PROFESOR PLEMELJ IN REŠEVANJE HILBERTOVEGA 21. PROBLEMA

MILAN HLADNIK[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Ključne besede: Math. Subj. Class. (2020): 34M35, 34M50

Bralcu je morda manj znano, da se reševanje Hilbertovega enaindvajsetega problema ni končalo leta 1908 z objavo Plemljeve rešitve, ki je skoraj petinsedemdeset let obveljala za dokončno. Poleg osnovne matematične razlage in Plemljevega pristopa k problemu je v članku, ki se izogne zapletenim dokazom, na kratko opisano nadaljnje raziskovanje, ki je ob koncu 20. stoletja privedlo do presenetljivega preobrata z odkritjem protiprimerov in drugačnih dognanj. Po mnenju avtorja tega prispevka nova spoznanja ne zmanjšujejo pomena Plemljeve pionirske vloge pri reševanju problema.

PROFESSOR PLEMELJ AND SOLVING HILBERT'S 21ST PROBLEM

It may be less known to the reader that the process of solving Hilbert's twenty-first problem did not end in 1908 with the publication of Plemelj's solution which was considered definitive for almost seventy-five years. In addition to the basic mathematical explanation and Plemelj's approach to the problem, the article, which avoids complex proofs, briefly describes further research, which at the end of the 20th century led to a surprising turn with the discovery of counterexamples and different conclusions. In the opinion of the author of this paper, the new findings do not diminish the importance of Plemelj's work and his pioneering role in solving the problem.

Josip Plemelj (1873–1967) je gotovo najbolj znan in v svetu uveljavljen slovenski klasični matematik po Juriju Vegi. V tem sestavku se bomo dotaknili le enega vidika njegovega znanstvenega dela, ki pa mu že sam zase zagotavlja ugledno mesto v zgodovini matematike. Uvršča se namreč med reševalce problema, ki izhaja še iz Riemannovih idej v sredini 19. stoletja, na novo pa ga je formuliral nemški matematik David Hilbert (1862–1943), ko je leta 1900 na drugem svetovnem matematičnem kongresu v Parizu predstavil triindvajset, takrat še nerešenih matematičnih problemov. Med njimi je bil tudi naslednji enaindvajseti problem:

H21. *Dokazati, da obstaja Fuchsova linearna diferencialna enačba z danimi singularnostmi in dano monodromijsko grupo.*

Ker Hilbert v spremljajoči razlagi tega problema omenja Riemanna, ki se je sicer ukvarjal s konstrukcijo analitičnih funkcij s predpisanimi lokalnimi lastnostmi, je problem H21 postal znan kot **Riemannov problem**. Tako ga imenuje tudi Plemelj v svojem članku [17] in v monografiji [18] in za njim še profesor Vidav v svoji knjižici ob stoletnici Plemljevega rojstva [22].

Danes uporabljajo tudi ime **Riemann-Hilbertov problem** (npr. Anosov in Bolibruch v [1]). Sicer pa je dobro vedeti, da se pod tema dvema nazivoma skriva še vrsta drugih problemov, ki vsi izvirajo iz Riemannovih raziskav in se v glavnem tičejo robnih vrednosti analitičnih funkcij (glej npr. ustrezno geslo na Wikipedii in tam navedeno literaturo).

V originalnem Hilbertovem besedilu je namesto Fuchsovega *sistema* navedena zahteva po eksistenci Fuchsove *enačbe* (glej npr. [12]). Današnji vodilni matematiki na tem področju menijo, da je Hilbert z enačbo v resnici mislil vektorsko enačbo oziroma sistem enačb. To utemeljujejo z dejstvom, da je bilo v Hilbertovem času že znano, da ni vedno mogoče konstruirati Fuchsove enačbe višjega reda, ki bi imela (natanko) predpisane singularnosti ter dano monodromijsko grupo. Razlog je premajhno število parametrov v Fuchsovi enačbi v primerjavi s številom parametrov pri monodromiji, kar je prvi izračunal H. Poincaré [19]. Za dosego cilja so potrebne dodatne, t. i. navidezne singularnosti (glej 5. razdelek).

Ta sestavek je zgolj informativnega značaja in se ne spušča v podrobne dokaze sicer zahtevnih trditev, večinoma je povzet po knjigi [1] ter po dveh člankih [3] in [6]. Njegov namen je zgolj povedati zgodbo o reševanju problema H21, ki je zanimiva in poučna, a se zdi med slovenskimi matematiki premalo znana, čeprav je v njej pomembno vlogo odigral tudi profesor Josip Plemelj. Ogledali si bomo, kakšen je bil njegov prispevek v začetku prejšnjega stoletja in do kakšnih novih spoznanj so se raziskovalci dokopali ob njegovem koncu. Najprej pa skušajmo pojasniti, kaj Hilbertov 21. problem sploh pomeni.

1. Osnovni pojmi o Fuchsovih sistemih

Imejmo sistem n homogenih linearnih diferencialnih enačb prvega reda, zapisan v matrični oziroma vektorski obliki

$$y' = A(z)y, \tag{1}$$

kjer je y neznana vektorska funkcija (funkcijski stolpec), y' vektor njenih odvodov in $A(z)$ meromorfna matrična funkcija reda n. To pomeni, da so vsi njeni elementi povsod na $\mathbb{C}$ holomorfne (analitične) funkcije, razen na množici izoliranih točk $\{a_1, a_2, \ldots\}$, v katerih so poli. Te točke so izjemne, imenujemo jih *singularne točke sistema.* Tudi neskončna točka, ∞, je na splošno lahko singularna, kar po definiciji pomeni, da je 0 singularna točka za sistem, ki ga iz prvotnega sistema (1) dobimo s substitucijo $z \mapsto 1/z$. V tem primeru zahtevajmo, da je tudi v točki ∞ pol za vsak element matrične funkcije $A(z)$. Toda iz splošne teorije analitičnih funkcij je znano, da so meromorfne funkcije, ki imajo pole na razširjeni kompleksni ravnini $\tilde{\mathbb{C}} =$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kar racionalne funkcije. Le-te pa imajo na $\tilde{\mathbb{C}}$ le končno mnogo singularnosti (polov) $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Torej je tudi matrična funkcija $A(z)$ iz (1) v resnici racionalna.

Zaradi enostavnosti obravnave bomo odslej še dodatno predpostavili, da neskončna točka ∞ ni singularna oziroma, da ležijo vsi poli v končnosti: $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$; s primerno substitucijo lahko to pri zgornjih privzetkih vedno dosežemo.

Definicija 1. Singularna točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *Fuchsova singularna točka* sistema (1), če ima funkcija $A(z)$ v njej pol kvečjemu prve stopnje. Sistem je *Fuchsov*, če so vse njegove singularne točke Fuchsove.[1]

Hitro vidimo tudi naslednje: Če je sistem (1) Fuchsov in so točke a_i res poli prve stopnje, ima pri prejšnji predpostavki matrična funkcija $A(z)$ obliko

$$A(z) = \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{z - a_i},$$

kjer so A_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, konstantne matrike reda n. Ker smo predpostavili, da ∞ ni singularna točka, pa poleg tega velja tudi $\sum_{i=1}^{s} A_i = 0$. Slednje takoj spoznamo z uporabo substitucije $z = 1/\zeta$, ki nam sistem (1) prevede v sistem $\dot{y} = B(\zeta)y$, kjer je

$$B(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2} A(1/\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{1 - a_i\zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{i=1}^{s} A_i - \sum_{1=1}^{s} \frac{a_i A_i}{1 - a_i\zeta}.$$

Vidimo, da je druga vsota vedno regularna funkcija pri $\zeta = 0$, prva, in zato tudi matrična funkcija $B(\zeta)$, pa natanko takrat, ko je $\sum_{i=1}^{s} A_i = 0$.

Sistem (1) in njegove rešitve bomo torej obravnavali na množici $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$.

Eksistenčni izrek za sisteme navadnih linearnih diferencialnih enačb na vsakem enostavno povezanem območju $\Omega \subset U$, ki ne vsebuje singularnih točk, zagotavlja n linearno neodvisnih holomorfnih rešitev danega sistema linearnih diferencialnih enačb. To so funkcije na Ω z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, opazujemo pa jih lahko tudi na vsej množici U. Singularne točke so lahko tedaj

[1] Poimenovanje izvira iz priimka nemškega matematika Lazarusa Immanuela Fuchsa (1833–1902), ki se je skoraj izključno ukvarjal z linearnimi diferencialnimi enačbami. Plemelj ga je srečal kot profesorja v Berlinu, kjer je bil leta 1899/1900 po svojem doktoratu na študijskem izpopolnjevanju.

tudi njihova razvejišča.

