \phi = 2e\sin\phi + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi + \tfrac{1}{3}e^3\sin 3\phi = p,$$

nämlich es iſt bey einer ſehr kleinen Excentricität e auch die ſehr kleine Mittelpunktsgleichung

$$p = 2e\sin\phi + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi + \tfrac{1}{3}e^3\sin 3\phi \ldots\ldots\ldots \text{H}$$

Um nun p durch m auszudrücken muß noch folgende Arbeit vorgenommen werden. Da $\phi = m - p$, ſo iſt auch $\sin\phi = \sin(m - p)$, $\sin 2\phi = \sin(2m - 2p)$, und $\sin 3\phi = \sin(3m - 3p)$.

Jede dieſer drey Gleichungen, weil p ſehr klein iſt, kann man mittelſt der bekannten trigonometriſchen Formel $\sin(y+z) = \sin y + z\cos y - \frac{1}{2}z^2\sin y - \frac{1}{6}z^3\cos y + \ldots\ldots$ vermög (454 oder auch 609) auch ſo vorſtellen,

1) $\sin\varphi = \sin m - p\cos m - \frac{1}{2}p^2\sin m + \frac{1}{6}p^3\cos m$

2) $\sin 2\varphi = \sin 2m - 2p\cos 2m - 2p^2\sin 2m + \frac{4}{3}p^3\cos 2m$

3) $\sin 3\varphi = \sin 3m - 3p\cos 3m - \frac{9}{2}p^2\sin 3m + \frac{9}{2}p^3\cos 3m$

Die Gleichung 1) multiplicire man mit $2e$, um für $2e\sin\varphi$ einen Werth zu erhalten, welcher in der Gleichung H zu ſubſtituiren ſeyn wird; es iſt nämlich

$2e\sin\varphi = 2e\sin m - 2ep\cos m - ep^2\sin m + \frac{1}{3}ep^3\cos m$,

itzt ſetze man in dieſer Gleichung ſtatt p, p^2, und p^3 ihre Werthe aus der Gleichung H, ſo iſt mit Hinweglaſſung der höhern Potenzen über e^3

$$2e\sin\varphi = 2e\sin m - 4e^2\cos m\sin\varphi - 4e^3\sin m\sin^2\varphi$$
$$- \frac{3}{2}e^3\cos m\sin 2\varphi;$$

ferner ſetze man in dieſer Gleichung ſtatt $\sin\varphi$, $\sin^2\varphi$, und $\sin 2\varphi$ wieder ihre Werthe aus den Gleichungen 1) und 2) ſo daß die mit e^3 multiplicirten Glieder noch richtig herauskommen, die höheren Potenzen aber gänzlich auſſer Acht gelaſſen werden, ſo iſt

$$2e\sin\varphi = 2e\sin m - 4e^2\sin m\cos m + 4e^2p\cos^2 m$$
$$- 4e^3\sin^3 m - \frac{3}{2}e^3\sin 2m\cos m;$$

und nun ſetze man man wieder ſtatt p ſeinen Werth aus der Gleichung H, ſo iſt

$$2e\sin\varphi = 2e\sin m - 4e^2\sin m\cos m + 8e^3\cos^2 m\sin\varphi$$
$$- 4e^3\sin^3 m - \frac{3}{2}e^3\sin 2m\cos m;$$

und endlich, wenn man wieder für $\sin\varphi$ ſeinen Werth aus der Gleichung 1) ſetzet, iſt

a) $2e\sin\varphi = 2e\sin m - 4e^2\sin m\cos m + 8e^5\cos^2 m\sin m$
$- 4e^3\sin^3 m - \frac{3}{2}e^3\sin 2m\cos m$,

wodurch nun das erſte Glied in der Gleichung H durch m ausgedrückt iſt.

Um

Um nun auch in dieſer nämlichen Gleichung H das zweyte Glied durch m auszudrücken, multiplicire man die Gleichung 2) mit $\frac{3}{4}e^2$, ſo iſt

$$\tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi = \tfrac{3}{4}e^2\sin 2m - \tfrac{3}{2}e^2p\cos 2m - \tfrac{3}{4}e^2p^2\sin 2m,$$

und ferner, wenn man ſtatt p den Werth aus H ſetzet, und über e^3 alle höhere Potenzen wegläßt,

$$\tfrac{3}{4}e^2\sin 2\phi = \tfrac{3}{4}e^2\sin 2m - 3e^3\cos 2m\sin\phi,$$

und endlich wenn man wieder ſtatt $\sin\phi$ den Werth aus der Gleichung 1) ſetzet,

b) $\frac{3}{4}e^2\sin 2\phi = \frac{3}{4}e^2\sin 2m - 3e^3\cos 2m\sin m.$

Eben ſo läßt ſich in der Gleichung H das dritte Glied $\frac{1}{3}e^3\sin 3\phi$ durch m ausdrücken, wenn man die Gleichung 3) mit $\frac{1}{3}e^3$ multipliciret, und ſodann gehörig ſubſtituiret, es iſt nämlich

c) $\frac{1}{3}e^3\sin 3\phi = \frac{1}{3}e^3\sin 3m.$

Nun ſubſtituire man dieſe Werthe a), b), c), in der Gleichung H, ſo iſt

$$\begin{aligned} p = {} & 2e\sin m - 4e^2\sin m\cos m + 8e^3\cos^2 m\sin m - 4e^3\sin^3 m \\ & - \tfrac{3}{2}e^3\sin 2m\cos m + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2m - 3e^3\cos 2m\sin m \\ & + \tfrac{1}{3}e^3\sin 3m. \end{aligned}$$

Um dieſe Formel einfacher zu machen, ſetze man ſtatt $\cos^2 m$ und ſtatt $\sin^3 m$ ihre Werthe aus den trigonometriſchen Formeln $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2m)$ und $(\frac{3}{4}\sin m - \frac{1}{4}\sin 3m)$, ſo iſt

$$\begin{aligned} p = {} & (2e + e^3)\sin m - 4e^2\sin m\cos m + \tfrac{3}{4}e^2\sin 2m \\ & - \tfrac{3}{2}e^3\sin 2m\cos m + e^3\cos 2m\sin m + \tfrac{4}{3}e^3\sin 3m. \end{aligned}$$

Endlich ſetze man für $\sin m\cos m$, für $\sin 2m\cos m$, und für $\cos 2m\sin m$ nach der bekannten trigonometriſchen Verwandlungsformel $\sin y\cos z = \frac{1}{2}\sin(y+z) + \frac{1}{2}\sin(y-z)$ die entſprechenden Werthe $(\frac{1}{2}\sin 2m)$, $(\frac{1}{2}\sin 3m + \frac{1}{2}\sin m)$, und $(\frac{1}{2}\sin 3m - \frac{1}{2}\sin m)$, ſo iſt endlich die geſuchte Formel für die Mittelpunktsgleichung

$$p = (2e - \tfrac{1}{4}e^3).\sin m - \tfrac{5}{4}e^2.\sin 2m + \tfrac{13}{12}e^3.\sin 3m \ldots\ldots \text{I}$$

wodurch ſich bey einer geringen Excentricität zu jeder gegebenen mittleren Anomalie die zugehörige Mittelpunktsgleichung unmittelbar berechnen läßt, woraus ſich ferner auch die wahre Anomalie unmittelbar ergiebt, wenn man die berechnete Mittelpunktsgleichung von der gegebenen mittleren Anomalie abzieht.

Wenn man nach der angeführten Art die Annäherung weiter treibet, etwann bis zur 6ten Potenz von e, ſo iſt

$$p = (2e-\tfrac{1}{4}e^3+\tfrac{5}{96}e^5).\mathrm{ſin}\,m-(\tfrac{5}{4}e^2-\tfrac{11}{24}e^4+\tfrac{17}{192}e^6).\mathrm{ſin}\,2m$$
$$+(\tfrac{13}{12}e^3-\tfrac{43}{64}e^5).\mathrm{ſin}\,3m-(\tfrac{103}{96}e^4-\tfrac{451}{480}e^6).\mathrm{ſin}\,4m$$
$$+\tfrac{1097}{960}e^5.\mathrm{ſin}\,5m-\tfrac{1223}{960}e^6.\mathrm{ſin}\,6m.$$

Wenn man das Verfahren, wodurch in der Gleichung a) $2e\,\mathrm{ſin}\,\Phi$ durch m ausgedrücket worden, weiter fortſetzet, und darauf anwendet um ſinΦ durch m auszudrücken, ſo findet man nach vorgenommener Reduktion

$$\mathrm{ſin}\,\Phi = (1-\tfrac{7}{8}e^2-2e^3).\mathrm{ſin}\,m-(e-\tfrac{17}{6}e^3)\,\mathrm{ſin}\,2m$$
$$+(\tfrac{9}{8}e^2-\tfrac{5}{8}e^3).\mathrm{ſin}\,3m-\tfrac{1}{6}e^3.\mathrm{ſin}\,4m.$$

Auf die nämliche Art läßt ſich auch cosΦ unmittelbar durch m ausdrücken, wenn man die Reihe

$$\cos\Phi=\cos(m-p)=\cos m+p\,\mathrm{ſin}\,m-\tfrac{1}{2}p^2\cos m-\tfrac{1}{6}p^3\,\mathrm{ſin}\,m+..$$

zu Hilfe nimmt; es iſt nämlich nach vorgenommener Reduktion

$$\cos\Phi=(e+\tfrac{1}{4}e^3)+(1-\tfrac{9}{8}e^2-\tfrac{1}{4}e^3).\cos m-(e-\tfrac{17}{6}e^3).\cos 2m$$
$$+(\tfrac{9}{8}e^2+\tfrac{3}{4}e^3).\cos 3m-\tfrac{17}{12}e^3\cos 4m.$$

Subſtituiret man dieſen letzten Werth ſtatt cosΦ in der obangeführten Gleichung für z, ſo erhält man z durch m ausgedrückt, worauf ſich ſodann vermög der Gleichung G auch cos$n$ unmittelbar durch m beſtimmen läßt.

