PREMIKALNI TOK

ANDREJ LIKAR[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: premikalni tok

Članek obravnava koncept premikalnega toka, ki ga je James Clerk Maxwell uvedel v svoji 'Razpravi o elektriki in magnetizmu' leta 1873. Maxwell je poudaril, da moramo poleg pravega električnega toka, od katerega so odvisni elektromagnetni pojavi, upoštevati tudi spreminjanje gostote električnega polja. To je privedlo do dopolnitve Amperovega zakona, ki sedaj vključuje premikalni tok, s čimer je razrešen problem, ko v kondenzatorju teče električni tok, a ploskve ne prebada noben tok. Članek podrobno razlaga fizikalne pojave, povezane s premikalnim tokom, in kako se z njim reši matematična in fizikalna skladnost Maxwellovih enačb.

DISPLACEMENT CURRENT

The article discusses the concept of displacement current, which was introduced by James Clerk Maxwell in his 'Treatise on Electricity and Magnetism' in 1873. Maxwell emphasized that, in addition to the true electric current, which is responsible for electromagnetic phenomena, we must also consider the changing density of the electric field. This led to the modification of Ampere's law, which now includes the displacement current, thus resolving the problem when an electric current flows through a capacitor but no current passes through its plates. The article provides a detailed explanation of the physical phenomena related to the displacement current and how it ensures the mathematical and physical consistency of Maxwell's equations.

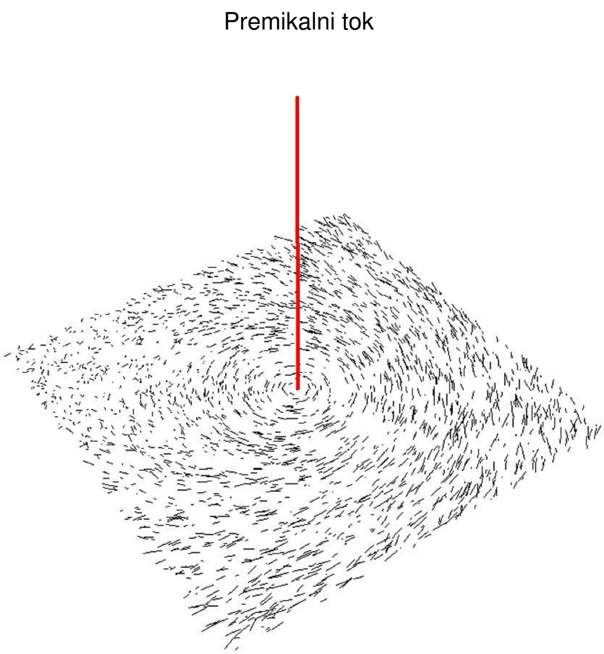
Leta 1862 je v članku in potem leta 1873 v svoji *Razpravi o elektriki in magnetizmu* James Clerk Maxwell (1831–1879) vpeljal pojem premikalnega toka. V točki 610 *Razprave* (vseh točk je 866!!) Maxwell povzema takole:

> "Ena od glavnih posebnosti te razprave je doktrina, ki zagotavlja, da pravi električni tok, od katerega so elektromagnetni pojavi odvisni, ni le tok nabojev, temveč je treba upoštevati tudi spreminjanje gostote polja $\vec{D}$."

Maxwell ne navaja, kako je prišel do tega sklepa. Danes je v učbenikih prepričljiva razlaga, ki gre takole. Mislimo si ravno žico, po kateri teče električni tok. Po Amperovem zakonu se okrog žice ustvari krožno magnetno polje, kar lahko brez težav opazimo s preprostim poskusom z železnimi opilki (glej sliko 1). Opilki se kot majhne magnetnice postavijo tangencialno na krožnice s središčem v žici.

Matematično Amperov zakon zapišemo takole:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I. \tag{1}$$



Slika 1. Poskus z železnimi opilki, ki se okrog žice s tokom postavijo tangencialno na krožnice s središčem v žici.