Zgled 1. Sistem $y_1' = y_2/z$, $y_2' = 0$ ima npr. dve singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, ki sta obe Fuchsovi, in dve linearno neodvisni rešitvi $(1, 0)$ in $(\ln z, 1)$. Druga rešitev ima v obeh singularnih točkah logaritmično razvejišče. Za sistem $y_1' = y_2/z$, $y_2' = y_2/(2z)$ z linearno neodvisnima rešitvama $(1, 0)$ in $(2\sqrt{z} - 2, \sqrt{z})$ pa sta obe singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, korenski razvejišči. Oba zgleda sta samo posebna primera Eulerjevega sistema (6) v naslednjem razdelku (pri $a = 1$, $b = 0$ in pri $a = 1/2$, $b = 0$).

Rešitve sistema (1) tvorijo n-razsežen vektorski prostor S nad U večličnih holomorfnih funkcij, nad ustrezno Riemannovo ploskvijo (tj. univerzalnim krovnim prostorom nad U) pa enoličnih holomorfnih funkcij, z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$. Kot stolpce jih lahko združimo v t. i. *fundamentalno matriko rešitev* $Y = Y(z)$ sistema (1).

Osnovne rešitve lahko analitično nadaljujemo, začenši v izbrani regularni točki z_0, vzdolž vsake sklenjene poti v U. Ta pot določa element σ *fundamentalne grupe* $\pi_1(U, z_0)$ za U. Isti element določajo vse sklenjene poti, ki so v U homotopne prvotni poti. Ker je območje U s potmi povezano, je fundamentalna grupa $\pi_1(U)$ neodvisna od izbire začetne točke z_0 (primerjaj [15, str. 10, 11]), zato običajno navedbo začetne točke kar izpustimo. Tako bomo storili tudi v nadaljevanju tega prispevka in namesto $\pi_1(U, z_0)$ pisali krajše $\pi_1(U)$.

Analitično nadaljevanje izbranih osnovnih rešitev na vsakem koraku ohranja linearno neodvisnost med njimi. Ko se vrnemo na prvotno območje Ω, so te rešitve še vedno linearno neodvisne, toda morda druge funkcije, ki pa so linearne kombinacije prvotnih. Če je bila $Y = Y(z)$ prvotna fundamentalna matrika sistema (1), naj bo $\sigma(Y)$ nova fundamentalna matrika po obhodu vzdolž sklenjene poti σ (tako da pomeni σ hkrati tudi transformacijo iz ene fundamentalne matrike v drugo, ki je dobljena z analitičnim nadaljevanjem vzdolž poti σ).

Ena od sklenjenih poti v U je trivialna pot, homotopna točki z_0. Ustrezni element fundamentalne grupe $\pi_1(U)$ označimo z ι in predstavlja enoto v $\pi_1(U)$; zanjo velja $\iota(Y) = Y$. Toda sklenjene poti v U oziroma elemente fundamentalne grupe lahko med seboj komponiramo (polovico časa prehodimo po prvi, polovico po drugi poti). Produkt dveh elementov σ in τ v grupi $\pi_1(U)$ označimo s $\sigma\tau$ (najprej σ in nato τ), tako da je ustrezna transformacija fundamentalne matrike Y z analitičnim nadaljevanjem enaka

$$(\sigma\tau)(Y) = \tau(\sigma(Y)). \tag{$*$}$$

Inverznemu elementu σ^{-1} v fundamentalni grupi, ki ga določa pot σ, prehojena v obratni smeri, pripada pač inverzna transformacija.

Ker so stolpci transformiranke $\sigma(Y)$ linearne kombinacije stolpcev začetne fundamentalne matrike Y, povezuje oba nabora fundamentalnih rešitev obrnljiva konstantna matrika $\chi(\sigma)$, odvisna samo od elementa σ v $\pi_1(U)$. Ta matrika določa med fundamentalnima matrikama Y in $\sigma(Y)$ zvezo

$$Y = \sigma(Y)\chi(\sigma).$$

Naj bo še $\tau \in \pi_1(U)$, tako da velja tudi $Y = \tau(Y)\chi(\tau)$. Upoštevajmo enakost $(*)$ ter dejstvo, da je matrika $\chi(\sigma)$ konstantna in da transformacija analitičnega nadaljevanja ohranja linearne kombinacije funkcij, pa dobimo

$$(\sigma\tau)(Y)\chi(\sigma\tau) = Y = \tau(Y)\chi(\tau) = \tau(\sigma(Y)\chi(\sigma))\chi(\tau) = \tau(\sigma(Y))\chi(\sigma)\chi(\tau).$$

Odtod sledi $\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$, tako da je χ upodobitev grupe $\pi_1(U)$ v grupo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ vseh obrnljivih matrik reda n. Seveda je pri tem $\chi(\iota) = \mathrm{I}$, identična matrika, inverznemu elementu σ^{-1} pa pripada inverzna matrika $\chi(\sigma)^{-1}$.

Fundamentalna matrika Y rešitev sistema (1) ni enolično določena, saj je za poljubno obrnljivo konstantno matriko C reda n matrika $\tilde{Y} = YC$ spet fundamentalna (in vsaka fundamentalna matrika se tako izraža z Y). Tudi na matriko $\tilde{Y}$ deluje grupa $\pi_1(U)$, tako da je npr. $\tilde{Y} = \sigma(\tilde{Y})\tilde{\chi}(\sigma)$ za vsak $\sigma \in \pi_1(U)$ in za neko upodobitev $\tilde{\chi}$ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$. Potem pa je za vsak $\sigma \in \pi_1(U)$

$$\sigma(Y)\chi(\sigma)C = YC = \tilde{Y} = \sigma(\tilde{Y})\tilde{\chi}(\sigma) = \sigma(Y)C\tilde{\chi}(\sigma)$$

oziroma po krajšanju s $\sigma(Y)$ in množenju s C^{-1}

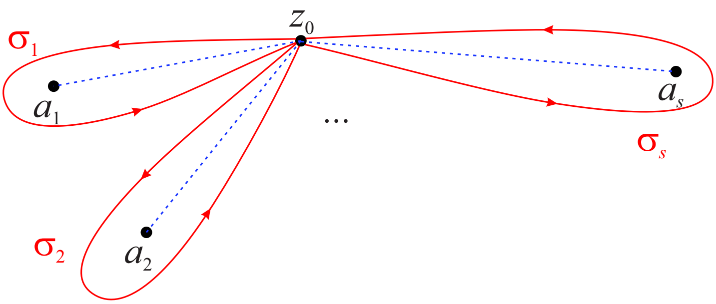
$$\tilde{\chi}(\sigma) = C^{-1}\chi(\sigma)C.$$

Vidimo, da je nova upodobitev podobna (konjugirana) prejšnji. Seveda nas zanimajo upodobitve fundamentalne grupe le do podobnosti natančno. Grupi $\{\chi(\sigma);\ \sigma \in \pi_1(U)\}$ rečemo *monodromijska grupa* sistema diferencialnih enačb (1), ustrezni upodobitvi

$$\chi : \pi_1(U) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

(bolj natančno njenemu podobnostnemu razredu) pa *monodromija* sistema (1).

