

RAZLIČNI POSTOPKI ZA IZRAČUN ODKLONOV NAVPIČNICE: PRIMER OBMOČJA POD KRVAVCEM

DIFFERENT ASPECTS OF THE COMPUTATION OF VERTICAL DEFLECTION: CASE STUDY IN THE AREA OF KRVAVEC

Polona Pavlovčič Prešeren, Tanja Petrin, Božo Koler, Tilen Urbančič, Miran Kuhar

UDK: 528.241(497.4Krvavec)
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01
Prispelo: 27. 10. 2017
Sprejeto: 9. 1. 2018

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2018.01.13-27
SCIENTIFIC ARTICLE
Received: 27. 10. 2017
Accepted: 9. 1. 2018

IZVLEČEK

Pri izračunu koordinat iz terestričnih opazovanj moramo le-ta reducirati tudi za vpliv težnostnega polja Zemlje. To je še posebej pomembno na območjih, kjer geoid in rotacijski elipsoid nista vzporedna. Za redukcijo moramo poznati vrednosti odklonov navpičnic, ki jih neposredno pridobimo iz razlike astronomskih in geodetskih koordinat. Če imamo na voljo modele geoida, jih lahko določimo posredno z izračunom. V prispevku opisujemo načine za izračun odklonov navpičnic na strmih pobočju pod Krvavcem. Odklone smo izračunali iz globalnega geopotencialnega modela EGM2008 in aktualnega modela SLOAGM2000 ter testnega modela geoida Slovenije SLOAGM2010. Potem smo na danem območju iz kombinacije elipsoidnih in normalno-ortometričnih višin na desetih točkah vzpostavili ravnino lokalnega geoida. Največje razlike med odkloni navpičnic smo dobili pri uporabi modela EGM2008. Na podlagi razlik smo opredelili, kateri način je še dovolj dober za pridobitev podatkov za redukcijo terestričnih geodetskih opazovanj. Iz rezultatov lahko ugotovimo, da je najbolje modelirati lokalni potek geoida iz danih elipsoidnih in fizikalnih višin. Če to ni izvedljivo, odklone modeliramo iz lokalnih modelov geoida, kot je SLOAGM2010. Globalnih modelov geoida zaradi slabše ločljivosti ne moremo uporabiti za modeliranje odklonov navpičnic.

KLJUČNE BESEDE

težnostno polje Zemlje, geoid, rotacijski elipsoid, odklon navpičnice, redukcija za vpliv težnostnega polja Zemlje

ABSTRACT

In coordinate calculation from terrestrial measurements, the reduction due to the Earth's gravity field should be one of the main topics of consideration. The problem is of extreme importance especially in steep areas, where geoid surface is not parallel to the rotational ellipsoid. In this, the knowledge of the deflection of the vertical is significant. There are two ways for its acquisition: from the comparison of astronomic versus geodetic coordinates, or from the indirect way of calculation by using global, regional, or local geoid models. This paper reviews the deflection of the vertical and its use at the steep area under Krvavec. The computation followed from three models, EGM2008 and two Slovene models: the current SLOAGM2000 and the test model SLOAGM2010. In addition, the local geoid model was established from the ellipsoidal and the normal-orthometric heights. Significant differences in vertical deflection components originated from the EGM2008. We can confirm the expectation that in steep areas it is necessary to consider the geoid inclination. The best way to do this is the local geoid surface determination from the ellipsoidal in physical heights. In other cases, local geoid models are still appropriate. Contrary, we should avoid using global models because of their lower resolution.

KEY WORDS

Earth's gravity field, geoid, rotational ellipsoid, deflection of the vertical, terrestrial measurement reduction, Earth gravity field

1 UVOD

Terestrična opazovanja izvajamo v težnostnem polju Zemlje. Stik z njim vzpostavimo takoj, ko horizon-tiramo instrument. Opazovanja izvajamo relativno na ekvipotencialno ploskev in težiščnico. Pri tem je treba vedeti, da težiščnica in normala nista vedno vzporedni z rotacijskim elipsoidom. Razlike so posebno izrazite na topografsko razgibanih območjih z neenakomerno gostoto zemeljskih mas. Če želimo določiti koordinate točk z enako kakovostjo kot tam, kjer ploskev geoida poteka enakomerno in vzporedno z rotacijskim elipsoidom, moramo terestrična opazovanja reducirati za vpliv Zemljinega težnostnega polja (Featherstone, 1997; Featherstone in Rüeger, 2000). Pri določanju položaja s tehnologijo GNSS se težavi izognemo, ker je po definiciji položaj določen v geometričnem prostoru, ki ni obremenjen s težnostnim vplivom. Težava je izrazitejša, ko želimo združevati GNSS in terestrična opazovanja.

V dobi, ko so položaj določali relativno na lokalne rotacijske elipsoide, kot na primer pri elipsoidu Bessel, se s težavo niso srečevali. Lokalne elipsoide so določili tako, da so se najbolje prilegali geoidu na nekem območju. Tako so izpolnili tudi zahtevo po vzporednosti navpičnice z geoidom in normale z rotacijskim elipsoidom. Težavo glede različne velikosti, orientacije in umestitve lokalnega glede na globalni elipsoid rešujemo s transformacijami (Stopar in Kuhar, 2002). Zavedati se moramo, da prehod iz enega geometrično definiranega prostora v drugega ne odpravlja težav, ki so vezane na nevzporednost geoida glede na rotacijski elipsoid. Geodetska terestrična opazovanja, ki so vezana na Zemljin težnostni prostor, se s spremembo datuma ne spremenijo (Heiskanen in Moritz, 1996). Zato je v dobi uporabe globalnih elipsoidov postopek redukcije terestričnih opazovanj za vpliv težnostnega polja ključen pri izračunu koordinat točk. Vezan je na dobro določene parametre nagnjenosti geoida glede na rotacijski elipsoid, torej odklonov navpičnic, ki se na posameznih območjih zelo razlikujejo. Postopka marsikdaj ne uporabimo, morda zaradi slabega poznavanja problematike oziroma zaradi pomanjkljivih podatkov o odklonih navpičnic, ki jih potrebujemo za redukcijo opazovanj.

