PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **3** (1975/1976)
Številka 3
Strani 135–137

Zvonimir Bohte:

NAJVEČJA ŠTEVILA Z ENAKIMI CIFRAMI

Ključne besede: matematika, aritmetika, teorija števil, števila, elementarne operacije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/3/3-3-Bohte.pdf

MATEMATIKA

NAJVEČJA ŠTEVILA Z ENAKIMI CIFRAMI

Vprašajmo se, katera so največja števila, ki jih moremo zapisati s samimi enakimi ciframi in nobenimi drugimi matematičnimi znaki. Na prvi pogled se zdi, da je lahko odgovoriti. Največje število, zapisano z dvema enojkama, je 11. Največje število, zapisano z dvema dvojkama, je 22, z dvema trojkama 33, z dvema štiricama 44 itd. Ali je to res? Ali je, na primer, 44 res največje število, ki se da zapisati z dvema štiricama? Odgovor je nikalen. Namreč, največje število, zapisano z dvema štiricama, je $4^4 = 256$.

Ta primer vsebuje dva poučna nauka. Prvi je, da je prehitro sklepanje in posploševanje nevarno in lahko vodi do napačnih zaključkov. Drugi nauk je pa ta, da nas lahko pri reševanju postavljenih vprašanj zapeljejo predpostavke, ki si jih bodisi sami, bodisi zastavljalec vprašanja tiho misli. Da bo nadaljnje razpravljanje bolj resno in manj dvoumno, ponovno postavimo začetno vprašanje, tokrat v strogi matematični obliki.

Naj bo d katerakoli od 0 različna cifra desetiškega sistema. Katero je največje število, ki se da zapisati z m enakimi ciframi d v enem ali več nivojih, pri čemer predpostavljamo desetiški zapis števila, če so cifre zapisane druga poleg druge, in operacijo potenciranja, če so števila zapisana drugo nad drugim?

Mladi bralec naj se ne ustraši takih zapletenih stavkov, ki jih je treba včasih dvakrat prebrati. Da imamo v mislih desetiški sistem, se razume samo po sebi, dobro je omeniti le, da pri zapisu ne dovoljujemo nobenih aritmetičnih operacij razen potenciranja.

Laže bomo odgovarjali na postavljeno vprašanje v posebnih primerih števil m (števila cifer) in d (konkretne cifre), če bomo vpeljali posebno oznako $N(m,d)$ za tisto največje število, o katerem govori naloga. Vprašanje sedaj lahko postavimo v obliki: Kolik je $N(m,d)$ za $d = 1,2,\ldots,9$ in $m = 2,3,4,\ldots$?

Odgovora v splošnem primeru ni lahko najti. Pri $m = 2$ je zadeva enostavna. Brez težav se namreč lahko z računom prepričamo, da velja

$$N(2,d) = dd = 10\,d + d = 11\,d, \qquad d \le 3$$
$$N(2,d) = d^d, \qquad d \ge 4$$

Oglejmo si nekoliko natančneje primer $m = 3$! Za primerjavo pridejo v poštev le štiri števila

$$n_1(d) = ddd = 100\,d + 10\,d + d = 111\,d$$
$$n_2(d) = dd^d = (10\,d + d)^d = (11d)^d$$
$$n_3(d) = d^{dd} = d^{10d+d} = d^{11d}$$
$$n_4(d) = d^{d^d}$$

Ali je treba posebej povedati, kaj pomeni d^{d^d} ? To je namreč število $d^{(d^d)}$ in ne $(d^d)^d = d^{d\cdot d} = d^{d^2}$. Kolik je torej $N(3,d)$? Pri $d=1$ hitro vidimo, da je $N(3,1) = 111$ in pri $d=9$ je brez dvoma $N(3,9) = 9^{9^9}$, ki je tako veliko število, da se ga praktično niti ne da zapisati. Ima namreč skoraj 370 milijonov cifer. Če bi ga poznali in hoteli zapisati v navadne 40 listne karirane zvezke tako, da bi vsako cifro zapisali v svoj kvadratek (5 mm), bi popisali več kot 4000 zvezkov. Pri hitrosti pisanja en znak na sekundo bi to število pisali nepretrgoma skoraj 12 let. Če bi to število izračunal računalnik, kar je v principu mogoče, bi ga samo izpisoval s tiskarskim strojem, ki piše 1000 vrstic s 120 znaki na minuto, več kot 51 ur. No, dovolj o tem številskem velikanu.