Fundamentalna grupa $\pi_1(U)$ na U je generirana s sklenjenimi potmi (zankami), ki izhajajo iz ene (poljubne) točke in enkrat obkrožijo v pozitivnem smislu samo eno od singularnih točk. Naj bo σ_i taka pot, ki obkroži točko a_i (glej sliko 1). Produkt vseh teh posameznih poti (v grupi $\pi_1(U)$)



Slika 1. Enostavno sklenjene poti okrog singularnih točk, ki generirajo fundamentalno grupo.

je sklenjena pot, ki enkrat obkroži vse končne singularne točke. Ker neskončna točka ni singularna, je ta pot v množici U homotopna točki, torej predstavlja enoto v fundamentalni grupi, tako da je $\prod_{i=1}^{s} \sigma_i = \iota$. Zato za ustrezno upodobitev fundamentalne grupe velja

$$\prod_{i=1}^{s} \chi(\sigma_i) = I.$$

Vrnimo se k problemu H21. Ta torej sprašuje po Fuchsovem sistemu homogenih linearnih diferencialnih enačb (1) s predpisanimi singularnimi točkami na Riemannovi sferi in z dano monodromijsko grupo. Tradicionalno ga imenujemo tudi Riemann-Hilbertov problem zaradi odločilnega vpliva Riemannovih idej na vse tovrstne raziskave v drugi polovici 19. stoletja. V jeziku reprezentacij (upodobitev) se problem glasi:

Ali lahko vsako reprezentacijo (z obrnljivimi matrikami danega reda) fundamentalne grupe Riemannove sfere $\tilde{\mathbb{C}}$ *brez točk* $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ *realiziramo kot upodobitev monodromijske grupe nekega sistema* (1) *z enostavnimi poli?*

Oziroma na kratko:

Ali je vsaka taka reprezentacija fundamentalne grupe monodromija?

2. Regularno singularne točke in regularni sistemi

Definicija 2. Točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *regularno* ali *pravilno singularna* točka sistema (1), če ima v njeni bližini vsaka rešitev $y = y(z)$ največ polinomsko rast, ko $z \to a$, tj. obstaja tak $\lambda > 0$, da pri pogoju $z \to a$ velja $y(z)|z-a|^{\lambda} \to 0$. Sistem je *regularen*, če je zanj vsaka točka v $\tilde{\mathbb{C}}$ bodisi regularna bodisi regularno singularna.

V resnici je treba biti pri definiciji še bolj pazljiv, ker ima rešitev $y = y(z)$ v točki a običajno logaritemsko singularnost. Zahtevati je treba kvečjemu polinomsko rast rešitve, ko se z bliža singularni točki a znotraj poljubnega sektorja (tako da ne obkroži a). Pokazali so, da je vsak Fuchsov sistem regularen (glej npr. [7] ali [11, str. 73]), obratno pa, kot se lahko hitro prepričamo (glej npr. sistem (5) v naslednjem zgledu), ne velja; regularnost je torej širši pojem. Na splošno nimamo preprostega kriterija, kdaj je poljuben linearni sistem oblike (1) z racionalno funkcijo $A(z)$ regularen.

Singularne točke imamo tudi pri linearni diferencialni enačbi višjega reda oblike

$$y^{(n)} + q_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + q_n(z)y = 0. \tag{2}$$

To so singularne točke njenih koeficientov $q_j(z)$, ki naj bodo meromorfne funkcije na $\tilde{\mathbb{C}}$. Med singularnimi točkami so nekatere lahko regularno oziroma pravilno singularne. Definicija regularnosti je za enačbe enaka kot za sisteme in jo lahko kar ponovimo.

Definicija 3. Točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *regularno singularna* točka linearne diferencialne enačbe n-tega reda oblike (2), če ima v njeni bližini vsaka rešitev $y(z)$ največ polinomsko rast, ko $z \to a$. Enačba (2) je *regularna*, če je zanjo vsaka točka v $\tilde{\mathbb{C}}$ bodisi regularna bodisi regularno singularna.

V nasprotju s sistemom pa za tako skalarno enačbo višjega reda obstaja enostaven kriterij za regularnost posamezne singularne točke. O tem govori

Fuchsov izrek. *Singularnost $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je regularno singularna točka enačbe (2) natanko takrat, ko ima za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$ koeficient $q_j(z)$ v točki a pol kvečjemu stopnje j.*

Za dokaz glej npr. [7, str. 129] ali [11, str. 85]. Zaradi tega izreka rečemo regularno (pravilno) singularni točki enačbe (2) tudi *Fuchsova singularna točka*, regularni enačbi pa *Fuchsova linearna diferencialna enačba.* Oba pojma se torej za enačbe ujemata.

Diferencialno enačbo (2) lahko na standardni način, tako da opazujemo vektor odvodov $(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \dots \quad & \dots\dots\dots \\ y_n' &= -q_n(z)y_1 - \cdots - q_1(z)y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem seveda velja, da je singularna točka regularna za sistem (3) natanko takrat, ko je regularna za diferencialno enačbo (2). Točka, ki je Fuchsova za enačbo (2), pa ni vedno Fuchsova tudi za standardni sistem (3), kot se lahko prepričamo že na preprostem primeru.

Zgled 2. Oglejmo si Eulerjevo linearno diferencialno enačbo 2. reda

$$z^2y'' + azy' + by = 0, \tag{4}$$

kjer sta a, b od nič različni kompleksni števili. Enačba ima dve singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, ki sta obe Fuchsovi (tj. regularno singularni) za (4). Ustrezni standardni sistem, prirejen enačbi (4), pa je

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{b}{z^2}\, y_1 - \frac{a}{z}\, y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Kot vidimo, točka 0 zanj ni Fuchsova, tako da sistem ni Fuchsov. Mimogrede, tudi neskončna točka ∞ ni Fuchsova, saj z uvedbo substitucije $z = 1/\zeta$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{1}{\zeta^2}\, y_2 \\ \dot{y}_2 &= b\, y_1 + \frac{a}{\zeta}\, y_2 \end{aligned}$$

Kljub temu lahko z drugačno transformacijo dobimo (nestandardni) sistem, ki pa je Fuchsov (obe singularni točki sta taki). To dosežemo, če uvedemo spremenljivki $y_1 = y$ in $y_2 = zy'$, od koder najdemo

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{z}\, y_2 \\ y_2' &= -\frac{b}{z}\, y_1 - \frac{a-1}{z}\, y_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Ker je Fuchsov, je ta sistem tudi regularen. Potem pa je regularen tudi sistem (5), saj ima skoraj iste rešitve kot sistem (6); če je namreč (y_1, y_2) rešitev sistema (6), je $(y_1, y_2/z)$ rešitev sistema (5).

Obravnavani sistem je poseben primer splošnega sistema, ki bi ga z isto transformacijo pridobili iz Eulerjeve diferencialne enačbe reda n, zato tudi nosi ime po Eulerju. Splača se ga zapisati vektorsko.

Eulerjev sistem reda n je sistem homogenih linearnih diferencialnih enačb, ki ga s konstantno kvadratno matriko A reda n lahko zapišemo v obliki

$$y' = \frac{1}{z}\,Ay. \tag{7}$$

Tudi ta splošnejši sistem ima samo dve singularni točki (pola prve stopnje v 0 in v ∞), zato je Fuchsov in torej tudi regularen. Fundamentalna grupa $\pi_1(U) = \{\sigma^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ ima en generator σ, ki ustreza enemu obhodu okrog izhodišča v pozitivnem smislu, in je zato izomorfna grupi celih števil.

Določimo monodromijo tega sistema. Lokalna fundamentalna matrika rešitev je v tem primeru matrična funkcija

$$Y(z) = z^A := \exp[(\ln z)A].$$

Če je σ do homotopije edina sklenjena pot, ki enkrat v pozitivnem smislu obkroži koordinatno izhodišče 0 in se vrne v začetno točko, se vrednost logaritemske funkcije $\ln z$ spremeni v $\ln z + 2i\pi$, fundamentalna matrika rešitev pa doživi spremembo v

$$\sigma(Y)(z) = \exp[(\ln z + 2i\pi)A] = Y(z)\exp(2i\pi A).$$

Torej je $\chi(\sigma) = \exp(-2i\pi A)$. Ker je fundamentalna grupa generirana s σ, je monodromija Eulerjevega sistema (7) enaka razredu konjugiranosti matrike $\chi(\sigma) = \exp(-2i\pi A)$. Velja pa tudi obratno: razred konjugiranosti $[M]$ poljubne obrnljive matrike M reda n je monodromija nekega Eulerjevega sistema (7). Za vsako obrnljivo matriko M namreč obstaja taka matrika A, da je $M = \exp(-2i\pi A)$.

3. Plemljev pristop k reševanju problema H21

Leta 1905 je Hilbert delno rešil problem za primer dveh enačb in poljubno mnogo singularnosti. Problem je prevedel na neko rešljivo integralsko enačbo. Vendar je bila njegova metoda zamotana in ni dala pregleda nad celotno množico rešitev (primerjaj [21, 22]).

