[UN]IVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MARIJAN BLEJEC

POSLOVNA STATISTIKA

Druga izdaja

OBRAZCI IN POSTOPKI

LJUBLJANA 1976

U N I V E R Z A   V   L J U B L J A N I

EKONOMSKA FAKULTETA

MARIJAN BLEJEC

P O S L O V N A   S T A T I S T I K A

Druga izdaja

OBRAZCI IN POSTOPKI

LJUBLJANA 1976

PREDGOVOR

Pri praktični uporabi statističnih metod pogosto potrebujemo le ustrezen obrazec, postopek ali tabelo, ne pa natančnega opisa metode in teoretičnega ozadja ali zgleda. Za primer, ko že obvladamo statistične metode, pa potrebujemo ustrezen obrazec, postopek ali tabelo, je namenjena Zbirka obrazcev, postopkov in tabel, ki je sestavljena na osnovi učbenika M. Blejec: Poslovna statistika, Ekonomska fakulteta v Ljubljani, Ljubljana 1976.

Obrazci so označeni z istimi številkami kot v učbeniku, le da ne tečejo tekoče po vrstnem redu, ker so nekateri izpuščeni. V kolikor je že iz obrazca mogoče razbrati postopek, je dan samo obrazec z oznako simbolov, v nasprotnem primeru pa je podrobneje podan postopek za uporabo določene metode.

M. Blejec

Ljubljana, marec 1976

KAZALO

OBRAZCI IN POSTOPKI

ŠESTO POGLAVJE

RELATIVNA ŠTEVILA

Strukture ali razčlenitvena števila

Enostavne strukture

Strukturni deleži

$$Y_1^o = \frac{Y_1}{Y} \; ; \quad Y_1\,\% = 100\,\frac{Y_1}{Y} \; ; \quad Y_1\,‰ = 1000\,\frac{Y_1}{Y} \tag{6.1}$$

Pri tem je Y_1 podatek za del populacije, Y podatek za populacijo, Y_1^o strukturni koeficient, $Y_1\,\%$ strukturni odstotek, $Y_1\,‰$ pa strukturni delež, izražen v promilih.

Dvojne strukture

Splošne zveze za dvojne strukture

6.6 Simbolično moremo vse možne deleže dvojnih struktur nakazati takole: Če z N_{AB} zaznamujemo kombinacijsko tabelo za število enot in ustrezne robne vsote $N_A = \sum_B N_{AB} : N_B = \sum_A N_{AB} : \quad N = \sum_A N_A = \sum_B N_B$ zapišemo splošno kombinacijsko tabelo z vsotami takole

$$\begin{array}{c|c} N_{AB} & N_A \\ \hline N_B & N \end{array} \tag{6.2}$$

Ustrezni strukturni deleži na celotno populacijo so

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{N_{AB}}{N} = P_{AB} & \dfrac{N_A}{N} = P_A \\ \hline \dfrac{N_B}{N} = P_B & \dfrac{N}{N} = 1 \end{array} \qquad (6.3)$$

Vrstične ali stolpične strukturne vrste zapišimo takole

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{N_{AB}}{N_B} = P_{A/B} & \dfrac{N_A}{N} = P_A \\ \hline \dfrac{N_B}{N_B} = 1 & \dfrac{N}{N} = 1 \end{array} \qquad (6.4)$$

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{N_{AB}}{N_A} = P_{B/A} & \dfrac{N_A}{N_A} = 1 \\ \hline \dfrac{N_B}{N} = P_B & \dfrac{N}{N} = 1 \end{array} \qquad (6.5)$$

$P_{A/B}$ pomeni strukturne vrste po znaku A pri pogoju, da se podatki nanašajo na posamezno vrednost B in

$P_{B/A}$ strukturne vrste po znaku B za posamezne delne populacije po znaku A.

Iz gornjih tabel dobimo naslednje zveze:

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_B}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_A}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_A} \quad \text{ali} \qquad (6.6)$$

$$P_{AB} = P_B \cdot P_{A/B} = P_A \cdot P_{B/A}$$

iz te zveze pa dobimo dalje obrazec

$$P_{B/A} = \frac{P_{AB}}{P_A} = \frac{P_B \cdot P_{A/B}}{\sum P_B \cdot P_{A/B}} \qquad (6.7)$$

Stavek o množenju verjetnosti za odvisne dogodke

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A/B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B/A) \tag{6.8}$$

Bayesov obrazec za inverzno verjetnost

$$\Pr(B/A) = \frac{\Pr(B) \cdot \Pr(A/B)}{\sum_{B} \Pr(B) \cdot \Pr(A/B)} \tag{6.9}$$

Strukturni krogi

Preračun strukturnih deležev $Y_1\%$ v ločne stopinje Y_1^{st}.

$$Y_1^{st} = 3{,}6\ Y_1\ \% \tag{6.10}$$

$$Y_1^{st} = 1{,}8\ Y_1\% \tag{6.11}$$

Razmerje med radiji strukturnih krogov (6.12,)

Pri tem pomeni: r_o = znan radij kroga, ki ustreza podatku Y_o; r_1 = radij kroga po datek Y_1.