V prispevku opisujemo različne pristope k posrednemu izračunu odklonov navpičnic ob uporabi globalnega modela geoida EGM2008 (angl. *Earth Gravitational Model 2008*) ter aktualnega modela geoida Slovenije SLOAGM2000 in testnega modela SLOAGM2010. Dodatno smo na območju iz razlik elipsoidnih in normalnih-ortometričnih višin na desetih točkah določili lokalni model geoida in ga predstavili z ravnino (Petrin, 2017). Razlike v izračunanih komponentah odklonov navpičnice so velike, predvsem pri uporabi globalnega modela geoida EGM2008. Uporabniki vidimo prednost izračuna novega modela geoida v možnosti izboljšave kakovosti izvedbe GNSS-višinomerstva. Vendar velja izpostaviti tudi uporabnost modela geoida pri modeliranju nagnjenosti geoida glede na rotacijski elipsoid za nadaljnjo redukcijo terestričnih geodetskih opazovanj.

V praksi uporabljamo odklone navpičnice pri (Featherstone in Rüeger, 2000; Petrin, 2017):

- transformaciji koordinat iz astronomskega v geodetski koordinatni sistem in nasprotno,
- pretvorbi med astronomskim ali žiroskopsko določenim in geodetskim azimutom,
- redukciji merjenih horizontalnih smeri in dolžin na referenčno ploskev elipsoida,
- redukciji merjenih zenitnih razdalj na elipsoid,
- redukciji merjenih poševnih dolžin na elipsoid z uporabo zenitnih razdalj in
- izračunu višinskih razlik iz zenitnih razdalj in poševnih dolžin.

V drugem poglavju opisujemo teoretične podlage za izračun odklonov navpičnice. V tretjem poglavju opišemo izbrano delovišče, pri čemer grafično predstavimo topografijo terena in poizkušamo najti njeno

povezavo s spremembami v nagnjenosti geoida glede na rotacijski elipsoid. V četrtem poglavju teoretično opišemo posredne metode za izračun odklonov navpičnice. V petem poglavju podamo rezultate izračunov komponent odklonov navpičnice s predhodno predstavljenimi posrednimi metodami. Poudarimo, kako neupoštevanje vpliva težnostnega polja prispeva k slabši določitvi končnih koordinat. V sklepu poudarimo pomembnejše ugotovitve. Izpostavimo dodatno praktično vrednost izračuna novega modela geoida Slovenije, ki ni le v kakovostnejši uporabi GNSS-višinomerstva in izboljšanju lidarskega digitalnega modela višin DMV, ampak tudi v izboljšavi kombinirane uporabe terestričnih in GNSS-opazovanj.

2 TEORETIČNA IZHODIŠČA: ODKLON NAVPIČNICE

Prostorski kot nagnjenosti geoida glede na rotacijski elipsoid predstavimo s komponentama v smeri meridiana ξ in prvega vertikala η . Komponenti dobimo neposredno, če v dani točki poznamo tako astronomske (Φ , Λ) kot geodetske (φ , λ) koordinate (Vaniček, 2001):

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}\quad (1)$$

Tako določimo odklon navpičnice z astronomsko-geodetsko metodo, ki je zahtevna in zamudna. Temelji na določitvi astronomskih koordinat stojišča ter astronomskega azimuta iz opazovanih smeri do zvezd (na primer do Sonca ali Severnice) (Kilar, 1978). Nasprotno danes geografske koordinate enostavno določimo z metodami izmere GNSS. Način določitve astronomskih koordinat temelji na kakovostno stabilizirani točki, zato je astronomsko-geodetska metoda določitve odklonov navpičnic omejena na kopno (Kuhar in sod., 2010).

Odklon navpičnice Θ je prostorski kot med smerjo vektorja gravitacije $\mathbf{g}$ (težiščnica) in smerjo normale na rotacijski elipsoid v obravnavani točki (slika 1). Odklone navpičnic lahko računamo neposredno v točki na površju Zemlje s postopkom, ki ga je predstavil Helmert oziroma Molodensky. Če odklone navpičnic izračunamo na geoidu, govorimo o postopku, ki ga je predstavil Pizetti.



Slika 1: Odklon navpičnice Θ in geoidna višina.

Matematično obliko Zemlje najlažje opišemo z dvoosnim rotacijskim elipsoidom, ki predstavlja referenčno ploskev za določanje položajev točk. Globalni rotacijski elipsoidi so določeni tako, da vsebujejo tudi fizikalne parametre. Njihovo težnostno polje imenujemo normalno težnostno polje z normalno težnostjo, ki je enolično definirano in služi za določitev anomalij dejanskega težnostnega polja Zemlje W (Heiskanen in Moritz, 1996). Anomalija potenciala ali moteči potencial v izbrani točki $T(x, y, z)$ imenujemo razlika med dejanskim težnostnim potencialom W in normalnim težnostnim potencialom U . Med potenciali velja funkcijska zveza:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad (2)$$

Medtem ko normalni težnostni potencial $U(x, y, z)$ lahko enostavno izračunamo v katerikoli točki na Zemlji, lahko moteče težnostno polje T izračunamo le v točkah, kjer smo izvedli gravimetrična opazovanja. V teh točkah lahko izračunamo nagnjenost geoida glede na rotacijski elipsoid, torej odklon navpičnice. Če imamo določene tudi elipsoidne h in fizikalne višine H , ki jih splošno imenujemo kar nadmorske višine, lahko z geoidno višino N opišemo tudi odklik ploskve geoida od rotacijskega elipsoida.

Z Brunsovo enačbo opišemo povezavo geoidne višine N z motečim potencialom T kot:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (3)$$

Pri tem z γ označimo normalno težnost izbranega rotacijskega elipsoida. Če imamo na voljo kakovostne podatke za izračun motečega potenciala, lahko geoidne višine izračunamo z nekajmilimetrsko natančnostjo.

Z geoidnimi višinami N lahko opišemo zvezo med odklonom navpičnice in geoidno višino v smeri meridiana ξ , to je v smeri sever-jug, in v smeri prvega vertikalnega η , to je v smeri vzhod-zahod (Torge in Müller, 2012):

