Razvijanje in spremljanje problemskih znanj v povezavi s pojmi krivulja, funkcija, premica in stožnica

Sonja Ivančič
Gimnazija in ekonomska šola
Šolski center Srečka Kosovela Sežana

Povzetek

V prispevku je predstavljen primer razvoja in spremljanja problemskih znanj pri dijakih na primeru obravnave stožnic. Dijaki spoznavajo matematiko kot proces, znajo postavljati ključna vprašanja, ki so vezana na raziskovanje matematičnih problemov, razvijajo ustvarjalnost ter zaupajo v lastne matematične sposobnosti, spoznavajo in uporabljajo informacijsko-komunikacijsko tehnologijo ter pripomočke iz vsakdanjega življenja kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov ter povezujejo znanje znotraj matematike in tudi širše (medpredmetno s fiziko).

Ključne besede: stožnice, problemska znanja, IKT, povezovanje znanj

Developing and Monitoring Problem-Solving Knowledge Relating to the Terms Curve, Function, Line and Conic Section

Abstract

The article presents an example of developing and monitoring problem-solving knowledge among secondary school students on the example of a discussion of conic sections. The students learn about mathematics as a process; are able to ask the key questions related to the investigation of mathematical problems; develop creativity and trust in their own mathematical abilities; get to know and use information and communication technology and tools from everyday life in order to learn more efficiently and to solve problems; integrate their knowledge within Mathematics and broader (cross-curricularly with Physics).

Keywords: conic sections, problem-solving knowledge, ICT, knowledge integration

Uvod

V današnji družbi je pomembno, da znamo znanje uporabiti v novih problemskih situacijah. Dijakom problemske učne zmožnosti niso dane same po sebi, temveč jih je treba nenehno in sistematično razvijati. Kot za vsako učno dejavnost je priprava učencev za ustvarjalno problemsko učenje odvisna od njihove samopodobe, razvojne stopnje ter motiviranosti. Zato moramo pri izbiri nalog izhajati iz izkušenj, učnih zmožnosti, interesov in potreb dijakov. Tako delo zahteva več časa za učiteljevo pripravo, delo v razredu poteka počasneje od frontalnega pouka. Problemski pouk je uspešnejši, če je v razredu manj dijakov, da lahko učitelj pouk tudi diferencira in individualizira.

Pri obravnavi učne teme stožnice lahko na zanimiv način razvijamo in spremljamo razvoj problemskih znanj v povezavi z drugimi pojmi, kot so npr. krivulja, funkcija in premica. Obravnavo stožnic povežemo z vsakdanjim življenjem, kar pri dijakih poveča motivacijo. Tako pridobljeno znanje je trajnejše in bolj prenosljivo na druga področja, kar pa je tudi eden pomembnejših ciljev pouka matematike. Večina dijakov je zadovoljna s takim načinom dela. Manj zadovoljni so tisti, ki želijo v delo pri pouku vložiti čim manj truda. Pri takih se mora učitelj še posebej potruditi z motivacijo. Pozoren mora biti tudi na učno šibkejše dijake, da jih s pravo mero pomoči vodi skozi reševanje problemov, da se na poti ne izgubijo in obupajo ter da do nekaterih ugotovitev vseeno pridejo sami. Tako izkusijo uspešnost pri pouku matematike, kar pa je tako dijakom kot tudi učitelju v pomoč pri nadaljnjem delu. Učitelj ima s takim načinom poučevanja in ob prevelikem številu dijakov v razredu polne roke dela.

Tema in učni načrt

Z razvijanjem problemskega znanja sledimo osnovnemu vodilu učnega načrta za matematiko za razvoj matematične kompetence, ki med drugim vključuje sposobnost uporabe matematičnega

 Matematika v šoli, št. 2., letnik 25, 2019

načina razmišljanja za reševanje matematičnih in interdisciplinarnih problemov, sklepanje, posploševanje, abstrahiranje in reflektiranje na konkretni in splošni ravni, raziskovanje, uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije pri usvajanju novih matematičnih pojmov, preiskovanju in reševanju matematičnih problemov. Učitelj naj bi v skladu s tem razvoj in spremljanje problemskega znanja pri dijakih premišljeno načrtoval.

Pri učni temi stožnice o obravnavanih primerih v učnem načrtu za gimnazije najdemo spodaj zapisane predloge, ki jih lahko obravnavamo tako, da razvijamo problemsko znanje pri dijakih:

- Pokažite, da ni vsaka krivulja graf neke funkcije.
- Obravnavajte posamezne primere presečišč ravnine s stožcem(a) in razložite izvor imena stožnic.
- Izvedite vrtnarsko konstrukcijo elipse tudi v praksi.
- Poleg običajnih geometrijskih konstrukcij stožnic pokažite še konstrukcije s prepogibanjem papirja.
- Obravnavo in izvedbo ure lahko načrtujete medpredmetno s fiziko.

1. Stožnice kot preseki dvojne stožčaste ploskve z ravnino

Cilji: Dijaki samostojno pridejo do razlage izvora imena stožnica, poiščejo modele iz realnega življenja, s katerimi lahko ponazorimo stožnice.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo na začetku obravnave učne teme stožnice, da razložimo ime stožnica in dijake usmerimo v ustvarjanje in iskanje modelov za ponazoritev stožnic.

Zastavitev problema

Dijakom damo nekaj minut, da narišejo različne krivulje.

Potem jim razdelimo delovne liste, na katerih so narisani (dvojni) krožni stožci. Dijaki raziskujejo preseke plašča (dvojnega) krožnega stožca z različnimi ravninami pod različnimi naklonskimi koti. Postavljajo hipoteze, kaj so preseki ravnine s stožcem, in posplošujejo. Uspešnejši dijaki lahko na slike stožcev skicirajo preseke stožcev z ravninami. Da bodo uspešni tudi dijaki s slabšo prostorsko predstavo, jim predlagamo, da k uri prinesejo stožce, izdelane iz plastelina. Na razpolago pa imajo tudi modele lesenih stožcev, ki prikazujejo preseke stožcev z ravninami (modele lahko izdelajo dijaki). Pravilnost postavljenih hipotez, narisanih krivulj in posplošitev dijaki preverijo z ogledom filma http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ.

Potem jim ponudimo različne pripomočke: lesen svinčnik z mnogokotnim prerezom, svetilko, stožčast kozarec in zaprto stožčasto steklenico. Dijaki sami raziskujejo, s katerimi pripomočki, kdaj in na kakšen način lahko dobimo posamezne stožnice (elipso, krožnico, hiperbolo in parabolo).

Razvoj aktivnosti

Dijaki narišejo različne krivulje. Spodbujamo jih, da povedo definicijo funkcije in se spomnijo, da ni vsaka krivulja graf neke funkcije. Narišejo še premice in parabole, ki niso grafi funkcij. Usmerjamo jih k risanju čim bolj različnih krivulj, sklenjenih in nesklenjenih.

Usmerjanje dijakov pri risanju presekov

Upoštevamo predznanje dijakov o osnem preseku stožca. Začnemo s preseki plašča stožca:

- z ravnino, ki vsebuje os stožca,
- z ravnino, ki je pravokotna na os stožca.

Dijake pri risanju presečnih krivulj plašča dvojnega stožca z ravnino usmerjamo od lažjih k težjim primerom.

