Načini motiviranja učencev pri pouku matematike

Approaches to Motivation of Pupils at Mathematics Lessons

Katja Ilc
Gimnazija Brežice
Samo Repolusk
Univerza v Mariboru,
Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljenih nekaj preizkušenih načinov dela, idej, skrbno izbranih nalog za delo z nadarjenimi učenci pri matematiki.

Ključne besede: nadarjeni učenci, matematika, geometrijske naloge, naloge iz vsakdanjega življenja, medpredmetno naloge.

Σ Abstract

In the article we first present some theoretical frameworks for learning motivation and subsequently discuss nine different techniques, offering an example for each.

***Key words:** mathematical lessons, motivational approaches, learning motivation, teaching methods*

α Uvod s predstavitvijo izhodišč

V članku predstavimo devet načinov motiviranja učencev pri pouku matematike. Ti načini so: izhajanje iz pomanjkljivega znanja učencev, opazovanje vzorcev, predstavitev izziva, matematični »triki«, prikaz uporabnosti matematike, uporaba razvedrilnih nalog, pripovedovanje slikovitih zgodb, aktivno vključevanje učencev v utemeljevanje matematičnih zanimivosti ter uporaba didaktičnih modelov in gradiv. Pri predstavitvi načinov motiviranja smo izhajali iz predlogov v knjigi *The Art of Motivating Students for Mathematics Instruction*, avtorjev Alfreda Posamentiera in Stephena Krulika (2011).

Učna motivacija obsega vse, kar daje pobude za učenje, ga usmerja, mu določa intenzivnost, trajanje in kakovost (Marentič Požarnik, 2003, str. 184). Različne teorije imajo različne poglede na učno motivacijo. Behavioristična teorija podkrepitve poudarja pomembnost posledic nekega ravnanja za njegovo izvajanje. Le-te so lahko pozitivne, kjer gre za zadovoljitev kake potrebe v obliki pohvale, nagrade, ali negativne, kjer gre na primer za podkrepitev zavedanja o neustreznosti določenega napačnega ravnanja s kaznijo. Problem behaviorističnega pristopa je, da človek pri ravnanjih ne izhaja iz notranjih pobud, ampak zgolj od zunaj s sistemom nagrad in kazni. Kognitivna perspektiva poudarja pomembnost ciljev, pričakovanj, razlag in predvidevanj. Pohvala ima lahko pozitiven ali negativen učinek. Negativen v smislu, da ima učenec občutek, da učitelj dvomi o njegovih sposobnostih, če ga na primer pohvali za pravilno rešitev neke lahke naloge. Pri človekovi dejavnosti gre torej za premik k izhajanju iz notranjih pobud. Konstruktivizem poudarja aktivno vlogo učenca pri izgradnji razumevanja. Poudarek je na predhodnem znanju in učenčevi miselni aktivnosti. Socialni konstruktivizem pa opozarja na vpliv skupine na učenje in motiviranost posameznika. Pomemben je dialog med učenci. Humanistično usmerjeni psihologi menijo, da je pomembno, da učenje povezujemo z osebnimi izkušnjami, z radovednostjo, s pozitivnimi čustvi in z odnosom spoštovanja in zaupanja med učiteljem in učencem (prim. Marentič Požarnik, 2003).

Učna motivacija je lahko zunanja ali notranja. Zunanja motivacija se kaže na primer v oceni ali pohvali in ni trajna. Pogosto je povezana s pritiski ali z napetostjo. Viri zunanje motivacije so starši, učitelji in vrstniki. Notranja motivacija se kaže v želji po razvoju lastnih sposobnosti, doseči želimo nekaj, kar nas zanima. Določajo jo izzivi, radovednost, interes, samostojno obvladanje nečesa, neodvisno odločanje za aktivnost, notranji kriteriji uspešnosti. Prednost notranje motivacije je v zadovoljstvu in njeni trajnosti. Pri spodbujanju notranje motivacije učitelja marsikaj omejuje (že na primer to, da je šola obvezna, da je poudarek na ocenah in v srednji šoli posledično na maturi, učni načrt je predpisan). Zunanja in notranja motivacija se med seboj prepletata. Zunanje nagrade lahko zmanjšajo notranjo motivacijo, ki je bolj učinkovita. Vendar nekatere učence ne navdihuje notranja motivacija, zato jih mora učitelj spodbuditi z zunanjimi motivacijskimi sredstvi, da vzbudi začetno ukvarjanje z dejavnostjo (prim. Marentič Požarnik, 2003).

V nadaljevanju bomo predstavili prej omenjene načine motiviranja učencev pri pouku matematike.

β Načini motiviranja učencev pri pouku matematike

Cilj dobrega učitelja je, da se na vsako uro čim bolje pripravi in jo učinkovito izvede. Velik vpliv na dosežek imajo poleg učiteljevega osebnega odnosa do učencev še motivacija, različni poučevalni pristopi in naloge. Učitelji si želimo matematiko približati otrokovemu izkustvenemu svetu in poleg razvijanja logičnega in kritičnega mišljenja predstaviti tudi nekatere vidike njene uporabe (v vsakdanjem življenju in drugih znanostih), njene lepote za človekov intelektualni in duhovni razvoj, strategije reševanja problemov … To lahko dosežemo preko načrtne skrbi za ustvarjanje pogojev za pozitiven odnos do matematike in izzivov, s katerimi se pri njej srečujejo. Med načini vzpostavljanja pozitivnega odnosa je tudi ustrezna motivacija. Ogledali si bomo devet različnih načinov motiviranja in pri vsakem izmed načinov po en zgled. Tukaj gre za enega od možnih načinov razvrščanja motivacijskih tehnik. Marsikatero motivacijo lahko prepoznamo v več kot eni od teh kategorij.