Naslednje leto je napovedal in nekaj let za tem, leta 1908, svojo rešitev predstavil Josip Plemelj [17]. Tudi on se je v dokazu naslonil na (Fredholmovo) teorijo integralskih enačb, h kateri je sam precej prispeval.[2] Reševanja glavnega problema se je lotil tako, da si je najprej zastavil naslednji robni problem, ki spada v teorijo analitičnih funkcij.[3]

Osnovni robni problem. *Naj bo* Γ *enostavno sklenjena gladka ali vsaj odsekoma* (*tj. razen v končno mnogo točkah*) *gladka orientirana krivulja v* $\mathbb{C}$, *ki omejuje notranje območje* Ω^+ *od zunanjega območja* Ω^-, *komplementa množice* $\Omega^+ \cup \Gamma$ *v* $\tilde{\mathbb{C}}$, *in naj bo* $M(z)$ *na* Γ *definirana ter povsod obrnljiva in odvedljiva matrična funkcija. Poiskati je treba* vse *vektorske* (*vrstične*) *funkcije* $\phi = \phi(z)$, *ki*

(a) *so analitične na* $\Omega^\pm \setminus \{\infty\}$,

(b) *jih lahko z obeh strani* (*na odsekih gladkosti*) *zvezno nadaljujemo na krivuljo* Γ,

(c) *notranje in zunanje limite* $\phi_\pm(z)$ *v vsaki gladki točki* $z \in \Gamma$ *zadoščajo robnemu pogoju*

$$\phi_+(z) = \phi_-(z)M(z), \tag{RP}$$

(d) *imajo v okolici neskončne točke* $z = \infty$ *polinomsko rast, se pravi, da za rešitev* ϕ *obstaja vrstični polinom* γ *z lastnostjo*

$$\phi(z) = \gamma(z) + O(1/z), \ |z| \to \infty.$$

Najvišji red polinomov, ki sestavljajo vrstični polinom γ iz točke (d), imenujemo *red rešitve* ϕ *v neskončnosti.* Iščemo torej vrstično funkcijo ϕ, ki zadošča vsem zahtevam iz točk (a), (b), (c) in je končnega reda v neskončnosti (primerjaj [21, str. 133–134]). Kadar je red v neskončnosti nič, mora biti rešitev v neskončni točki regularna, γ pa konstanten vrstični polinom (in $\phi(\infty) = \gamma$). Kadar je $\gamma = 0$, pa rečemo, da rešujemo *homogeni* robni problem.

Ni nujno predpostaviti, da je matrična funkcija $M(z)$, ki nastopa v točki (c), odvedljiva. Rešitev $\phi(z)$ tega robnega problema je mogoča tudi v primeru, ko je $M(z)$ samo Hölderjevo zvezna funkcija na Γ, kar pomeni,

[2] Za novo teorijo integralskih enačb se je začel zanimati leta 1900/01 med svojim bivanjem v Göttingenu, kjer je švedski matematik Erik Holmgren (1872–1943) predaval o Fredholmovem delu. Do leta 1908 je imel Plemelj objavljena že dva članka o integralskih enačbah, prvega o njihovi uporabi v teoriji potenciala (1903) in drugega o teoriji Fredholmovih enačb (1904) ter še dva članka o robnih problemih v potencialni teoriji (1904, 1907).

[3] Naj pripomnimo, da je Plemelj svoje rezultate izpeljal brez uporabe vektorskih in matričnih oznak, tu pa bomo uporabili moderni matematični zapis; sledili bomo Bothnerju, ki vrstične vektorje množi z matrikami na desni strani (glej [6, str. R6]), medtem ko Vekua v [21] uporablja množenje matrik s stolpci.

da za vsak njen koeficient $m_{ij}(z)$ obstajata taki pozitivni konstanti C in $0 < \alpha < 1$, da velja

$$|m_{ij}(z_1) - m_{ij}(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^\alpha$$

za poljuben par $z_1, z_2 \in \Gamma$ (glej [6, Hilbert Boundary Value Problem 4.1, str. R6 in Assumptions 4.2 in 4.3, str. R7]).

Za uporabo pa je pomemben tudi primer, ko je matrična funkcija $M(z)$ samo zvezna ali pa ima celo nezveznosti prve vrste (skoke) v končnem številu točk $a_1, a_2, \ldots, a_s$ na krivulji Γ. Že Riemann si je zastavil tak splošnejši problem v posebnem primeru, ko je matrična funkcija $M(z)$ odsekoma konstantna funkcija (tj. konstantna na posameznem krivuljnem loku med dvema zaporednima točkama a_i in a_{i+1}, kjer je $i = 1, 2, \ldots, s$ in $a_{s+1} = a_1$). Domneval je, da se na ta problem lahko reducira problem o monodromiji linearnih diferencialnih enačb, ni pa navedel nobenega dokaza (glej [21, str. 134]). To se je s Plemljevimi raziskavami izkazalo za resnično.

Plemelj je osnovni robni problem torej najprej rešil za funkcijo $M(z)$, ki je odvedljiva na vsej krivulji Γ (kot rečeno, bi bila dovolj že predpostavka, da je $M(z)$ Hölderjevo zvezna).[4] V tem primeru mu je problem uspelo prevesti na reševanje vektorske Fredholmove integralske enačbe druge vrste

$$\phi_-(z) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \phi_-(\lambda) \frac{K(z,\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = \gamma(z), \quad z \in \Gamma, \tag{IE}$$

kjer je v števcu integralskega jedra matrična funkcija (glej [6, str. R8])

$$K(z,\lambda) = \frac{1}{2}[M(\lambda) - M(z)]M(z)^{-1}, \quad (z,\lambda) \in \Gamma \times \Gamma,$$

tako da je integralsko jedro $K(z,\lambda)/(\lambda - z)$, $\lambda, z \in \Gamma$, zaradi odvedljivosti (ali zgolj Hölderjeve zveznosti) matrične funkcije $M(\lambda)$ omejena in razen na diagonali $\lambda = z$ zvezna funkcija dveh spremenljivk (integralska enačba (IE) pri teh pogojih ni singularna).

Da zunanja funkcija $\phi_-(z)$ rešitve $\phi(z)$ *osnovnega robnega problema* reši tudi integralsko enačbo (IE), kjer je desna stran $\gamma(z)$ polinom iz točke (d), je lahko spoznati z uporabo splošnega Cauchyjevega izreka (da je za funkcijo, ki je analitična znotraj enostavno povezanega območja Ω z merljivim robom $\partial\Omega$ in zvezna na zaprtju $\overline{\Omega}$, njen integral po robu območja enak nič)

[4] Eksplicitno je v [17, str. 213] o koeficientih matrične funkcije $M(z)$ zapisal: “Da pa bi bila naša metoda uporabna, moramo te koeficiente predhodno omejiti s pogojem zveznosti, zato predpostavimo, da so to poljubne funkcije, ki so zvezne vzdolž mejne krivulje, poleg tega pa še enkrat odvedljive (isto nalogo obravnava Hilbert).” (Primerjaj tudi [18, str. 143].)

in Plemljevih formul [16] (glej npr. tudi [8]) o robnih vrednostih analitičnih funkcij.[5] Iz Plemljeve predpostavke o odvedljivosti matrične funkcije $M(z)$ sledi, da je vsaka zvezna rešitev enačbe (IE) tudi odvedljiva. Precej težje pa je natančneje določiti zvezo med rešitvami te integralske enačbe (z danim polinomom $\gamma(z)$ na desni strani) in rešitvami osnovnega robnega problema. Odgovoriti je treba vsaj na dve vprašanji:

1. *Ali je enačba* (IE) *sploh rešljiva v prostoru zveznih funkcij na krivulji* Γ?
2. *Ali iz vsake zvezne rešitve enačbe* (IE) *pridemo do rešitve osnovnega problema*?

Odgovor na ti dve vprašanji je Plemelj našel z uvedbo dveh dodatnih homogenih robnih problemov in pripadajoče adjungirane integralske enačbe (glej [6, str. R7–R11]). Med dokazovanjem je spet večkrat uporabil Cauchyjev izrek ter svoje formule, sklicevati pa se je moral tudi na Fredholmovo teorijo integralskih enačb (glej [13]).