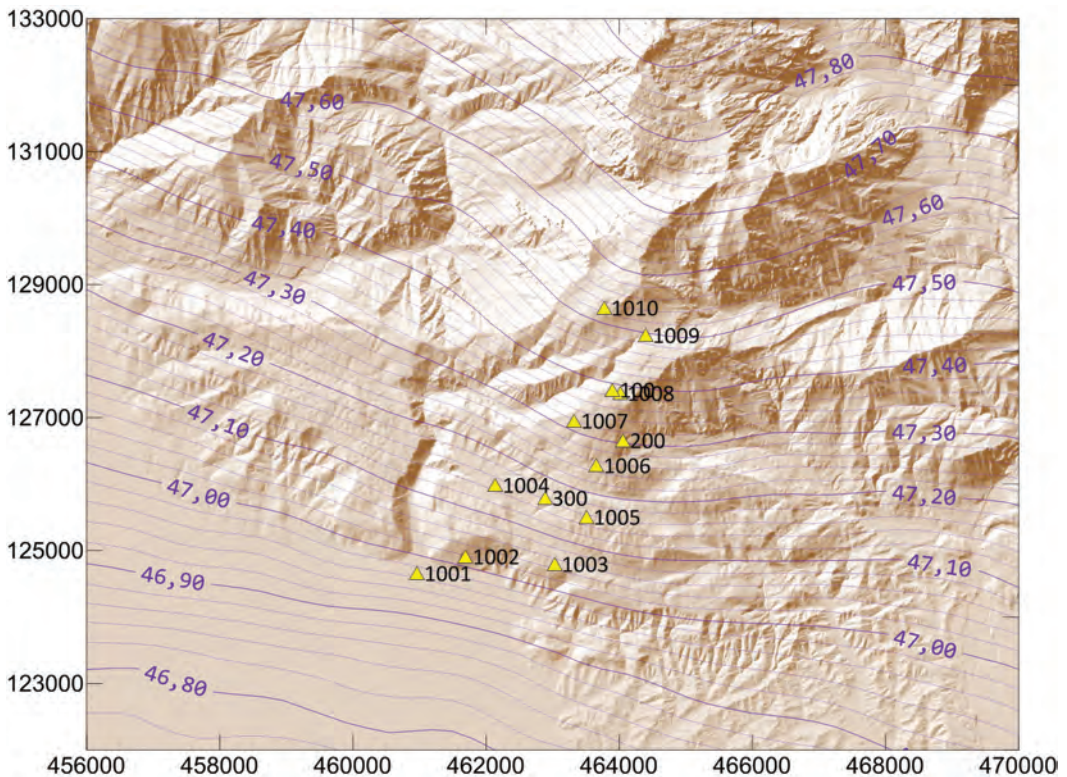
$$\xi = -\frac{1}{M} \frac{\partial N}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{1}{N \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad (4)$$

pri čemer je $M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\phi))}^3}$ polmer ukrivljenosti meridiana in $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\phi)}}$ polmer

ukrivljenosti prvega vertikalnega. Naj omenimo, da sta v literaturi oznaki za geoidno višino in polmer ukrivljenosti prvega vertikalnega enaki, čeprav gre za popolnoma različni količini. Oznaki a in b opisujeta veliko in malo polos rotacijskega elipsoida, katerega prvo ekscentriciteto izračunamo kot $e = \sqrt{(a^2 - b^2) / a^2}$.

3 OPIS DELOVIŠČA

Za boljši vpogled v obravnavanje vpliva Zemljinega težnostnega polja na terestrična opazovanja smo problem podrobneje obravnavali na območju, kjer z ravnine Ljubljanske kotline preidemo pod gmoto zemeljskih mas Kamniško-Savinjskih Alp. Gre za južno pobočje pod Krvavcem, kjer so bile točke stabilizirane na cesti, ki pelje od Cerkelj na Gorenjskem mimo Ambroža pod Krvavcem do Krvavca.



Slika 2: Prikaz topografije terena na južnem pobočju pod Krvavcem.

Situacijo za obravnavano južno območje pod Krvavcem, od prve točke (št. 1001) v Cerkljah na Gorenjskem do najvišje točke na betonski ograji pri kapeli Marije Snežne na Krvavcu (št. 1010), prikazujemo na sliki 2. Položaj točke je določen v državnem koordinatnem sistemu D96/TM. Izolinije so izračunane iz lokalnega modela geoida SLOAGM2010 in predstavljajo potek ploskve geoida na danem območju. S slike 2 je razvidno topografsko razgibano območje, kjer geoidne višine naraščajo v smeri od juga proti severu. Razlika v geoidnih višinah med najnižjo točko 1001 in najvišjo 1010 znaša več kot 0,5 metra. Na danem območju smo z večurno statično izmero GNSS določili geografske koordinate desetim točkam (1001 do 1010), s kombinacijo nivelmana in trigonometričnega višinomerstva pa normalne-ortometrične višine točk (Grabljevec, 2017). Načina določitve koordinat in višin zaradi preobsežnosti prispevka tu ne opisujemo. Velja omeniti, da so točke horizontalno oddaljene od 746 metrov do največ 4957 metrov. Točka 1001 je najnižja točka poligona in ima nadmorsko višino 424,44 metra, točka 1010 z višino 1692,59 metra pa je najvišja. Najmanjša višinska razlika znaša okoli 36 metrov med točkama 1003 in 1004 ter največja 1268 metrov med točkama 1001 in 1010.

Iz topografije terena lahko vidimo, da je geoid nagnjen proti jugozahodu. Položaj in okolica točke 1009 nakazujeta na nekoliko drugačno razgibanost terena zaradi preloma, kar je razvidno tudi s slike 2.

4 METODE ZA DOLOČITEV ODKLONOV NAVPIČNICE

V drugem poglavju smo opisali astronomsko-geodetsko metodo za določitev odklonov navpičnice. Tu opisujemo posredne metode izračunov, pri katerih komponenti v smeri sever–jug (ξ) in vzhod–zahod (η) izračunamo iz modelov geoida. Odklone navpičnice lahko določimo:

- z gravimetrično metodo,
- iz celične mreže različnih modelov geoida,
- z razvojem potenciala v vrsto sfernih funkcij in
- s kombinacijo elipsoidnih in nadmorskih višin ter nadaljnjim izračunom lokalne ploskve geoida.

4.1 Gravimetrična metoda

Glede na to, da pri gravimetrični metodi najrealneje ocenimo nagnjenost geoida glede na rotacijski elipsoid, lahko rečemo, da je to tudi najboljša posredna metoda za izračun odklonov navpičnic. Temelji na opazovanjih težnostnega pospeška in določitve razlike težnostnega potenciala. Njena pomanjkljivost je, da temelji na diskretnih gravimetričnih meritvah na točkah, ki so velikokrat neenakomerno razporejene. Moteči potencial na geoidu (enačba 2) predstavimo s Stokesovo funkcijo $S(\Psi)$, ki deluje kot utež anomalijam težnosti (Torge in Müller, 2012):

$$T(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\Psi) \Delta g d\sigma \quad (5)$$

Stokesova funkcija je odvisna od sferne oddaljenosti Ψ med točko izračuna in ploskovnim elementom $d\sigma$ z anomalijo težnosti Δg . Vrednost Stokesove funkcije se zmanjšuje s sferno oddaljenostjo Ψ do prve ničle ($\Psi = 39^\circ$) in narašča do naslednje ničle ($\Psi = 117^\circ$). Okolica obravnavane točke zahteva posebno pozornost pri $\Psi = 0^\circ$, ko gre funkcija v neskončnost.