Dijaki narišejo:

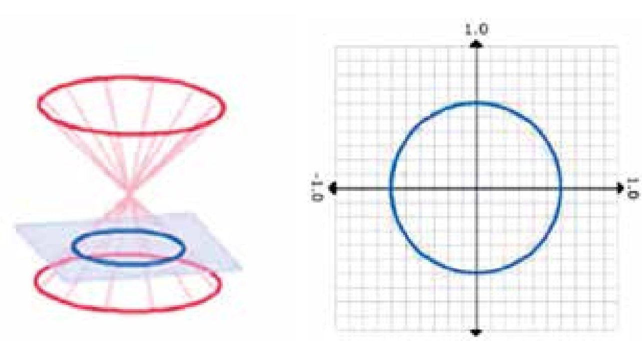
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki ne gre skozi vrh stožca in je pravokotna na os stožca. (Slika 2);
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki gre skozi vrh stožca (Slika 6, Slika 7);
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki ne gre skozi vrh stožca in ni pravokotna na os dvojnega stožca (Slika 3, Slika 4, Slika 5).

Spodbujamo jih, naj raziščejo, kako so od naklonskega kota presečne ravnine odvisni preseki ravnine s plaščem dvojnega stožca. Dijaki, ki imajo težave, si pomagajo z lesenimi modeli presekov stožcev (Slika 1) ali z modeli stožcev iz plastelina.

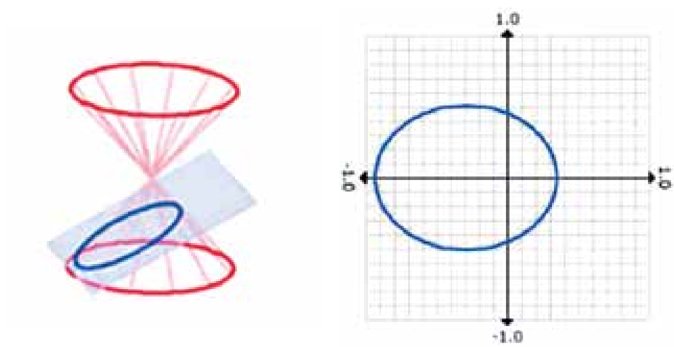
Slika 1: Leseni modeli presekov stožcev.

Ogled filma

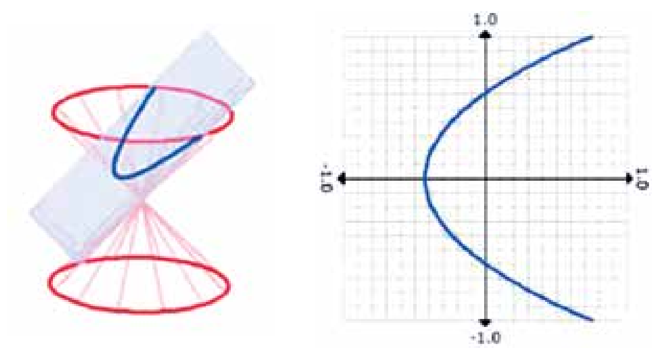
Po uvodnih dejavnostih si dijaki ogledajo film, ki prikazuje preseke stožca z različnimi ravninami, in na ta način preverijo pravilnost postavljenih hipotez in posplošitev.



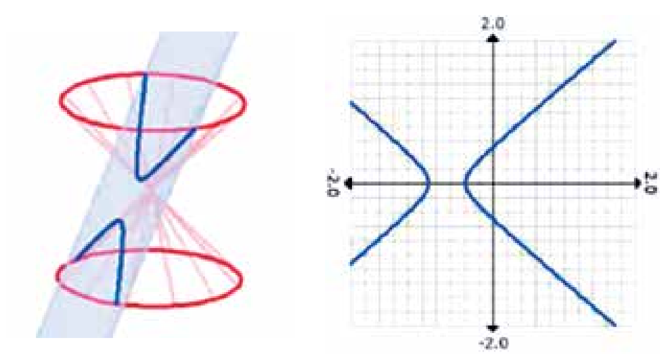
Slika 2: Presek je krožnica.



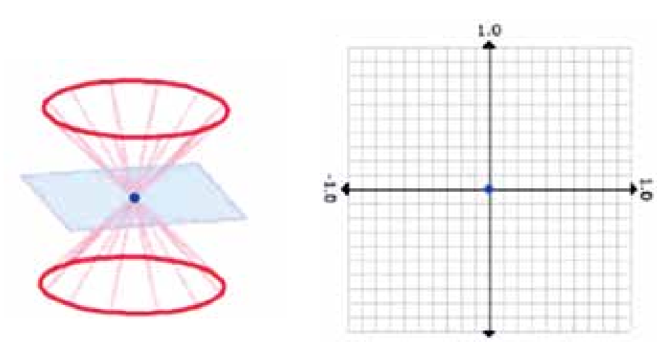
Slika 3: Presek je elipsa.



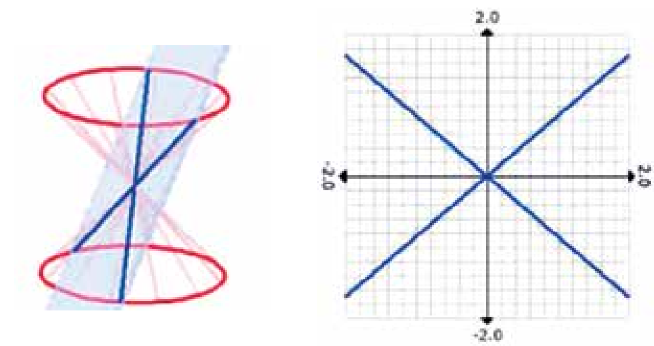
Slika 4: Presek je parabola.



Slika 5: Presek je hiperbola.



Slika 6: Presek je točka.



Slika 7: Presek sta dve premici.

Vir: http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ (5. 11. 2019)

Raziskovanje z modeli iz realnega življenja

Dijake razdelimo v skupine. Vsaka skupina dobi različne modele: lesen svinčnik z mnogokotnim prerezom, svetilko, stožčast kozarec in zaprto stožčasto steklenico (Slika 8).

Skupine raziskujejo, s katerimi modeli in na kakšen način dobimo posamezne stožnice: elipso, krožnico, hiperbolo in parabolo.

Slika 8: Različni pripomočki.

Na koncu ure skupine poročajo. Nekateri rezultati so prikazani na slikah (Slika 9, Slika 10, Slika 11, Slika 12).

Slika 9: Svetilka – rob sence je hiperbola.

Slika 10: Svinčnik z mnogokotnim prerezom – robovi so hiperbole.

Slika 11: Zaprta stožčasta steklenica – rob gladine tekočine je parabola.

Slika 12: Stožčast kozarec – rob gladine tekočine je elipsa.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

- Kaj je krivulja? Katere krivulje smo že spoznali?
- Ali je krog krivulja?
- Ali je krožnica krivulja?
- Narišite graf funkcije $f(x) = x^{-1}$. Ali je graf funkcije $f(x) = x^{-1}$ krivulja? Ali je vsaka krivulja graf neke funkcije?
- Kaj je osni presek stožca?
- Kaj je presek plašča stožca z ravnino, ki je pravokotna na os stožca?
- Kaj je presek plašča stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca?
- Kaj je presek plašča neskončnega (dvojnega) stožca z ravnino, ki gre skozi vrh stožca in vsebuje os stožca?
- Kako se spreminjajo preseki plašča neskončnega (dvojnega) stožca v odvisnosti od naklonskega kota presečne ravnine?
- Ali z vsakim modelom, ki ga imate na razpolago, lahko dobite samo eno stožnico ali jih lahko dobite več?
- Opiši, s katerim modelom dobimo katere stožnice in kako.

Dijake usmerjamo k risanju različnih krivulj, sklenjenih in nesklenjenih. Pričakujemo, da bodo nekateri dijaki narisali tudi elipso, krožnico, parabolo ali hiperbolo.