Upošteval je še dejstvo, da ima (zaradi kompaktnosti ustreznega integralskega operatorja) vsaka homogena integralska enačba druge vrste samo končno mnogo linearno neodvisnih rešitev. Z uporabo poljubnega naravnega števila r, večjega ali enakega številu linearno neodvisnih rešitev integralskih enačb, ki pripadata dodatno uvedenima robnima problemoma, je pritrdilno odgovoril na zgornji vprašanji in na ta način posredno, vendar elegantno, rešil osnovni robni problem. Rezultat lahko zapišemo takole (primerjaj [6, str. R11–R14] in [21, str. 137–138]):

Izrek 1. *Pri primerno velikem naravnem številu* $r \in \mathbb{N}$ [glej zadnji odstavek] *obstaja za osnovni robni problem* (RP) *sistem rešitev* $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$, *ki so linearno neodvisne nad kolobarjem polinomov* $\mathbb{C}[z]$ *in njihov red v neskončnosti ne presega števila* r. *Vsaka rešitev robnega problema* (RP) *je potem njihova polinomska linearna kombinacija*:

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} q_i(z)\psi_i(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \; q_i \in \mathbb{C}[z].$$

Rešitve $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$ *sestavljajo vrstice* kanonske matrike $\Psi(z) = [\psi_{ij}(z)]_{i,j=1}^n$ *z lastnostmi*:

(a) det $\Psi(z) \neq 0$ *za vsak* $z \in \mathbb{C}$, *vključno za* $z \in \Gamma$ *z ustreznimi limitnimi vrednostmi* $\Psi_\pm(z)$;

(b) *obstaja taka diagonalna matrika* $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, *da je potem matrična funkcija*

[5] Članek o posplošitvi Cauchyjevega izreka iz teorije analitičnih funkcij [16], ki vsebuje omenjene formule, je objavil v isti številki revije *Monatshefte für Mathematik und Physik* tik pred svojim glavnim člankom o monodromiji [17].

$z^\Lambda \Psi(z) = \mathrm{diag}(z^{\lambda_i})\Psi(z)$ *obrnljiva pri* $z = \infty$.

Zgled 3. Oglejmo si zelo preprost zgled v dimeniziji $n = 1$. Krivulja Γ naj bo kar enotska krožnica v kompleksni ravnini, matrična funkcija na njej pa navadna potenca, npr. $M(z) = z^{-r}$ za poljubno naravno število $r \geq 1$. Preprosta rešitev robnega problema (RP) je zdaj funkcija $\psi(z) = (1, z^r)$ (se pravi, 1 za $|z| < 1$ in z^r za $|z| > 1$), vse druge pa so oblike $q(z)\psi(z)$ za poljuben polinom q.

Integralska enačba (IE), ki ustreza (RP), ima integralsko jedro

$$\frac{K(z,\lambda)}{\lambda - z} = \frac{(\lambda^{-r} - z^{-r})z^r}{2(\lambda - z)} = -\frac{\lambda^{-r}(\lambda^r - z^r)}{2(\lambda - z)} = -\frac{\lambda^{-r}(\lambda^{r-1} + \cdots + z^{r-1})}{2},$$

zato se lahko hitro prepričamo, da je njena rešitev res funkcija z^r (za desno stran $\gamma(z) = z^r$), saj je integral enak nič. Zanimivo pa je, da so rešitve te iste integralske enačbe (IE) tudi vse nižje potence z^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, in sicer za desno stran $\gamma(z) = 2z^k$, vendar nobena od njih ne vodi do rešitve za (RP). Zaradi $z^k M(z) = z^{k-r}$ bi bila to funkcija $f(z) = (z^{k-r}, z^k)$, ki pa v točki $z = 0$ ni regularna.

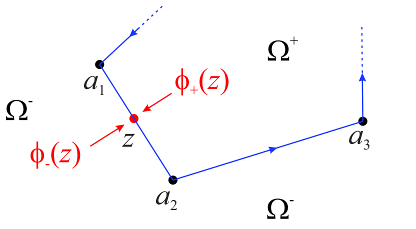
Izrek 1 rešuje osnovni robni problem v tolikšni meri, da ga je Plemelj lahko uporabil pri reševanju začetnega problema o eksistenci sistema homogenih linearnih diferencialnih enačb z danimi singularnostmi in s predpisano monodromijo. Da bi videli, kako je to storil, se najprej vrnimo k situaciji, opisani v prvem razdelku, in na poseben način izberimo krivuljo Γ in matrično funkcijo $M(z)$, ki nastopata v formulaciji osnovnega robnega problema.

Imamo končno mnogo točk $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$, množico $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ in poljubno upodobitev χ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$ območja U v grupo vseh obrnljivih matrik reda n. Da bi rešil problem H21, je Plemelj obravnaval osnovni robni problem za poseben primer, ko območje Ω^+ v kompleksni ravnini omejuje enostavno sklenjena orientirana krivulja Γ, ki povezuje dane točke (glej spodnji sliki 2 in 3, povzeti po [6], kjer je krivulja Γ predstavljena s poligonsko črto). Pri tem naj bo Ω^- komplement množice $\Omega^+ \cup \Gamma$ v $\tilde{\mathbb{C}}$, z $[a_i, a_{i+1})$ pa označimo odsek krivulje Γ med dvema zaporednima točkama a_i in a_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, s$), pri čemer naj velja $a_{s+1} = a_1$.

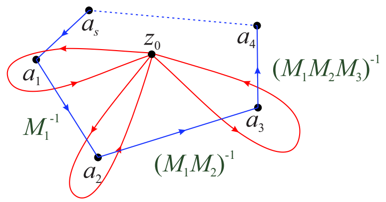
Naj bodo obrnljive matrike M_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, generatorji ustrezne monodromijske grupe. Definirajmo (glej sliko 3)

$$M(z) := (M_1 M_2 \ldots M_i)^{-1}, \quad z \in [a_i, a_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, s. \tag{8}$$

Potem je $M(z)$ obrnljiva odsekoma konstantna matrična funkcija, ki je na zadnjem odseku identična matrika, saj za $z \in [a_s, a_1)$ velja $M(z) = (M_1 M_2 \dots M_s)^{-1} = I$.



Slika 2. Notranja in zunanja limita v točki $z \in \Gamma$.



Slika 3. Enostavna sklenjena krivulja Γ, ki povezuje singularne točke.

Tako definirana funkcija $M(z)$ seveda ni več odvedljiva povsod na krivulji Γ; v točkah a_j, skozi katere zdaj poteka Γ, ni niti zvezna, tako da izreka 1 ne moremo neposredno uporabiti. Tu pa si je Plemelj pomagal s posebnim postopkom *regularizacije* (glej [18, str. 156–165] ali [17, str. 228–236]; primerjaj tudi [6, str. R14–R16]). Pomnožil je $M(z)$ s primernimi faktorji, sestavljenimi iz končno mnogo potenc lomljenih linearnih funkcij (z ničlami in poli samo v točkah a_j), tako da je nova robna matrična funkcija postala odvedljiva povsod na krivulji Γ. V tem primeru je z uporabo izreka 1 lahko rešil ustrezni robni problem, nato pa z obratno transformacijo našel rešitve $\psi_i(z)$ tudi pri odsekoma konstantni matrični funkciji $M(z)$.

Te rešitve zdaj zadoščajo robnemu pogoju (RP) le na posameznih *odprtih* odsekih med singularnimi točkami (glej sliko 3), vendar je Plemelj pokazal, da jih lahko analitično nadaljujemo iz enega območja v drugo preko katerega koli odseka krivulje Γ oziroma vzdolž vsake poti v $\mathbb{C}$, ki se izogne točkam a_j. To pomeni, da nanje lahko gledamo kot na *večlične holomorfne funkcije* na vsej množici U z razvejišči v točkah a_j, $j = 1, 2, \dots, s$ (ali kot na enolične globalno analitične funkcije na ustrezni Riemannovi ploskvi). Ker so bile pri njihovi konstrukciji uporabljene le linearne lomljene funkcije z ničlami in poli v a_j, imajo v okolici teh točk kvečjemu *polinomsko rast*, tako da velja isto potem tudi za kanonsko matriko $\Psi(z)$, ki je zdaj prav tako večlična (matrična) holomorfna funkcija na U.