Statistični koeficienti in gostote

Računanje poprečij

$$\bar{X} = \frac{1}{r}\ (X_1 + X_2 + \ldots + X_r) \tag{6.13}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\ X_o + X_1 + \ldots + X_{r-1} + \frac{1}{2}\ X_r\right) \tag{6.14}$$

Statistični koeficient

$$K = \frac{Y \cdot E}{\bar{X} \cdot i} \tag{6.15}$$

pri čemer pomeni: K = koeficient, Y = razmični podatek (PROMET), $\bar{X}$ = poprečje za trenutni podatek (ZALOGE), i = dolžina časovnega razdobja, za katerega računamo koeficient, E = 100, 1000, 10000, odvisno od tega, na koliko enot trenutnega podatka se nanaša koeficient.

$K_{rec} = \frac{X \cdot i}{Y}$

Enostavni indeksi

Enostavni indeks

$$I_{1/0} = 100 \cdot Y_1/Y_o \qquad (6.10)$$

Pri tem pomeni: Y_1 = podatek, ki ga primerjamo s podatkom Y_o. Y_o = podatek, na katerega primerjamo. Podatek, na katerega primerjamo, imenujemo **bazo** ali **osnovo** indeksa.

Verižni indeks

$$I_k = 100 \cdot Y_k/Y_{k-1} \qquad (6.11)$$

Pri tem pomeni: Y_k = tekoči podatek: Y_{k-1} = podatek za predhodni člen; I_k = verižni indeks.

Preračun indeksov na drugo osnovo

$$I_{2/1} = 100 \frac{I_{2/0}}{I_{1/0}} \qquad (6.12)$$

SEDMO POGLAVJE

FREKVENČNE PORAZDELITVE

Gostota frekvence g_k –

$$g_k = f_k / i_k \tag{7.1}$$

f_k = frekvenca v razredu k ; i_k = širina razreda k ;

Relativna frekvenca f_k^o –

$$f_k^o = f_k / N \tag{7.2}$$

Gostota relativne frekvence φ_k –

$$\varphi_k = g_k^o = f_k^o / i_k = f_k / N.i_k \tag{7.3}$$

$$f_k = N.i_k \cdot \varphi_k \tag{7.4}$$

Kumulativna frekvenčna porazdelitev F_k –

$$F_{k+1} = F_k + f_k \tag{7.5}$$

OSMO POGLAVJE

KVANTILI

Kvantilni rang P

$$R = NP + 0,5 \qquad (8.1)$$

$$P = \frac{R - 0,5}{N} \qquad (8.2)$$

R = rang

Kvantili

Mediana Me

$$Me = y_{P=0.50} \qquad (8.3)$$

Kvartili

$$Q_1 = y_{P=0.25};\ Q_2 = y_{P=0.5o};\ Q_3 = y_{P=0.75} \qquad (8.4)$$

Decili

$$D_1 = y_{0,10},\ D_2 = y_{0,20} \ldots\ldots\ldots\ldots D_9 = y_{0,90} \qquad (8.5)$$

Centili

$$C_1 = y_{0,01} \quad C_2 = y_{0,02} \ldots\ldots C_{98} = y_{0,98} \text{ in } C_{99} = y_{0,99} \qquad (8.6)$$

Izračun kvartilnih rangov P_y iz negrupiranih podatkov

a) Imamo ranžirno vrsto vrednosti enot populacije.

b) V ranžirni vrsti poiščemo, med kateri vrednosti y_0 in y_1 pade vrednost y, za katero iščemo P_y, tako da velja: $y_0 \leq y < y_1$. Vrednosti y_0 naj ustreza rang R_0.

c) Rang R_y, ki ustreza vrednosti y, dobimo z linearno interpolacijo po obrazcu

$$R_y = R_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{8.7}$$

d) Kvantilni rang P_y izračunamo iz ranga R_y in obsega populacije po obrazcu

$$P_y = \frac{R_y - 0{,}5}{N} \tag{8.8}$$

Izračun kvantilov y_P iz negrupiranih podatkov

a) Za populacijo imamo ranžirno vrsto.

b) Iz danega P po obrazcu

$$R_P = NP + 0{,}5 \tag{8.9}$$

izračunamo ustrezni rang R.

c) V ranžirni vrsti poiščemo, med katera cela ranga pade izračunani R_P, tako da velja: $R_o \leq R_p < R_1$. Rangoma R_o in R_1 ustrezata vrednosti y_o in y_1.

d) Iz teh podatkov izračunamo z linearno interpolacijo kvantil y_P po obrazcu:

$$y_P = y_o + (y_1 - y_o) \cdot (R_P - R_o) \tag{8.10}$$

Ocena kvantilnega ranga P_y iz frekvenčne porazdelitve

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Poiščemo, v kateri razred pade vrednost y za katero iščemo kvantilni rang P_y. Ta razred imenujemo kvantilni razred in ga zaznamujmo z o. Zanj izpišemo iz frekvenčne porazdelitve ustrezne vrednosti:

$$y_{o,min}, i_o, f_o, F_o.$$

c) Iz gornjih vrednosti izračunamo vrednosti y ustrezni rang R_y po obrazcu:

$$R_y = F_o + f_o \frac{y - y_{o.min}}{i_o} \qquad (8.11)$$

d) Iz dobljenega ranga R_y pa izračunamo kvantilni rang P_y po obrazcu:

$$P_y = \frac{R_y - 0{,}50}{N} \qquad (8.12)$$

Če je obseg populacije N velik, iz obrazca 8.12 običajno izpuščamo 0,5, ker je ta količina za velike populacije nebistvena.