Sprotno spremljanje dejavnosti in dosežkov

Dijaki so različno spretni pri reševanju danih nalog. Nekateri dijaki zelo hitro postavijo hipoteze o obliki presečnih krivulj.

Pri dijakih spremljamo, ali so postavili hipoteze in ali so te pravilne, ali so izbrali ustrezno metodo za reševanje problema, ali je predstavljena rešitev ustrezna, ali so našli vse rešitve in kako znajo svoje ugotovitve argumentirati.

Razumevanje dijakov preverjamo in vodimo z različnimi vprašanji: Ali so presečne krivulje sklenjene ali nesklenjene? Kako je to odvisno od naklonskega kota ravnine? Kdaj je presečna krivulja ena premica? Kdaj sta v preseku dve premici? Razumevanje preverjamo tudi s pozornim poslušanjem komentarjev in vprašanj dijakov.

Nekateri dijaki si zelo sistematično zapisujejo ugotovitve in tudi napovedujejo rezultate, ki jih ustrezno argumentirajo.

Pri nalogah, ki jih dijaki rešujejo v skupinah z danimi modeli, preverimo, na kateri stopnji razumevanja so posamezni dijaki. Najnižjo stopnjo dosežejo tisti, ki ne znajo postaviti nobene hipoteze in ne izberejo ustrezne metode reševanja ter z danimi modeli ne najdejo nobene stožnice, najvišjo stopnjo pa dosežejo tisti, ki povežejo in razumejo razne vidike problema ter jih prenesejo na druge situacije, saj razumejo zakonitosti na abstraktni ravni.

Dosežki dijakov pri ugotovljenem in predpostavljenem predznanju

Dijaki samostojno in s pomočjo učitelja dosežejo zastavljene cilje. Povezujejo obstoječe znanje o presekih stožca z ravninami z novim znanjem. To nadgradijo s samostojnim odkrivanjem stožnic v novih situacijah z različnimi pripomočki. Dijaki z vsakim pripomočkom najdejo vsaj eno stožnico.

Vir: http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ (5. 11. 2019)

2. Geometrijska definicija stožnic

Cilji: Dijaki izvajajo matematična preiskovanja z uporabo IKT, samostojno izpeljejo geometrijske definicije stožnic z uporabo programa GeoGebra; samostojno raziščejo potek konstrukcij stožnic, rešijo problemsko nalogo v nematematičnem kontekstu – valovanje pri fiziki.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo po uvodnem spoznavanju stožnic.

Zastavitev problema

Dijaki naj z raziskovanjem z uporabo IKT pridejo do geometrijskih definicij stožnic. S programom GeoGebra narišejo različne stožnice: krožnico, elipso, hiperbolo in parabolo. Vsako od teh krivulj lahko poljubno spreminjajo. Najprej opazujejo krožnico. Geometrijsko definicijo krožnice že poznajo. Spodbudimo jih, da jo zapišejo. Spomnijo se, da je krožnica množica točk v ravnini, ki zadoščajo nekemu pogoju.

Ali lahko najdemo tak pogoj, kateremu bodo zadoščale vse točke, ki ležijo na elipsi?

Če je potrebno, jih pri raziskovanju usmerjamo, kaj naj pri posamezni krivulji opazujejo.

Na koncu najuspešnejši dijaki sami pridejo do geometrijskih definicij stožnic, ostalim dijakom pomagamo z dodatnimi namigi in nasveti.

Razvoj aktivnosti

Dijaki delajo v parih. Spodbudimo jih, da zapišejo geometrijsko definicijo krožnice (to že poznajo).

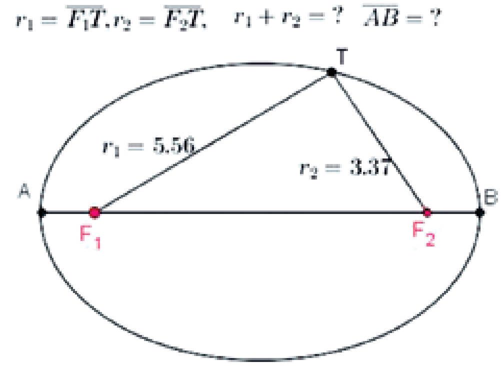
Raziskovanje z uporabo matematičnega programa GeoGebra poteka vodeno:

S programom GeoGebra narišite elipso. Za krožnico velja, da so vse točke, ki ležijo na krožnici, enako oddaljene od središča krožnice. Pri elipsi imamo dve točki – gorišči. Kaj bi lahko opazovali za točke na elipsi? Dijakom damo nekaj minut časa, da raziskujejo s programom GeoGebra. Najuspešnejši dijaki hitro postavijo hipotezo, ki jo z različnimi primeri elips potrdijo.

Ostalim dijakom pomagamo z namigi:

Izberite več različnih točk na elipsi. Za vsako točko izračunajte vsoto razdalj do gorišč F_1 in F_2 elipse (Slika 13). Kaj opazite? Dobljeno vsoto primerjajte z dolžino daljice AB, kjer sta temeni elipse, ki ležita na nosilki daljice F_1F_2. Kaj opazite?

Postopek ponovite za različne elipse.



Slika 13: Geometrijska definicija elipse.

Pri hiperboli in paraboli spodbujamo učno šibkejše dijake, da tudi oni postavijo hipoteze. Če niso uspešni, jim z dodatnimi namigi pomagajo dijaki, ki so nalogo rešili.

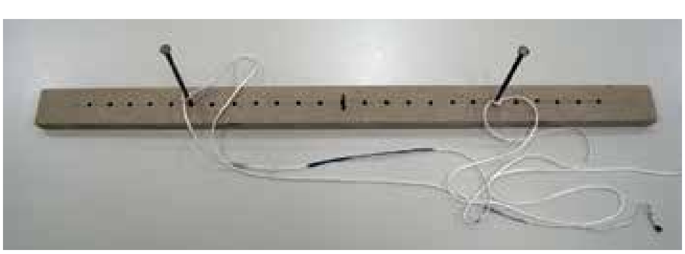
Na koncu na podlagi ugotovitev dijakov zapišemo geometrijske definicije stožnic.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

- S čim je krožnica natanko določena?
- Katere tri točke v programu GeoGebra morate izbrati, da nariše elipso? Ali ste že slišali za gorišče? Kje in v povezavi s čim?
- S čim je elipsa natanko določena?
- Kaj naj opazujemo za točke na elipsi? Kateremu pogoju morajo zadoščati?
- Primerjajte $\overline{F_1T} + \overline{TF_2}$ in $\overline{AB}$. Kaj opazite? Svojo hipotezo dokažite.
- Katere tri točke v programu GeoGebra morate izbrati, da narišete hiperbolo?
- Kaj naj opazujemo pri točkah na hiperboli? Kateremu pogoju morajo zadoščati?
- Primerjajte $|\overline{F_1T} - \overline{TF_2}|$ in $\overline{AB}$, A in B sta temeni hiperbole. Kaj opazite? Svojo hipotezo dokažite.
- Kaj morate izbrati v programu GeoGebra, da narišete parabolo?
- Kaj naj opazujemo za točke na paraboli? Kateremu pogoju morajo zadoščati?