Ker tudi kanonska matrika Ψ zadošča robnemu pogoju

$$\Psi_+(z) = \Psi_-(z) M(z) \text{ za } z \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_s\},$$

velja zanjo pri enostavnem obhodu okrog točke a_i zveza

$$\Psi(z) = \sigma_i(\Psi)(z) M_i = \sigma_i(\Psi)(z) \chi(\sigma_i), \;\; z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$$

(glej definicijo funkcije $M(z)$ v formuli 8 in sliko 3). Izberimo eno od singularnih točk, npr. a_1, in z diagonalno matriko Λ iz točke (b) izreka 1 definirajmo funkcijo

$$Y(z) := (z - a_1)^{\Lambda}\Psi(z),\ z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma, \tag{9}$$

ki je v točki $z = \infty$ omejena in obrnljiva. Kot večlična meromorfna matrična funkcija je $Y = Y(z)$ obrnljiva povsod na $\tilde{\mathbb{C}}$ in ima polinomsko rast v bližini vsake točke a_i.

Poleg tega se vzdolž poljubne sklenjene poti σ v U (tako kot kanonska matrika $\Psi(z)$) transformira v funkcijsko matriko $\sigma(Y) = Y\chi(\sigma)^{-1}$. Iz enakosti $Y = \sigma(Y)\chi(\sigma)$ pa sledi $Y' = \sigma(Y)'\chi(\sigma)$ in $Y^{-1} = \chi(\sigma)^{-1}\sigma(Y)^{-1}$, tako da je

$$Y'Y^{-1} = \sigma(Y)'\sigma(Y)^{-1}$$

in je zato matrična funkcija $A(z) = Y'(z)Y(z)^{-1}$ invariantna za delovanje monodromijske grupe. Torej predstavlja $A(z)$ enolično holomorfno matrično funkcijo na U, ki zaradi $Y' = A(z)Y$ določa sistem (1) z monodromijo χ, pri čemer je $Y = Y(z)$, definirana s formulo (9), fundamentalna matrika njegovih rešitev. Ker ima funkcijska matrika $Y(z)$ v okolici vsake singularne točke a_i polinomsko rast, velja isto za enolično matrično funkcijo $A(z)$, ki je zato racionalna, sistem (1) pa regularen v skladu z definicijo 2.

Na ta način je Plemelj pokazal, da je vsaka upodobitev χ fundamentalne grupe za dani U monodromija nekega *regularnega* sistema diferencialnih enačb (1).

Plemelj pa se pri tem ni ustavil, skušal je še dokazati, da ima dobljena matrična funkcija $A(z)$ same enostavne pole, se pravi, da je sistem Fuchsov. Brez večjih težav je ugotovil, da se da matriko $Y(z)$ izbrati tako, da to velja za vse izbrane singularne točke razen ene, npr. zadnje točke a_s. Nazadnje je z ustrezno modifikacijo začetne matrične funkcije $Y(z)$ odpravil še zadnjo oviro. Prav na tem zadnjem koraku pa se je v dokazu skrivala napaka, ki se je, kot kaže, profesor Plemelj vse do svoje smrti ni zavedal. Še bolj zanimivo je, da te napake tudi drugi matematiki niso odkrili skoraj petinsedemdeset let. Ker je bil Plemljev izrek splošnejši od Hilbertovega, dokaz pa bolj eleganten, je v matematični javnosti pač obveljalo prepričanje, da je on prvi dokončno (pozitivno) rešil problem H21.

Kaj se je zares zgodilo? Tri četrt stoletja pozneje so ugotovili, da je Plemelj potiho predpostavil, da je matrika $M_s = \chi(\sigma_s)$, ki pripada zanki okrog zadnje točke a_s, diagonalizabilna, ni pa tega dokazal. Luknjo v Plemljevem dokazu je v začetku osemdesetih let 20. stoletja odkril Armando Kohn Treibich; o njej je poročal na seminarju na École Normale Supérieure (glej [3, str. 106]). Zadostnost diagonalizabilnosti ene od generatorskih matrik za pozitivno rešitev problema H21 je potem konec osemdesetih let dokazal ruski matematik Julij S. Iljašenko, dvajset let kasneje pa je Vladimir P. Kostov našel še šibkejši zadosten pogoj: zadošča, da ima ta matrika v svoji jordanski obliki kvečjemu eno kletko reda 2, ostale pa reda 1 (glej [10, str. 7, opomba 2] ali [14]).

Brez zadnjega spodletelega koraka je torej Plemelj v resnici rešil pomemben podoben problem, ki pa se razlikuje od (moderne interpretacije) problema H21. Kot vidimo, je dokazal, da pri danih singularnih točkah in dani monodromiji obstaja sistem (1), ki je *regularen*, ne pa nujno *Fuchsov*. Rešitev je torej dobil v širšem razredu.

4. Kratka zgodovina reševanja problema H21 po letu 1908

S problemom se je istočasno kot Plemelj ukvarjal tudi na Slovaškem rojeni nemški matematik Ludwig Schlesinger (1864–1933), vendar se njegova kontinuitetna metoda ni izkazala za uspešno (o njej se je med obema matematikoma leta 1909 v časopisu *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Leipzig, razvila strokovna polemika, o kateri poroča tudi profesor Vidav [22, str. 30]).

Leta 1913 je Plemljev dokaz nekoliko poenostavil George David Birkhoff (1884–1944). Tudi on je spregledal zahtevo po diagonalizabilnosti ene od generatorskih matrik monodromijske grupe, saj je podrobnosti v dokazu na tem mestu kar preskočil in zapisal, da "splošni primer obravnavamo na enak način" (glej [3, str. 106]).

Leta 1928 je ruski matematik Ivan Andrejevič Lappo Danilevski (1896–1931) na izviren način konstruiral osnovne matrike $\chi(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, monodromijske grupe, ki pripadajo enostavno sklenjenim potem okrog posameznih singularnih točk (glej [3, str. 106] in tudi [6, str. R17]). Rešitev je poiskal s pomočjo konvergentnih vrst za matrične koeficiente A_i iz formule za razcep matrične funkcije $A(z)$ sistema (1) na enostavne ulomke (glej str. 2). Iz njegove konstrukcije sledi, da je problem H21 pozitivno rešljiv, če so te matrike dovolj blizu identični matriki, je pa res, da bi to sledilo tudi iz Plemljevega pristopa (glej [3, str. 107] in [5, str. 1160]). Petdeset let kasneje so japonski matematiki M. Sato, T. Miwa in M. Jimbo našli te matrike tudi z uporabo kvantne teorije polja (primerjaj [3]).

Leta 1956 je B. L. Krilov z uporabo hipergeometričnih funkcij eksplicitno rešil problem H21 za sisteme dveh enačb s tremi singularnimi točkami (glej [6, str. R17]).

Naslednje leto je eksistenco regularnega sistema dokazal tudi Helmut Röhrl (1927–2014) z uporabo novejših metod iz teorije Riemannovih ploskev in algebraične geometrije. Njegov pristop je elementaren, vendar na ključnem mestu uporablja netrivialni izrek Birkhoffa in Grothendiecka o holomorfnih vektorskih svežnjih. Bil je prav tako prepričan, da je (na drugačen način) rešil Riemann-Hilbertov problem.

Uporaba holomorfnih vektorskih svežnjev in diferencialnih operatorjev na njih je značilna za moderno obravnavo problema H21 na poljubnih Riemannovih ploskvah. Z njim se je na ta način okrog leta 1970 ukvarjal tudi Pierre Deligne (roj. 1944)[6]. Iz njegove teorije znova sledi Plemljev rezultat, tj. upodobitev fundamentalne grupe kot monodromije regularnega sistema (1) z meromorfno matrično funkcijo $A(z)$, vendar na splošno ni mogel doseči monodromije Fuchsovega sistema [3].

V zvezi s tem je zanimivo, da je ta dognanja uporabil nizozemski matematik Wil Dekkers, ki je sicer delal na področju logike in računalništva. Leta 1979 je našel pozitivno rešitev za Fuchsove sisteme reda 2 s poljubno mnogimi singularnostmi (glej [3, str. 108] ali [5, str. 1160]). N. P. Erugin pa je leta 1982 obravnaval sistem dveh enačb s štirimi singularnimi točkami in pokazal povezavo s Painlevéjevo enačbo (glej [6, str. R17]).

Potem ko je leta 1964 izšla v angleščini Plemljeva knjiga *Problems in the sense of Riemann and Klein* [18], v kateri je v zadnjem razdelku opisal svojo rešitev problema, so se v začetku osemdesetih let pojavili prvi resnejši dvomi o dokončni rešitvi problema H21, konec desetletja pa tudi nova presenetljiva odkritja.