Postopek velja tudi za frekvenčne porazdelitve z različnimi širinami razredov.

Ocena kvantilov y_p iz frekvenčne porazdelitve

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Iz danega P izračunamo ustrezni rang R_p po obrazcu

$$R_p = NP + 0{,}5 \qquad (8.12)$$

Če je populacija velika, v obrazcu 8.13 izpustimo 0,5.

c) V kumulativni frekvenčni porazdelitvi F_k poiščemo, med kateri vrednosti kumulativne vrste pade R, tako da je: $F_o \leqslant R_p < F_1$. F_o ustrezen razred je kvantilni razred. Zanj poiščemo v frekvenčni porazdelitvi količine:

$$y_{o,min}, i_o, f_o \text{ in } F_o .$$

d) Iz teh količin izračunamo ustrezni kvantil y_p po obrazcu:

$$y_p = y_{o,min} + i_o \frac{R_p - F_o}{f_o} \qquad (8.13)$$

Enako kot za kvantilne range velja nakazani postopek tudi za frekvenčne porazdelitve z različnimi širinami razredov.

DEVETO POGLAVJE

SREDNJE VREDNOSTI

Mediana

$$Me = y_{P = .50}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i - A| = \min \; ; \quad \text{če je } A = Me \qquad (9.1)$$

Modus

Izračun

a) Podatke imamo grupirane v frekvenčni porazdelitvi z razredi z enako širino i. Razredi morajo biti tako veliki, da frekvenčna porazdelitev izraža zakonitost gostitve frekvenc.

b) V frekvenčni porazdelitvi poiščemo razred z največjo frekvenco $f_{-1} < f_o > f_{+1}$. Razred z največjo frekvenco (o) imenujmo m o d a l n i r a z r e d .

c) Modus izračunamo po obrazcu

$$M_o = y_{o.min} + i \frac{f_o - f_{-1}}{2f_o - f_{-1} - f_{+1}} \qquad (9.2)$$

Pri tem pomeni razen že navedenih izrazov: $y_{0,min}$ = spodnja meja za modalni razred.

Aritmetična sredina

$$M_y = \frac{1}{N}(y_1 + y_2 + \dots + y_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{Y}{N} \tag{9.3}$$

Pri tem pomeni: M_y = aritmetična sredina. Znak M_y včasih zamenjamo z znakom $\bar{y}$ (y prečna); $\sum_{i=1}^{N} y_i = Y$ = vsota vseh vrednosti v populaciji; $\sum$ = splošen znak za seštevanje izraza, ki stoji za njim; y_i = posamične vrednosti. Nakazane oznake uporabljamo na splošno.

a) Aritmetična sredina je izpeljana ob predpostavki, da je vrednost y za posamezno enoto vsota rezultatov splošnih (M) in posamičnih vplivov (e)

$$y_i = M + e_i \tag{9.4}$$

b) Aritmetična sredina za linearno zvezo iz več znakov

$$u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k y_k \tag{9.5}$$

je enaka linearni zvezi iz aritmetičnih sredin

$$u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k y_k \; ; \quad M_u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k M_k \tag{9.6}$$

$$M_a = a \tag{9.7}$$

Poprečje konstante je enako konstanti in

$$M_{by} = b.M_y \tag{9.8}$$

poprečje znaka, pomnoženega s konstanto, je enako produktu konstante s poprečjem znaka.

c) Vsota odklonov posamičnih vrednosti y_i od aritmetične sredine M_y je nič

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - M_y) = 0 \tag{9.9}$$

d) Vsota kvadratov odklonov posamičnih vrednosti y_i od neke konstante A je najmanjša, če je A enak aritmetični sredini M_y

$$SK = \sum_{i=1}^{N} (y_i - A)^2 : \quad \text{če je: } A = M_y \tag{9.10}$$

e) Sumarno aritmetično sredino populacije M izračunamo iz aritmetičnih sredin M_k delnih populacij z obsegi N_k po obrazcu,

$$M = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + \ldots + N_r M_r}{N_1 + N_2 + \ldots + N_r} = \frac{\sum_{k=1}^{r} N_k M_k}{\sum_{k=1}^{r} N_k} = \frac{1}{N} \sum_k N_k M_k \tag{9.11}$$

Ta način za računanje aritmetične sredine imenujemo t e h t a n o r a č u n a n j e