Izhajanje iz pomanjkljivega znanja učencev

V človekovi naravi je, da si navadno želimo neko stvar, ki se je lotimo in se nam zdi smiselna, tudi končati. Tako na primer zbiralci sličic želijo zapolniti svoj album do konca, majhni otroci do zadnjega sprašujejo »Zakaj?«, dokler ne pridejo stvari do dna. Na podoben način imajo učenci naravno potrebo po tem, da svoje znanje razširijo in nenehno dopolnjujejo.

Običajno učence motivira, če odkrijemo pomanjkljivosti v predznanju, tako da razpravljamo o določeni matematični vsebini in učenci sami ugotovijo, v kolikšni meri to vsebino razumejo. Učiteljeva naloga je, da učence aktivira v smeri, da sami poiščejo to »luknjo« v znanju in se sami potrudijo, da jo zapolnijo, kolikor je v domeni njihovih zmožnosti.Ta način motiviranja lahko uporabimo pri prav vsaki uri matematike.

Predstavili bomo, kako lahko učence motiviramo, tako da izhajamo iz njihovega pomanjkljivega znanja. Ko začnemo obravnavati novo matematično vsebino, navedemo nekaj enostavnih primerov, ki vsebujejo podobne situacije, nato pa primer, kjer se situacija nekoliko spremeni, vendar gre še vedno za isto matematično vsebino. Učence na tak način vodimo do nepoznanega pojma in jim zbudimo željo po tem, da nadgradijo svoje znanje pri določeni matematični vsebini. Tak način je boljši kot deduktivni pristop, kjer je ura razdeljena v grobem v dva dela: teorija (frontalni zapis nove vsebine na tablo) in naloge (utrjevanje naučenega). Seveda je to učinkovito, če je pravilno izvedeno.

ZGLED 1: Uvod v logaritemsko funkcijo

Učenci se bodo prvič srečali z definicijo logaritma. Ker že poznajo potenčno in eksponentno funkcijo, navedemo nekaj primerov, ki jih bodo znali rešiti z njihovo pomočjo in nato primer, kjer bodo odkrili luknjo v svojem znanju.

1. $2^3 =$
2. $8^2 =$
3. $10^6 =$

Za temi uvodnimi primeri zastavimo nekoliko drugačen problem:

4. $7^x = 49$
5. $4^x = 64$
6. $3^x = 243$
7. $10^x = 15603$

Tudi pri 4., 5. in 6. primeru učenci nimajo težav, saj že poznajo eksponentno enačbo. Ob tem jim povemo, da smo z iskanjem x v resnici že spoznali nov postopek, ki mu bomo rekli logaritmiranje. Poudarimo, da iskanje logaritma pomeni iskanje eksponenta x. Seveda pa to še ni razlog, zakaj bi morali za iskanje neznanke v eksponentu vpeljati čisto novo operacijo, zato si bomo pogledali še primer, kjer neznanke ne moremo poiskati kar na pamet, in takšen je 7. primer. Za tem lahko zapišemo definicijo logaritma najprej na konkretni, nato na splošni ravni:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Tako rešimo 7. primer, pri katerem si za izračun logaritma lahko pomagamo z računalom:

$$x = log_{10}\ 15603 \Rightarrow x \doteq 4{,}19\ .$$

Opazovanje vzorcev

Učitelj lahko motivira učence s preiskovanjem vzorcev. Pri tem mora biti spreten, njegova navodila naj bodo diskretna, tako da imajo učenci občutek, da so sami prišli do ideje. Takšen način je bistven za izboljšanje njihovega razumevanja in spoznanja.

Različne načine reševanja problemov in preiskovanja vzorcev lahko uporabimo za predstavitev novih pojmov, ki jih bomo obravnavali v prihodnje. Pri opazovanju vzorca in odkrivanju splošne lastnosti gre za induktivno sklepanje. Splošno lastnost v obliki obrazca lahko izpeljemo na enostaven in eleganten način s sredstvi, ki so učencem na voljo pri preiskovanju vzorca.

Preiskovanje vzorcev ni vedno uporabno. Kadar pa je, je zelo učinkovito.

Vzorce srečujemo vsak dan. Človek se je že od nekdaj ob ukvarjanju z matematiko srečeval tudi z vzorci: opazovanjem in napovedovanjem določenih pravil. Učenci gredo pri raziskovanju vzorcev skozi več korakov. Najprej zberejo podatke, ki jih uredijo v nek smiselni red. Nato poskušajo poiskati vzorec, s pomočjo katerega dobijo iskani obrazec oziroma definicijo. Vendar moramo paziti na pasti pri vzorcih, saj ne moremo vedno na podlagi posameznih primerov sklepati o splošnemo brazcu. Primer pasti je opisan v drugem zgledu.

V osnovni šoli so primerni ne le algebraični vzorci (npr. številska zaporedja), ampak tudi slikovni vzorci (npr. z liki, barvami …).

ZGLED 2: Potence z negativnim celim in ničelnim eksponentom

Učenci že poznajo potence z naravnimi eksponenti, in sicer na način, da 5^n pomeni produkt n faktorjev števila 5. Ko jih vprašamo, kaj je n, bodo najverjetneje odgovorili, da je n naravno število. Naslednji način jih bo spodbudil, da upoštevajo tudi negativna cela števila in število 0.