Kohn Treibich je svoje odkritje Plemljeve napake objavil leta 1983 [20], nanjo sta nekaj let kasneje (leta 1988) opozorila tudi ruska matematika Vladimir Arnold (1937–2010) in Julij Iljašenko (roj. 1943), glej [1, str. 7–8] in [2, str. 133]. Slednji je, kot smo že omenili, za rešitev problema postavil dodatni pogoj (namreč diagonalizabilnost ene od generatorskih matrik monodromijske grupe) in dokazal njegovo zadostnost.

Zadrego je – v nepričakovani smeri – razrešil ruski matematik mlajše generacije Andrej Bolibruch (1950–2003), ko je leta 1989 našel protiprimer regularnega sistema (1), za katerega ne obstaja noben Fuchsov sistem linearnih diferencialnih enačb z istimi singularnostmi in monodromijsko grupo (objavljen leta 1990 v ruščini in v angleškem prevodu [4]). Konstrukcija je bila narejena za tri enačbe in štiri singularne točke ($n = 3$, $s = 4$).

Matrike $A(z)$ ustreznega sistema ni težko napisati (glej [1, str. 14]):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1/2} & \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1/2} \\ 0 & \frac{1}{z} - \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \\ 0 & -\frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & -\frac{1}{z} + \frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \end{pmatrix},$$

[6] Deligne je dobitnik Fieldsove medalje leta 1978 in še številnih drugih uglednih matematičnih oziroma znanstvenih priznanj, med njimi tudi Abelove nagrade leta 2013.

težko pa je dokazati, da je to res protiprimer za problem H21. Sistem očitno ni Fuchsov (točka 0 ni Fuchsova), možno pa je preveriti, da je regularen. Glavni problem je seveda dokazati, da ne obstaja noben Fuchsov sistem z istimi singularnostmi in isto monodromijo. Bolibruch je moral za to uporabiti Leveltovo posplošitev Poincaréjeve lokalne teorije. Ta protiprimer je poleg tega občutljiv za perturbacijo singularnosti: že pri majhnem premiku singularnih točk (ne da bi spremenili generatorje monodromijske grupe) se lahko zgodi, da ustrezen Fuchsov sistem obstaja (glej [4]).

Kasneje je Bolibruch našel še vrsto drugih protiprimerov, ki so stabilni v smislu perturbiranja singularnosti. O svojem delu na tem področju je leta 1994 poročal na mednarodnem matematičnem kongresu v Zürichu [5]. Istega leta je v soavtorstvu z D. V. Anosovom izšla njegova knjiga *The Riemann-Hilbert Problem* [1]. Po več kot devetdesetih letih je bil torej Hilbertov enaindvajseti problem (če ga razumemo v modernem smislu kot iskanje ustreznega Fuchsovega sistema linearnih diferencialnih enačb) rešen negativno, in to v nasprotju z dotedanjim prepričanjem o njegovi pozitivni rešljivosti.

Če je bil torej Josip Plemelj prvi uspešni reševalec Hilbertovega 21. problema, je postal Andrej Bolibruch njegov zadnji in dokončni reševalec (če v matematiki sploh lahko govorimo o dokončnih rešitvah, saj so vedno možne posplošitve ali drugačni pogledi na problematiko). Rešitev problema je Bolibruchu prinesla slavo, zaposlitev na moskovskem Matematičnem inštitutu Steklova, članstvo v ruski akademiji znanosti in redno profesuro na moskovski državni univerzi. Bolibruch se je kot dober matematik uveljavil tudi na Zahodu. Še naprej je raziskoval tematiko, povezano z Riemann-Hilbertovim problemom, o čemer je napisal okrog 100 člankov in nekaj knjig.[7]

5. Primeri pozitivnih rešitev

Negativna rešitev Hilbertovega 21. problema za sisteme seveda ne pomeni, da v posebnih primerih ne obstajajo pozitivne rešitve.

Povedali smo že, da je za sisteme z dvema linearnima diferencialnima enačbama prvega reda ($n = 2$) problem H21 vedno rešljiv neodvisno od števila singularnih točk (Dekkers). Andrej Bolibruch je v primeru $n = 3$ poleg odkritja navedenega protiprimera tudi natančno karakteriziral, kdaj je pri danih singularnostih in dani monodromiji možno poiskati ustrezni Fuchsov sistem (glej npr. [1, str. 133, Theorem 6.1.1]).

Podobno je problem pozitivno rešljiv, kadar je npr. upodobitev χ neraz-

[7] Na žalost je Andrej Bolibruch v štiriinpetdesetem letu starosti po hudi bolezni umrl 11. novembra 2003, natančno mesec dni pred 130. obletnico Plemljevega rojstva.

cepna oziroma ireducibilna, kar sta v začetku devetdesetih let (med seboj neodvisno) odkrila Vladimir Kostov in Andrej Bolibruch (glej [3, str. 115] ali [1, str. 11 in str. 83, Theorem 4.2.1]).

Rešljivost problema je zagotovljena še v nekaterih drugih primerih. Npr. takrat, kadar je med singularnostmi poleg polov prve stopnje tudi kakšna (vsaj ena) *navidezno singularna* točka (glej [3, str. 116] ali [5, uvod in poglavje o Fuchsovih enačbah]). Po definiciji je to taka singularnost, v okolici katere je rešitev sistema enolična analitična funkcija, ustrezna monodromijska matrika pa zato identiteta, torej diagonalizabilna. V tem primeru namreč zadnji del Plemljevega (in Birkhoffovega) dokaza velja (glej pojasnilo ob odkritju napake v tem dokazu na koncu 3. razdelka).

Pri homogenih linearnih diferencialnih enačbah višjega reda (2) se pojavijo nekatere posebnosti. Vemo npr., da se pri njih, drugače kot pri sistemih, definiciji Fuchsove in regularno singularne točke ujemata. Nadalje so ugotovili, da je nerazcepna upodobitev fundamentalne grupe za območje s s singularnimi točkami v grupo vseh obrnljivih matrik reda n odvisna od

$$N_r = n^2(s-2)+1$$

parametrov, medtem ko je parametrov pri Fuchsovi homogeni linearni diferencialni enačbi reda n z s singularnimi točkami kvečjemu

$$N_e = n^2(s-2)/2 + ns/2.$$

Zgornji formuli najdemo npr. v [3, str. 117] ali [1, str. 129 in 158]. Razlika obeh vrednosti

$$N_r - N_e = n^2(s-2)/2 - ns/2 + 1$$

je pri $n > 2$ in $s > 2$ pozitivna, kar pomeni, da je (že samo nerazcepnih) upodobitev tedaj več kot Fuchsovih enačb, tako da ni pričakovati, da bi se vsaka upodobitev fundamentalne grupe območja U dala realizirati z monodromijo neke Fuchsove enačbe z danimi singularnostmi. To pa je možno storiti, če med slednjimi dopuščamo tudi navidezne singularnosti a_i, pri katerih se ustrezna zanka σ_i preslika v identično matriko $\chi(\sigma_i) = \mathrm{I}$. Število parametrov se pri monodromiji danega reda z dodatnimi navideznimi točkami ne poveča, medtem ko se pri Fuchsovi enačbi to zgodi. Bolibruch je ocenil (glej [3, str. 117]), koliko največ navideznih singularnosti se potrebuje za realizacijo dane upodobitve fundamentalne grupe z monodromijo Fuchsove enačbe višjega reda (npr. pri nerazcepni upodobitvi kvečjemu toliko, kot znaša prej omenjena razlika v številu obeh vrst parametrov).