Man kann noch mehrere Formeln angeben, wo die wahre Anomalie Φ, die Mittelpunktsgleichung p, und auch n und z unmittelbar durch m ausgedrückt iſt; allein dergleichen Formeln geben das geſuchte nicht jederzeit mit hinlänglicher Genauigkeit, und ſind dabey zum Rechnen ſehr unbequem, weil mehrere Potenzen der Excentricität darinnen vorkommen.

Unter allen bisher bekannten Formeln, wo die wahre Anomalie durch die mittlere bloß mittelſt der erſten Potenz der Excentricität ausgedrückt iſt, wäre nachſtehende ſowohl in Rückſicht der Bequemlichkeit im Rechnen als auch in Rückſicht der Genauigkeit ohnſtreitig die vorzüglichſte

$$\tang \tfrac{1}{2}\phi = \frac{a-e}{a+e} . \tang \tfrac{1}{2}m$$

wenn nur die wenigen Minuten und Sekunden, um welche ſie in einigen Fällen von der Genauigkeit abweichet, ſich durch eine bequeme Näherungsformel nachholen lieſſen. Dieſe Formel iſt aus der Betrachtung abgeleitet, daß der Winkel, welchen zwey Fahrſtriche aus beyden Brennpunkten an die Ellipſe gezogen mit einander einſchlieſſen, von der Mittelpunktsgleichung nicht merklich verſchieden ſeyn könne, weil zwiſchen dieſem Winkel und zwiſchen der Mittelpunktsgleichung in Rückſicht ihrer Veränderlichkeit eine ſo groſſe Uebereinſtimmung herrſchet, und daß folglich wegen dieſem auch der äuſſere Winkel an dem Fahrſtriche des andern Brennpunktes beynahe der mittleren Anomalie gleich ſeyn müſſe, da er der Summe der beyden innern gegenüberſtehenden Winkel gleich iſt, wo nun (wenn man den Fahrſtrich aus dem anderen Brennpunkte über die Ellipſe ſoweit verlängert, bis er der ganzen Achſe gleich wird, und darauf ſeinen Endpunkt mit dem erſten Brennpunkte verbindet) in der angenommenen Vorausſetzung die Proportion gleich in die Augen fällt $2a + 2e : 2a - 2e = \tang \tfrac{1}{2}m : \tang \tfrac{1}{2}\phi$ nämlich die Summe von zwey Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz. Vielleicht findet einmal jemand durch einen glücklichen Einfall eine leichte Formel, wodurch man die nach der eben angeführten Formel berechnete wahre Anomalie ϕ verbeſſern kann. Wenn man in der gleich anfänglich (S. 19 Z. 3) gegebenen Gleichung zwiſchen ϕ und m ſtatt ϕ den Werth $\phi + u$ ſetzet, wo u

die geſuchte Verbeſſerung bedeutet, und man könnte ſodann u auf eine geſchickte Art entwickeln, ſo wäre die Abſicht erreicht. In ſo lange aber dieſes Hilfsmittel fehlet, ſo iſt es bey der Berechnung neuer Planeten- und auch einiger Cometentafeln (wo nämlich bey einer gegebenen Excentricität für jeden Grad der mittleren Anomalie von 0 bis 180° die zugehörige Mittelpunktsgleichung berechnet wird) ſowohl in Rückſicht der Bequemlichkeit der Rechnung als auch in Rückſicht der Zuverläſſigkeit, meines Erachtens am zuträglichſten, wenn man nach den obangeführten Formeln C, D und E arbeitet; nämlich

m (anom. med.) gegeben, p (æq. cent.) zu ſuchen.

$$n' = \text{ang.tang.}\left[\frac{a-e}{a+e}.\text{tang}\tfrac{1}{2}m\right] + \tfrac{1}{2}m \ldots\ldots\ldots\ldots \text{C}$$

$$n = n' + \text{ang.arc}\frac{\text{arc}(m-n') - \frac{e}{a}.\sin n'}{1 + \frac{e}{a}.\cos n'} \ldots\ldots\ldots \text{D}$$

$$p = n + \text{ang.arc.}\frac{e}{a}\sin n - 2\text{ang.tg.}\left[\left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}n\right] \ldots \text{E}$$

und da iſt es am beſten bey $m = 90°$ anzufangen, und von da ſowohl gegen 0 als auch gegen 180° die Arbeit fortzuſetzen, weil ſich dadurch während der Arbeit von ſelbſten ergiebt, wo die Verbeſſerung mittelſt der Formel D entbehrlich zu werden anfängt.

Endlich iſt es noch übrig die größte Mittelpunktsgleichung durch e auszudrücken, welches auf folgende Art geſchehen kann.

In der obangeführten Gleichung H ſubſtituire man ſtatt $\sin 2\varphi$ und $\sin 3\varphi$ ihre Werthe aus den trigonometriſchen Verwandlungsformeln $2\sin\varphi\cos\varphi$ und $4\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi$, ſo iſt

$$p = (2e - \tfrac{1}{3}e^3)\sin\varphi + \tfrac{3}{2}e^2\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{4}{3}e^3\sin\varphi\cos^2\varphi \ldots\ldots \text{K}$$

nun

nun iſt bey der gróßten Mittelpunktsgleichung vermóg dem obangeführten $\cos\varphi = \frac{1}{e} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{e} = \frac{1}{e} - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}$
$= \frac{3}{4}e + \frac{3}{32}e^3 + \frac{5}{128}e^5 + \ldots$
nämlich $\cos\varphi = \frac{3}{4}e + \frac{3}{32}e^3$

$$\cos^2\varphi = \frac{9}{16}e^2$$
$$\sin\varphi = 1 - \frac{9}{32}e^2 \text{ wegen } \sin\varphi = \sqrt{(1-\cos^2\varphi)}$$
$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{3}{4}e - \frac{15}{128}e^3$$
$$\sin\varphi\cos^2\varphi = \frac{9}{16}e^2$$

es iſt demnach, wenn man dieſe Werthe in die Gleichung K ſetzet, die geſuchte Formel für die gróßte Mittelpunktsgleichung

$$p = 2e + \frac{11}{48}e^3.$$

Es iſt nach den angeführten Gründen nun leicht den Werth für p durch e ausgedrückt genauer zu entwikeln, welcher in der praktiſchen Aſtronomie hauptſächlich dazu dienet, damit man zu einer aus Beobachtungen bekannten gróßten Mittelpunktsgleichung p eines Planeten die noch unbekannte Excentricität e berechnen kónne. Indeſſen zeigt die eben angeführte Formel, daß bey geringen Excentricitäten ohne merklichen Fehler die geſuchte Excentricität der halben Bogenlänge der gróßten Mittelpunktsgleichung gleich ſey, nämlich $e = \frac{1}{2}p$.

Es ſey z. B. die aus Beobachtungen bekannte gróßte Mittelpunktsgleichung $= 22^{\circ}\ 54'\frac{1}{2}$; alſo $p = \text{arc.}\,22^{\circ}\ 54'\frac{1}{2} = 0{,}399826$, und folglich $e = \frac{1}{2}p = 0{,}199913 = 0{,}2$ nämlich $\frac{E}{A} = \frac{1}{5}$; und wirklich iſt bey einer Ellipſe, deren groſſe Halbachſe $A = 5$ und die Excentricität $E = 1$ angenommen wird, vermóg der Formel F die zur gróßten Mittelpunktsgleichung zugehórige Hilfsanomalie $n = 87^{\circ}\ 5'\ 24''$, und daher vermóg der Formel E die gróßte Mittelpunktsglei-

gleichung $p = 22^\circ\ 54'\ 30''$, welche mit der mittleren Anomalie $m = 98^\circ\ 32'\ 4''$ und mit der wahren $\varphi = 75^\circ\ 37'\ 34''$ zuſammengehöret; es iſt alſo in dieſem Falle die geſuchte Excentricität $e = 0{,}2$ vollkommen genau gefunden. Wäre hingegen die größte Mittelpunktsgleichung, welche man auf dieſe Art zu der beyläufig beſtimmten Excentricität nach den Formeln F und E berechnet, kleiner als die gegebene größte Mittelpunktsgleichung, ſo iſt dieſes ein Zeichen, daß die vorläufig beſtimmte Excentricität etwas zu klein ſey; man muß daher ſolche um etwas weniges vermehren, und darauf wieder die zugehörige größte Mittelpunktsgleichung berechnen, wo ſich ſo dann bald zeigen wird, ob die geſuchte Excentricität ſchon hinlänglich genau ſey, oder ob ſolche noch einer Verbeſſerung bedarf, welche ſich nun mittelſt der Differenzen ſehr leicht einſchalten läßt. Ein gleiches iſt zu beobachten, wenn die nach der Formel $e = \frac{1}{2}p$ vorläufig beſtimmte Excentricität anfänglich zu groß iſt; es iſt nämlich die geſuchte Excentricität zuweilen gröſſer, zuweilen aber auch kleiner als die halbe Bogenlänge der größten Mittelpunktsgleichung, welches daher entſteht, weil die obangeführten Annäherungen für die wahre Anomalie durch die mittlere ausgedrückt gänzlich unrichtig werden, ſobald die Excentricität $e = \frac{E}{A}$ ſich dem 1 nähert, welches aus der allererſten Annäherungsformel
$(1 - e\cos\varphi)^{-2} = 1 + 2e\cos\varphi + 3e^2\cos^2\varphi + 4e^3\cos^3\varphi$
deutlich erhellet.