Oglejmo si naslednje primere:

$3^4 = 81$

$3^3 = 27$

$3^2 = 9$

$3^1 = 3$

Sedaj nadaljujemo vzorec tako, da desno stran delimo s 3, na levi strani pa eksponent za 1 zmanjšujemo. Na tablo zapišemo dva primera, ostale primere naj zapišejo učenci sami:

$3^0 = 1$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$3^{-2} = \frac{1}{9}$

$3^{-3} = \frac{1}{27}$

To bo učence motiviralo za nadaljnjo obravnavo negativnih celih eksponentov. Sedaj ne moremo reči, da pomeni na primer x^{-3} produkt -3 faktorjev števila x. Z uporabo pravil računanja z eksponenti lahko vpeljemo pomen negativnih celih eksponentov. Oglejmo si primer:

$$\frac{x^4}{x^7} = \frac{1}{x^3}\ .$$

Ta ulomek smo okrajšali, tako kot ga učenci že znajo. Če upoštevamo pravila za računanje z eksponenti, dobimo naslednji rezultat:

$$\frac{x^4}{x^7} = x^{4-7} = x^{-3}.$$

Iz tega vidimo, da bi bilo v redu, če bi veljalo: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. Zato tudi tako definiramo pomen negativnih celih eksponentov in ostane naš sistem skladen.

Pri ničelnem eksponentu pa gledamo na problem na naslednji način: $\frac{x^5}{x^5}$, kjer je $x \neq 0$, kar je enako $x^{5-5} = x^0$. Iz tega vidimo, da je $x^0 = 1$. Tudi tu nima pomena, da rečemo, da je to produkt faktorjev števila x. Definiramo $x^0 = 1$, da ostanemo dosledni s pravili računanja z eksponenti.

Učence vprašamo, kaj bi pomenilo 0^0. Na podoben način kot prej vidimo: $0^0 = 0^{k-k} = \frac{0^k}{0^k}$; k je naravno število. To seveda nima pomena, saj je $0^k = 0$, $\frac{0}{0}$, pa je nedoločeno. Na podoben način ne moremo definirati 0^{-k}, ker bi to pomenilo $\frac{1}{0^k}$, kar pa ni definirano. Tako učenci ugotovijo, da osnova ne sme biti enaka 0, če je eksponent negativen ali enak 0.

Sedaj definiciji $x^0 = 1; x \neq 0$ in $x^{-k} = \frac{1}{x^k}; x \neq 0$ dobita pomen.

ZGLED 3: Pasti pri vzorcih

Induktivno sklepanje je lahko tudi nevarno. Med vzorci pogosto obravnavamo številska zaporedja, za katera pa vemo, da jih lahko nadaljujemo na neskončno mnogo načinov. Formalna utemeljitev o različnih načinih nadaljevanja istega zaporedja bo za učence morda pretežka, zato si pomagamo s kakšnim konkretnim problemom.

Oglejmo si primer zaporedja: . Učenci bi običajno kot naslednji člen zaporedja predvideli število 32, mi pa jim na konkretnem primeru pokažemo, da lahko sledi tudi število 31. Tak primer je lep za prikaz tega, da induktivno izpeljan sklep ne pripelje nujno do pravilne rešitve in da ni enak dokazu.

Narišimo krožnico, na njej izberimo točke in jih paroma povežimo. V tabelo (tabela 1) zabeležimo, na koliko največ delov narisane daljice razdelijo krog, seveda v odvisnosti od števila izbranih točk. Učenci si pomagajo s tem, da narišejo krog in na njem točke, jih povežejo med seboj ter preštejejo dele.

Število točk na krožnici	Največje število delov, na katere krog razpade
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57
8	99

[Tabela 1] Zaporedja

S tem primerom učencem nazorno prikažemo, da se lahko navidezno enolična številska zaporedja nadaljujejo na različne načine. Učitelj mora biti previden, ko predstavlja vzorce, da učencev ne vodi v napačno smer. Samo ugibanje in prepoznavanje vzorca lahko služi kot hipoteza, vendar jo moramo, preden ta postane matematični rezultat, potrditi z dokazom.

Predstavitev izziva

Učenje je učinkovitejše, če ga znamo predstaviti kot izziv, ki ga učenec želi rešiti sam. Problem ne sme biti prelahek, saj je naš namen v učencih zbuditi občutek, da gre za izziv. Vendar pa ne sme biti pretežek, da ne izgubijo volje do reševanja, ker ga ne znajo rešiti. Izziv naj vodi do teme, ki jo želimo obravnavati in za katero želimo motivirati učence. Pripravimo jih do tega, da postanejo radovedni in odprti za novo matematično vsebino, ki jo bodo spoznali.

Učitelji, ki imajo v razredu heterogene skupine, morda lahko lažje ustvarijo ustrezne skupine po dva ali tri učence, da razmislijo o izzivu, ki smo ga predstavili celotnemu razredu. Večje skupine so navadno neproduktivne, ker je lahko zraven nekdo pasiven in nekdo, ki bi vse naredil sam. Poleg tega je dobro, da imamo več manjših skupin, saj bodo učenci drugače pristopili k problemu in bodo lahko razredu predstavili različne poti do rešitve. Ta način motivacije lahko uporabimo pri mnogih urah matematike.