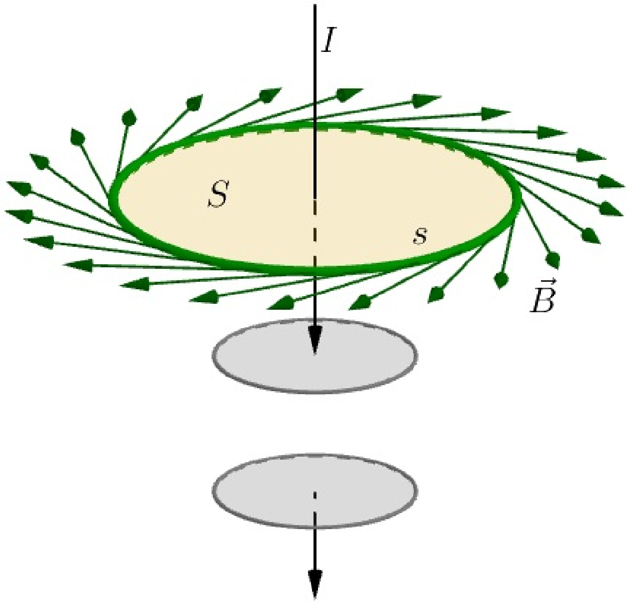
Na levi je integral skalarnega produkta magnetnega polja $\vec{B}$ in premika $d\vec{s}$ po poljubni poti s okrog vodnika, na desni pa tok I, ki prebada poljubno oblikovano ploskev, katere rob je izbrana pot s na levi, pomnožen z magnetno (indukcijsko) konstanto μ_0. Sedaj prekinemo žico s ploščatim kondenzatorjem in po žici spet poženemo tok. Na zgornji plošči kondenzatorja se naboj nabira, s spodnje pa odteka (glej sliko 2). Krožna pot in ploskev sta sicer poljubni, a za krožno pot izberimo krožnico, ploskev pa naj bo bodisi ravnina ali pa paraboloidna ploskev s simetrijsko osjo vzdolž žice.

Pri ravnini na sliki 2 je vse v redu – ploskev prebada žica z električnim tokom I. Na naslednji sliki (slika 3) pa gre paraboloidna ploskev med ploščama kondenzatorja in je ne prebada noben tok. Za to ploskev bi bil integral po sklenjeni poti enak nič, če bi uporabili zgoraj zapisan Amperov zakon. Polje seveda ni odvisno od izbire ploskve. Ker pa ploskev prebada spremenljivo električno polje v kondenzatorju, je Maxwell vpeljal premikalni tok. Preprost račun s približkom homogenega polja v kondenzatorju pokaže, da spremenljivo električno polje reši Amperov zakon, če mu pripišemo lastnost električnega toka. Torej je premikalni tok kar:

$$I_p = S\frac{d(\varepsilon_0 E)}{dt}. \tag{2}$$

Maxwell je dopolnil Amperov zakon in ga zapisal takole:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right). \tag{3}$$



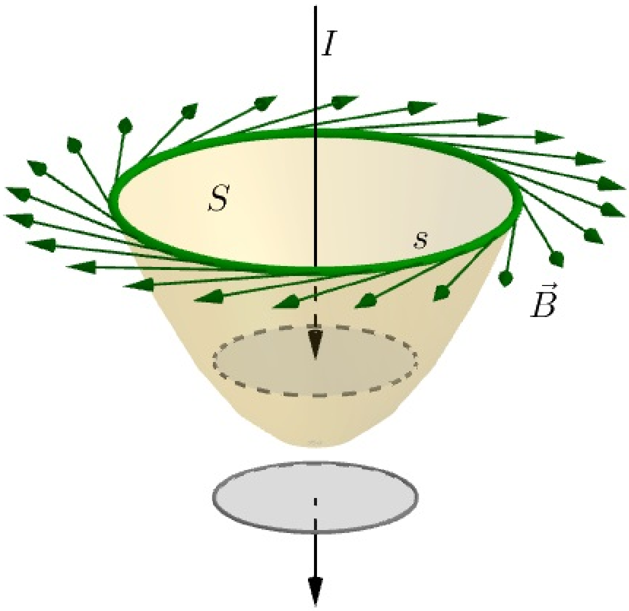
Slika 2. K ilustraciji Amperovega zakona. Žica s tokom I prebada ravninsko ploskev S, ki jo določa krožna pot v obliki krožnice s. Prikazani so vektorji magnetnega polja $\vec{B}$ na krožnici.

Poleg toka po žici I je torej v zakon vključil še premikalni tok:

$$I_p = \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}. \tag{4}$$

Tu integriramo skalarni produkt med $\vec{E}$ in $d\vec{S}$ po ploskvi S, ki jo zaključuje krožna pot s.

