PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 2
Strani 66–74

Milena Strnad:

ESCHERJEVO ISKANJE NESKONČNOSTI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/21/1169-Strnad-Milena.pdf

ESCHERJEVO ISKANJE NESKONČNOSTI

Veliko matematikov občuduje dela nizozemskega slikarja Mauritsa Cornelisa Escherja. Na srečanje z njim smo se v Preseku dolgo pripravljali. Govorili smo o Moebiusovem traku, o ornamentih na traku in ravnini ter o tlakovanju ravnine.

Maurits Cornelis Escher je bil rojen leta 1898 v Leeuwardnu na Nizozemskem. V mladosti je največ slikal krajine, predvsem majhna italijanska in španska obmorska mesta. Te slike so polne topline, preprostosti in lepote. Na njih je igro svetlobe tako mojstrsko prikazal, da je bilo pričakovati njegov razvoj v odličnega krajinarja. Toda leta 1936 je obiskal čudovito mavrsko zapuščino iz 13. in 14. stoletja, Alhambro v Granadi. Njeni abstraktni geometrijski ornamenti so ga tako prevzeli, da je popolnoma prelomil z dotedanjim liričnim slikanjem. Odslej je zavzeto proučeval simetrijske vzorce in tlakovanja ravnine, v čemer je prepoznal enega od načinov, da likovno izrazi neskončnost. V tej smeri je ustvaril svoja občudovanja vredna dela. Prvo priznanje, za katero se ni posebno prizadeval, je dobil šele kakih deset let pred smrtjo leta 1972, v zadnjih desetletjih pa njegova slava narašča.

Escherjeva dela zaman iščemo po znanih svetovnih galerijah. Njegova umetnost živi predvsem v knjigah, v njegovih zbranih delih ter kot likovna oprema številnih matematičnih in fizikalnih knjig. Sam je rad poudarjal, da ima več skupnega z matematiki kot z drugimi slikarji, čeprav je vsa matematična spoznanja, od preprostih do zelo zahtevnih, kot so skladnost, podobnost, neskončnost in upodabljanje trirazsežnih predmetov na ravnini, uporabljal povsem intuitivno, ne da bi poznal njihov globlji matematični pomen. Sam je trdil, da v srednji šoli ni nikoli imel rad matematike in da sploh nikoli pri tem predmetu ni dobil dobre ocene. Dejal je celo: *Smešno je, da sem, tako se zdi, šaril po matematičnih teorijah, ne da bi vedel, kaj se dogaja. V domišljiji si me predstavljajte v družbi z vsemi temi učenimi ljudmi, kot da sem njihov dolgo izgubljeni brat. Zdi se mi, da se ne zavedajo dejstva, da sem zares neveden v matematiki.*

Tudi poznejši poskus Escherjevega prijatelja kanadskega matematika H.S.M.Coxetra, da bi ga naučil nekaj matematike, je bil zaman. Escher sploh ni sledil njegovim razlagam iz neevklidske geometrije.

Escherjeve slike, v katerih je skušal upodobiti neskončnost, lahko razvrstimo v tri skupine:

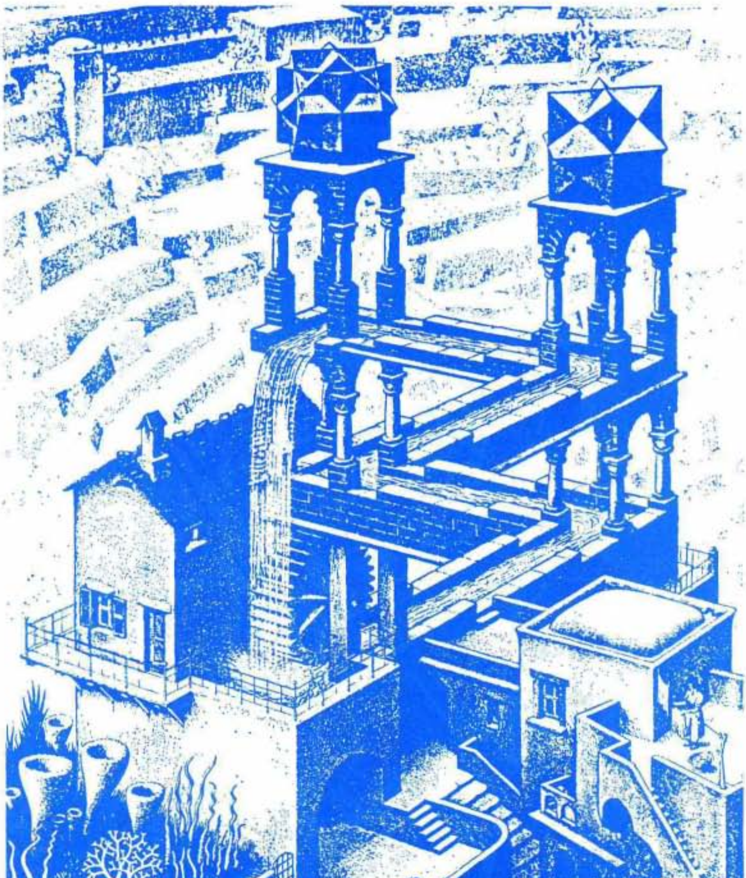
neskončni sklenjeni trakovi,
tlakovanja ravnine,
limitni prehodi.