Splošen obrazec za izračun tehtane aritmetične sredine

$$M = \frac{\sum_k w_k M_k}{\sum_k w_k} \tag{9.12}$$

Pri tem pomeni: w_k = teža - ponder

Izračun aritmetične sredine iz frekvenčne porazdelitve

neposredna metoda

$$M_y = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_r y_r}{f_1 + f_2 + \ldots + f_r} = \frac{\sum f_k y_k}{\sum f_k} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{r} f_k y_k \tag{9.13}$$

$$M_y = \frac{1}{N} (f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_{r-1} y_{r-1} + Y_r) \tag{9.14}$$

y_k = sredina razreda ; f_k = frekvenca ; Y_r = vsota vrednosti v odprtem razredu

Izračun s pomožnim znakom u

$$y_k = y_o + i \cdot u_k \tag{9.15}$$

$$M_y = y_o + iM_u \tag{9.16}$$

$$M_y = y_o + i \cdot \frac{1}{N}\sum f_k u_k \tag{9.17}$$

y_o= sredina razreda, ki je približno v sredini frekvenčne porazdelitve

Izračun s kumulativami

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo iz f_k kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Seštejemo člene v kumulativni vrsti, razen zadnjega, ki leži pod črto, ki pomeni obseg populacije N. Vsoto členov iz kumulativne vrste zaznamujemo s C.

c) Aritmetično sredino M_y izračunamo iz dobljenih podatkov po obrazcu

$$M_y = y_o - i \cdot \frac{C}{N} \tag{9.17}$$

Pri tem pomeni: y_o = sredina zadnjega razreda v frekvenčni porazdelitvi; i = širina razreda ; C = vsota členov v kumulativni vrsti; N = obseg populacije.

Aritmetična sredina aritmetičnih sredin

$$M = \frac{\sum N_k M_k}{\sum N_k} \tag{9.18}$$

$$M_R = \frac{\sum w_k R_k}{\sum w_k} \tag{9.19}$$

Pri tem pomeni: M_R = tehtana aritmetična sredina količin R_k, w_k = ponder-teža za posamezne vrednosti R_k.

Harmonična sredina H

$$H = \frac{N}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \ldots + \frac{1}{y_N}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{y_i}} \tag{9.20}$$

$$H = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}{\frac{w_1}{y_1} + \frac{w_2}{y_2} + \ldots + \frac{w_r}{y_r}} = \frac{\sum w_k}{\sum \frac{w_k}{y_k}} \tag{9.21}$$

Poprečja iz relativnih števil R_k

$$R_k = Y_k / X_k \tag{9.22}$$

moremo ta obrazec pisati v več oblikah. Iz njega dobimo, da je

$$Y_k = X_k R_k \tag{9.23}$$

in

$$X_k = Y_k / R_k \tag{9.24}$$

$$R = \frac{Y}{X} = \frac{\sum Y_k}{\sum X_k} \tag{9.25}$$

$$R = \frac{\sum X_k R_k}{\sum X_k} \tag{9.26}$$

$$R = \frac{\sum Y_k}{\sum Y_k / R_k} \tag{9.27}$$

Odvisnost sumarnega relativnega števila od sestave ponderov

Če preuredimo obrazec 9.26, dobimo

$$R = \frac{\sum X_k R_k}{X} = \sum \frac{X_k}{X} \cdot R_k = \sum X_k^o R_k \qquad (9.28)$$

Podobno dobimo iz obrazca 9.27

$$R = \frac{Y}{\sum Y_k / R_k} = \frac{1}{\sum \frac{Y_k}{Y} / R_k} = \frac{1}{\sum Y_k^o / R_k} \qquad (9.29)$$

Pri tem pomeni: $X_k^o = X_k / X$ strukturni delež za grupni podatek X_k; $Y_k^o = Y_k / Y$ strukturni delež za grupni podatek Y_k.

Geometrijska sredina G

$$G = \sqrt[N]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_N} \qquad (9.30)$$

Iz te opredelitve sklepamo, da ima smisel računati geometrijsko sredino le tedaj, če noben izmed členov ni negativen ali nič.

$$G = \sqrt[\sum w_k]{y_1^{w_1} \cdot y_2^{w_2} \cdots y_r^{w_r}} \qquad (9.31)$$

$$\log G = \frac{1}{N} \sum \log y_i \qquad (9.32)$$

in

$$\log G = \frac{1}{\sum w_k} \sum w_k \log y_k \qquad (9.33)$$

Srednji koeficient dinamike k

$$\bar{k} = \sqrt[N]{k_1 \cdot k_2 \cdots\cdots k_N} \qquad (9.35)$$

$\bar{r} = 100 . \bar{k} - 100$ $\qquad \bar{k} = \bar{r} + 100$ ...

$\bar{r} = \bar{V} - 100$ $\qquad \bar{k} = \frac{\bar{V}}{100}$

in

$$k = \sqrt[N]{Y_N / Y_o} \qquad (9.36)$$

ali splošneje

$$k = \sqrt[t_1 - t_o]{Y_{t_1} / Y_{t_o}} \qquad (9.37)$$

k_1, k_2, k_3 .... k_N = posamični koeficienti dinamike ; $Y_o = Y_{t_o}$ – začetna vrednost pojava ; $Y_N = Y_{t_1}$ = končna vrednost pojava

Odnosi med različnimi vrstami srednjih vrednosti

$$H \leqq G \leqq M \qquad (9.34)$$

$$M - Mo = 3 \cdot (M - Me) \qquad (9.35)$$

$$Mo = M - 3 \cdot (M - Me) \qquad (9.36)$$

$I_{K/o} = V_K \cdot I_{K-1/o} : 100$ NAPREJ

NAZAJ

$I_{K-1/} = \frac{I_K}{V_K} \cdot 100$

IND S STALNO OSNOVO V LETU K-1

NAP. NAZ.