Anmerk. Wenn man übereinkommen wollte die Anomalien vom Perihelio angefangen fortzuzählen, ſo wären die dazu dienlichen Formeln folgende, wo a wie vorher die mittlere Entfernung, und e die Excentricität, hingegen m die mittlere Anomalie, φ die wahre Anomalie, n die Hilfsanomalie (die excentriſche Anomalie) von Perihelio angerechnet, und p die Mittelpunktsgleichung bedeutet; nämlich

I. Φ gegeben, m zu ſuchen.

1) $n = 2\,\text{ang}.\,\text{tang}.\left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}}.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\Phi.$

2) $m = n - \text{ang}.\,\text{arc}.\,\frac{e}{a}\,\text{ſin}\,n.$

II. m gegeben, Φ zu ſuchen.

1) $n' = \text{ang}.\,\text{tang}.\left[\frac{a+e}{a-e}.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}m\right] + \tfrac{1}{2}m.$

2) $n = n' - \text{ang}.\text{arc}\dfrac{\text{arc}(n'-m) - \frac{e}{a}\,\text{ſin}\,n'}{1 - \frac{e}{a}\cos n'}.$

3) $\Phi = 2\,\text{ang}.\,\text{tang}\left(\frac{a+e}{a-e}\right)^{\frac{1}{2}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}n.$

III. Gleichungen zwiſchen p, m, und Φ.

1) $p = \Phi - m.$
2) $m = \Phi - p.$
3) $\Phi = m + p.$

IV. Die mit der gröſsten Mittelpunktsgleichung zuſammengehörige Hilfsanomalie.

$$\cos n = \frac{a - a^{\frac{1}{2}}.[(a+e)(a-e)]^{\frac{1}{4}}}{e}.$$

V. Der Abſtand z 1) durch Φ, 2) durch n ausgedrückt.

1) $z = \dfrac{b^2}{a + e\cos\Phi}.$
2) $z = a - e\cos n.$

VI. Die Annäherungsformel um aus der mittleren Anomalie m die wahre Φ unmittelbar zu finden.

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\Phi = \frac{a+e}{a-e}.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}m.$$

VI.

Auf der 527ten Seite in der 7ten Zeile von unten anſtatt (für $z = 0$ iſt $t =$ u. ſ. w. bis zum Ende) ſoll geſetzet werden.

Für $z = 0$ iſt $t = \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{4fg^{\frac{1}{2}}}$, und $v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{0^{\frac{1}{2}}}$ **unendlich groß.** Setzet man ferner z negativ um die Bewegung des Körpers auf der entgegengeſetzten Seite des Centralpunktes von F gegen B beſtimmen zu können, ſo iſt v und t **unmöglich.** Es ſcheint daher, daß der Körper über F gegen B nicht hinausgehen könne, ob er ſchon bey dem Anlangen in F nach der Richtung FB eine unendliche groſſe Geſchwindigkeit erlanget. Was hat es nun mit der ferneren Bewegung des Körpers für eine Beſchaffenheit? **H. L. Euler** (ſcientia motus Tom. I. pag. 268. §. 655.) behauptet, daß der Körper von F bis A wieder zurückkehre, und ſodann wieder von A gegen F ſich bewege, ſo daß er gleichſam in einer unendlich ſchmalen Ellipſe AF, deren Brennpunkte mit den Scheiteln einerley ſind, unaufhörlich herumläuft, weil in einer ſolchen Ellipſe die Dauerzeit der Bewegung vom Aphelio bis zum Perihelio eben ſo groß iſt, als im gegenwärtigen Falle bey der geradlinigten Centralbewegung die Dauerzeit von A bis F. Allein dieſe Behauptung kann unmöglich richtig ſeyn, weil der Körper bey ſeinem Anlangen in F weder eine Geſchwindigkeit nach der Richtung FA hat, noch auch von irgend einer Kraft dahin getrieben wird.

Aus der nämlichen Urſache kann der Körper auch ſonſt nach keiner anderen Richtung fortgehen. Es ſcheint daher, daß der Körper bey der angenommenen Eigenſchaft der Centralkraft $p = \frac{fg}{z^2}$, ſobald er den Centralpunkt erreichet, daſelbſt gänzlich ohne Bewegung verbleiben müſſe, ſo daß daſelbſt nach jeder Richtung und folglich auch nach der Richtung FB ſeine Geſchwindigkeit $= 0$ ſey; allein nach dieſer Richtung FB iſt vermög dem angeführten ganz richtig ſeine Geſchwindigkeit $= \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{0^{\frac{1}{2}}}$; es ſcheint daher in dieſem Falle $\frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{0^{\frac{1}{2}}} = 0$, nämlich es ſcheint, daß zuweilen $\frac{1}{0}$ dem 0 gleich ſeyn könne, obſchon ſonſt in allen analytiſchen Rechnungen $\frac{1}{0}$ eine unendlich groſſe Zahl, oder eine unzählbare Menge Einheiten bedeutet.

Wirklich fanden alle mir bekannte Schriftſteller bey dieſer Unterſuchung ſo was Geheimnißvolles, daß ſie unmöglich ſich darein finden konnten. Das Geheimniß entſteht nicht daher, daß man FC $= z$ geſetzet hat, um durch $+ z$ die Lage des Körpers von F gegen A, und durch $- z$ die Lage von F gegen B in der geraden Linie AB zu beſtimmen. Denn man ſetze AC $= x$, ſo iſt FC $=$ AF $-$ AC $= a-x$; die Beſchleunigung in C iſt daher $p = \frac{f^2g}{(a-x)^2}$ und folglich $v\mathrm{d}v = 2f^2g\mathrm{d}x(a-x)^{-2}$; daraus folgt $v^2 = 4f^2g.(a-x)^{-1} + C$; nun iſt $v^2 = 0$ für $x = 0$; folglich $C = -4f^2g.a^{-1}$, und $v^2 = 4f^2g.[(a-x)^{-1} - a^{-1}]$ nämlich $v^2 = \frac{4f^2gx}{a(a-x)}$; es iſt demnach in der Entfernung AC $= x$ nach der Richtung CB die Geſchwindigkeit $v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.(\frac{x}{a-x})^{\frac{1}{2}}$, woraus nun auch vermög der Formel $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}$ ſo wie im §. 58. I. die mit x zuſammengehörige Dauerzeit folget,

$$t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2fg^{\frac{1}{2}}}.[x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a.\text{arccos}(1 - \frac{2x}{a})].$$

Setzet man nun bey dieſer Benennung $x = a$, ſo iſt im Centralpunkte, $t = \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{4fg^{\frac{1}{2}}}$ und $v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{0^{\frac{1}{2}}} = \infty$ wie vorher; ſetzet man aber $x = a + y$ um über F hinaus gegen B in jeder beliebigen Entfernung y die Bewegung des Körpers zu beſtimmen, ſo iſt wieder v und t **unmöglich** wie bey der vorigen Benennung. Das Geheimniß entſteht daher nicht aus der Benennung. Aber wie ſollte man nun dieſes Geheimniß enthüllen? Einige nehmen ihre Zuflucht zur **Metaphyſik**, wodurch ſie den Knotten nur abſchneiden, aber keineswegs auflöſen, welches zugleich für eine ſo reine, ſo vollkommene Wiſſenſchaft, als die Mathematik allgemein dafür erkennet wird, eine wahre Herabwürdigung iſt, wenn man in einem ſolchen Falle, wie der gegenwärtige iſt, zu anderen unvollkommenen Kenntniſſen die Zuflucht nimmt.

Der Vorhang, welcher bisher dieſes Geheimniß verhüllte, fällt gänzlich hinweg, ſobald man aufmerkſam unterſuchet, ob die Bewegung von F gegen B bloß dadurch richtig beſtimmet werden könne, daß man in den gefundenen Integralgleichungen bey der erſten Bezeichnung $- z$ ſtatt z, und bey der zweyten $a + y$ ſtatt x ſetzet. Wenn man in einer Funktion, welche mittelſt der Integralrechnung gefunden worden, eine Gröſſe verändert, ſo wird bloß dadurch die wahre Veränderung der Funktion nicht jederzeit richtig gefunden; denn es kann ja möglich ſeyn, daß die Integration ganz anders ausfällt, wenn vorher in der Differenzialfunktion die nämliche Veränderung vorgenommen wird; z. B. aus der Differenzialgleichung $dy = x^m dx$ folgt $y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$;

ſe-

ſetzet man nun in dieſer integrirten Gleichung $m = -1$, ſo iſt die Gleichung $y = \frac{x^0}{0} + C$ offenbar falſch; denn wenn man ſchon in der Differenzialgleichung $m = -1$ ſetzet, ſo iſt $dy = \frac{dx}{x}$, und folglich für dieſen Fall die wahre Integralgleichung $y = \text{lognat}\, x + C$.

Bey der geradlinigten Centralbewegung geht wirklich eine Veränderung vor, wenn man die Bewegung über F gegen B unterſuchet; die Centralkraft hat nämlich ſodann eine entgegengeſetzte Richtung; derowegen läßt ſich ſolche blos dadurch keineswegs ſicher beſtimmen, daß man in den gefundenen Integralgleichungen bey der erſten Benennung $-z$ ſtatt z, oder bey der zweyten $a + y$ ſtatt x ſetzet, ſondern um genau und ſicher beſtimmen zu können, ob und was für eine Bewegung von F gegen B ſeyn werde, muß die Veränderung der Kraft ſchon in der Differenzialgleichung der Bewegung angezeiget werden; es iſt nämlich nach der zweyten Benennung $vdv = -2gf^2y^{-2}dy$, weil in einer Entfernung y von F gegen B die Beſchleunigung $= \frac{gf^2}{y^2}$ iſt, und die Centralkraft nach der entgegen geſetzten Richtung wirket; folglich iſt $v^2 = \frac{4f^2g}{y} + C$; um C zu beſtimmen darf man hier nicht den ganzen zurückgelegten Weg von A gezählet, ſondern nur den Weg von F gegen B gerechnet nämlich $y = 0$ ſetzen, weil dieſe letzte Integralgleichung nur auf der Seite FB richtig iſt, allwo nun für $y = 0$ vermög vorhergehenden $v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{0^{\frac{1}{2}}}$ und $v^2 = \frac{4f^2g}{0}$ zu ſeyn ſcheint; allein im mathematiſchen