Vpeljava premikalnega toka je dodobra razburila fizike 19. stoletja. S Hertzovim odkritjem elektromagnetnih valov je prevladalo mnenje, da je imel Maxwell prav. Številni pa bi radi vedeli, če je premikalni tok povsem ekvivalenten s pravim tokom, kot je to privzel Maxwell. O tem so se spraševali tudi znani fiziki še dolgo po Maxwellovem odkritju. Pregled o tem podaja članek [1]. Danes si redko kdo beli glavo s tem vprašanjem. V našem univerzitetnem učbeniku [2] ga avtorja ironično imenujeta ”famozni tok”, ki



Slika 3. Ploskev S, ki jo omejuje krožnica s, je tu paraboloidna ploskev, ki je žica nikjer ne prebada.

je težko razumljiv in "je v fiziki delal preglavice, dokler se nanj pač nismo navadili". Zanju je le popravek k Amperovemu zakonu, ki poskrbi, da so Maxwellove enačbe skladne s kontinuitetno enačbo za naboj. Je pa vprašanje zanimivo s pedagoškega vidika, saj nekateri učbeniki o njem pišejo nejasno in celo povsem napačno.

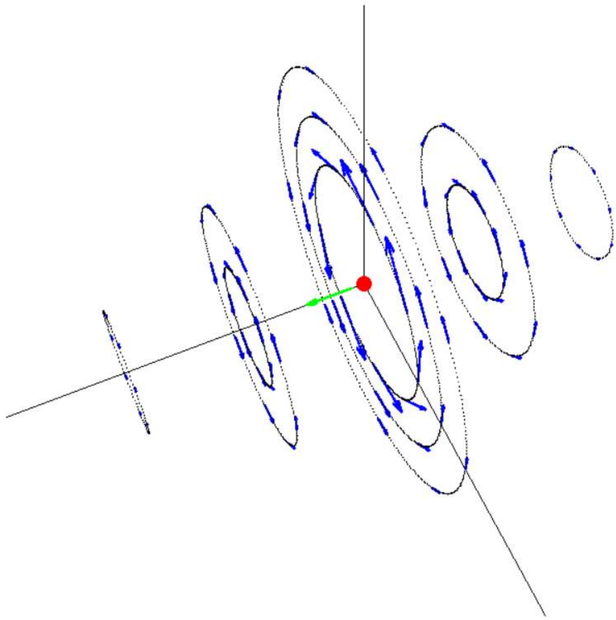
Na preprostem primeru pokažimo, kako deluje premikalni tok. Vzemimo točkast naboj, ki se giblje ves čas enakomerno in premo z majhno hitrostjo $\vec{v}$ v primerjavi s hitrostjo svetlobe. Za ta primer je že Heaviside našel izraza za električno in magnetno polje okrog naboja. Najdemo ju v vsakem učbeniku elektromagnetizma, tako tudi v [2]:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}(t)}{R(t)^3}, \tag{5}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}(\vec{r},t). \tag{6}$$

V vsaki točki prostora, podani z vektorjem $\vec{r}$, in vsak trenutek, podan s časom t, poznamo obe polji. Na desni strani enačb nastopa vektor $\vec{R}(t)$, ki kaže od trenutne lege naboja e do točke opazovanja s krajevnim vektorjem

$\vec{r}$. Električno polje je pri $v^2/c^2 \to 0$ statično, le da potuje s hitrostjo v. Magnetno polje, ko je naboj v koordinatnem izhodišču, je skicirano na sliki 4. Električno polje je bralcem dobro znano in ne potrebuje skice.



Slika 4. Magnetno polje okrog gibajočega se naboja e. Vektorji so zaradi preglednosti prikazani le v nekaj ravninah pravokotnih na smer gibanja naboja.

Sedaj v mislih izberimo integracijsko pot s in ploskev S. To lahko storimo, kakor želimo. V koordinatnem sistemu xyz postavimo krožno pot v ravnino yz s polmerom ρ in središčem v koordinatnem izhodišču (glej sliko 5). Tir naboja naj bo vzdolž osi x. Ploskev S pa naj bo krog v ravnini Oyz. Poglejmo, kakšno magnetno polje nam bo dala Amperova enačba s premikalnim tokom. Naboj e naj bo na desni strani S, torej v točki z $x_e < 0$, tako da toka skozi S ni, prispeva le premikalni tok:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}. \tag{7}$$

Zaradi simetrične postavitve ploskve in integracijske poti je magnetno polje kar

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi\rho B. \tag{8}$$

Na desni strani dobimo za električni pretok brez težav tole:

$$\Phi_E = \int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{2}\left(x_e + \frac{\sqrt{x_e^2 + \rho^2}}{\sqrt{x_e^2 + \rho^2}}\right). \tag{9}$$