$I_{K-1/o}$

$I_{62/62} = 100$

$I_{63/62} = \frac{110 \cdot 100}{100} = 110$ $\quad I_{61/62} = \frac{100}{101} \cdot 100$

$I_{64/63} = \frac{115 \cdot 110}{100}$

$I_{65/64} = \frac{V_{65} \cdot I_{64/63}}{100}$ $\quad I_{60/61} = \frac{I_{61}}{V_{61}} \cdot 100 =$

DESETO POGLAVJE

MERE VARIACIJE IN KONCENTRACIJE

Variacijski razmik R

$$R = y_{max} - y_{min} \tag{10.1}$$

Kvartilni odklon Q

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) \tag{10.2}$$

Poprečni absolutni odklon AD

$$AD_M = \frac{1}{N}\sum |y - M| \tag{10.3}$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N}\sum |y - Me| \tag{10.4}$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N}(Y_z - Y_s) \tag{10.5}$$

pri čemer je Y_s = vsota podatkov, ki so manjši kot mediana;

Y_z = vsota podatkov, ki so večji kot mediana

$$AD_{Me} = \frac{1}{2}(M_z - M_s) \tag{10.6}$$

pri čemer je M_s poprečje iz členov pod, M_z pa poprečje iz členov nad mediano.

$$AD_M = 2 \cdot P_z \cdot P_s (M_z - \qquad (10.7)$$

pri tem pomeni: $P_s = N_s/N$ in $P_z = N_z/N$ strukturna deleža števila enot pod in nad aritmetično sredino M, $M_s = Y_s/N_s$ in $M_z = Y_z/N_z$ pa poprečji členov, ki so pod oziroma nad skupnim poprečjem M.

Varianca - Standardni odklon . σ^2 . σ-SD.

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - M)^2} \qquad (10.8)$$

negr. pod.

$$SD = \sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (10.9)$$

$M = x - x_o \qquad \sigma^2 = \frac{K}{N} \qquad K = \sum u^2 - \frac{U^2}{N}$

Računanje iz negrupiranih podatkov

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{N}}{N} = \frac{N\sum y_2^2 - (\sum y_i)^2}{N^2} \qquad (10.10)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{Ky}{N} \;;\; Ky = Q_i - Q \;;\; Q_i = \sum y_i^2 \quad Q = \frac{(\sum y)^2}{N} \qquad (10.11)$$

$$u_i = y_i - y_o$$

$K = \sum u^2 - \frac{U^2}{N}$

$U = \sum u$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \sigma_u^2 = K_u/N} \;;\; K_u = \sum u^2 - \frac{(\sum u)^2}{N} \qquad (10.13)$$

$u_i = y_i = y_o$; y_o = poljubna vrednost

Računanje iz grupiranih podatkov

Neposredna metoda

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum f_k(y_k - M_y)^2 \qquad (10.14)$$

σ^2 = varianca

σ = SD = stand. odklon

Metoda pomožnega znaka u

a) Enako kakor za aritmetično sredino izberemo razred, ki je nekje sredi frekvenčne porazdelitve. Vanj postavimo izhodišče znaka u = o, v druge razrede pa navzdol in navzgor od izhodišča ustrezne vrednosti pomožnega znaka u:

. . . . -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, . . .

b) Enako kakor za aritmetično sredino, izračunamo produkte frekvenc f_k z ustreznimi vrednostmi znaka u_k, da dobimo $f_k u_k$.

c) Produkte $f_h u_k$ ponovno pomnožimo z ustreznimi vrednostmi znaka u_k: tako dobimo vrednosti $f_k u_k^2$.

d) Seštejemo frekvence f_k, produkte $f_k u_k$ in produkte $f_k u_k^2$.

e) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcih

$$\sigma_y^2 = \frac{i^2}{N} K_u \; ; \quad K_u = \sum f_k u_k^2 - \frac{(\sum f_k u_k)^2}{N} \qquad (10.15)$$

Pri tem je: i = širina razreda.

Metoda kumulativ

a) Enako kakor pri računanju aritmetične sredine iz frekvenčne porazdelitve iz f izračunamo kumulativno vrsto F. Zadnji člen kumulativne vrste (pod črto) je obseg populacije N.

b) Po enakem postopku kumuliranja izračunamo iz prve kumulativne vrste F drugo kumulativno vrsto FF. Zadnji člen druge kumulativne vrste FF (pod črto) je C_1.

c) Seštejemo vrednosti členov druge kumulativne vrste (brez člena pod črto). To vsoto zaznamujmo s C_2.

d) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcih

$$K_u = 2\,C_2 + C_1 - C_1^2/N \; ; \quad \sigma_y^2 = \frac{i^2}{N} K_u \qquad (10.16)$$

e) Kumulativne vrste moremo računati od zgoraj navzdol ali obratno od spodaj navzgor. Za asimetrične porazdelitve je prikladneje začeti izračunavati kumulative na strani asimetrije.