ZGLED 4: Uvod v geometrijsko vrsto

Uro začnemo tako, da učencem zastavimo naslednji izziv:

Bi raje zaslužili 100 000 € vsak dan v mesecu ali bi raje zaslužili 1 cent prvi dan, 2 centa drugi dan, 3 cente tretji dan, 4 centov četrti dan, 5 centov peti dan in tako naprej vseh 31 dni?

Učenci bodo najverjetneje izbrali prvo možnost, kar bi jim skupno prineslo 3 100 000 €. Pričakujemo, da jih ne bo zanimal seznam centov. Povemo jim, da so se slabo odločili, saj nam druga možnost prinese več denarja, in sicer 21 474 836,47 €. To izračunamo po obrazcu

$$\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{4}{100}+\frac{8}{100}+\ldots+\frac{2^{30}}{100}=$$

$$=\frac{\frac{1}{100}\cdot(2^{31}-1)}{2-1}=21\ 474\ 836{,}47.$$

Matematični triki

Pri učencih lahko spodbudimo zanimanje in radovednost tudi s predstavitvijo paradoksov, napačnih sklepanj ali navideznih čarovnij. Učitelj učencem pokaže, kako enostavno rešimo neke situacije, ki vodijo do nepričakovanih rezultatov. Motiviramo jih s tem, da problem, ki je enostavno rešljiv, kratek in se še vedno navezuje na našo temo, predstavimo tako, da se učenci vprašajo, kako in zakaj smo do predstavljene rešitve prišli.

Takšen način motiviranja je lahko zelo učinkovit, saj učenci vidijo, kako je lahko matematika zabavna in čarobna. Vendar pa takšni zanimivi primeri niso vedno na voljo in jih zato pri uri matematike uporabimo redkeje. Kadar pa so, je vredno vložiti čas in trud za njihovo predstavitev.

ZGLED 5: Obravnavanje deljenja z nič

Eno izmed pomembnih pravil pri matematiki je, da ne smemo deliti z 0. Učencem je smiselno pokazati preprost in nazoren primer, kaj se zgodi pri deljenju z 0. Najlažje je, če jim preprosto rečemo, da je to prepovedano, vendar se bodo še vedno spraševali »Zakaj?«.

V nadaljevanju si bomo ogledali enostavno situacijo s preprostimi algebraičnimi računi.

Učencem napovemo, da bomo »dokazali« enakost 1 = 2.

Ta trditev bo verjetno sprožila radovednost in smeh. Začnemo z »dokazom«. Na tablo postopoma zapisujemo korake, ki so prikazani spodaj in vsakega posebej komentiramo:

1. Privzemimo: $a = b$
2. Obe strani pomnožimo z b: $ab = b^2$
3. Na obeh straneh odštejemo a^2: $ab - a^2 = b^2 - a^2$
4. Razstavimo obe strani enačbe: $a(b - a) = (b + a)(b - a)$
5. Obe strani enačbe delimo z $b - a$: $a = b + a$
6. Na desni strani lahko namesto b pišemo a: $a = a + a = 2a$
7. Obe strani delimo z a: $1 = 2$.

Učenci bodo najverjetneje zelo začudeni. Vprašamo jih, kje smo naredili napako. Očitno gre za matematično napako, ker vemo, da $1 \neq 2$. Počasi gremo še enkrat čez vse korake in ugotovimo, da smo naredili napako v petem koraku. Delili smo z 0, saj smo delili obe strani z $b - a$. Tako pokažemo učencem, da deljenje z 0 pripelje do čudnih in neresničnih rezultatov. Ta motivacijska tehnika nas vodi do razprave o pomembnosti določilnih pogojev v matematičnih definicijah in lastnostih.

Prikaz uporabnosti matematike

Prikaz uporabnosti matematike je ena uspešnejših motivacijskih tehnik pri matematiki, saj se veliko učencev sprašuje o njeni uporabnosti in za vsako temo posebej jih zanima, kje je predstavljena matematična vsebina uporabna.

Matematiko lahko povežemo z drugimi predmeti, na primer fiziko, kemijo, biologijo, zgodovino, ekonomijo, športno vzgojo in podobno. Še večji učinek motivacije bomo dosegli, če nam uspe povezati matematično vsebino, ki jo obravnavamo, z vsakdanjimi življenjskimi situacijami in dogodki.

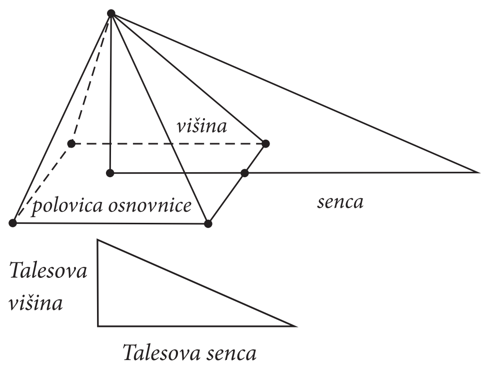
ZGLED 6: Uvod v podobne trikotnike

Primer, ki ga bomo opisali, nas vodi do teme o podobnih trikotnikih in o uporabi sorazmerja ustreznih stranic. Učenci izračunajo velikost nekega objekta s pomočjo velikosti podobnega objekta.

Povemo jim zgodbo, kako je grški matematik Tales moral izračunati višine piramid v starem Egiptu. Našel je pametno rešitev. Učence vprašamo, kako je po njihovem mnenju to izračunal.