Verſtande genau genommen (wie es hier ſeyn muß um Conſt. richtig beſtimmen zu können) iſt im Centralpunkte $v^2 = 4f^2g.[\frac{1}{0} - \frac{1}{a}]$ wenn man in der obangeführten Gleichung $v^2 = 4f^2g.[(a-x)^{-1} - a^{-1}]$ keineswegs aber in der darauffolgenden $v^2 = \frac{4f^2gx}{a(a-x)}$ den Weg $x = a$ ſetzet; es iſt demnach $4f^2g.(\frac{1}{0} - \frac{1}{a}) = \frac{4f^2g}{0} + C$, nämlich $C = -\frac{4f^2g}{a}$ und $v^2 = \frac{4f^2g}{y} - \frac{4f^2g}{a}$ oder $v^2 = \frac{4f^2g}{a}.(\frac{a-y}{y})$; folglich iſt in einem Abſtande y von F gegen B die geſuchte Geſchwindigkeit

$$v = \frac{2fg^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}.(a-y)^{\frac{1}{2}}$$

Subſtituiret man nun dieſen Werth für v in der Formel $dt = \frac{dy}{v}$, ſo iſt $dt = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2fg^{\frac{1}{2}}}.y^{\frac{1}{2}}dy(a-y)^{-\frac{1}{2}}$ und folglich iſt die geſuchte Gleichung für die Zeit von F gegen B, allwo Conſt $= 0$ iſt,

$$t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2fg^{\frac{1}{2}}}.[-y^{\frac{1}{2}}(a-y)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a.\text{arc cos}(1 - \frac{2x}{a})].$$

Der Körper geht demnach bey der angenommenen Eigenſchaft der Centralkraft, wenn er in A ihrer Wirkung frey überlaſſen wird, über den Centralpunkt F nach der fortgeſetzten Richtung FB auf eine Entfernung hinaus, die der anfänglichen Entfernung FA gleich iſt; von da geht ſol-

cher

cher wieder in den Anfangspunkt A zurück, und wiederhollet dieſen Weg ohne Aufhören.

Auf die nämliche Art läßt ſich die geradlinigte Centralbewegung beſtimmen, wenn ein anderes Geſetz der Centralkraft angenommen wird, wodurch man findet, daß der Körper jederzeit über den Centralpunkt nach der fortgeſetzten Richtung ſoweit über den Centralpunkt hinausgehe, als er anfänglich auf der entgegengeſetzten Seite davon entfernet war, ſodann wieder umkehre, in den erſten Anfangspunkt wieder gelange, und auf dieſe Art über den Centralpunkt in geradlinigter Richtung immerfort ſich dergeſtalt ſchwinge, daß zu beyden Seiten des Centralpunktes in gleichen Entfernungen von demſelben ſeine Geſchwindigkeiten gleich ſind, wenn die Beſchleunigung der Centralkraft eine Potenzfunktion der Entfernung von was immer für einem ganzen oder gebrochenen poſitiven oder negativen Exponenten iſt *).

VII.

Verbeſſerung ſämmtlicher Druckfehler.

Seite 8 Zeile 10 anſtatt $(3R^*)$ ſoll ſeyn $(3R)^*$. S. 53 Z. 10 anſt. $a+b+f$ ſ. ſ $a+b+p$. S. 64 Z 8 anſt. CEGD ſ. ſ. CFGD. S. 74 Z. 15 anſt. $2(m--n)s]$ ſ. ſ. $2(m-n)].s$. S. 76 in der letzten Z. anſt. $t=0$ ſ. ſ. $v=0$. S. 80 Z. 20 anſt. $\frac{1}{n+1}$ ſ. ſ. $\frac{1}{k+1}$. S. 117 Z. 20 anſt. La-

---

*) Eine ausführlichere Unterſuchung der geradlinigten Centralbewegung, unter dem Titel (Enthüllung eines Geheimniſſes in der höhern Mech. bey der Lehre von der geradlin. Centr. Bew.) habe ich unlängſt nach Leipzig an Hrn Profeſſ. Hindenburg, für das Leipziger Mag. der reinen und angewandten Mathem. eingeſchicket.

dung ſ. ſ. Ladungen. S. 148 in der Zeile tang $85^{\circ}\ 55'$ anſt. 13,01 ſ. ſ. 14,01. S. 151 D. Z. 152 anſt. 132 ſ. ſ. 182. S. 159 Z. 1 anſt. 15° ſ. ſ. 30°. S. 172 Z. 1 anſt. $\frac{c}{q}$ ſ. ſ. $\frac{c}{b}$. S. 205 in der letzten Z. anſt. AM ſ. ſ. BM. S. 215 Z. 4 anſt. $2a^2$ ſ. ſ. $4a^2$. S. 226 Z. 18 anſt. A ſ. ſ. C. S. 309 Z. 26 anſt. Momor ſ. ſ. Marmor. S. 323 Z. 13 anſt. Maſchinen ſ. ſ. Maſchine. S. 330 Z. 27 anſt. ſo viel Zolle ſ. ſ. ſo viel halbe oder auch nur $\frac{1}{3}$ Zolle. S. 351 Z. 14 anſt. 935 ſ. ſ. 945. S. 413 Z. 1 anſt. $P=P+p$ ſ. ſ. $P'=P+p$. S. 451 Z. 11 anſt. **multipliciret** ſ. ſ. **dividiret**. S. 452 Z. 15 anſt. AC ſ. ſ. FC. S. 472 Z. 3 und 4 anſt. $(p-F)$ ſ. ſ. $(q-F)$. S. 492 Z. 11 und 14 anſt. abgeſchloſſenen, **abgeſchloſſene** ſ. ſ. abgeſchoſſenen, **abgeſchoſſene**. S. 515 Z. 11 anſt. Brennpunkles ſ. ſ. Brennpunktes.

In Fig. 69. am Endpunkte der Linie BH iſt der Buchſtab A ausgeblieben. In Fig. 88. ſoll die Diagonale CD gezogen werden.

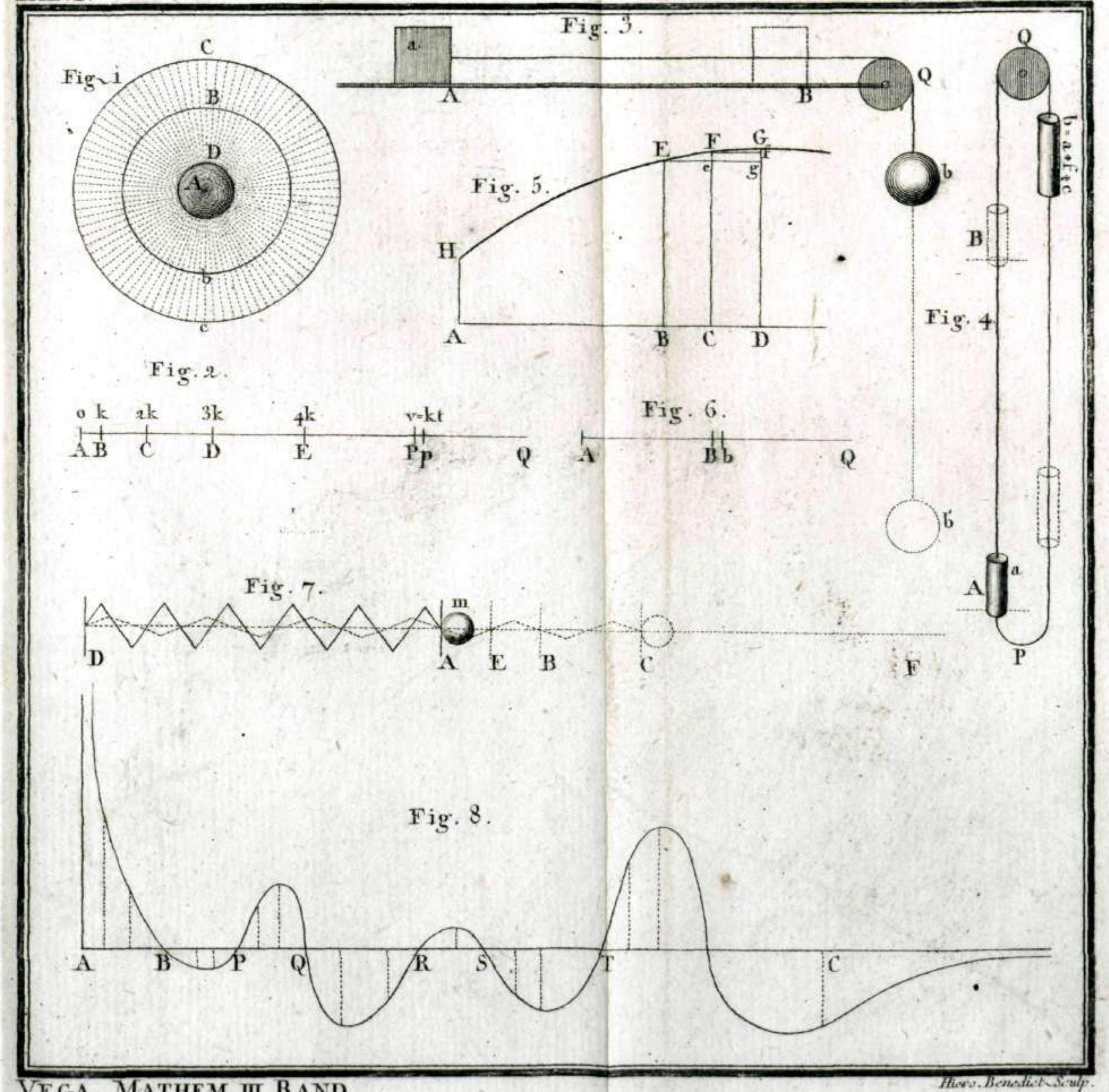
In einigen wenigen Exemplarien ſind auf der 489ten S. in der 22ten Zeile nach dem Wörtchen **des** nachſtehende Worte ausgeblieben, **Schwerpunktes in den Abſtand des**. Auch kann auf eben dieſer Seite in der 21ten Zeile ſtatt (§. 212) geſetzet werden, vermög (§. 212 wo $s=aP$ iſt).

Endlich kann auf der 511ten Seite der 220te §. wegen gröſſerer Deutlichkeit alſo anfangen:

Es iſt $ds^2 = dx^2 + dy^2$ vermög (646); daraus folgt durch die Differenzirung $dsdds =$ u. ſ. w.

In dieſer Beylage S. 13 Z. 8 anſt. CF ſ. ſ. CP. S. 20 Z. 7 anſt. Anomanie ſ. ſ. Anomalie. S. 32 Z. 24 anſt. man man ſ. ſ. man.