Z deli iz prve skupine smo se srečali pri *Moebiusovem traku* (Presek **16** (1988/89) str.321) in *Ornamentih na traku* (Presek **19** (1991/92) str.130). V njih nismo občudovali le simetrične razporeditve vzorcev in njihovega ponavljanja, temveč predvsem način, s katerim je Escherju uspelo ponazoriti neskončnost. Spomnimo se njegovih mravelj, pa čete konjenikov, ki se brez konca in kraja gibljejo po Moebiusovem traku.

Pri sklenjenih trakovih in še bolj v delih iz druge skupine - pri tlakovanju ravnine - izstopa Escherjeva posebnost. Za razliko od svojih davnih vzornikov za osnovni motiv ni uporabljal abstraktnih, stiliziranih vzorcev, ampak slike

Slika 1.

živih ali bajeslovnih bitij, kot so vojščaki, konjeniki, Pegazi, ptice, leteče ribe, hrošči... Poleg tega iz njegovih del veje pridih hudomušnosti, ki se tedaj, ko se ponorčuje iz zakonov narave, sprevrže v groteskost. Tako sta znani njegovi sliki *Vzpenjanje in spuščanje*, na kateri se vojščaki neprestano vzpenjajo po stopnicah in pri tem znova in znova prihajajo v izhodiščni položaj (slika 1), in *Vodni mlin*, katerega kolo neprestano poganja varljivo speljani krožni tok vode (slika 2). Obe sliki tako vzbujata občutek nenehnega gibanja.



Slika 2.

Vendar s tlakovanji ravnine ali pravilnimi delitvami ravnine, kot jih je sam imenoval, Escher ni zadostil svojim iskateljskim hotenjem. Menil je, da z njimi ni uspel prikazati neskončnosti, ampak "le njen drobec, del plazilskega vesolja". Zato se je po letu 1955 lotil še tretjega načina ponazarjanja neskončnosti, *limitnih prehodov*. Ti temeljijo na posebni uporabi *podobnosti*. Ta zahteva zgolj to, da se ohrani oblika vzorca, ne pa njegova velikost.

Slika 3.

Slika 4.

V teh delih je dosegel vtis neskončnosti na dva načina. Najprej je pomanjševal vzorec iz središča risbe navzven, tako da je vzorec na robu slike *Krožne meje I* poniknil (slika 3). Še močnejši vtis neskončnosti pa je dosegel tako, da je pomanjševal vzorec z roba navznoter in je vzorec poniknil v središču slike *Vse manjše in manjše* (slika 4). Vzorce je pomanjševal v geometrijskem zaporedju 1, 1/2, 1/4, 1/8 ,..., tako da so ostali sami sebi podobni.

Zanimivo je, da je v nekaterih delih iz skupine *Krožne meje* Escher sledil celo modelu Poincaréjeve neevklidske geometrije. V njih se bitja gibljejo in ustrezno povečujejo ali pomanjšujejo po lokih, ki so pravokotni na obod kroga. Escherju ni bila tuja niti logaritemska spirala. Na njeni osnovi je narisal nekaj svojih nalepših del, na primer *Vrtince* (slika 5).

Slika 5.

Že v *Ornamentih na traku* smo skozi matematična očala pogledali na dela starih mojstrov, ki so vzbudila Escherjevo zanimanje. S primerjavo ugotovimo, koliko Escher presega stare mojstre, čeprav vsi izhajajo iz istih matematičnih osnov.