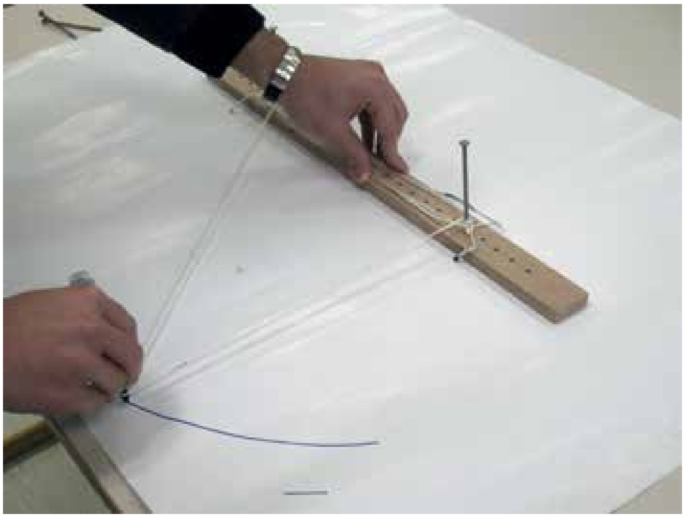
Možne razširitve aktivnosti

1. Nekateri dijaki za domačo nalogo izdelajo mehanske pripomočke za načrtovanje stožnic (Slika 14).



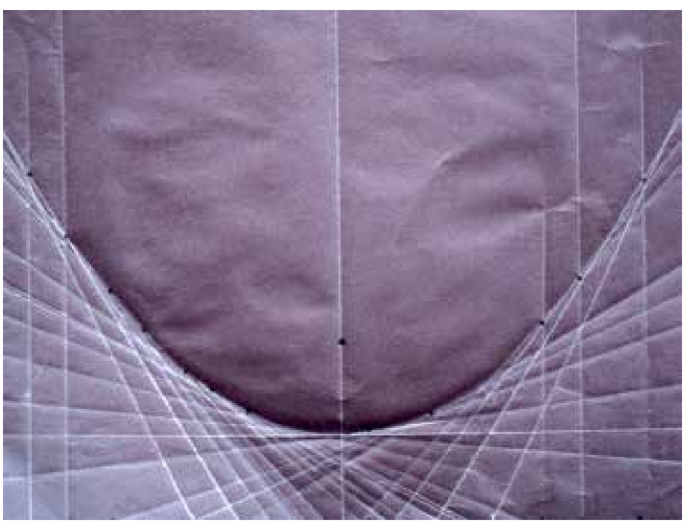
Slika 14: Mehanski pripomoček za vrtnarsko konstrukcijo elipse.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 25, 2019



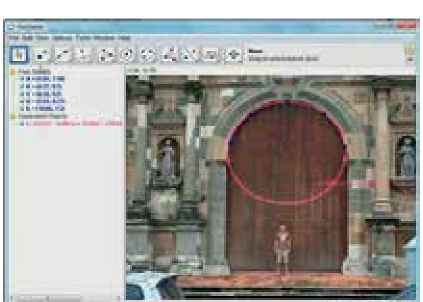
Slika 15: Vrtnarska konstrukcija elipse.

2. Dijaki doma konstruirajo stožnice s prepogibanjem papirja (Slika 16) in konstrukcije stožnic utemeljijo. Svojo nalogo pri učni uri predstavijo sošolcem in kritično analizirajo svoje delo.



Slika 16: Parabola s prepogibanjem papirja.

3. Z učenci se dogovorimo, da naredijo nekaj fotografij objektov iz realnega življenja, kjer predpostavljajo, da nastopajo stožnice. Te fotografije uvozimo v program GeoGebra in potem s programom poiščemo ustrezne stožnice (Slika 17).



Slika 17: Elipsa skozi pet izbranih točk (modra barva) na oboku vrat.

Spremljanje dosežkov

Vprašanja za spremljanje:
Kako bi narisali mejo vrta v obliki elipse?
Kako s šestilom in ravnilom konstruiramo točke, ki ležijo na paraboli?
Kako s šestilom konstruiramo točke, ki ležijo na hiperboli?

Dosežke dijakov lahko spremljamo tudi z dodatno nalogo (učni list UL_Valovanje in stožnice). S to nalogo obravnavano snov povežemo tudi z valovanjem pri fiziki.

Dijaki dobijo učni list, na katerem sta narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Na slikah poiščejo hiperbole in elipse, na katerih ležijo presečišča krožnic. Tako spremljamo, na kateri stopnji razumevanja obravnavane učne snovi so posamezni dijaki in na kateri stopnji razvoja problemskih znanj so.

Dosežki učencev pri ugotovljenem in predpostavljenem predznanju

Dijaki samostojno ali vodeno pridejo do geometrijske definicije stožnic. Pridobljeno znanje večina dijakov zna uporabiti v novi situaciji, ko rešujejo nalogo iz učnega lista.

Gradivo

Učni list: Valovanje in stožnice
Rešitev učnega lista: Valovanje in stožnice

3. Višinska točka trikotnika in parabola

Cilji: Dijaki raziščejo, katero krivuljo opiše višinska točka trikotnika *ABC* z negibno stranico *AB*, ko oglišče *C* premikamo po negibni premici *p*, ki je vzporedna s stranico *AB*. Zapišejo enačbo krivulje (parabole), ki jo opiše višinska točka, koordinati gorišča in enačbo premice vodnice parabole.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo po analitični in geometrijski definiciji stožnic**;** lahko jo uporabimo kadarkoli po predelanem sklopu stožnice za utrjevanje in povezovanje vsebinskih znanj skozi reševanje problemov.

Zastavitev problema

Dijaki raziskujejo s programom GeoGebra. Navodila za delo dobijo na učnem listu.

UL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Učitelj spremlja in vodi delo dijakov, z majhnimi namigi pomaga le tistim, ki se jim na določeni stopnji delo ustavi. Čim več aktivnosti, odkritij in sklepov pustimo dijakom.

Naloga

Podan je trikotnik *ABC* z višinsko točko *V*. Točki *A* in *B* sta negibni. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka *V*, če oglišče *C* premikamo po negibni premici *p*, ki je vzporedna daljici *AB*.

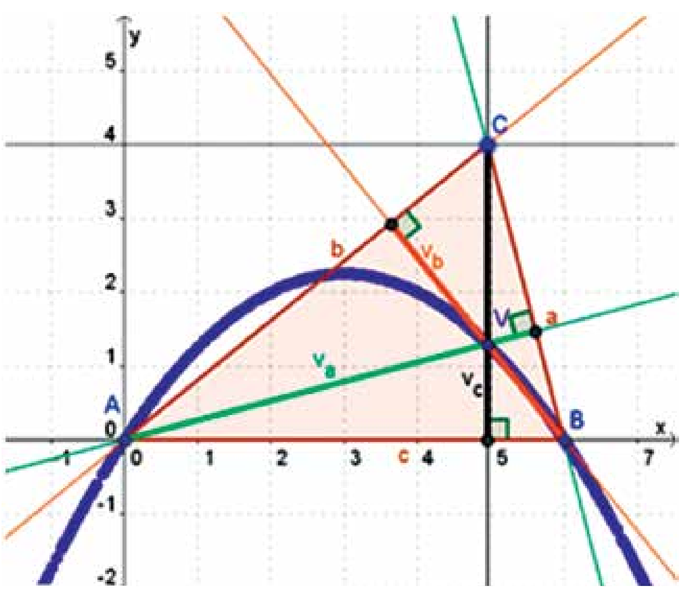
Reševanje naloge poteka v več fazah:

- Izberemo konkreten primer: oglišča trikotnika $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$ in premico p: $y = 4$ ter narišemo trikotnik ABC s programom Geogebra.
- Dijaki raziskujejo s programom GeoGebra in postavijo hipotezo.
- Konkreten primer rešijo še analitično.
- Rešujejo splošen primer, najprej s programom Geogebra in nato še analitično.

Razvoj aktivnosti:
Dijaki delajo v parih. Dobijo učni list z nalogo in navodili za delo. Le-ta so skromna z namenom, da dijakom z navodili ne sugeriramo preveč vmesnih korakov pri reševanju zastavljenega problema. Če je v navodilih zapisanih preveč vmesnih korakov, potem to ni več problemska naloga.