TAB. I. FIG. i.



VEGA MATHEM. III. BAND

Hiero. Benedict Sculp.

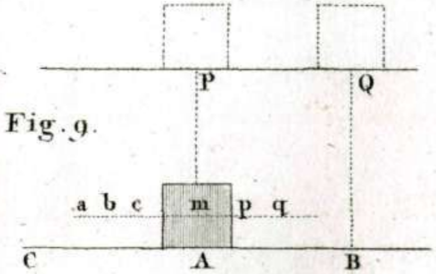


Fig. 9.

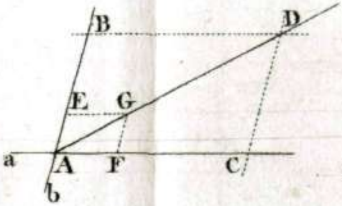


Fig. 10.

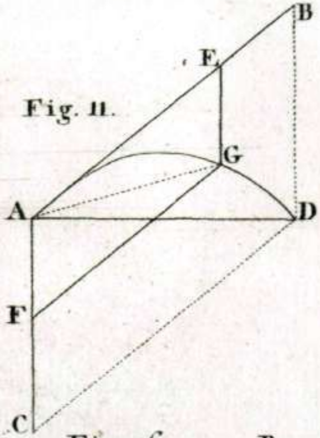


Fig. 11.

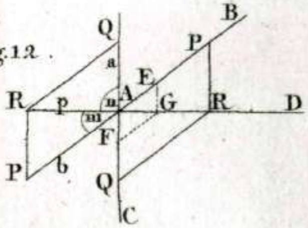


Fig. 12.

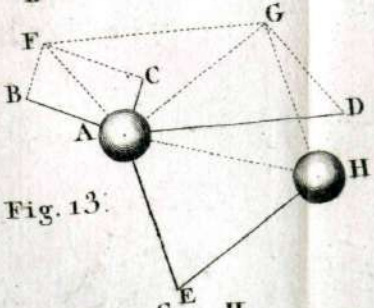


Fig. 13.

Fig. 16.

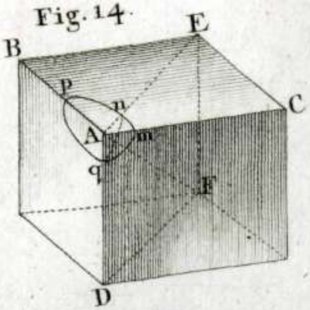


Fig. 14.

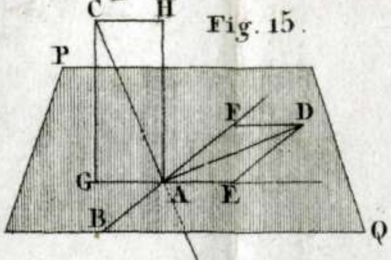


Fig. 15.

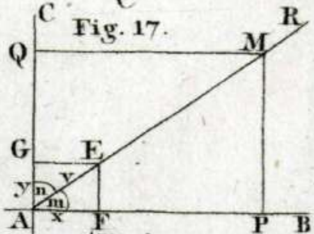


Fig. 17.

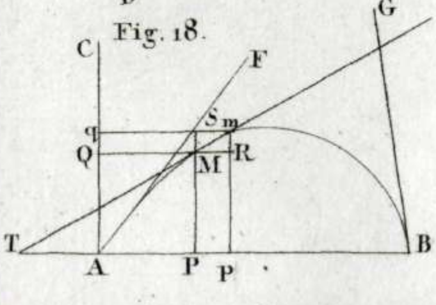


Fig. 18.

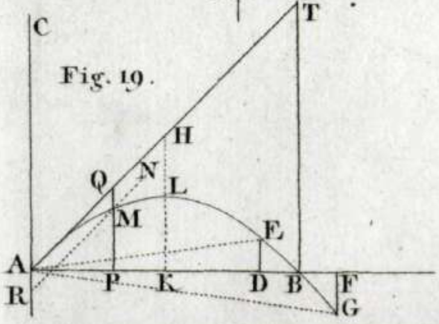
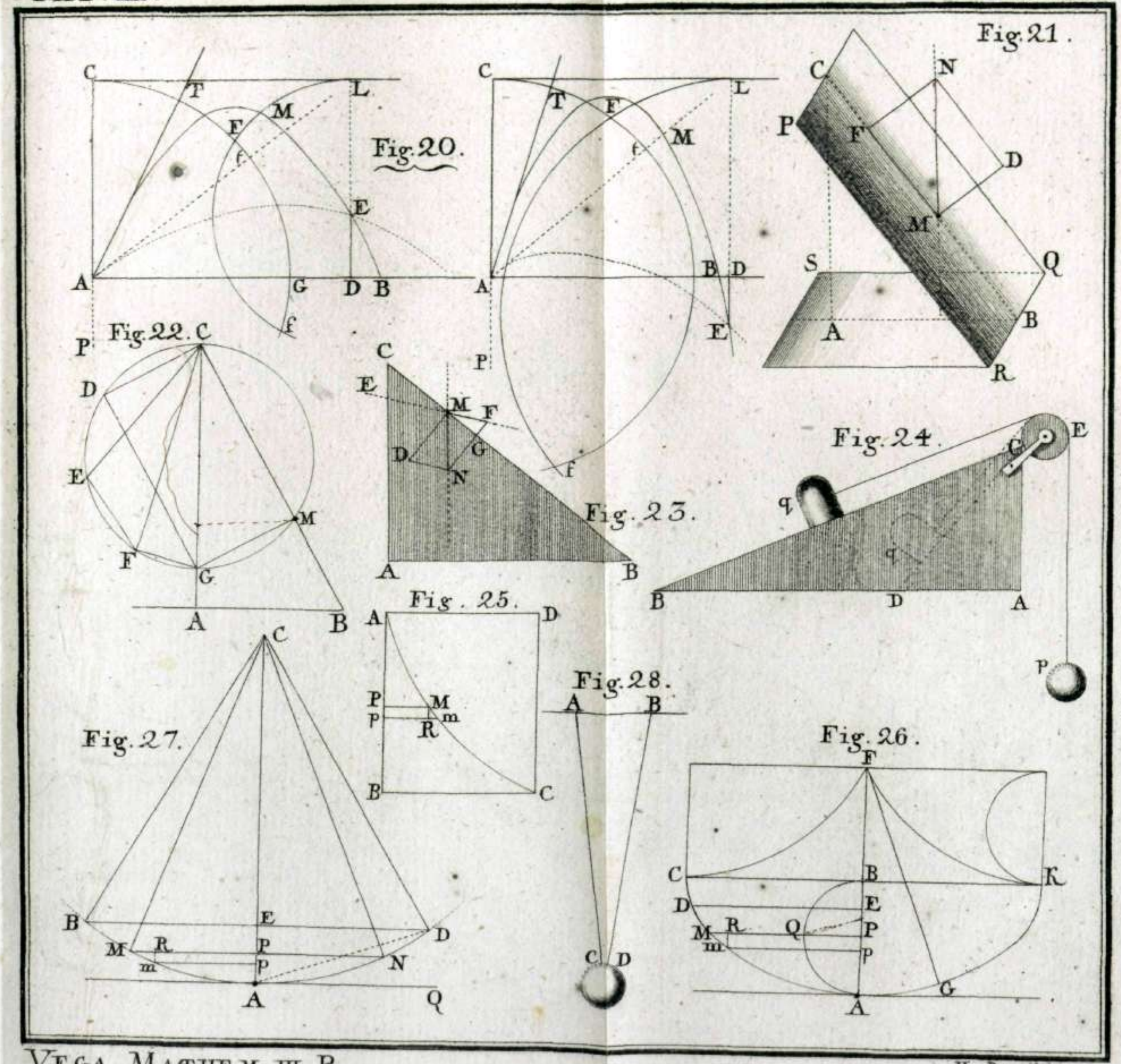


Fig. 19.

H. Benedict Sculp.

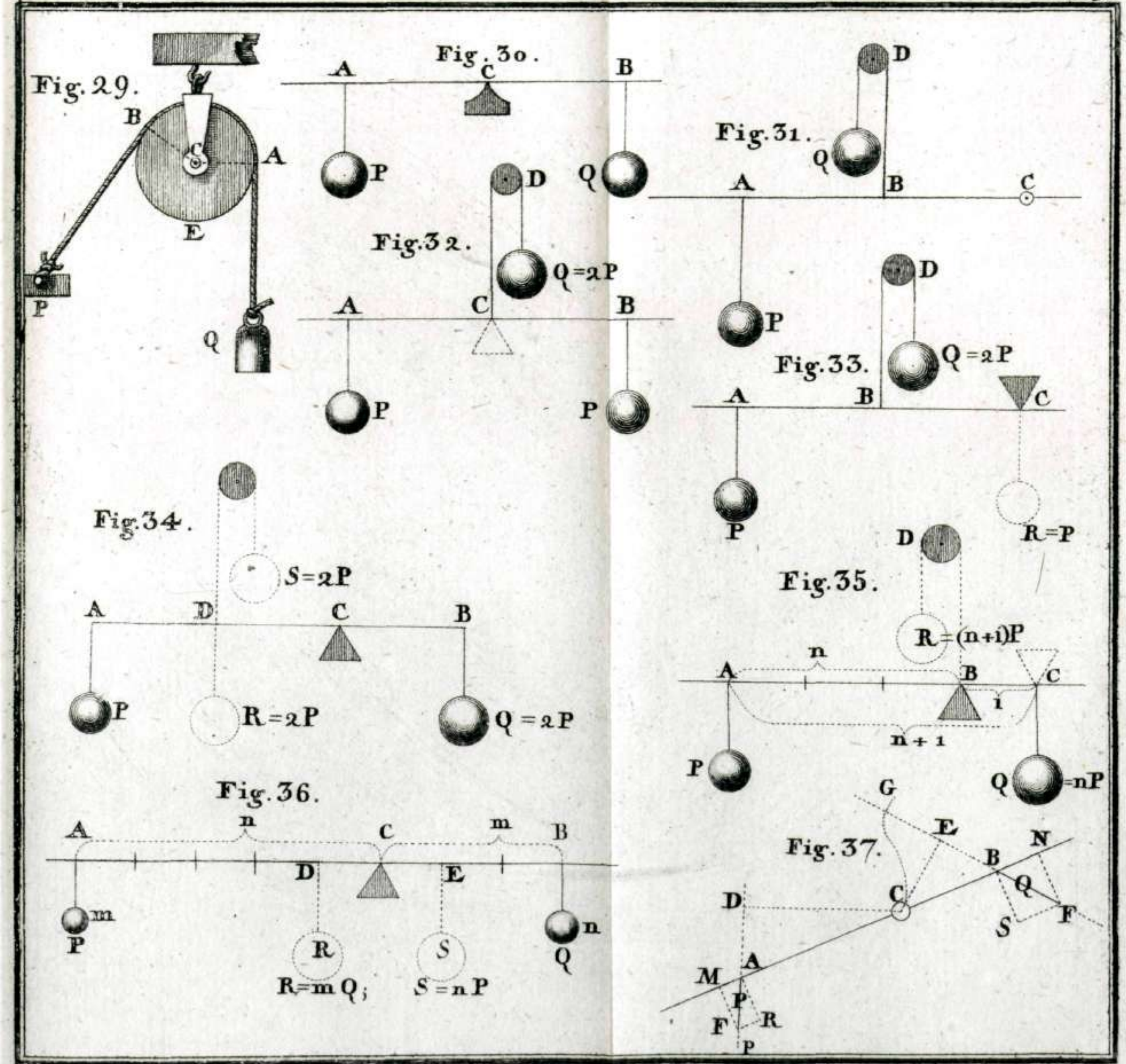
TAB. III. FIG. 20.