Komponente odklona navpičnice pri gravimetrični metodi dobimo z diferenciranjem motečega potenciala T v smereh sever–jug in vzhod–zahod. Izračuni z enačbo Vening–Meinesz (Torge in Müller, 2012):

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\}_0 = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{dS(\Psi)}{d\Psi} \Delta g \left\{ \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix} \right\} d\sigma \quad (6)$$

so neskončni pri $\Psi = 0^\circ$. V enačbi z α označimo azimut med točko izračuna in središčem ploskovnega elementa $d\sigma$. Z enačbo (6) geoidne višine in odklone navpičnice izračunamo z integralom anomalij gravitacije na ploskvi geoida. Pomembno je, da izpolnimo zahtevo kakovostno določene Stokesove funkcije.

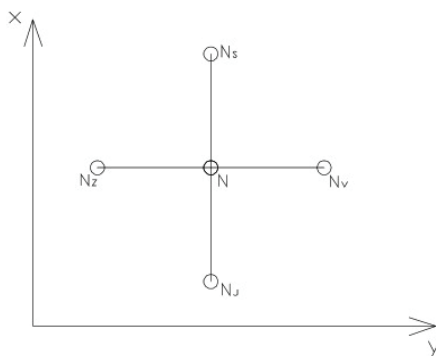
4.2 Metoda določitve odklonov navpičnice iz modelov geoida

Lokalne ali nacionalne modele geoida velikokrat predstavimo v obliki pravilne mreže celic (grida), kjer v ogliščih poznamo geografski koordinati (φ in λ) in geoidno višino N . Če želimo pridobiti geoidno višino zunaj točk mreže, jo izračunamo z interpolacijo. Zaradi predpostavke, da se potek geoida ne spreminja tako hitro kot topografija terena, in dejstva, da velikost celic mreže znaša približno $1'$, izberemo enostavnejše metode interpolacije, kot sta bilinearna interpolacija ali zlepki (angl. *spline*).

Vir podatkov za izračun geoidnih višin so v danem primeru modeli geoida. Ti so lahko predstavljeni kot celična mreža oziroma tudi s sfernimi koeficienti. Trenutno najboljši globalni model geoida je EGM2008,

ki so ga predstavili z razvojem koeficientov sfernih funkcij do stopnje in reda $n = m = 2159$. Na območju Slovenije je trenutno najboljši lokalni testni model geoida SLOAGM2010, ki uporabnikom splošno ni na voljo. Za potrebe dane naloge smo s programoma *AllTrans EGM08 Calculator* (Duenck-Kerst, 2010) in *ECEF* (Hydrometronics LLC, 2011) izračunali geoidne višine in iz teh odklone navpičnice. Pri izračunu geoidnih višin smo uporabili posebej prirejen globalni model geoida EGM2008 z velikostjo celic $1' \times 1'$. Geoidne višine smo izračunali s štirimi metodami interpolacij, to je z metodo najbližjega sosesa, triangulacijo in bilinearno ter bikvadratno interpolacijo. Program *ECEF* ima vgrajena globalna geopotencialna modela geoida EGM96 in EGM2008. Odklon navpičnice izračuna kot gradient z odvajanjem polinoma, ki se prilega sosednjim celicam mreže v smereh sever–jug in vzhod–zahod.

V danem prispevku smo geoidne višine iz modela geoida SLOAGM2000 izračunali z bilinearno in bikubično interpolacijo ter metodo najbližjega sosesa in zlepki. Pri testni različici modela geoida SLOAGM2010 smo uporabili le bilinearno interpolacijo in zlepke, saj se rezultati ostalih metod niso bistveno razlikovali. Iz lokalnih modelov geoida SLOAGM2000 in SLOAGM2010 smo izračunali le geoidne višine točk. Komponente odklonov navpičnic smo potem izračunali s postopkom, ki so ga predstavili ob izračunu odklonov navpičnic iz modela SLOAGM2000 (Kuhar in sod., 2010).



Slika 3: Določitev štirih točk, ki so enako oddaljene od središčne točke.

Postopek temelji na določitvi ravnine geoida v točkah s predhodno izračunanimi geoidnimi višinami. Za obravnavano točko računsko določimo štiri točke v bližnji okolici, ki so oddaljene po 10, 20 ali 30 metrov v smereh sever, jug, vzhod in zahod, kot prikazuje slika 3. Iz modelov izračunane geoidne višine točk uporabimo za nadaljnji izračun komponent odklonov navpičnice v smereh sever–jug oziroma vzhod–zahod (Jakopič, 2008).

4.3 Izračun komponent odklona navpičnice z razvojem potenciala v vrsto po sfernih funkcijah

Metoda je primerna za določitev geoidnih višin in odklonov navpičnic za celotno površje Zemlje. Tu globalni geopotencialni model določijo iz opazovanj satelitov v nižjih orbitah. Model predstavijo s sfernimi funkcijami (Heiskanen in Moritz, 1996). Enačbo (4) zapišemo nekoliko drugače, in sicer z upoštevanjem motečega potenciala T (Torge in Müller, 2012):

$$\xi = -\frac{1}{\gamma(M+h)} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma(N+h) \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad (7)$$

Potem uporabimo predpostavko, da je ploskev geoida preračunana glede na kroglo, kjer je moteči potencial T predstavljen s koeficienti razvoja v vrsto kot (Torge in Müller, 2012):

$$T_l = \frac{GM}{a} \sum_{m=0}^l (\Delta C_{lm} \cos m\lambda + \Delta S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\cos \vartheta) \quad (8)$$