Nekateri učenci bodo morda pomislili, da je uporabil lestev ali kaj podobnega. To ni priročno, saj bi morala biti lestev zelo dolga, da bi lahko prišel do vrha. Najprej lahko nekaj časa razpravljamo o različnih možnostih preden povemo, kaj je naredil Tales.

Tales je izbral tri točke, da je dobil trikotnik, in sicer vrh piramide, končno točko njene sence ter pravokotno projekcijo višine na osnovno ploskev. Dobil je dva podobna trikotnika, tako da je uporabil svojo višino in senco ter primerjal to z dolžino sence piramide, kot je prikazano na sliki 1.



[Slika 1] Podobnost trikotnikov

Ker sta trikotnika podobna, je uporabil naslednje razmerje:

$$\frac{\text{Talesova višina}}{\text{višina piramide}} = \frac{\text{Talesova senca}}{\text{Senca piramide}}.$$

To je eden izmed načinov, kako računamo s podobnimi trikotniki. Učencem bi lahko dali izziv, kako bi to samo z vrvico in metrom izračunali danes, če bi bilo vreme oblačno.

Primeri uporabe matematike so še logaritemska skala v fiziki (potresna jakost, zvočna jakost), eksponentna funkcija pri opazovanju rasti ali upada populacij, v biologiji, odstotki pri kemiji, ekonomiji, statistika pri športni vzgoji, vektorji v fiziki, intervali v glasbi in podobno. Danes lahko take primere učitelj razmeroma hitro najde z brskanjem po spletu. Pri tem ni nujno, da učenci razumejo vse podrobnosti uporabe matematike, ampak zadošča že to, da prepoznajo matematiko kot orodje pri opisu nekega realnega pojava ali procesa.

Uporaba razvedrilnih nalog

Ljudje radi igramo različne igrice. Tudi pri matematiki lahko zastavimo naloge, ki vključujejo razne uganke, paradokse, igrice in podobne matematične probleme. Razvedrilni problemi in matematične igrice prikažejo matematiko na zabaven način. Pred leti je postala svetovno znana matematična igrica Sudoku, ki jo rešujejo tako otroci kot tudi odrasli. Če primerno uporabimo matematične igrice pri pouku, je ta način motiviranja lahko zelo uporaben za učitelje pri vpeljavi nove snovi. Ne le, da učence s tem motiviramo, damo jim tudi občutek uspeha ob reševanju problemov. Na ta način si želijo raziskovati dalje in imajo željo po spoznavanju novih vsebin. Ko učitelj izbira naloge, mora biti pozoren na to, da ne zaide stran od matematične vsebine, ki jo obravnava. Nekatere razvedrilne naloge so lahko sestavni del snovi, ki jo obravnavamo, lahko pa jih uporabimo samo za razvedrilo. Za pravo motivacijsko moč izbiramo kratke in prijetne naloge. Čeprav so včasih te naloge nekoliko nepraktične in neživljenjske, so po drugi strani zabavne, povečajo zanimanje, spodbujajo intelektualno radovednost in omogočajo raziskovanje matematičnih tehnik in konceptov. Da je ta motivacijska tehnika učinkovita, moramo učencem omogočiti, da uspeh dosežejo z razvedrilnimi nalogami brez prevelikega napora.

Najboljši primeri razvedrilnih nalog so tisti, ki pokažejo zahtevnost, vendar so hkrati presenetljivo enostavno rešljivi. Učitelj mora pri izbiri nalog biti pozoren, da niso prelahke, saj se bodo učenci morda počutili premalo izzvane, a tudi ne pretežke, da bi bile izven dosega večine učencev. Razvedrilne naloge so nam pri vpeljavi snovi redkeje na voljo.

ZGLED 7: Razvijanje logičnega mišljenja

Predstavimo primer uvoda v naravna števila, ki ga osredotočimo na to, da si učenci vzamejo čas, da razmislijo o matematičnem problemu, preden se spoprimejo z njim. Pogosto se zgodi, da takoj začnemo reševati nek problem in se vanj zaletimo, ne da bi prej o njem dobro premislili.

> Palindrom je število, ki ga naprej in nazaj preberemo enako, kot je na primer 353 ali 7117. Koliko palindromov je med številoma 1 in 1000, vključno z njima?

Učenci bodo najverjetneje pristopili tako, da si bodo začeli zapisovati vsa števila in bodo iz tega poskušali ugotoviti, katera izmed njih so palindromi. Ta način je neroden in dolgotrajen, poleg tega pa se hitro zgodi, da katerega izmed palindromov izpustimo. Izbrati moramo primerno strategijo reševanja problema in tako najprej poskusimo, če si lahko pomagamo z vzorcem, da rešimo problem. Oglejmo si tabelo 2:

Rang	Število palindromov	Skupno število
1 – 9	9	9
10 – 99	9	18
100 – 199	10	28
200 – 299	10	38
300 – 399	10	48
…	...	...

[Tabela 2] Palindromi

Vidimo, da vzorec obstaja. Po številu 99 je v vsaki skupini 100 števil natanko 10 palindromov. To pomeni, da dobimo 9 nizov po 10, kar je 90 palindromov, prištejemo pa še 18 in dobimo, da je med številoma 1 in 1000, vključno z njima, skupno 108 palindromov.

Ta problem lahko rešimo še na drugačen način. Pogledamo najprej vsa enomestna števila, za katera vemo, da so že sama po sebi palindromi. Teh je 9. Dvomestnih palindromov (obe števki sta enaki) je ravno tako 9. Trimestna števila imajo 9 možnih »zunanjih« števk in 10 »vmesnih« števk, zato jih je 90. Tako pridemo do istega rezultata kot prej, torej je med številoma 1 in 1000, vključno z njima, skupno 108 palindromov. To je primer motivacijske tehnike, ki bi jo lahko uvrstili tudi med opazovanje vzorca.