VEGA MATHEM. III. B.

H. Benedict Sc.

TAB. IV. FIG. 29.



H. Benedict Sc.

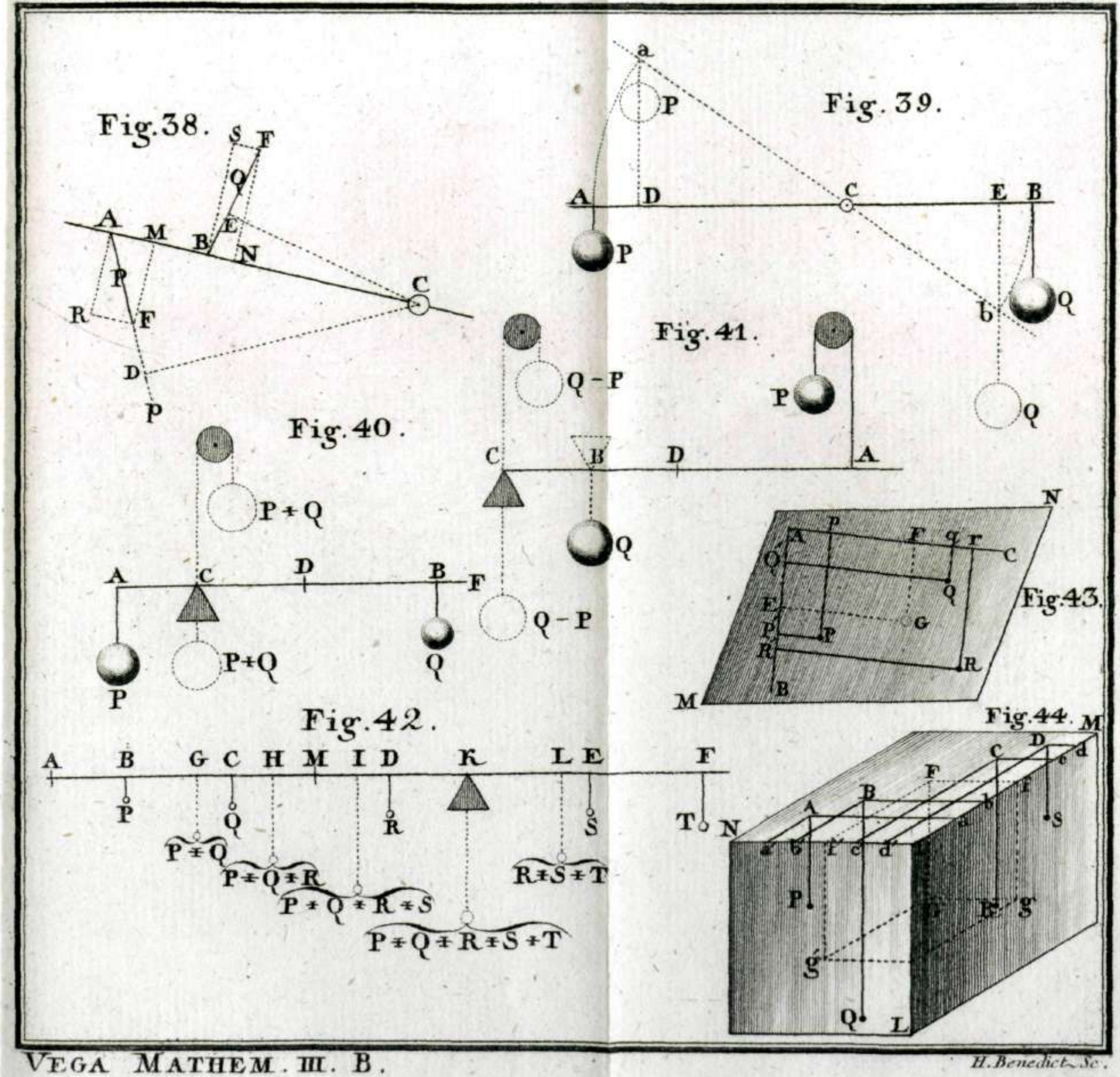


Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

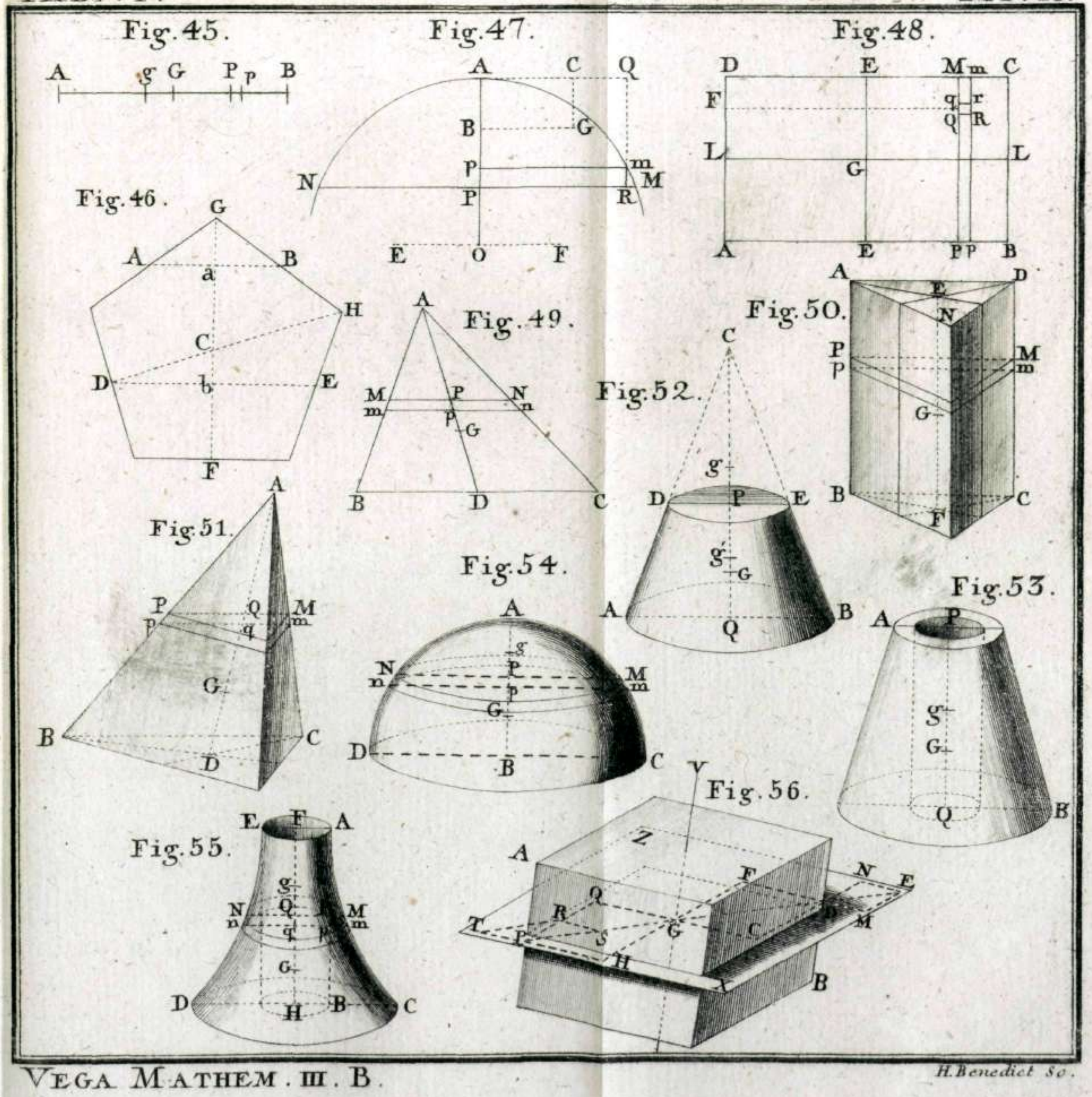
Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 44.

H. Benedict Sc.

TAB. VI. FIG. 45.



VEGA MATHEM. III. B. H. Benedict Sc.

Fig. 57.

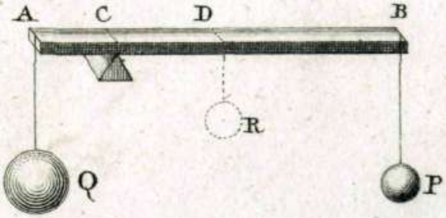


Fig. 58.