Sheppardov popravek

$$\sigma^2_{y,pop} = \sigma^2_y - i^2/12 \tag{10.17}$$

Skupna varianca

$$\sigma^2 = M_{\sigma^2} + \sigma^2_M \tag{10.18}$$

Pri tem je

$$M_{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum N_k \sigma^2_k \tag{10.19}$$

tehtana aritmetična sredina grupnih varianc,

$$\sigma^2_M = \frac{1}{N} \sum N_k (M_k - M)^2 \tag{10.20}$$

Poprečna razlika Δ_1 –

$$\Delta_1 = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} (y_i - y_j); \quad y_1 \leq y_2 < \cdots \leq y_i \leq \cdots < y_N \tag{10.21}$$

$$\Delta_1 = \frac{2\left[(N-1)C_o - 2C_1\right]}{N(N-1)} \tag{10.22}$$

C_o in C_1 so vsote iz kumulativ iz ranžirne vrste

Računanje iz grupiranih podatkov $\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum f_k(x-M)^2$

$$\Delta_1 = \frac{2\left[\sum Y_k (F_k + F_{k+1}) - NY\right]}{N(N-1)} \tag{10.23}$$

$\sigma^2 = i^2 \cdot \frac{K}{N}$ $K_M = \sum(f \cdot M^2) - \frac{(\sum f \cdot M)^2}{N}$

$\sigma^2_{corr} = \sigma^2 - \frac{i^2}{12}$

pri čemer so: Y_k = grupna vsota razredu k

F_k = kumulativna frekvenca v razredu k

$Y = \sum Y_k$

N = število enot

Razmerje med Q, AD in SD za normalno porazdelitev

Za normalno porazdelitev velja:

$$Q = 0.6745\ \sigma \doteq 2/3\ \sigma \quad (10.24)$$

$$AD = 0.7979\ \sigma \doteq 4/5\ \sigma \quad (10.25)$$

Relativne mere variacije

Na osnovi variacijskega razmika

$$\frac{2(y_{max} - y_{min})}{y_{min} + y_{max}} \quad (10.26)$$

Na osnovi kvartilnega razmika $Q_3 - Q_1$

$$\frac{Q_3 - Q_1}{M_e} \quad \text{ali} \quad \frac{2(Q_3 - Q_1)}{Q_1 + Q_3} \quad (10.27)$$

Na osnovi poprečnega absolutnega odklona AD

$$\frac{AD_{Me}}{M}, \quad \frac{AD_M}{M} \quad (10.28)$$

Na osnovi standardnega odklona σ

$$KV = \frac{\sigma}{M} \quad (10.29)$$

$KV\% = \frac{\sigma}{M} \cdot 100$

Na osnovi poprečne razlike Δ_1

$$\frac{\Delta_1}{M} \tag{10.30}$$

Koeficiente variacije izražamo kakor je nakazano v gornjih izrazih ali v odstotkih tako, da zgornja razmerja pomnožimo s 100.

$$\frac{AD_{Me}}{M} = Y^o_z - Y^o_s = 2Y^o_z - 1 = 1 - 2Y^o_s \tag{10.31}$$

$$\frac{AD_M}{M} = (Y^o_z - Y^o_s) - (N^o_z - N^o_s) = 2\,(Y^o_z - N^o_z) = 2\,(N^o_s - Y^o_s) \tag{10.32}$$

Pri AD_M/M pomeni Y^o_s in Y^o_z strukturni delež za agregat Y pod oziroma nad poprečjem M, N^o_s oziroma N^o_z pa delež enot pod oziroma nad poprečjem M.

$$KV = \frac{SD}{M} = \sqrt{\frac{Q_i}{Q} - 1}\ ; \quad Q_i = \sum Y_i^2 \ ; \quad Q = \frac{Y^2}{N} \tag{10.33}$$

ENAJSTO POGLAVJE

PROUČEVANJE DINAMIKE POJAVOV - ČASOVNE VRSTE

Oblike časovnih vrst

Kumulativna časovna vrsta K_k

$$K_{k+1} = K_k + Y_k \tag{11.1}$$

K_k = kumulativa ; Y_k = vrednost v tekočem razdobju k

Vrsta sredin $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{1}{r}(Y_1 + Y_2 + \dots Y_r) \tag{11.2}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{r-1} + \frac{1}{2}Y_r\right) \tag{11.3}$$

Vrsta drsečih vsot S_k -

$$S_{k+1} = S_k + Y_k - Y_{k-r} = S_k + {}_r d_k \tag{11.4}$$

Pri tem pomeni: S_k in S_{k+1} = ustrezne vrednosti v vrsti drsečih vsot; Y_k = člen k v osnovni visti; Y_{k-r} = člen osnovne vrste, ki je za r členov pred Y_k ; r = število členov, iz kolikor so računane vsote ; ${}_r d_k = Y_k - Y_{k-r}$ = razlika ustreznih vrednosti za Y.