Z GM označimo produkt gravitacijske konstante G in mase Zemlje M , a opisuje veliko polos geocentričnega rotacijskega elipsoida. Koeficienta ΔC_{lm} in ΔS_{lm} sta razliki harmoničnih koeficientov razvoja dejanskega in normalnega težnostnega polja, P_{lm} je prirejena Legendrova funkcija 1. vrste, l je stopnja ter m red razvoja po sfernih funkcijah. Tako so predstavljeni vsi globalni geopotencialni modeli geoida. Pri tem naj izpostavimo povezavo med geoidnimi višinami in motečim potencialom (Brunsova enačba). Nazadnje komponenti izračunamo kot:

$$\xi = -\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \quad (9)$$

Povezava motečega potenciala T in drugih parametrov gravitacijskega polja omogoča razvoj v vrsto sfernih funkcij za izračun višinskih anomalij, geoidnih višin in anomalij težnosti. Z enačbo (8) in na podlagi vseh razpoložljivih podatkov altimetrije in satelitske gradiometrije lahko določimo globalni geopotencialni model visoke ločljivosti. Odklon navpičnice definiramo z razvojem po sfernih funkcijah kot (Torge in Müller, 2012):

$$\xi(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2 \gamma} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta \bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \frac{d\bar{P}_{lm}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad (10)$$

$$\eta(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2 \gamma \sin \vartheta} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (-m \Delta \bar{C}_{lm} \sin m\lambda + m \Delta \bar{S}_{lm} \cos m\lambda) \bar{P}_{lm}(\cos \vartheta) \quad (11)$$

4.4 Metoda določitve iz kombinacije elipsoidnih in nadmorskih višin

Za pridobitev boljših informacij o lokalnem poteku geoida lahko uporabimo kombinacijo določitve elipsoidnih in nadmorskih višin v izbranih točkah. Velja izpostaviti tudi slabost metode, saj je omejena le na lokalno območje. Z izmero GNSS pridobimo elipsoidne višine, s klasičnimi postopki določitve višin (nivelman ali trigonometrično višinomerstvo) pa fizikalne višine (Tse in Baki, 2006). Podobno smo ravnali v Sloveniji, ko smo s kombinacijo GNSS in nivelmana zbirali podatke za preračun modelov geoida SLOAGM2000, testnega SLOAGM2010 in kmalu predstavljenega novega modela geoida Slovenije SLOAGM2010.

Naklon geoida v poljubni smeri izračunamo kot (Heiskanen in Moritz, 1996):

$$\varepsilon = - \frac{dN}{ds} \quad (12)$$

Komponenti odklona navpičnice vzdolž meridiana oziroma prvega vertikalala, ξ in η , določimo na podlagi kateregakoli geodetskega azimuta α (Tse in Baki, 2006):

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (13)$$

Z združitvijo enačb (10) in (11) dobimo zvezo:

$$-\frac{dN}{ds} = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (14)$$

in namesto diferencialov zapišemo diskretna ekvivalenta:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta s} \approx \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (15)$$

Geoidno višino izračunamo z razliko elipsoidne in nadmorske višine:

$$N = h - H \quad (16)$$

Ko enačbo (14) uporabimo za točki A in B in ju združimo, dobimo razliko geoidnih višin med točkama ΔN_{AB} , izraženo z elipsoidnima in nadmorskima višinama. To vključimo v enačbo (15), da dobimo:

$$-\frac{\Delta h_{AB} - \Delta H_{AB}}{\Delta s_{AB}} \approx \xi \cos \alpha_{AB} + \eta \sin \alpha_{AB} \quad (17)$$

Količine leve strani enačbe (15) dobimo s terensko izmero, elipsoidne višine h z metodami GNSS in fizikalne višine H s trigonometričnim višinomerstvom ali še boljše z nivelmanom. S povezavami med točkami ocenimo komponente odklona navpičnice. Geodetske koordinate točk, določene z GNSS, uporabimo za izračun geodetskih azimutov med točkami, na primer s Clarkovimi enačbami (Kilar, 1978). Če imamo na voljo nadštevilne povezave med točkami, komponente odklonov navpičnice ocenimo z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov.

5 PRAKTIČNI PRIMERI IZRAČUNOV ODKLONOV NAVPIČNIC

V danem poglavju predstavljamo rezultate izračunov odklonov navpičnic, ki smo jih določili iz:

- kombinacije elipsoidnih in nadmorskih višin (enačba 15),
- grida geoidnih višin in
- globalnega geopotencialnega modela EGM2008.

Zaradi obsežnosti pridobivanja podatkov v danem prispevku ne opisujemo terenske izmere in obdelave opazovanj, ampak le primerjamo različne posredne izračune odklonov navpičnice.

5.1 Odkloni navpičnic, določeni iz kombinacije elipsoidnih in nadmorskih višin

Pri metodi smo uporabili rezultate trigonometričnega višinomerstva, geometričnega nivelmana in statične izmere GNSS. Odklone navpičnic smo izračunali z enačbo (12), pri čemer smo uporabili razlike geoidnih višin in horizontalne razdalje med točkami. Uporabljene podatke in dobljene vrednosti odklona navpičnice za posamezno smer podajamo v preglednici 1.

Če privzamemo različni izhodiščni točki, 1001 oziroma 1006, se absolutne vrednostni komponent razlikujejo za približno 7". Glede na to, da je točka 1006 višje od točke 1001, so do točke 1006 komponente odklonov navpičnic in razlike geoidnih višin različno predznačene. V preglednici 1 so vrednosti izračunane iz enačbe (10), zato ne dobimo neposredno komponent odklonov navpičnice v smeri sever–jug in vzhod–zahod. Za izračun teh uporabimo enačbo (13). Glede na to, da imamo v dani situaciji nadštevilne podatke, komponenti odklonov navpičnic v smereh sever–jug in vzhod–zahod ocenimo z izravnavo po

metodi najmanjših kvadratov. Rezultate podajamo v preglednici 2.

Preglednica 1: Odkloni navpičnic z najnižje točke 1001 proti preostalim točkam oziroma z osrednje točke 1006 proti preostalim točkam in razlike geoidnih višin glede na azimut.

Začetna točka	Končna točka	Odklon [“]	Razdalja [m]	ΔN [m]	Začetna točka	Končna točka	Odklon [“]	Razdalja [m]	ΔN [m]
1001	1002	−20,21	768,492	0,075	1006	1001	19,88	3.143,376	−0,303
1001	1003	−9,09	2.068,511	0,091	1006	1002	19,59	2.396,275	−0,228
1001	1004	−23,31	1.771,665	0,200	1006	1003	27,11	1.610,961	−0,212
1001	1005	−16,48	2.680,119	0,214	1006	1004	13,70	1.546,451	−0,103
1001	1006	−19,88	3.143,376	0,303	1006	1005	23,22	788,961	−0,089
1001	1007	−23,48	3.287,158	0,374	1006	1007	−19,54	752,486	0,071
1001	1008	−21,96	4.079,817	0,434	1006	1008	−23,67	1.145,026	0,131
1001	1009	−18,94	4.957,435	0,455	1006	1009	−15,02	2.091,768	0,152
1001	1010	−27,38	4.882,331	0,648	1006	1100	−29,98	2.374,623	0,345

Preglednica 2: Geoidne višine in komponente odklonov navpičnic v točki, izračunanih z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov.