Pripovedovanje slikovitih zgodb

Kadar matematiko povežemo z zgodovino in povemo kakšno zanimivo zgodbo, ki je povezana z matematičnim raziskovanjem, učence motiviramo, saj so nekatere zgodbe lahko tudi poučne oz. nosijo sporočilo, nekatere so zgolj zabavne, nekatere so resnične, druge spet ne. Učenci se seznanijo tudi s tem, kako so v preteklosti znani matematiki razmišljali.

S takšnimi zgodbami učenci drugače gledajo na matematične enačbe, obrazce in simbole. Prednost pripovedovanja slikovitih zgodb je v čudenju in obujanju otroške radovednosti, v spoznavanju zgodovinskega in kulturnega okolja, v katerem je matematika nastajala, in v vedenju, da se za obrazci skrivajo usode ljudi, neprespane noči, tudi tragedije, trdo delo, zgodovinski preobrati … Na ta način učenci matematiko doživijo kot sooblikovalko kulture in civilizacije. Zavedajo se premišljenih načinov, ki so bili odkriti skozi leta in ne kot takojšnji rezultati, ki jih zapišemo na tablo, kot so navadno predstavljeni v šoli.

Zavedati se moramo, da večina ljudi rada prisluhne kakšni dobri zgodbi, kjer jih radovednost pripelje do tega, da želijo izvedeti, kakšen je zaključek. Zgodba bo učinkovito pedagoško orodje, če je učitelju, ki jo pripoveduje, tema zgodbe všeč, če dela primerne prekinitve, in če zgodbo povez navdušenjem. Slabo povedana zgodba ima lahko negativen učinek, ravno obratno kot je bil naš namen. Izogibati se moramo tudi temu, da zgodbo povemo prehitro, samo zato, da pridemo do zaključka in naredimo uvod v matematično vsebino, ki jo bomo obravnavali. Tako zgodba ni le neučinkovita, ampak gre tudi za izgubo časa. Motivacija bo še bolj učinkovita, če bomo zgodbo povedali na smešen način, lahko vpletemo še kakšno šalo. Upoštevati moramo tudi starost učencev.

ZGLED 8: Praštevila

Učencem na začetku povemo, da obstaja veliko matematičnih problemov, za katere še niso našli rešitev. Takšni problemi so včasih postavljeni kot uganka ali domneva brez dokaza. Enega izmed takšnih primerov je predstavil grški matematik Christian Goldbach (1690–1764) v pismu Leonardu Eulerju (1707–1783), ki ga je poslal 7. junija 1742. Ta znani primer iz teorije števil se imenuje Goldbachova domneva, ki še ni bila dokazana. Glasi se: Vsako sodo število, večje od 2, lahko zapišemo kot vsoto dveh praštevil.

Soda števila večja od	Vsota dveh praštevil
4	2+2
6	3+3
8	3+5
10	3+7
12	5+7
14	7+7
16	5+11
18	7+11
20	7+13
...	...
48	19+29
...	...
100	3+97

[Tabela 3] Goldbachova domneva

Kot zanimivost lahko učencem povemo, da je angleški založnik TobyFaber ponudil milijon dolarjev tistemu, ki mu uspe do 15. marca 2002 dokazati to domnevo. Veliko znanih matematikov jo je poskušalo dokazati. 16. februarja 2008 je portugalski profesor Tomas Oliveira e Silva pokazal, da domneva velja do števila $1{,}1 \cdot 10^{18}$.

Učenci naj zapišejo seznam sodih števil in njihove vsote dveh praštevil (tabela 3). Tako naj nadaljujejo, da se prepričajo, da se to očitno nadaljuje v neskončnost.

ZGLED 9: Veliki Fermatov izrek

Veliki Fermatov izrek pravi, da je nemogoče zapisati potencoštevila kot vsoto dveh potenc enakih stopenj, če je potenca večja kot dva. Enačbo $x^n + y^n = z^n$ imenujemo Fermatova enačba. Izrek je eden od najbolj znanih izrekov v zgodovini matematike.

Učenci lahko sami poiščejo primere za $n = 1$ in 2, za $n = 3$ in večje pa jih pustimo kratek čas, da preiskujejo z računalom. Pri $n = 2$ lahko hitro najdemo iskana števila. To so ravno pitagorejske trojice: $x^2 + y^2 = z^2$.

Znameniti francoski matematik Fermat (1601–1665) je domneval, da obstajajo cele netrivialne rešitve samo pri $n = 2$, pri $n > 2$ pa po njegovi domnevi ni nobene netrivialne rešitve (trivialne rešitve so tiste, pri katerih je ena od spremenljivk enaka nič, take pa seveda obstajajo pri vsakem n). Slavni Fermatov problem je poiskati dokaz ali protidokaz te domneve. Od Fermatovih časov do danes je mnogo matematikov poskusilo dokazati ali ovreči domnevo. Zanimivo je, da je Fermat zapisal, da je našel dokaz za svojo trditev, ki pa ga ni nikjer objavil. Pravega dokaza niso našli 357 let, dokler ga ni končno rešil Andrew John Wiles. Objavljen je bil leta 1995.