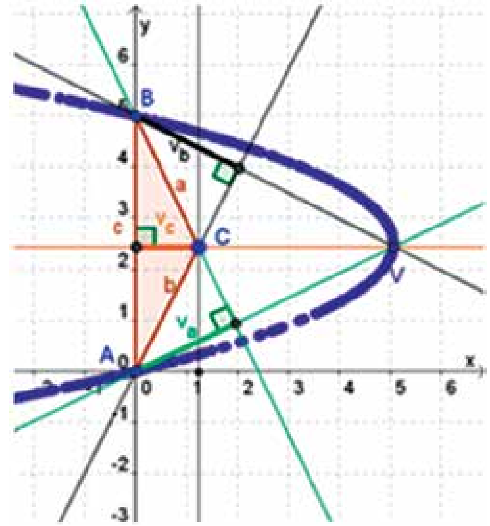
S programom GeoGebra konstruirajo trikotnik ABC: $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(t, 4)$, t je parameter, višinsko točko V in premico $y = 4$. Potem raziskujejo, katero krivuljo opiše višinska točka trikotnika – vklopijo funkcijo ***Sled*** (Slika 18). Do enačbe nastale krivulje pridejo z uporabo ukaza ***PolinomskaTrendnaČrta***. Pri konstrukciji s programom GeoGebra učitelj opozarja manj spretne dijake na pravilen vrstni red konstrukcijskih korakov, da bodo potem lahko izvedli ustrezno animacijo.

Sami si izberejo še druge primere trikotnikov in premice p. Ugotovijo, da je geometrijsko mesto višinske točke vedno parabola (Slika 19).



Slika 18: Geometrijsko mesto višinske točke.

Potem nalogo rešijo še analitično. Zapišejo enačbi nosilk višine na npr. stranico in stranico ter izračunajo njuno presečišče. Tako dobijo koordinati točke in s tem tudi enačbo parabole. Izračunajo še teme, gorišče in enačbo premice vodnice parabole.



Slika 19: Geometrijsko mesto višinske točke.

Vprašanja za razvoj aktivnosti:

- Katere znamenite točke trikotnika poznaš?
- Kaj je višina trikotnika?
- Opredeli pojem višinske točke trikotnika?
- Kakšna je lega višinske točke glede na različne trikotnike?
- Po kateri krivulji se po tvojem mnenju giblje višinska točka, ko točko C premikamo po premici p?
- Kako izračunamo smerni koeficient premice?
- Kako izračunamo smerni koeficient pravokotnice?
- Kakšno enačbo ima premica, ki je pravokotna na abscisno os?
- Kako izračunamo koordinati gorišča?
- Kakšna je temenska oblika enačbe parabole?

Možne razširitve aktivnosti

Dijaki lahko s programom GeoGebra raziskujejo, katere krivulje opiše višinska točka, če spremenimo lego premice p, po kateri premikamo točko C (npr. premica p je pravokotna na stranico AB, stranico AB seka pod kotom, ki ni 90°).

Sprotno spremljanje dejavnosti in dosežkov

Predpostavimo, da v vseh primerih stranica AB trikotnika ABC leži na eni izmed koordinatnih osi.

Vprašanja za spremljanje:

- Ali je višinska točka trikotnika presečišče višin trikotnika?
- Ali znaš napovedati lego parabole, če leži premica p pod stranico AB, AB pa leži na abscisni osi?
- Ali znaš napovedati lego parabole, če leži stranica AB na ordinatni osi, premica p pa ima enačbo $x = d$, $d < 0$?
- Primerjaj lego temena parabole glede na točko C (je nad, je pod) v odvisnosti od oblike trikotnika ABC oz. velikosti kota γ?

- Naj za oglišča trikotnika *ABC* velja: $A\ (0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(t, d)$, $d > 0$, t je parameter, premica p pa ima enačbo $y = d$. Zapiši pogoje za d, da bo teme ležalo nad, na oz. pod premico $y = d$.
- V katerem primeru je točka C lahko teme parabole?

Gradivo

UL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

RUL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Pri pouku smo poleg opisanih aktivnosti izvedli še naslednje primere [Ivančič, 6, str. 45]:

Primer 1: Učenci so na primeru biljardne mize v obliki elipse ugotavljali odbojno lastnost elipse (Slika 20).

Slika 20: Biljardna miza v obliki elipse.

Primer 2 (Domača naloga): Učenci so poiskali primere, kjer se v vsakdanjem življenju uporabljajo predmeti, ki izkoriščajo odbojno lastnost elipse in parabole.

Primer 3 (Utrjevanje in preverjanje znanja): Na delovnih listih so bile zapisane različne enačbe, formule, točke, narisane krivulje … Dijaki so sestavili čim več različnih problemov in nalog na osnovi danih podatkov. Po omejenem časovnem obdobju so predstavili svoje naloge še ostalim sošolcem.

Primeri iz delovnega lista:

- $A(0,3), B(0,-3)$
- $4x^2 - y^2 = 4, x - y = 0$
- $x^2 + 25y^2 = 25, A(4, \frac{1}{2})$

Primer 4 (Matematična preiskovanja z uporabo IKT): Učenci so z matematičnim programom Geogebra raziskovali, katere množice točk v ravnini lahko predstavljajo enačbe z delovnega lista. Zapisali so tudi ustrezne pogoje za parametre, ki so nastopali v enačbah.

Primeri enačb iz delovnega lista:

- $ax^2 + y^2 = a$
- $x^2 + ay^2 = b$
- $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Končno spremljanje

Po predelani učni temi stožnice je sledilo pisno preverjanje znanja, kjer je bilo približno 10 % točk namenjenih preverjanju problemskih znanj.

Primer naloge

Dana je enačba elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ in točka $T(2, 1)$.

a) Zapiši polosi in gorišči elipse.

b) Skiciraj elipso.

c) Parabola ima teme v točki T, gorišče pa v desnem gorišču elipse. Skiciraj parabolo, tako da narišeš teme in konstruiraš še dve točki na paraboli. Zapiši enačbo premice vodnice te parabole.

Pri vprašanju c) je treba pokazati razumevanje definicije parabole v novi situaciji.

Pri dijakih sem zaznala velik napredek v osmišljanju matematičnih vsebin, postavljanju ključnih vprašanj za rešitev problema, razumevanju problemskih situacij in zaupanju v lastne matematične sposobnosti.

Načrtovanje

Aktivnosti pod točko 1. in 2. načrtujemo na začetku obravnave učne teme stožnice, aktivnosti pod točko 3. pa na koncu učne teme. Aktivnosti pod točko 3. lahko načrtujemo tudi v četrtem letniku, kot lep primer povezovanja in ponovitve različnih matematičnih učnih vsebin.

Zaključek

Med izvajanjem pouka sem spremljala predvsem didaktične vidike učnega procesa: motiviranost za delo, medsebojno sodelovanje, osmišljanje matematičnih vsebin, reševanje problemskih situacij in aktivno učenje. Znanje dijakov je bolj trajno in uporabno, če je pridobljeno z aktivnim sodelovanjem, ter če lahko pridobljeno znanje povežejo s primeri iz vsakdanjega življenja in medpredmetno. Vsi dijaki niso navdušeni nad takim načinom učenja. Pri marsikom mora učitelj vložiti veliko energije v njegovo motivacijo in aktivno sodelovanje pri pouku. Trud je poplačan ob pogledu na zadovoljne in ponosne dijake, ko so sami rešili problem.

Viri

Legiša, P. (2002). Matematika. Učbenik za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: DZS.