Točka	N [m]	ξ [“]	η [“]
1001	46,919	−22,34	−10,87
1002	46,994	−22,48	−9,00
1003	47,010	−28,41	−0,11
1004	47,119	−23,01	−8,80
1005	47,133	−25,10	−2,24
1006	47,222	−21,70	−7,76
1007	47,293	−24,8’	−3,80
1008	47,353	−21,39	−4,11
1009	47,374	17,54	−1’ 4,01
1010	47,567	−38,43	31,75

Iz preglednice 2 lahko vidimo, da so komponente navpičnice v smeri vzhod–zahod bolj raznolike, kar kaže na topografsko razgiban teren (slika 1). Izjema sta najvišji točki 1009 in 1010, ki imata tudi drugače predznačeni vrednosti. Točke od 1001 do 1008 kažejo na nagnjenost geoida v smeri juga in rahel nagib v smeri zahoda. Pri točki 1009 je geoid nagnjen proti severu in še bolj proti zahodu, saj je vrednost komponente η za približno 1’ večja kot pri predhodnih točkah. Če na sliki 1 podrobneje pogledamo položaj točke 1009, opisano situacijo lahko povežemo tudi s topografijo terena. Očitno gre v okolici točke 1009 za spremembo smeri poteka ploskve geoida zaradi preloma. Pri točki 1010 je geoid nagnjen proti jugu in vzhodu. Glede na precej raznolike rezultate izračunov komponent odklonov navpičnice v točkah poligona lahko rečemo, da s to metodo najbolj opišemo lokalni potek geoida in je zato izbira mikrolokacij točk glede na topografijo terena za modeliranje odklonov navpičnice zelo pomembna.

5.2 Odkloni navpičnic iz mreže geoidnih višin

Iz mreže geoidnih višin iz modelov SLOAGM2000 in testne različice SLOAGM2010 smo najprej za vsako točko poligona izračunali geoidne višine. To smo naredili z bilinearno in bikubično interpolacijo, metodo najbližjega sosesa in zlepki. Za model SLOAGM2010 smo uporabili le bilinearno interpolacijo in zlepke. Zaradi obsežnosti rezultatov jih v prispevku podrobneje ne predstavljamo, so pa predstavljeni v Petrin, 2017.

Prvi korak v modeliranju odklonov navpičnic je izračun geoidnih višin in drugi izračun komponent odklonov navpičnice. Tu uporabimo aproksimacijo ploskve geoida z ravnino:

$$N = A e' + B n' + C, \quad e'_i = e_i - e_0, \quad n'_i = n_i - n_0 \tag{18}$$

Koeficienta *A* in *B* predstavljata nagnjenost geoida v smereh vzhod–zahod oziroma sever–jug, koeficient *C* pa odmik ploskve geoida od rotacijskega elipsoida v težišču (*e*₀, *n*₀). Koordinate točk se nanašajo na koordinatni sistem D96/TM. Ravnino lahko izračunamo na več načinov. Na primer tako, da vsaki točki določimo štiri sosednje točke, ki so od osrednje točke oddaljene za vrednost *d* (*d* = 10, 20 ali 30 metrov) proti severu, jugu, vzhodu in zahodu. Točkam z interpolacijo iz modela izračunamo geoidne višine z bilinearno interpolacijo. V danem primeru smo za to uporabili modela SLOAGM2000 in SLOAGM2010. V enačbi (18) je podana funkcijska povezava geoidnih višin točk s koordinatnimi razlikami, kjer nastopajo še trije neznani koeficienti *A*, *B* in *C*. Te ocenimo iz geoidnih višin in koordinatnih razlik s postopkom izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Rezultate konkretnega izračuna podajamo v preglednici 3.

Preglednica 3: Odkloni navpičnice, izračunani z aproksimacijo geoida z ravnino za posamezno točko ob uporabi modelov geoida SLOAGM2000 in SLOAGM2010.

		SLOAGM2000			SLOAGM2010		
		Odmiki od središčne točke			Odmiki od središčne točke		
Točka		10 m	20 m	30 m	10 m	20 m	30 m
1001	ξ [°]	−16,50	−16,50	−16,50	−20,63	−20,63	−20,63
	η [°]	−6,19	−5,16	−5,50	0,00	−5,16	−3,44
	<i>N</i> [m]	47,043	47,043	47,043	46,971	46,971	46,971
1002	ξ [°]	−17,53	−17,53	−17,88	−30,94	−25,78	−24,06
	η [°]	−6,19	−6,70	−6,88	−10,31	−5,16	−3,44
	<i>N</i> [m]	47,084	47,084	47,084	47,018	47,018	47,018
1003	ξ [°]	−19,60	−20,11	−20,28	−30,94	−25,78	−24,06
	η [°]	−7,22	−6,70	1' 10,47	−10,31	−5,16	1' 32,82
	<i>N</i> [m]	47,116	47,116	47,122	47,050	47,050	47,057
1004	ξ [°]	−19,60	−19,08	−19,60	−20,63	−20,63	−24,06
	η [°]	−7,22	−7,73	−7,91	−10,31	−10,31	−10,31
	<i>N</i> [m]	47,198	47,198	47,198	47,151	47,151	47,151
1005	ξ [°]	−20,63	−19,60	−19,94	−30,94	−25,78	−24,06
	η [°]	−3,09	−3,09	−3,09	−10,31	−5,16	−3,44
	<i>N</i> [m]	47,200	47,200	47,200	47,153	47,153	47,153