Aktivno vključevanje učencev v utemeljevanje matematičnih zanimivosti

Obstaja veliko trikov s števili, ki krožijo po internetu. Ljudje se sprašujejo, kako se lahko to zgodi. To je navadno mogoče pojasniti s pomočjo enostavne algebre in je lahko dobra motivacijska tehnika.

Takšne zanimive primere izberemo tako, da učencem zbudimo zanimanje za matematično vsebino, ki sledi, in ti primeri morajo biti ustrezni glede na starost učencev. Pri teh zanimivostih moramo biti previdni, saj ne smejo prevladati nad matematično vsebino, ki jo želimo obravnavati.

ZGLED 10: Uvod v verjetnost

Pri tem primeru je priporočljivo, da imamo razred s čim več učenci, recimo okoli 30.

Najprej preverimo, ali imata dva učenca v tem konkretnem razredu na isti dan rojstni dan.Nato učence vprašamo, kakšna je verjetnost, da imata dva sošolca rojstni dan na isti datum (upoštevamo mesec in dan).

Učenci navadno začnejo razmišljati o verjetnosti, da imata 2 osebi isti datum v 365 dneh (predpostavimo, da ni prestopno leto).

Januar	Februar	Marec
3. Michael Schumacher	6. Bob Marley	4. Antonio Vivaldi
3. Mel Gibson	19. Nikolaj Kopernik	10. ChuckNorris
8. Elvis Presley		14. Albert Einstein
27. W. A. Mozart		25. Elton John
April	**Maj**	**Junij**
3. Eddie Murphy	10. Bono	9. Johnny Depp
15. Leonardo da Vinci		14. Che Guevara
20. Adolf Hitler		18. Paul McCartney
23. William Shakespeare		
Julij	**Avgust**	**September**
3. Franz Kafka	15. Napoleon Bonaparte	
24. Jennifer Lopez	16. Madonna	
	29. Michael Jackson	
Oktober	**November**	**December**
9. John Lennon	2. Borut Pahor	5. Walt Disney
25. Pablo Picasso	11. Leonardo DiCaprio	18. Brad Pitt
	26. Tina Turner	

[Tabela 4] Znane osebnosti

Učencem pokažemo primer, kjer smo izbrali 30 naključno izbranih znanih osebnosti. Poiskali smo datume njihovih rojstnih dni in jih po vrsti zapisali. Med njimi imata dva isti datum (tabela 4).

Vidimo, da imata 3. januarja rojstni dan Michael Schumacher in Mel Gibson. Če nam čas dopušča, lahko za popestritev povemo kaj o njiju ali učence vprašamo, če vedo kaj o njiju in sami povejo. Učenci bodo presenečeni, ko bodo izvedeli, da je verjetnost, da imata dve osebi od na isti datum rojstni dan, več kot 0,7. Vodimo jih do utemeljitve te nepričakovane verjetnosti na naslednji način:

Kolikšna je verjetnost, da ima en učenec na isti datum rojstni dan kot ga ima sam? Seveda je odgovor 1. To zapišemo kot $\frac{365}{365}$.

Verjetnost, da nek drugi učenec nima na isti datum rojstni dan kot naš izbrani, je $\frac{365-1}{365}=\frac{364}{365}$.

Verjetnost, da nek tretji učenec nima na isti datum rojstni dan kot naša dva izbrana, je $\frac{365-2}{365}=\frac{363}{365}$.

Verjetnost, da vseh učencev nima na isti dan rojstni dan, je produkt vseh teh verjetnosti:

$$p=\frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-28}{365}\cdot\frac{365-29}{365}.$$

Naj bo q verjetnost, da imata dva učenca iz skupine na isti datum rojstni dan in naj bo p verjetnost, da dva učenca iz skupine nimata na isti datum rojstni dan. Vsota teh dveh verjetnosti je 1, torej $p+q=1$.

V tem primeru je

$$q=1-\frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-28}{365}\cdot\frac{365-29}{365}=$$
$$=0{,}7063162427.$$

Učenci si bodo želeli raziskati kaj več o verjetnostni funkciji. V tabeli 5 imamo naštetih nekaj primerov verjetnosti ujemajočih rojstnih datumov za različno velike skupine:

Število ljudi v skupini	Verjetnost ujemajočih rojstnih datumov
10	0,1169481777
15	0,2529013198
20	0,4114383836
25	0,5686997040
30	0,7063162427
35	0,8143832389
40	0,8912318098

[Tabela 5] Verjetnost

ZGLED 11: Branje misli

Ta enostaven primer bo navdušil učence. Predvidevamo, da bodo vsi sodelovali pri tej »igrici« in nas pozorno spremljali. Vodimo jih do teme o algebraični predstavitvi in dokazu. Lahko si izmislimo različne primere, v tabeli 6 je opisan eden izmed njih.

Korak 1: Zamisli si število.	x
Korak 2: Podvoji število.	$2x$
Korak 3: Prištej 8.	$2x+8$
Korak 4: Odštej 2.	$2x+6$
Korak 5: Deli z 2.	$x+3$
Korak 6: Odštej prvotno število.	3
Korak 7: Tvoj rezultat je 3.	

[Tabela 6] Branje misli

Učenci bodo presenečeni, kako vemo, kaj imajo v mislih. Povemo jim, da nismo čarovniki in ne beremo misli, ampak se vse skriva v zgornjem algoritmu. Učenci naj poskusijo še sami sestaviti kakšen podoben primer.