Razpet, N. (1996/97): Višinska točka trikotnika in stožnice, Revija Presek II, str. 74–77, Založništvo DMFA, dostopno na http://www.presek.si/24/1295-Razpet.pdf (24. 10. 2019).

Rugelj, M., Šparovec, J., Kavka, D., Pavlič, G. (2004). Prostor: matematika za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan.

Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Žakelj, A. in drugi (2008). Učni načrt. Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

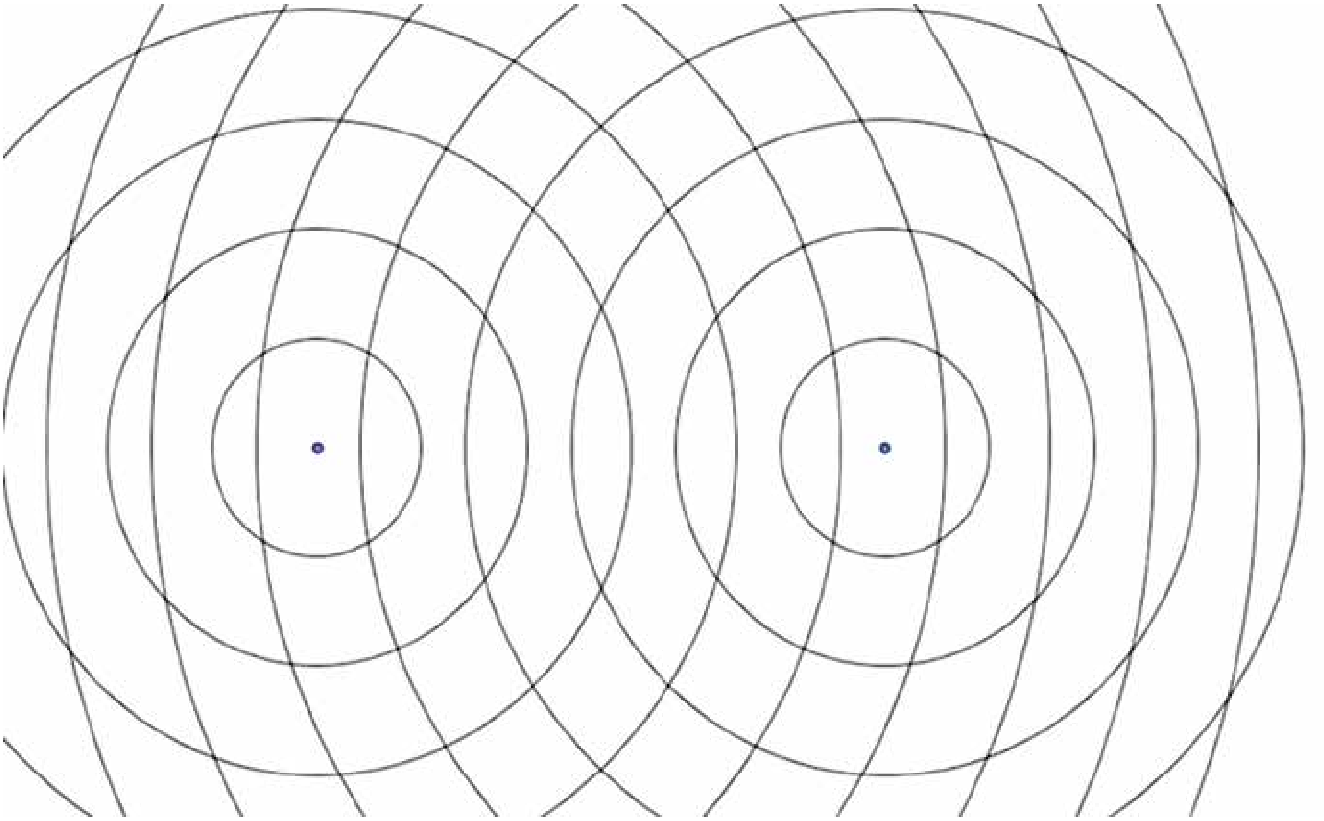
Avsec A. [et al.]. Zbornik prispevkov konference NAMA 2012 (2012), Ljubljana, MIZKŠ, http://www.zrss.si/pdf/Zbornik-prispevkov-NAMA2012.pdf

Matematika v šoli, št. 2., letnik 25, 2019

Valovanje in stožnice

Na učnem listu sta na vsaki sliki narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Ponazarjata sočasno nihajoča točkasta izvora. Označi vsa presečišča krožnic. Upoštevaj geometrijske definicije stožnic in na vsaki sliki poišči eno družino stožnic, na katerih ležijo presečišča krožnic. Svojo ugotovitev utemelji. Obravnavani primer poveži z znanjem fizike. Kakšno vlogo imata pri nastalih krivuljah točki, ki ponazarjata izvora valovanja?

Primer 1



Odgovori: ______________________________

____

____

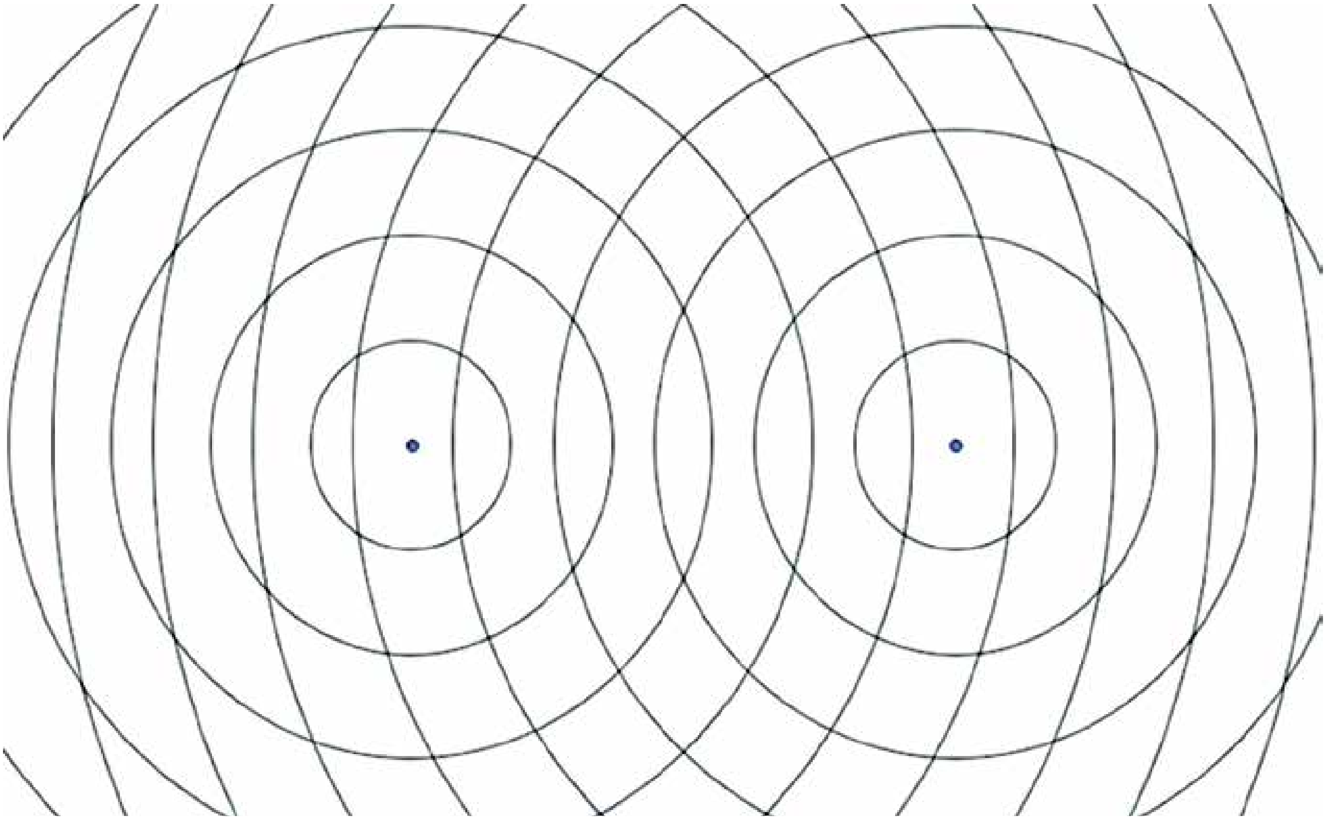
____

____

____

____

Primer 2



Odgovori: ____

____

____

____

____

____

____

Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Podan je trikotnik ABC z višinsko točko V. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka V, če oglišče C premikamo po premici p, ki je vzporedna daljici AB, točki A in B pa sta negibni.