		SLOAGM2000			SLOAGM2010		
		Odmiki od središčne točke			Odmiki od središčne točke		
Točka		10 m	20 m	30 m	10 m	20 m	30 m
1006	ξ ["]	-19,60	-20,11	-19,94	-20,63	-25,78	-27,50
	η ["]	-3,09	-3,61	-3,78	0,00	-5,16	-3,44
	N [m]	47,278	47,278	47,277	47,247	47,247	47,247
1007	ξ ["]	-19,60	-19,60	-19,60	-30,94	-25,78	-24,06
	η ["]	-8,25	-7,73	-7,91	-10,31	-15,47	-10,31
	N [m]	47,335	47,335	47,335	47,321	47,321	47,321
1008	ξ ["]	-17,53	-18,05	-18,22	-30,94	-25,78	-24,06
	η ["]	-4,13	-4,64	-4,47	-10,31	-5,16	-3,44
	N [m]	47,388	47,388	47,388	47,390	47,390	47,390
1009	ξ ["]	-18,56	-18,56	-18,56	-20,63	-20,63	-24,06
	η ["]	-6,19	-5,67	-5,50	0,00	0,00	0,00
	N [m]	47,474	47,474	47,474	47,501	47,501	47,501
1010	ξ ["]	-17,53	-17,53	-17,53	-20,63	-20,63	-20,63
	η ["]	-7,22	-6,70	-6,53	0,00	-10,31	-6,88
	N [m]	47,492	47,492	47,492	47,523	47,523	47,523

Pri modelu SLOAGM2000 so si komponente v smeri sever–jug zelo podobne, medtem ko so večje razlike vidne pri komponenti η . Največja razlika v vrednosti komponente η je pri točki 1003, kjer znaša več kot 1'. Sprememba geoidne višine glede na uporabljene točke pri aproksimaciji z ravnino je največ 6 milimetrov pri točki 1003. Podobno kot pri rezultatih starejšega gravimetričnega modela so tudi pri modelu SLOAGM2010 pri komponenti ξ manjše razlike. Opazimo, da so vrednosti komponente ξ na točkah 1002, 1003, 1005, 1007 in 1008 enake. Večje razlike so pri komponenti v smeri vzhod–zahod (η).

Opisani pristop za določitev komponent odklona navpičnice je z vidika predhodne priprave podatkov za izravnavo do končne določitve komponent odklonov ξ in η zelo zamuden. Poleg tega ne vemo vnaprej, s katerim nizom podatkov bomo dobili najrealnejše vrednosti odklonov. Zato smo v dani situaciji aproksimirali enotno ravnino skozi deset obravnavanih točk. Pri tem smo lahko uporabili geoidne višine, določene s kombinacijo elipsoidnih in nadmorskih višin. Ravnino lokalnega geoida smo umestili v točko 1006, ki je bila na sredini poligona z znanimi višinami točk. Tako izračunane odklone navpičnic podajamo v preglednici 4.

Preglednica 4: Geoidne višine in odkloni navpičnic, pridobljeni z metodo aproksimacije ploskve geoida z ravnino skozi točke od 1001 do 1010.

	Vir podatkov		
	Terenska izmera	SLOAMG2000	SLOAMG2010
ξ ["]	-25,82	-18,90	-24,14
η ["]	-4,18	-6,30	-6,60
N [m]	47,203	47,275	47,247

Iz preglednice 4 je razvidno, da se v smeri sever–jug bolje ujemata izračuna lokalne ploskve geoida, ki

smo ju določili, ko smo v aproksimacijo ravnine privzeli geoidne višine iz terenske izmere oziroma interpolirane iz modela geoida SLOAGM2010. V smeri vzhod–zahod se bolje ujemata ravnini, določeni iz podatkov terenske izmere oziroma iz modela SLOAGM2010.

5.3 Odkloni navpičnic iz globalnih modelov geoida EGM96 in EGM2008

V preglednici 5 podajamo rezultate izračunov odklonov navpičnice z razvojem po sfernih funkcijah ob uporabi globalnega modela geoida EGM2008. Opazimo, da naklon geoida, izračunan iz modela EGM96, proti jugu narašča do točke 1008. Pri razvoju po sfernih funkcijah ob uporabi modela EGM2008 naklon proti jugu narašča do točke 1004 pri rezultatih iz razvoja, nato se zmanjšuje. Pri komponenti η je opazno spreminjanje naklona v smeri vzhod–zahod. Na sliki 1 lahko to nihanje povežemo z večjimi spremembami terena v okolici točk.

Preglednica 5: Primerjava geoidnih višin in komponent odklona navpičnice iz globalnih modelov geoida EGM96 in EGM2008.

Točka	Iz programa ECEF (EGM96)			Razvoj po sfernih funkcijah (EGM2008)		
	N [m]	ξ ["]	η ["]	N [m]	ξ ["]	η ["]
1001	47,513	−12,70	−2,70	47,531	−15,21	−3,74
1002	47,540	−13,05	−2,85	47,554	−15,63	−3,89
1003	47,553	−13,37	−2,85	47,556	−15,93	−3,83
1004	47,620	−13,52	−3,14	47,63	−16,20	−4,24
1005	47,609	−13,68	−3,01	47,582	−16,03	−3,86
1006	47,665	−13,79	−3,10	47,615	−16,01	−3,88
1007	47,707	−13,81	−3,21	47,606	−15,67	−3,86
1008	47,747	−13,81	−3,14	47,621	−15,51	−3,66
1009	47,814	−13,59	−3,03	47,689	−15,25	−3,52
1010	47,832	−13,50	−3,14	47,63	−14,78	−3,51

6 RAZPRAVA O REZULTATIH IN PREDLOG NADALJNIH DEL

Za najboljši približek dejanskim vrednostim odklonov navpičnice smo privzeli komponente, pridobljene s kombinacijo elipsoidnih in nadmorskih višin (rezultati v preglednicah 1 in 2), ki smo jih pridobili s terensko izmero. Potem smo komponente odklonov izračunali na štiri različne načine. Drugi in tretji niz izhajata iz testnega modela geoida SLOAGM2010, vendar smo v drugem nizu določili komponente odklona z ravnino, ki se najbolje prilega vsem točkam obravnavanega poligona. Komponente odklona v tretjem nizu smo določili z aproksimacijo geoida okoli posamezne točke poligona in skozi štiri sosednje nove točke, oddaljene po 10, 20 in 30 metrov od središčne točke. Četrti niz komponent odklona predstavljajo vrednosti, določene iz globalnega modela geoida EGM2008, ki smo jih izračunali z razvojem po sfernih funkcijah.

Največje razlike glede na referenčne vrednosti smo dobili pri izračunu geoidnih višin in odklonov navpičnice iz modela EGM2008. Vsakokrat smo dobili izrazito drugačne vrednosti pri točki 1009. To lahko utemeljimo z lokacijo točke glede na potek terena v njeni okolici. Različni rezultati izračunov nakazujejo, da lahko s kombinacijo elipsoidnih in nadmorskih višin bolje opišemo potek geoida v okolici posamezne točke, medtem ko lokalni in globalni modeli geoida zaradi slabše ločljivosti potek toliko posplošijo, da

se detajli izgubijo. Primerjava odklonov navpičnic, izračunanih iz modela SLOAGM2010, z referenčnim nizom pokaže, da so razlike precej manjše kot pri globalnem geopotencialnem modelu EGM2008.