Tu je x_e trenutna abscisa naboja. Iz premikalnega toka

$$I_p = \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{10}$$

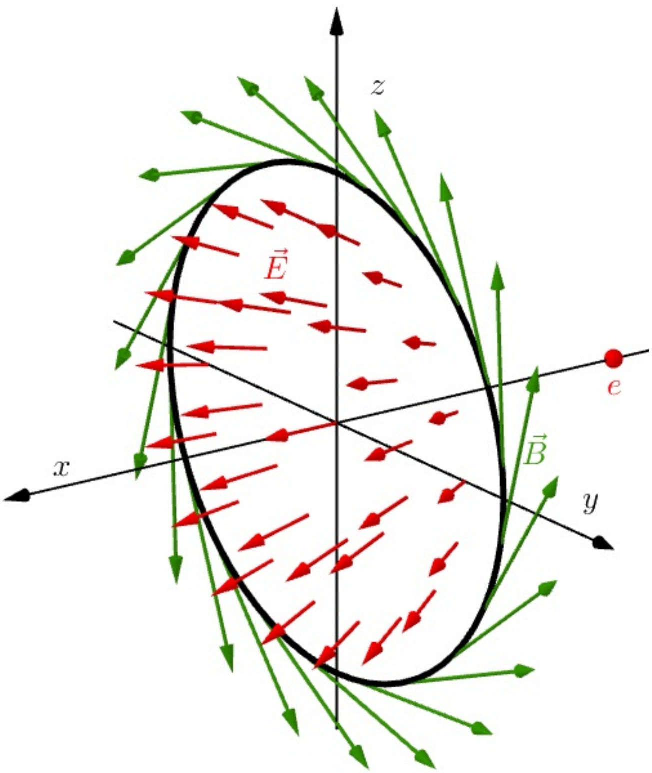
takoj sledi enačba za magnetno polje, povsem v skladu s Heavisideovim izrazom. Magnetno polje gibajočega se delca ne nastane zaradi spreminjajočega se pretoka skozi S. Spreminjajoči pretok le napove, kakšno je magnetno polje na poti s. Podroben račun celo pokaže, da premikalni tok v kondenzatorju na sliki 2 k magnetnemu polju nič ne prispeva (glej [1, 3]). Na tej točki številni učbeniki trdijo prav nasprotno, namreč da je ves prispevek k magnetnemu polju le od premikalnega toka, če je ploskev S sredi kondenzatorja.

Na presenečenje naletimo pri prehodu samega naboja preko ploskve S. Najprej je naboj pri $x_e < 0$ in se giblje proti koordinatnem izhodišču. Električni pretok narašča, ko se naboj približuje ploskvi, ki je v izhodišču koordinatnega sistema, pri prehodu pa se predznak pretoka v hipu obrne in se z oddaljevanjem naboja povečuje proti vrednosti 0. Pri nekoliko razmazanem naboju na intervalu ΔX prehod iz pozitivne vrednosti pretoka k negativni traja nekaj časa (glej sliko 6). Časovni odvod pretoka je v tem času negativen. Amperov zakon z le premikalnim tokom da za magnetno polje povsem napačen rezultat. Vendar sedaj teče naboj skozi ploskev S, torej neki tok prebada S. Zato moramo v Amperovi enačbi upoštevati ta tok. In če ga, dobimo za magnetno polje pravilen Heavisideov izraz! Jasno je, da preskok električnega pretoka ne vpliva na magnetno polje. Pravi tok in premikalni tok družno kažeta, kako je magnetno polje ovito okrog izhodišča. Ovitost je torej preprosto povezana s tokom in premikalnim tokom. Ovitost sama po sebi pa nima neposredne zveze z virom polja. Magnetno polje $\vec{B}$ se je do opazovanega trenutka gradilo iz preteklosti.

Z vpeljavo elektromagnetnih potencialov φ in $\vec{A}$ najpreprosteje pridemo do alternativnih izrazov za električno in magnetno polje. Skalarni potencial φ in vektorski $\vec{A}$ sta povezana s poljema takole:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{11}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{12}$$



Slika 5. Električni pretok skozi krožno ploskev, ko je naboj v točki z absciso $x_e < 0$.