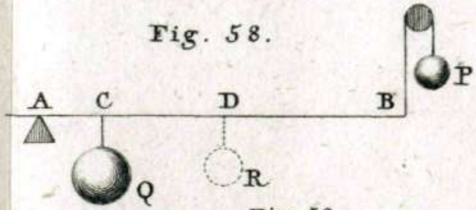


Fig. 59.

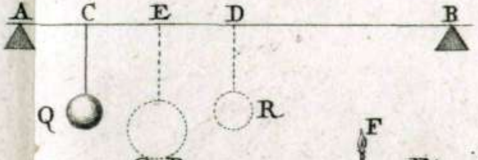


Fig 60.

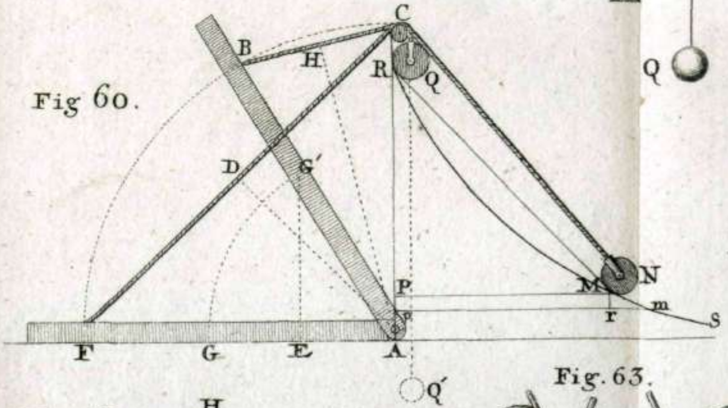


Fig. 61.

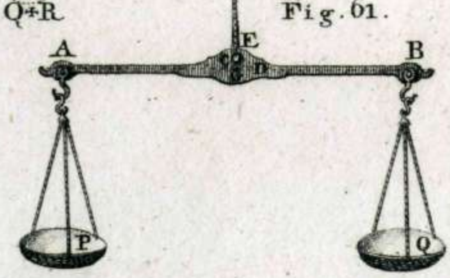


Fig. 62.

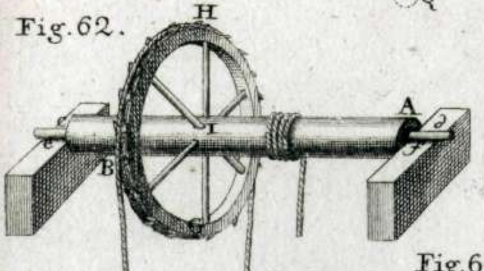


Fig. 63.

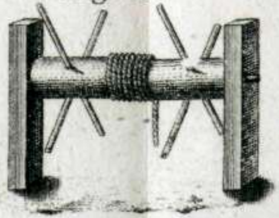


Fig. 64.

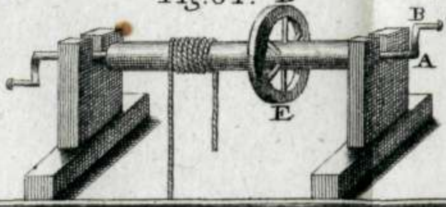
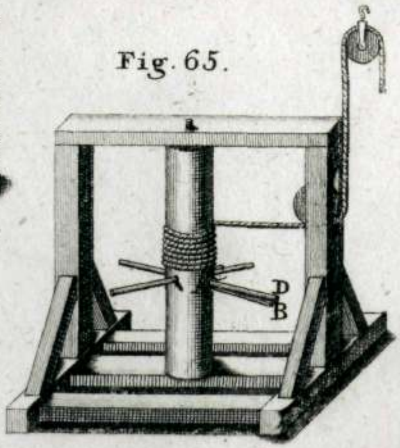
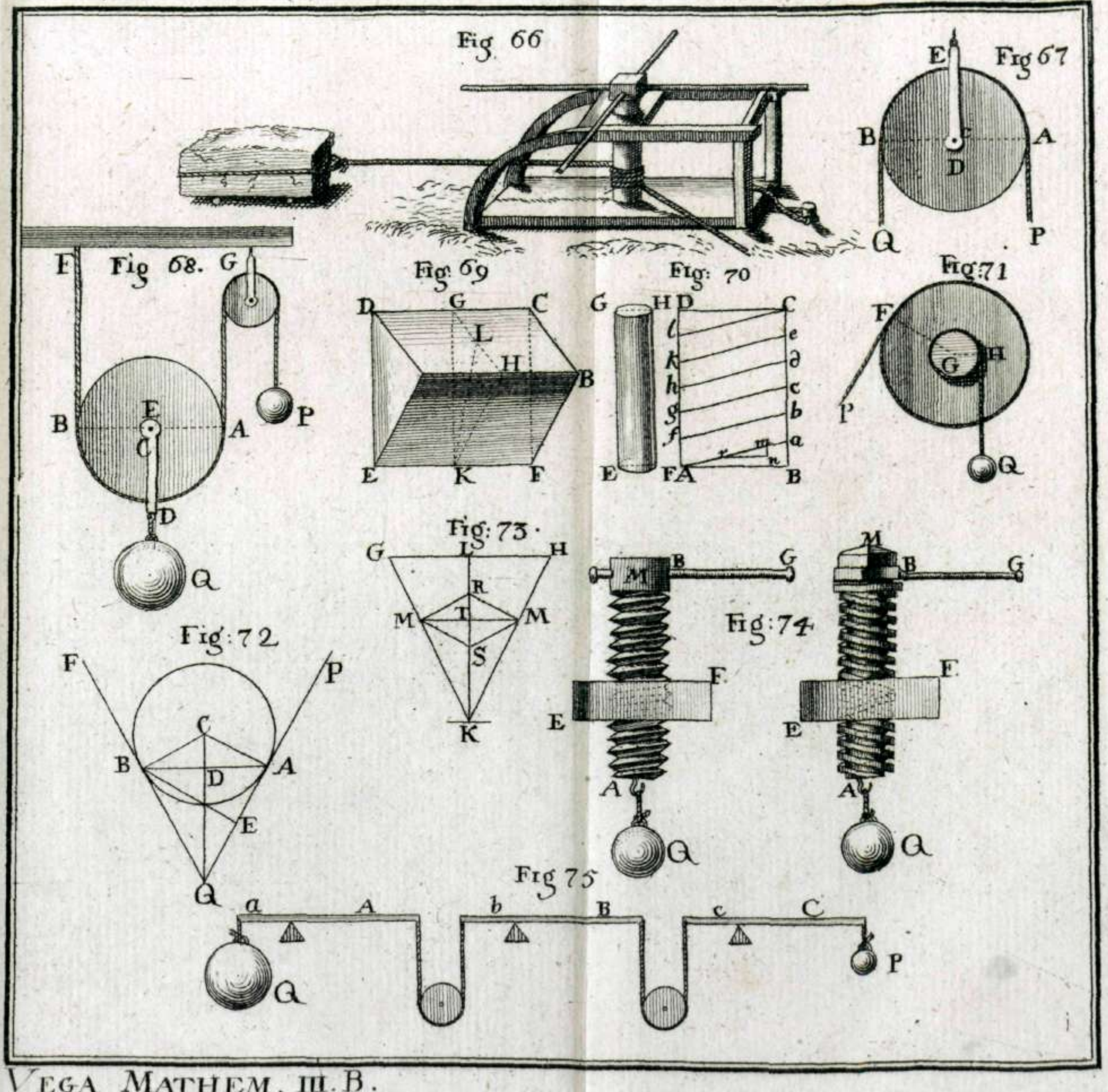


Fig. 65.



H. B. sc.

TAB VIII FIG 66



VEGA MATHEM. III. B.

Fig. 76.

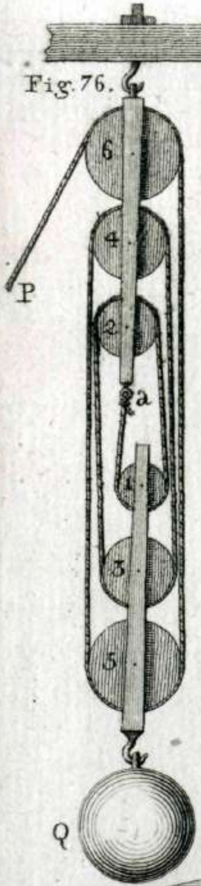


Fig. 77.

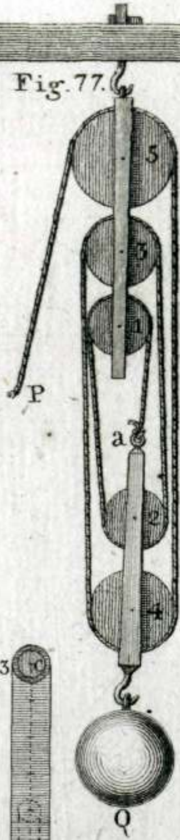


Fig. 78.

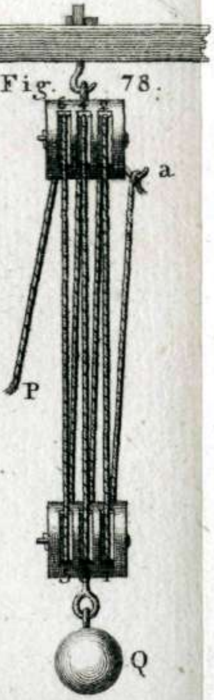


Fig. 79.

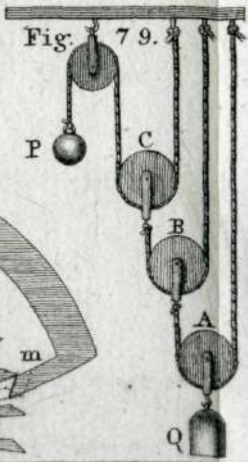


Fig. 80.