1. Reši zastavljeni problem za naslednje podatke

$A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$, premica p: $y = 4$.

i) Reševanje problema z uporabo programa GeoGebra

Ko boš rešil primer za dano premic $y = 4$, izberi še druge premice, ki so vzporedne daljici AB in za vsak primer posebej opazuj geometrijsko mesto višinskih točk. Kaj opaziš?

ii) Analitično reševanje problema

Izračunaj koordinati višinske točke V. Razloži, po kateri krivulji se giblje višinska točka. To krivuljo analitično obravnavaj.

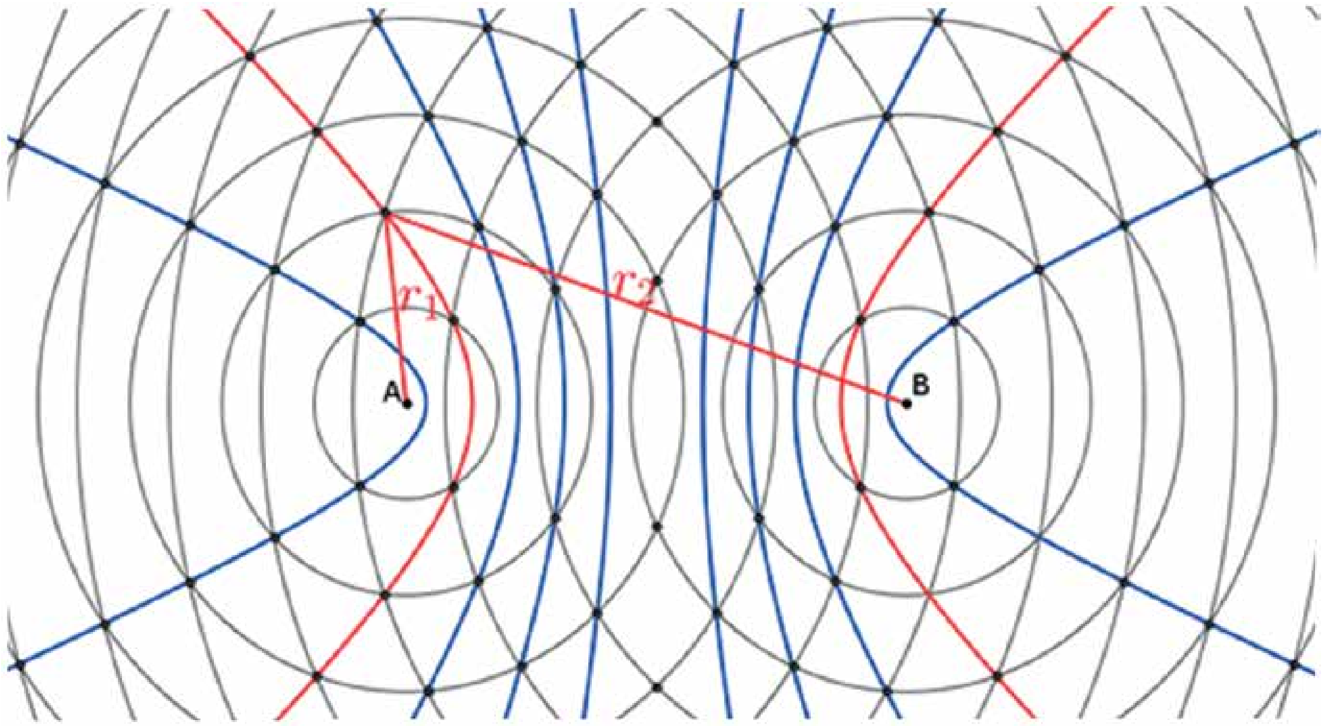
2. Analitično reševanje splošnega problema

Brez škode za splošnost si lahko izberemo koordinatni sistem, tako da je $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(t, d)$, t je parameter, enačba premice p je $y = d$, $d \neq 0$. Za tako izbran koordinatni sistem izračunaj koordinati višinske točke V. Nalogo rešuj na podoben način kot 1.ii).

Valovanje in stožnice

Na učnem listu sta na vsaki sliki narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Ponazarjata sočasno nihajoča točkasta izvora. Označi vsa presečišča krožnic. Upoštevaj geometrijske definicije stožnic in na vsaki sliki poišči eno družino stožnic, na katerih ležijo presečišča krožnic. Svojo ugotovitev utemelji. Obravnavani primer poveži z znanjem fizike. Kakšno vlogo imata pri nastalih krivuljah točki, ki ponazarjata izvora valovanja?

Primer 1



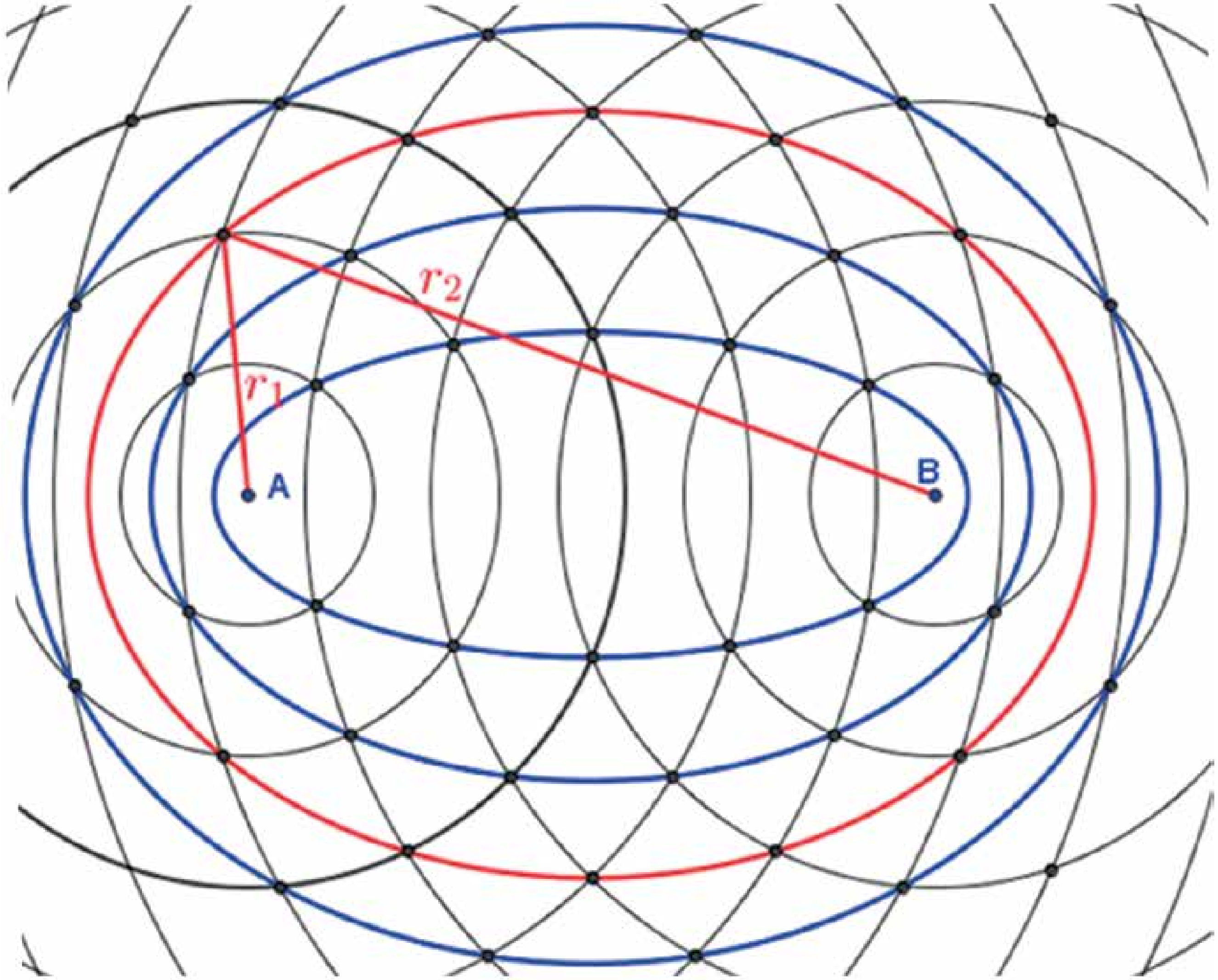
Slika 1: Presečišča krožnic ležijo na hiperbolah