Vrsta drsečih sredin $\bar{Y}_k$

Če imajo razmiki, na katere se nanašajo sredine, liho število osnovnih razmikov: $r = 2i+1$, izračunavamo časovno vrsto drsečih sredin po obrazcu

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{r}(Y_{k-i} + Y_{k-i+1} + \ldots + Y_k + \ldots Y_{k+i-1} + Y_{k+i}) = \frac{1}{r} S_{k+i+1} \qquad (11.5)$$

Če pa sredine veljajo za sodo število osnovnih razmikov ($r = 2i$), računamo drseče sredine po obrazcu:

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} Y_{k-i} + Y_{k-i+1} + \ldots Y_k + \ldots Y_{k+i-1} + \frac{1}{2} Y_{k+i}\right) \qquad (11.6)$$

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{2r}(Y_{k-i} + 2Y_{k-i+1} + \ldots + 2Y_k + \ldots 2Y_{k+i-1} + Y_{k+i}) = \frac{1}{2r} S'_k \qquad (11.7)$$

$$S'_{k+1} = S_{k+i+1} + S_{k+i+2} = S_{k+i} + {}_r d_{k+i} + S_{k+i+1} + {}_r d_{k+i+1} = S'_k + {}_r d_{k+i} + {}_r d_{k+i+1}$$

Enostavni pokazovalci dinamike

R a v e n Y_k je osnovna časovna vrsta. Že iz sprememb v ravni sklepamo na smer in jakost dinamike pojava.

Če raven časovne vrste izrazimo v primerjavi z nekim stalnim značilnim členom v časovni vrsti, dobimo vrsto i n d e k s o v s s t a l n o o s n o v o.

$$I_{k/o} = 100\, Y_k / Y_o \qquad (11.8)$$

A b s o l u t n a r a z l i k a

$$D_k = Y_k - Y_{k-1} \qquad (11.9)$$

pokaže v absolutnih vrednostih spremembo pojava od člena do člena.

Temp rasti ali stopnja rasti

$$T_k = 100 \frac{Y_k - Y_{k-1}}{Y_{k-1}} = 100 \frac{D_k}{Y_{k-1}} \qquad (11.10)$$

pokaže relativno razliko od člena do člena.

Koeficient dinamike

$$K_k = Y_k / Y_{k-1} \qquad (11.11)$$

pokaže v obliki koeficienta relativne spremembe od člena do člena.

Enak značaj ima verižni indeks

$$I_k = 100 \cdot Y_k / Y_{k-1} \qquad (11.12)$$

$$T_k = 100 \cdot D_k / Y_{k-1} = 100 (K_k - 1) = I_k - 100$$

$$I_k = 100 \cdot K_k \qquad (11.13)$$

Tabela 11.11. Vrednosti posameznih pokazovalcev dinamike pri različnem gibanju pojava

Pokazovalec dinamike	P o j a v		
	raste	zastane	pada
Raven Y_k	$Y_{k+1} > Y_k$	$Y_{k+1} = Y_k$	$Y_{k+1} < Y_k$
Indeks s stalno osnovo	$I_{k+1/o} > I_{k/o}$	$I_{k+1/o} = I_{k/o}$	$I_{k+1/o} < I_{k/o}$
Absolutna razlika	$D_k > 0$	$D_k = 0$	$D_k < 0$
Temp rasti	$T_k > 0$	$T_k = 0$	$T_k < 0$
Koeficient dinamike	$K_k > 1$	$K_k = 1$	$K_k < 1$
Verižni indeks	$I_k > 100$	$I_k = 100$	$I_k < 100$

TREND

LINEAREN TREND

$$T = a + bx \tag{11.14}$$

Transformacija tehničnega časa t na čas z izhodiščem v prvem členu

$$N = 2r + 1 \; ; \quad t = x - \frac{N-1}{2} \tag{11.15}$$

$$N = 2r \quad ; \quad t = 2x - (N-1)$$

Linearen trend

$$T = b_o + b_1 t \tag{11.16}$$

$$b_o = \frac{1}{N} \sum Y \; ; \quad b_1 = \frac{\sum Y t}{\sum t^2} \tag{11.17}$$

$$\sum_1^N t^2 = \frac{1}{2} \binom{N+1}{3} \quad \text{če je } N = 2i + 1 \tag{11.18}$$

LETO | Y | t |

$$\sum_1^N t^2 = 2 \cdot \binom{N+1}{3} \quad \text{če je } N = 2i$$

Tabela 11.13. $\sum t^2$ za $2 \leqslant N \leqslant 30$.