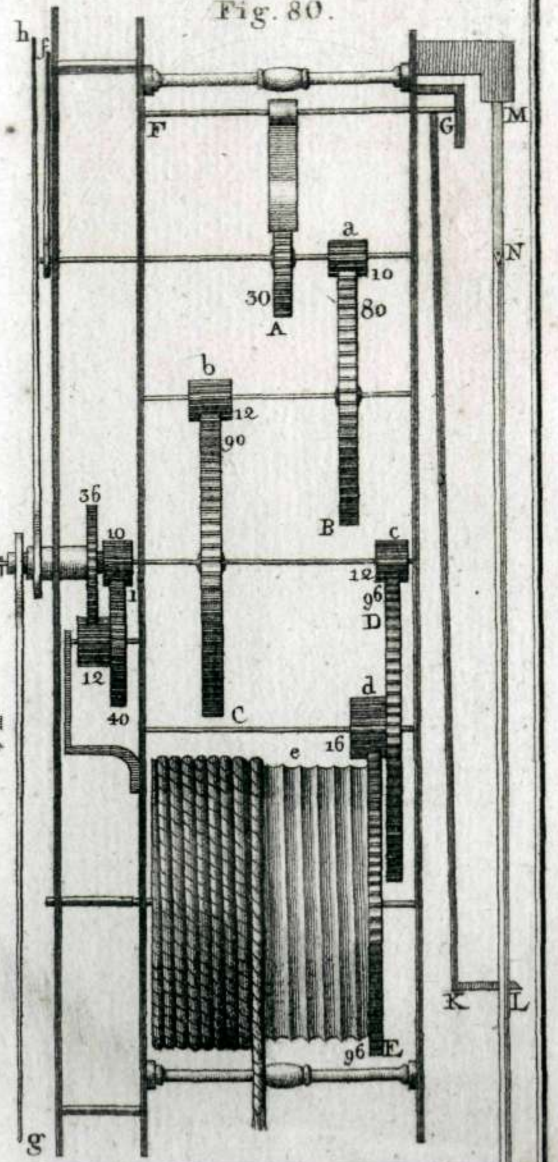
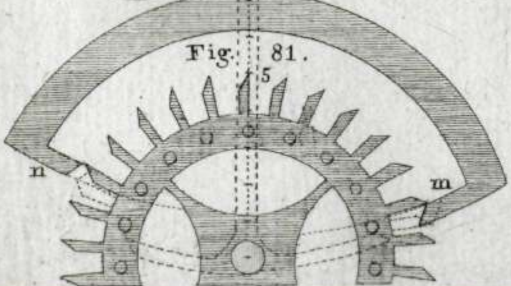


Fig. 81.



K. Benedikt Sc.

Fig. 82

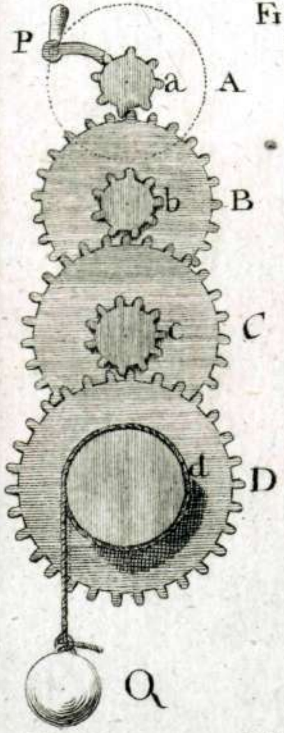


Fig. 83

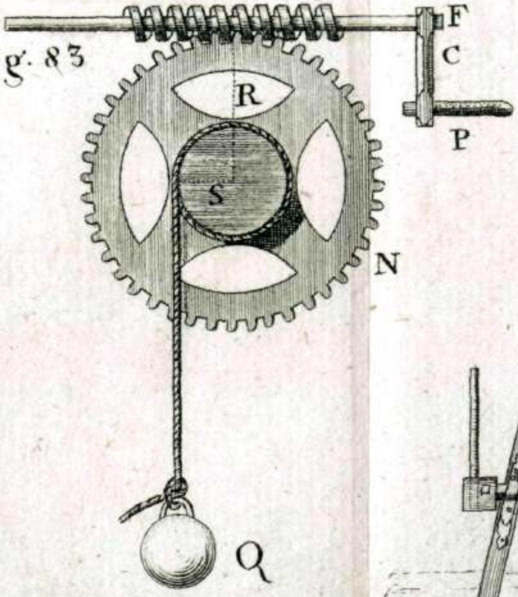


Fig. 84

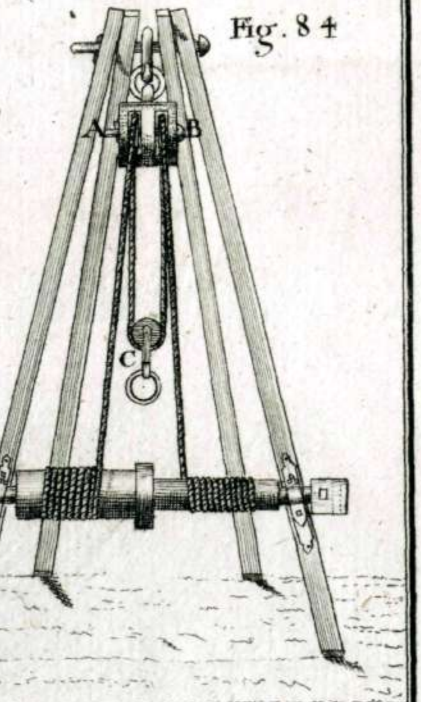


Fig. 85

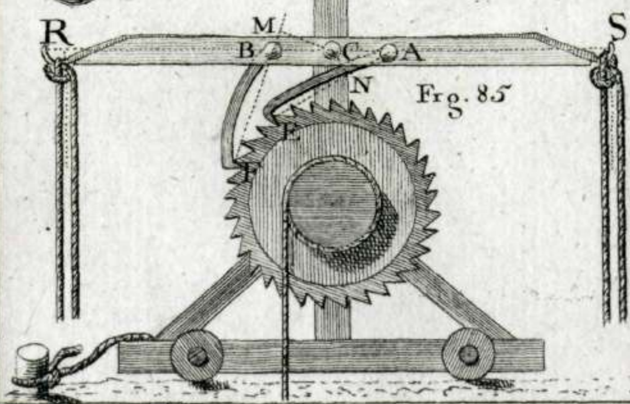


Fig. 86

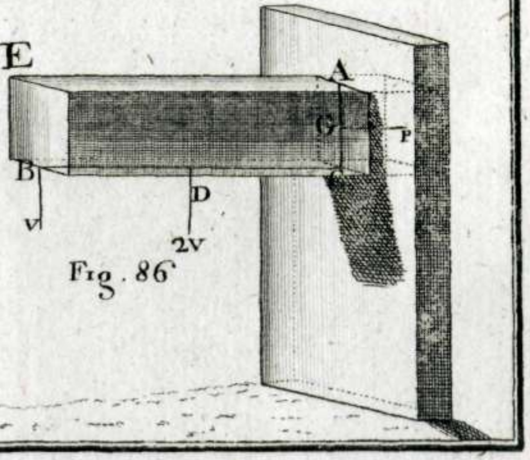


Fig. 87.

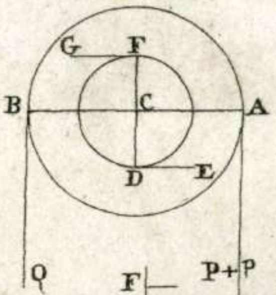


Fig. 88.

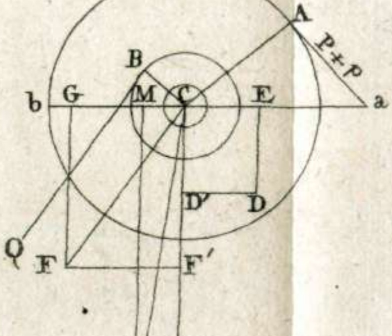


Fig. 89.

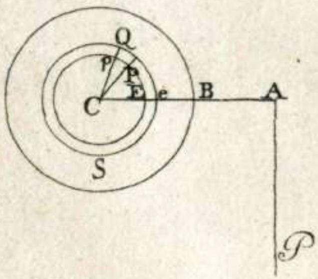


Fig. 92.

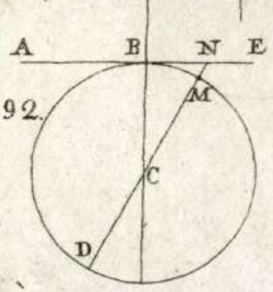


Fig. 90.

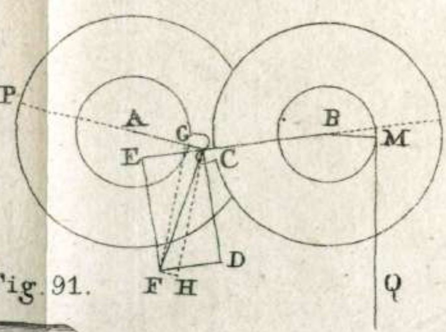


Fig. 91.

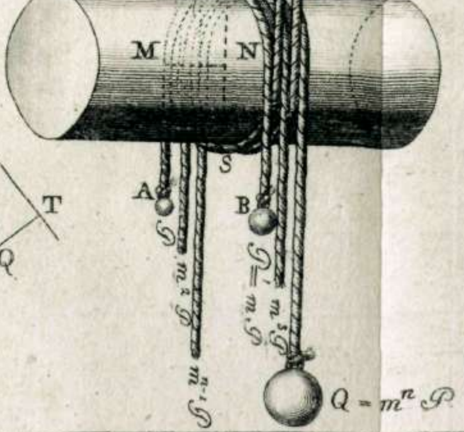


Fig. 94.

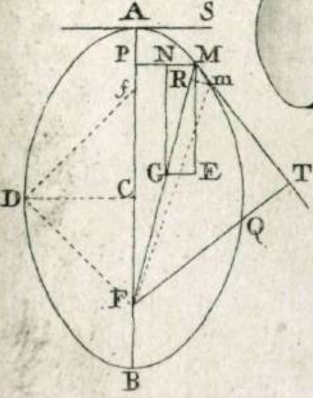


Fig. 93.