Ugotovitev: Presečišča krožnic ležijo na hiperbolah, razen tistih presečišč, ki ležijo na simetrali daljice *AB*. Točki *A* in *B*, ki ponazarjata izvora valovanja, sta gorišči hiperbol.

Utemeljitev: Izberemo točke, za katere iz slike sklepamo, da ležijo na isti hiperboli. Potem pokažemo, da za vse izbrane točke velja $|r_2 - r_1|$ = konstanta. Upoštevamo, da polmeri krožnic enakomerno naraščajo.

Hiperbole predstavljajo interferenčne pasove valovanja.

Primer 2



Slika 2: Presečišča krožnic ležijo na elipsah.

Ugotovitev: Presečišča krožnic ležijo na elipsah. Točki *A* in *B*, ki ponazarjata izvora valovanja, sta gorišči elips.

Utemeljitev: Izberemo točke, za katere iz slike sklepamo, da ležijo na isti elipsi. Potem pokažemo, da za vse izbrane točke velja $r_1 + r_2 =$ konstanta. Upoštevamo, da polmeri krožnic enakomerno naraščajo.

Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Podan je trikotnik ABC z višinsko točko V. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka V, če oglišče C premikamo po premici p, ki je vzporedna daljici AB, točki A in B pa sta negibni.

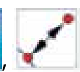
1. Reši zastavljeni problem za naslednje podatke:

$A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$, premica p: $y = 4$.

i) Reševanje problema z uporabo programa GeoGebra

Ko boš rešil primer za dano premic y = 4, izberi še druge premice, ki so vzporedne daljici AB in za vsak primer posebej opazuj geometrijsko mesto višinskih točk. Kaj opaziš?

Rešitev:

- V orodni vrstici programa GeoGebra izberi ukaz *Pogled* in v meniju izberi *Osi, Koordinatna mreža, Algebrsko okno.*
- Nariši točke *A, B* in *C*.
- Nariši daljice *AB, BC* in *AC*.
- Nariši točko (0, 4) in vzporednico k daljici *AB*. To je premica *p*
- Točko *C* pripni na premico *p* z zaporedjem izbir , .
- Konstruiraj višinsko točko *V* (je presečišče nosilk višin).
- Za točko *V* klopi SLED.
- Točko *C* premikaj po premici *p*.
- Sled točke *V* je parabola.
- Na krivulji si izberi tri točke npr. $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $D(4, 2)$.
- V vnosno vrstico programa zapiši: *PolinomskaTrendnaČrta* [{(0, 0), (6, 0), (4, 2)}, 2].
- S pritiskom na tipko Enter se ti v algebrskem oknu izpiše enačba funkcije, katere graf je parabola – sled višinske točke: $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x$.

ii) Analitično reševanje problema

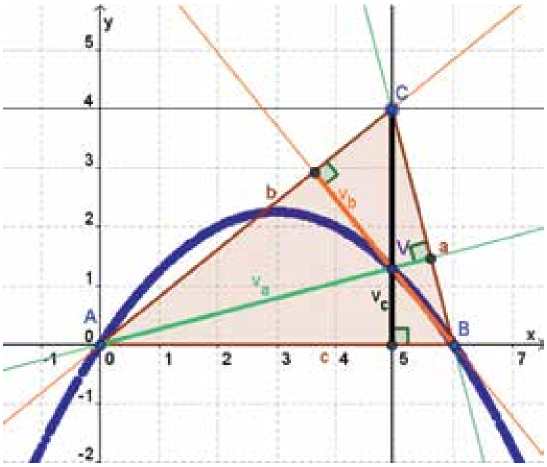
Izračunaj koordinati višinske točke V. Razloži, po kateri krivulji se giblje višinska točka. To krivuljo analitično obravnavaj.

Rešitev:

Nosilka višine na stranico *c* je premica z enačbo $x = t$. Nosilka višine na stranico *a* je premica z enačbo $y = \frac{6-t}{4} \cdot x$. Presečišče premic je višinska točka $V\left(t, -\frac{t^2}{4} + \frac{3t}{2}\right)$.

Ko parameter *t* teče po realnih številih (točka *C* se giblje po premici *p*), se višinska točka giblje po paraboli z enačbo $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}$ oz. $(x-3)^2 = -4\left(y - \frac{9}{4}\right)$ (Slika 1).

Iz enačbe razberemo, da je teme v točki $T\left(3, \frac{9}{4}\right)$. Izračunamo, da je gorišče v točki $F\left(3, \frac{5}{4}\right)$ in enačba premice vodnice je $y = \frac{13}{4}$.



Slika 1: Geometrijsko mesto višinske točke.

2. Analitično reševanje splošnega problema

Koordinatni sistem izberimo tako, da je A(0, 0), B(b, 0), C(t, d), t je parameter, enačba premice p je y = d, d ≠ 0. Za tako izbrani koordinatni sistem izračunaj koordinate višinske točke V in izračunaj še ostale količine po vzoru naloge 1.ii).

Rešitev:

Nosilka višine na stranico *c* je premica z enačbo *x* = *t*. Nosilka stranice *a* ima smerni koeficient $\frac{d}{b-t}$. Nosilka višine na stranico *a* je zato premica z enačbo $y = \frac{b-t}{d} \cdot x$. Presečišče premic *x* = *t* in $y = \frac{b-t}{d} \cdot x$ je višinska točka $V(t, \frac{bt-t^2}{d})$.

Ko parameter *t* teče po realnih številih (točka *C* se giblje po premici *p*), se višinska točka giblje po paraboli z enačbo $y = -\frac{x^2}{d} + \frac{bx}{d}$ oz. $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = -d\left(y - \frac{b^2}{4d}\right)$.

Iz enačbe razberemo, da je teme v točki $T\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4d}\right)$. Izračunamo, da je gorišče v točki $F\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2-d^2}{4d}\right)$ in enačba premice vodnice je $y = \frac{b^2+d^2}{4d}$.