Če komentiramo predpostavko, da je mogoče posredno pridobiti odklone navpičnic, ki jih najbolj dobimo z astronomsko-geodetsko metodo določitve odklonov navpičnic, lahko rečemo, da je to mogoče, če imamo na voljo ustrezne kakovostne podatke za izračun komponent odklonov navpičnic. Pri modelih geoidov moramo imeti na voljo model ustrezne ločljivosti oziroma kakovostne podatke o elipsoidnih in nadmorskih višinah v diskretnih točkah obravnavanega območja, če modeliramo ploskev geoida na lokalnem območju. V danem primeru smo najboljše določili komponente odklonov navpičnice s kombinacijo elipsoidnih in nadmorskih višin. Globalni modeli geoida so slabših ločljivosti, zato jih pri izračunih ni dobro uporabljati. Veliko bolje je uporabiti lokalne modele geoida, kot je SLOAGM2010, testna različica geoida Slovenije iz leta 2010.

7 SKLEP

V danem prispevku smo opisali različne načine za izračun komponent odklonov navpičnic in razlike v izračunih. Kakovostno določeni odkloni navpičnic so pomemben vhodni podatek za redukcijo terestričnih geodetskih opazovanj za vpliv težnostnega polja Zemlje. V prispevku se zaradi omejitve obsega nismo osredotočili na opis pridobitve rezultatov geografskih koordinat z izmero GNSS ter fizikalnih višin z izvedbo nivelmana in trigonometričnega višinomerstva. Prav tako nismo podrobneje pokazali, kako pomanjkljivo upoštevanje odklonov navpičnic pri redukciji terestričnih opazovanj vpliva na izračunane kooordinate točk. Razlog je podoben kot pri obdelavi opazovanj. Zato bomo tudi tematiko pomanjkljivega upoštevanja vpliva Zemljinega težnostnega polja na terestrična opazovanja na konkretnem primeru poligona na vznožju Kravca podrobneje predstavili drugič.

Literatura in viri:

- Bric, V., Berk, S., Oven, K., Triglav Čekada, M. (2015). Aerofotografiranje in aerolasersko skeniranje Slovenije. Ljubljana, 20. srečanje Slovenskega združenja za geodezijo in geofiziko. http://www.fgg.uni-lj.si/sugg/referati/2015/6%20SZGG_2015_Bric_Berk_Oven_Triglav.pdf, pridobljeno 22. 8. 2016.
- Duenck-Kerst, H. G. (2010). AllTrans EGM2008 calculator. <http://www.brothersoft.com/alltrans-egm2008-calculator-download-216023.html>, pridobljeno 15. 3. 2017.
- Featherstone, W. E. (1997). The Importance of Including the Geoid in Terrestrial Survey Data Reduction to the Geocentric Datum of Australia. *The Australian Surveyor*, 42 (3), 45–50. DOI: <https://doi.org/10.1080/00050342.1997.10558665>
- Featherstone, W. E., Rüeger, J. M. (2000). The Importance of Using Deviations of the Vertical for the Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum. *The Australian Surveyor*, 45 (2), 46–61. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00050326.2002.10441952>
- Grabljevec, M. 2017. Vzpostavitev geodetske višinske mreže in analiza geoidnih višin na območju Kravca. Magistrska naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=97607>, pridobljeno 20. 9. 2017.
- Hydrometronics LLC (2011). User's Manual Earth-Centered Earth-Fixed in WGS84 by Hydrometronics LLC. <http://www.hydrometronics.com/downloads/ECEF%20for%20Blue%20Marble%20with%20Notes.pdf>, pridobljeno 15. 3. 2017.
- Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1996). *Physical Geodesy*. Second edition. Graz: Technische Universität Graz.
- Jakopič, M. (2008). Določitev odklonov navpičnic iz geoidnih višin. Diplomsko naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. <http://drugg.fgg.uni-lj.si/id/eprint/880>, pridobljeno 15. 9. 2017.
- Kilar, B. (1978). Približna določitev astronomskih koordinat in azimuta. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo.
- Kuhar, M., Okorn, M., Stopar, B. (2010). Določitev odklonov navpičnic iz geoidnih višin = Determination of deflection of the vertical from geoid heights. *Geodetski vestnik*, 54 (4), 595–605. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2010.04.595-605>
- Petrin, T. (2017). Analiza odklonov navpičnic na območju testnega poligona Kravec. Magistrska naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=91360>, pridobljeno 20. 9. 2017.
- Pribičević, B. (2000). Uporaba geološko-geofizičnih in geodetskih baz podatkov za računanje ploskve geoida Republike Sloveniji. Doktorska disertacija. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Stopar, B., Kuhar, M. (2002). Postopki transformacije med globalnimi in državnimi koordinatnim sistemom Slovenije. Zbornik predavanj. Ljubljana: Ljubljansko geodetsko društvo in Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 103–110.

Torge, W., Müller, J. (2012). Geodesy. Fourth edition. Berlin, Boston Walter de Gruyter. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110250008>

Tse, C. M., Baki, I. (2006). Deflection of the Vertical Components from GPS and Precise Leveling Measurements in Hong Kong. Journal of Surveying Engineering, 97–100. DOI: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9453\(2006\)132:3\(97\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9453(2006)132:3(97))

Vaniček, P. (2001). An Online Tutorial in Geodesy. University of New Brunswick, Academic Press.



Pavlovčič Prešeren P., Petrin T., Koler B., Urbančič T., Kuhar M. (2018). Različni postopki za izračun odklonov navpičnice: primer območja pod Krvavcem. Geodetski vestnik, 62 (1), 13–27. DOI: [10.15292/geodetski-vestnik.2018.01.13-27](https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.01.13-27)

Doc. dr. Polona Pavlovčič Prešeren, univ. dipl. inž. geod.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: polona.pavlovcic@fgg.uni-lj.si

Tanja Petrin, mag. inž. geod. geoinf.
e-naslov: tanja.petrin@gmail.com

Asist. dr. Tilen Urbančič, univ. dipl. inž. geod.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: tilen.urbancic@fgg.uni-lj.si

Doc. dr. Božo Koler, univ. dipl. inž. geod.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: bozo.koler@fgg.uni-lj.si

Doc. dr. Miran Kuhar, univ. dipl. inž. geod.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: miran.kuhar@fgg.uni-lj.si