V Lorenzovi umeritvi

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

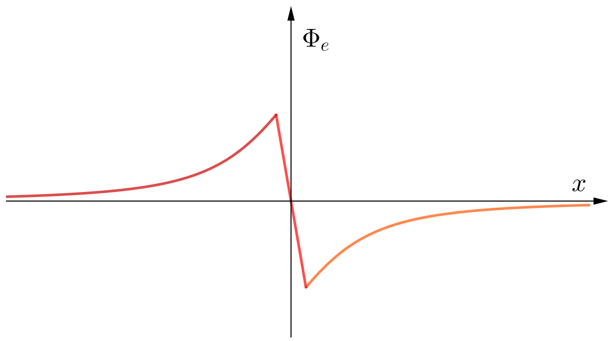
dobimo zanju z upoštevanjem Maxwellovih enačb nehomogeni valovni enačbi:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{14}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}. \tag{15}$$

Z ρ smo označili gostoto naboja v prostoru, z $\vec{j}$ pa ploskovno gostoto električnega toka. Njuni rešitvi pripeljeta do tegale izraza za magnetno polje v koordinatnem izhodišču:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{r}{c}) \times \vec{r}}{r^3} dV. \tag{16}$$



Slika 6. Električni pretok Φ_E v odvisnosti od lege x_e naboja e.

Le kam se je izgubil premikalni tok? Na desni strani ga ni. Odgovor je na dlani: brez njega valovnih enačb za potenciala sploh ne bi dobili. Z desne strani se je pač preselil na levo stran. Ali lahko odtod sklepamo, da je vir magnetnega polja le običajni električni tok? Sedaj, ko vemo, kako pride do zadnje enačbe za magnetno polje, je odgovor na to vprašanje le še stvar interpretacije. Povsem jasno je torej, da bi dodajanje premikalnega toka na desno stran zgornje enačbe pripeljalo do rezultata, ki ne bi bil skladen z Maxwellovimi enačbami. Zato mirno privzamemo, da je le tok v preteklosti vir magnetnega polja v sedanjosti.

Če pa izberemo Coulombovo umeritev:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \tag{17}$$

pa za potenciala velja Poissonova enačba:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \tag{18}$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t))}{\partial t}. \tag{19}$$

Pomembno je poudariti, da na levi in desni strani obeh enačb nastopajo le količine v sedanjosti. Rešitvi teh enačb sta dobro znana Coulombova izraza:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{20}$$

in analogno za vektorski potencial $\vec{A}$. Magnetno polje v izhodišču koordinatnega sistema dobimo v tem primeru kot:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{d(\varepsilon_0 \vec{E})}{dt} \times \vec{r}}{r^3} dV. \tag{21}$$

Magnetno polje torej izrazimo tako z običajnim tokom $\vec{j}$ kot s premikalnim tokom $\frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$, oba seveda vzeta v sedanjosti. Pretekla dogajanja so s tem že zajeta. Številnim Poissonovi enačbi v tem kontekstu nista pri srcu, saj nekako sugerirata, da se spremembi gostote naboja in gostote toka prenašata v hipu po vsem prostoru, kar naj ne bi bilo v skladu s splošnim spoznanjem, da se nič ne razširja hitreje od svetlobe.

Kaj naj si po vsem tem mislimo o 'skrbeh' glede premikalnega toka? Maxwellov popravek Amperove enačbe le nakazuje, da je zaradi spremenljivega električnega polja magnetno polje malo bolj ovito okoli toka. Pri tem po tihem privzamemo, da je tudi premikalni tok vir magnetnega polja. V prostoru brez nabojev edino premikalni tok nakazuje to ovitost, podobno kot pri indukciji spreminjajoče se magnetno polje nakazuje ovitost električnega polja okrog magnetnega. Zakaj pri indukcijskem zakonu ni bilo teh zadreg? Ker če ni magnetnih monopolov, tudi ni magnetnega toka, zato enačbo za indukcijo lažje sprejmemo. Tam interpretacije, da spreminjajoče se magnetno polje le nakazuje ovitost električnega polja, ni treba omenjati, ker smo vedno v prostoru brez magnetnih nabojev in ker brez težav spreminjamo magnetno polje z manipulacijo toka v žicah in tuljavah ali s premikanjem magnetov. Vir spreminjajočega se magnetnega polja pa so slej kot prej tokovi v žicah ali v snovi. Kljub temu lahko učimo, da je vir inducirane napetosti spreminjajoče se magnetno polje.

LITERATURA

[1] John Roche, *The present status of Maxwell's displacement current*, Eur. J. Phys. (1998) 155–166.

[2] R. Podgornik, A. Vilfan, *Elektromagnetno polje*, DMFA-založništvo, 2012.

[3] A. P. French, Jack R. Tessman, *Am. J. Phys.*, **31** (1963) 201–204.