Ta pozitivni rezultat za enačbe višjega reda sledi iz Plemljevega dosežka, ko je reprezentacijo fundamentalne grupe pri danih singularnih točkah realiziral kot monodromijo nekega regularnega sistema. S primerno meromorfno transformacijo je namreč mogoče ta sistem preoblikovati v drug regularen sistem, ki je take oblike kot sistem (3), kjer so v zadnji vrstici racionalne funkcije $-q_n, -q_{n-1}, \ldots, -q_1$. (Dokaz tega dejstva sicer ni preprost, zahteva eksistenco cikličnega vektorja za nek operator odvajanja; glej [9, str. 42, Lemme 1.3].) Kot vemo, ima tedaj ustrezna enačba (2) s koeficienti $q_1, q_2, \ldots, q_n$ iste rešitve, pa tudi iste singularnosti in zato tudi isto monodromijo kot preoblikovani sistem, ki je za enačbo (2) standarden. Vse rešitve imajo okrog vsake singularne točke polinomsko rast, zato so njene singularnosti regularne, torej tudi Fuchsove in ustrezna enačba sama je Fuchsova. Posebnost pa je v tem primeru ta, da imajo zdaj racionalne funkcije q_i, ki smo jih pridelali v zadnji vrstici standardnega sistema, lahko pole tudi v navideznih singularnih točkah s trivialno monodromijsko matriko (glej [3, str. 117]).

V tem smislu, to je z dopuščanjem dodatnih navideznih singularnosti, je Hilbertov 21. problem za linearne diferencialne enačbe višjega reda torej pozitivno rešljiv. Navsezadnje ga je leta 1900, kot smo omenili že v uvodu, za enačbe in ne za sisteme originalno formuliral tudi Hilbert (glej H21). Čeprav se ni bolj natančno opredelil, bi morda utegnil tudi on s to formulacijo meniti, da ima enačba lahko poleg predpisanih singularnosti v danih točkah še kakšne navidezne singularnosti v drugih točkah.

V primerih pozitivnih rešitev so pogosto najprej uporabili znano Plemljevo "regularno" rešitev problema in jo šele nato modificirali do "Fuchsove" rešitve (primerjaj [1, str. 11]).

6. Zaključne misli

V matematiki se, tako kot v vsaki človeški dejavnosti, dogajajo napake. Ker pa je vsako objavljeno delo vsakega raziskovalca podvrženo strogemu strokovnemu preverjanju kolegov (če ne že pred objavo, pa po njej), je napaka po navadi hitro odkrita in (po možnosti) tudi popravljena. V Plemljevem primeru je nenavadno le to, da je do njenega odkritja prišlo razmeroma pozno.

Tudi nerazumevanja in nesporazumi so sestavni del življenja. Avtorja knjige [1] dopuščata možnost, da je v zvezi z reševanjem problema H21 do zmede prišlo zaradi različnih interpretacij in formulacij problema. Za to navajata nekaj razlogov:

Morda je Hilbert, ko je govoril o Fuchsovih točkah, imel v mislih regularne točke (kar je razrešil Plemelj). V začetku 20. stoletja teh dveh pojmov tudi še niso dobro razlikovali med seboj, še zlasti, ker se pri linearni diferencialni enačbi višjega reda oba ujemata, Hilbert sam pa je v originalni formulaciji svojega 21. problema uporabil izraz enačba.

Poleg tega je znano, da se dá vsako Fuchsovo diferencialno enačbo višjega reda s primerno meromorfno transformacijo preoblikovati v Fuchsov sistem z istimi singularnostmi in isto monodromijo (glej [5, str. 1164, Theorem 7]), podobno kot smo to storili z Eulerjevo diferencialno enačbo drugega reda v 2. razdelku. Še več, kot je ugotovil že Plemelj, se da lokalno, tj. za vsako singularno točko posebej, tudi vsak regularen sistem transformirati v v sistem, ki je Fuchsov povsod, razen v izbrani točki (glej tudi [1, str. 62, Theorem 3.2.1]). Nemara je to botrovalo misli, da je isto možno narediti tudi globalno, kar pa se je izkazalo za utvaro (razen če med izjemnimi točkami ni navideznih singularnosti).

Celotno zadevo lahko na kratko še najlažje pojasnimo z izjavo, da se v Hilbertovi formulaciji skrivata v resnici dva problema, "regularni" in "Fuchsov". Plemelj je rešil prvega, Bolibruch pa drugega.

Naj za konec omenimo, da je neodvisno od formulacije obravnavanega problema ter njegove končne (pozitivne ali negativne) rešitve Plemljev originalni pristop k problemu H21 pomemben še v nekoliko širšem smislu. Reševanje posebnih analitičnih robnih nalog z uporabo integralskih enačb se je namreč izkazalo za zelo koristno pri obravnavi različnih problemov sodobne matematike in matematične fizike. Bralec se lahko o modernih aplikacijah Plemljeve metode pouči v razpravi angleškega matematika Thomasa Bothnerja [6]. V njej avtor, poleg dovolj natančnega in v sodobnem matematičnem jeziku formuliranega opisa Plemljevih tovrstnih rezultatov, predstavi zlasti številne podrobno obdelane zglede uporabe funkcijske teorije in teorije singularnih integralskih enačb pri različnih modernih matematičnih in fizikalnih problemih. Pri vsakem posebej se potrudi poiskati izvor ustrezne rešitve (ali vsaj metode reševanja) v eni ali drugi varianti osnovnega robnega problema, kakršnega je razrešil Plemelj.

Zahvala

Profesorja dr. Pavle Saksida in akademik dr. Franc Forstnerič sta me opozorila na informativni članek Arnauda Beauvillea [3], ki me je vzpodbudil k pisanju tega prispevka. Začetno verzijo je prebral profesor dr. Bojan Magajna, kasnejšo pa profesor Forstnerič; oba sta mi dala več tehtnih pripomb, ki sem jih s hvaležnostjo upošteval. Predvsem pa bi se rad zahvalil anonimnemu recenzentu za res zelo skrben pregled rokopisa ter za podrobna vsebinska opozorila na napake in pomanjkljivosti, kakor tudi za številne koristne nasvete, ki so mnogo pripomogli k izboljšanju prvotnega besedila.

LITERATURA

[1] D. V. Anosov in A. A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert problem*, A Publication from the Steklov Institute of Mathematics, Aspects Math. **E22**, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 1994.

[2] V. I. Arnold in Yu. S. Il'yashenko, *Ordinary differential equations*, v: *Dynamical systems 1* (ur. D. V. Anosov in V. I. Arnold), Encyclopedia of Mathematical Sciences **1**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1988.

[3] A. Beauville, *Monodromie des systèmes différentieles linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch)*, Séminaire Bourbaki **1992/93**, Astérisque **216** (1993), Exp. No. 765, 103–119.

[4] A. A. Bolibruch, *Problema Riemana-Gilberta*, Uspehi Mat. Nauk **45**:2 (1990), 3–47; angl. prevod: *The Riemann-Hilbert problem*, Russian Math. Surveys **45**:2 (1990), 1–58.

[5] A. A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, August 3–11, 1994), 1159–1168, Birkhäuser, Basel, 1995.

[6] T. Bothner, *On the origins of Riemann-Hilbert problems in mathematics*, Nonlinearity 34 (2021), R1–R73.

[7] E. A. Coddington in N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

[8] M. Černe, *Plemljeve formule*, Obzornik mat. fiz. **54** (2007), 185–193.

[9] P. Deligne, *Équation différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[10] R. R. Gontsov in V. A. Poberezhnyi, *Various versions of the Riemann–Hilbert problem for linear differential equations*, Russian Math. Surveys **63** (2008), 603—639 (Uspekhi Mat. Nauk **63**, 3–42).

[11] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley, New York, 1964.

[12] *Hilbert's twenty-first problem*, v: Wikipedia, the free encyclopedia, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twenty-first_problem`.

[13] B. V. Hvedelidze, *Fredholm theorems*, v: Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, dostopno na `https://encyclopediaofmath.org/wiki/Fredholm_theorems`.

[14] V. P. Kostov, *Riemann-Hilbert problem*, v: Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006, str. 436–441.

[15] A. Landesman, *Notes on fundamental group*, dostopno na `https://people.math.harvard.edu/~landesman/assets/fundamental-group.pdf`.

[16] J. Plemelj, *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend*, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 205–210.

[17] J. Plemelj, *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe*, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 211–246.

[18] J. Plemelj, *Problems in the sense of Riemann and Klein*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **16**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1964.

[19] H. Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Math. **4** (1884), 201–312.

[20] A. Treibich Kohn, *Une résultat de Plemelj*, v: *Mathématique et Physique* (Séminaire de l'ENS 79–82), Progr. Math. **37**, str. 307–312, Birkhäuser, Boston, 1983.

[21] N. P. Vekua, *Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralskih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973), 133–144.

[22] I. Vidav, *Josip Plemelj, ob stoletnici rojstva*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1973.