Uporaba didaktičnih modelov in gradiv

Za večino učencev je najboljši način motiviranja, da jim snov predstavimo s pomočjo didaktičnih pripomočkov. Za lažje dojemanje in razumevanje matematične vsebine jim lahko pripravimo razne konkretne materiale, ki jih lahko primejo v roke, morda kakšne video posnetke, kjer so na primer prikazani postopki konstrukcije raznih geometrijskih objektov, uporabimo lahko kakšen računalniški program, na primer GeoGebro, uporabimo aplete, uporabimo informacije na svetovnem spletu ... Pri izbiri takšnega gradiva in načrtovanju ure smo pozorni, da motiviramo učence v smeri matematične vsebine, ki jo želimo obravnavati, in ne odstopamo od glavne teme. Menimo, da je ta način poleg praktične uporabe matematike eden izmed najboljših in najučinkovitejših, saj nam je vsem ljudem prirojeno, da moramo nekaj izkusiti, prijeti, videti in slišati, da si lažje zapomnimo. Pri tem bodo sodelovali tudi učenci, ki imajo morda do matematike odpor, in ki se je na nek način bojijo. Seveda ne moremo vsake ure izpeljati na takšen način, saj vzame precej časa, vendar je priporočljivo, da se takšne ure izvedejo čim pogosteje.

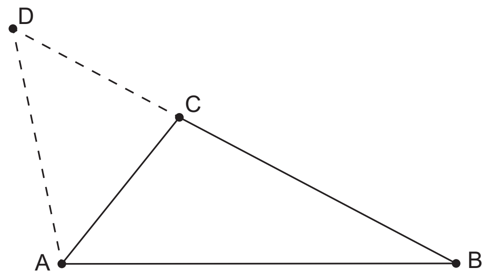
ZGLED 12: Trikotniška neenakost

Za izpeljavo tega primera potrebujemo zavoj špagetov. Učenci bodo presenečeni, ko bomo v učilnico vstopili s špageti.

S pomočjo špagetov bomo utrdili koncept trikotniške neenakosti. Vsakemu izmed učencev razdelimo po deset špagetov. Vsakega morajo razlomiti na tri dele. Nato morajo vzeti poljubne tri dele in na mizi sestaviti različne trikotnike. Ali lahko vedno sestavijo trikotnik? S poskušanjem jih vodimo do tega, da ugotovijo, da lahko trikotnik sestavimo le, če je vsota dveh stranic večja od tretje stranice.

Učenci vedo, da je najkrajša razdalja med dvema točkama daljica. To dejstvo lahko uporabimo, da pridemo do trikotniške neenakosti: Vsota dolžin poljubnih dveh stranic trikotnika mora biti večja od dolžine tretje stranice.

Dokaz za to razmerje je enostaven. Oglejmo si poljuben trikotnik ABC, kot je prikazano na sliki 2 in izberimo točko D na nosilki stranice BC, tako da je $|CD| = |CA|$.



[Slika 2] *Trikotnik*

Trikotnik $\angle DAC$ je enakokrak, zato sta kota $\angle ADC$ in $\angle CAD$ skladna in kot $\angle BAD$ je večji od kota $\angle ADC$. Iz tega sledi, da je v trikotniku ABD stranica BD daljša od stranice AB, saj je v trikotniku nasproti večjega kota daljša stranica. Vemo, da je $|CD| = |CA|$ in $|BD| = |BC| + |AC|$. Zato je $|BC| + |AC| > |AB|$, kar smo želeli dokazati.

γ Zaključek

Velikokrat se lahko zgodi, da matematika postane učencem nezanimiva, predvsem zaradi abstraktnosti. Učitelji lahko naredimo marsikaj, da bodo učenci ta predmet vzljubili in ne bodo imeli odpora do učenja. Pri tem je zelo pomembna učna motivacija. Pomagamo si lahko s predstavljenimi primeri. Zanimive primere lahko najdemo na spletu, v raznih knjigah, kjer so zbrane razvedrilne matematične naloge ali knjige iz zgodovine matematike, kjer so zbrane različne zgodbe. Ko enkrat spoznamo načine motiviranja pri pouku matematike, si lažje tudi sami pripravimo nove primere motivacij. Če bi učitelji matematike posvetili nekoliko več časa načinom motiviranja, bi v razredu lažje delali. Ko enkrat učence uspemo motivirati in zbuditi v njih zanimanje za določeno matematično vsebino, smo naredili velik korak na poti k cilju. Glavni korak pa morajo narediti še učenci in se učiti – tega učitelj ne more namesto njih. Cilj motiviranja je večje prevzemanje odgovornosti učencev za lastno znanje, skrb učitelja za kakovost pouka, večanje radovednosti in ustvarjalnosti učencev, spodbujanje pozitivnega odnosa do matematike in znanja nasploh. Učenci bodo po formalnem izobraževanju pozabili mnogo dejstev, ki so se jih naučili, ne bodo pa izgubili ustvarjalnosti, radovednosti in pozitivnega odnosa do matematike, znanja in dela, kar jim lahko pomagamo razvititudi preko ustrezne motivacije.

δ Viri in literatura:

1. Posamentier, A., Krulik, S. (2011). The Art of Motivating Studentsfor Mathematics Instruction. McGraw-Hill Education – Europe.
2. Marentič Požarnik, B. (2003). Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.
3. Ilc, K. (2012). Načini motiviranja učencev pri pouku matematike: diplomsko delo. Maribor: FNM UM, spletna stran: http://dkum.uni-mb.si/Dokument.php?id=28829