N		2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sum t^2$		2	2	20	10	70	28	168	60	330
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum t^2$	110	572	182	910	240	1360	408	1938	570	2660
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\sum t^2$	770	3542	1012	4600	1300	5850	1638	7308	2030	8990

Linearen trend, transformiran na prvi člen kot izhodišče, izračunamo po obrazcih

$$T = \left[b_o - \frac{b_1(N-1)}{2}\right] + b_1 x \quad \text{za} \quad N = 2i + 1$$

(11.49)

$$T = \left[b_o - b_1(N-1)\right] + 2b_1 x \quad \text{za} \quad N = 2i$$

DVANAJSTO POGLAVJE

PROUČEVANJE ODVISNOSTI MED MNOŽIČNIMI POJAVI

Funkcijska odvisnost

$$y = f(x) \tag{12.1}$$

Korelacijska odvisnost

$$y = f(x) + e \tag{12.3}$$

<u>Določanje regresijskih krivulj</u>

<u>Metoda grupnih sredin</u>

$$\bar{y} = \bar{f}(x) + \bar{e} \doteq f(\bar{x}) \tag{12.5}$$

prečna črtica pomeni poprečja

<u>Analitična metoda določanja regresijskih krivulj</u>

Regresijska funkcija

$$y' = f(x;\ a, b, c\ldots) \tag{12.6}$$

Merilo prilagojenosti

$$\sum_i (y_i - y_i')^2 = F(a, b, c\ldots) \tag{12.7}$$

Mera jakosti odvisnosti

$$y = \bar{y} + (y' - \bar{y}) + (y - y') \tag{12.8}$$

Pri tem pomeni:

$\bar{y}$ = rezultat splošnih vplivov; $(y' - \bar{y})$ = rezultat vpliva koreliranega znaka x;

$(y - y')$ = rezultat vpliva drugih, posamičnih dejavnikov.

pojasnjena varianca

$$\sigma^2_{y'} = \frac{1}{N}\sum (y' - \bar{y})^2 \tag{12.9}$$

nepojasnjena varianca

$$\sigma^2_e = \frac{1}{N}\sum (y - y')^2 \tag{12.10}$$

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{y'} + \sigma^2_e \tag{12.11}$$

$$\frac{\sigma^2_{y'}}{\sigma^2_y} + \frac{\sigma^2_e}{\sigma^2_y} = 1 \tag{12.12}$$

Indeks korelacije

$$i_{y.x} = \sigma_{y'} / \sigma_y \tag{12.13}$$

$i^2_{xy} = \sigma^2_{y'}/\sigma^2_y$

$$i_{y.x} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_e}{\sigma^2_y}} \tag{12.14}$$

Standardna napaka ocene

$$\sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - i^2_{y.x}} \tag{12.15}$$

Linearna odvisnost

Regresijski premici

$$y' = M_y + b_1 (x - M_x) \tag{12.16}$$

$$x' = M_x + b_2 (y - M_y) \tag{12.17}$$

$$b_1 = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} \quad ; \quad b_2 = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} \tag{12.18}$$

Kovarianca

$$C_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x - M_x)(y - M_y) \tag{12.19}$$

Korelacijski koeficient

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{12.20}$$

Izračun pokazovalcev linearne odvisnosti

	x	y	x^2	xy	y^2
1.	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$	y_1^2
	x_2	y_2	x_2^2	$x_2 y_2$	y_2^2
	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	x_N	y_N	x_N^2	$x_N y_N$	y_N^2
2.	$X = \sum x$	$Y = \sum y$	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$
3.	$M_x = X/N$ $= \bar{x}$	$M_y = Y/N$ $= \bar{y}$	$K_x = \sum x^2 - \frac{X^2}{N}$	$K_{xy} = \sum xy - \frac{XY}{N}$	$K_y = \sum y^2 - \frac{Y^2}{N}$
4.			$\sigma_x^2 = K_x/N$	$C_{xy} = K_{xy}/N$	$\sigma_y^2 = K_y/N$

(18.21)

5. $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ $\qquad$ $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$

6. $b_1 = \dfrac{C_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{K_{xy}}{K_x}$; $\rho_{xy}^2 = b_1 b_2 = \dfrac{C_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}$; $b_2 = \dfrac{C_{xy}}{\sigma_y^2} = \dfrac{K_{xy}}{K_y}$

7. $\rho_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}$ $= r$ = korel. koefic.

r^2 determ. koeficient

8. $\sigma_{e.y} = \sigma_y \sqrt{1-\rho_{xy}^2}$; $\sqrt{1-\rho_{xy}^2}$; $\sigma_{e.x} = \sigma_x \sqrt{1-\rho_{xy}^2}$

9. $y' = M_y + b_1 (x - M_x)$ $\qquad$ $x' = M_x + b_2 (y - M_y)$

$\bar{y}$ $\qquad$ $\bar{x}$ $\qquad$ $\bar{x}$ $\qquad$ $\bar{y}$

V shemi je nazorno nakazan potek za računanje pokazovalcev linearne odvisnosti. Pogosto posamičnih rezultatov iz točke 1 niti ne pišemo, ker na računskem stroju dobimo vsote iz točke 2 direktno

Včasih se izkaže tehnično koristno, če obračunamo pokazovalce linearne odvisnosti iz reduciranih vrednosti $u = x - x_o$ in $v = y - y_o$. Vse količine, razen $M_x = x_o + M_u$; $M_y = y_o + M_v$ so invariantne in velja $\sigma_x^2 = \sigma_u^2$; $\sigma_y^2 = \sigma_v^2$;

$$C_{xy} = C_{uv} \; ; \; b_{1xy} = b_{1uv} \; ; \; b_{2xy} = b_{2uv} \; ; \; \rho_{xy} = \rho_{uv}$$