Z malo premisleka in računanja lahko ugotovimo, da je

$$N(3,2) = 2^{22} = 4\,194\,304$$
$$N(3,3) = 3^{33} = 5\,559\,060\,566\,555\,523$$
$$N(3,4) = 4^{4^4} = 4^{256} \doteq 1{\cdot}34 \cdot 10^{154}$$

Zadnje število ima že 155 cifer. Preveliko je, da bi se ga dalo hitro izračunati. Ugotavljanje števila $N(m,d)$ z direktnim računanjem je torej zelo zamudno opravilo. Poskusimo rajši s sklepanjem.

Najprej primerjajmo $n_1(d)$ in $n_2(d)$. Velja

$$n_2(d) = (11d)^d = 11^d d^d > 111\,d$$

za vsak $d \geq 2$, saj je tedaj $11^d > 111$ in $d^d > d$. Očitno pa je $n_2(1) = 11 < 111 = n_1(1)$. Torej imamo prvi sklep

$$n_2(d) > n_1(d), \quad d \geq 2$$
$$n_1(d) > n_2(d), \quad d = 1$$

Dalje primerjajmo $n_2(d)$ in $n_3(d)$. Hitro vidimo, da je

$$n_3(d) = d^{11\,d} = (d^{11})^d > (11d)^d = n_2(d)$$

tudi za vsak $d \geq 2$, saj je tedaj očitno $d^{11} > 11d$. Izjema je spet $d=1$, ko je $n_2(1) > n_3(1)$. Drugi sklep je torej

$$n_3(d) > n_2(d), \quad d \geq 2$$
$$n_2(d) > n_3(d), \quad d = 1$$

Primerjajmo še $n_3(d)$ in $n_4(d)$. Domnevamo, da velja $n_4(d) > n_3(d)$, le ne vemo še, za katere d. Ker se da $n_3(d)$ zapisati v obliki $(d^{11})^d$, $n_4(d)$ pa v obliki $(d^{d^{d-1}})^d$, je očitno $n_4(d) > n_3(d)$, če je $d^{d-1} > 11$. S poskušanjem se hitro prepričamo, da je $d^{d-1} > 11$ za vsak $d \geq 4$ in $d^{d-1} < 11$ za $d < 4$. Torej imamo tretji sklep

$$n_4(d) > n_3(d), \quad d \geq 4$$
$$n_3(d) > n_4(d), \quad d = 2,3$$
$$n_3(d) = n_4(d), \quad d = 1$$

Pri $d=1$ sta namreč $n_3(1)$ in $n_4(1)$ oba enaka 1.

Dobljene neenačbe nam omogočajo končni sklep

$$N(3,d) = n_1(d) = ddd = 111\,d\,, \quad d = 1$$
$$N(3,d) = n_3(d) = d^{dd} = d^{11\,d}\,, \quad d = 2,3$$
$$N(3,d) = n_4(d) = d^{d^d}\,, \quad d \geq 4$$

Na podoben način lahko s sklepanjem rešimo problem za $m=4$. Izkaže se, da velja

$$N(4,d) = dd^{dd}, \quad d = 1$$
$$N(4,d) = d^{d^{dd}}, \quad d = 2,3$$
$$N(4,d) = d^{d^{d^d}}, \quad d \geq 4$$

Bralec naj poskusi sam priti do tega rezultata.

Zvonimir Bohte