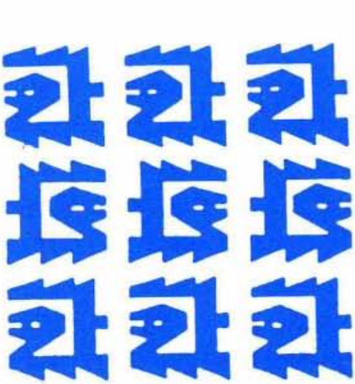
Najprej primerjajmo starogrški motiv, pri katerem dosežemo napolnitev ravnine z zasukanimi kvadrati, ki imajo vrisano krivuljo (slika 6a), z Escherjevimi letečimi konji Pegazi (slika 6b). Oba ornamenta temeljita na uporabi iste simetrijske grupe, generirane z dvema translacijama. Razlika med slikama je v tem, da prva uporablja samo osnovni način tlakovanja ravnine, druga pa je obogatena z uporabo *dualnosti* osnovnega, samega po sebi nesimetričnega motiva, ki se kaže v uporabi dveh barv. Bele Pegaze je umetnik razporedil po ravnini tako, da sestavljajo njihovo ozadje sami črni Pegazi. Ti hkrati izpolnjujejo vso ravnino med vsemi sosednjimi belimi Pegazi. Vse povedano

Slika 6a.

Slika 6b.

velja tudi v primeru, če začnemo premislek s črnimi Pegazi. Pri tem so vsi Pegazi med seboj skladni.

Analizirajmo še staroperujski vzorec iz stiliziranih labodov (slika 7a) in Escherjevo *Pravilno delitev ravnine III* (slika 7b). Obema je spet skupna ista simetrijska grupa.



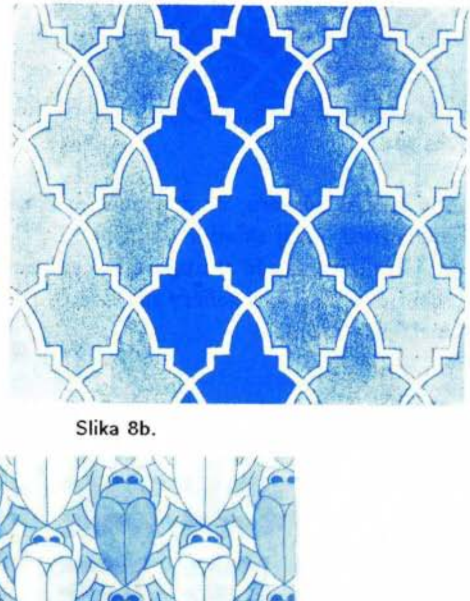
Slika 7a.

Slika 7b.

Če si mislimo staroperujski vzorec prepreden z vodoravnimi in navpičnimi črtami med posameznimi stiliziranimi labodi, vidimo, da je ornament zgrajen le z uporabo sestave translacije vzdolž vodoravnih pasov in drsnega zrcaljenja med sosednjimi navpičnimi pasovi. Escher pa je ravnino tlakoval z nesimetričnimi belimi in črnimi konjeniki, ki jahajo drug mimo drugega v nasprotnih smereh. Vzorec je enajst let pred tem uporabil tudi v Moebiusovem traku. Iz slike vidimo, da so beli konjeniki, ki popolnoma napolnjujejo ravnino med črnimi, njihova zrcalna slika.

Notranja, vzorcu lastna simetrija, pa je skupna osnova japonskemu vzorcu iz 19.stoletja (slika 8a), vzorcu iz Alhambre (slika 8b) in Escherjevi *Pravilni delitvi ravnine II* (slika 8c).

Slika 8a.



Slika 8b.

Slika 8c.

S primerjanjem bi lahko še nadaljevali, saj je Escher v svojih delih mojstrsko uporabljal kar trinajst različnih kristalografskih grup, kar potrjuje njegov zanesljiv občutek za matematične zakone. Zato matematiki, ki poznajo njegova dela, Escherja toliko bolj občudujejo.

Neskončnost je nekaj, kar vznemirja razmišljujočega človeka. Vsakdo si jo zamišlja po svoje, v vsakomur živi v njemu lastni predstavi. Escherja je neskončnost tako vznemirila, da jo je iskal polovico svojega življenja, čeprav se je zavedal, da njegova rešitev tega vprašanja ne bo zanimala širokega kroga ljudi. Na njegovih slikah se realnost in domišljija tako mojstrsko prepletata, da si vsakdo, ki jih gleda, lahko obdrži lastno predstavo o neskončnosti.

* * *

Globoka, globoka neskončnost. Mir. Sanjariti daleč od vsakdanjih skrbi, jadrati na premcu jadrnice po mirnem morju proti nenehno odmikajočemu se obzorju; strmeti v hiteče valove in poslušati njihovo enakomerno mehko mrmranje; zasanjati se v nezavednost...

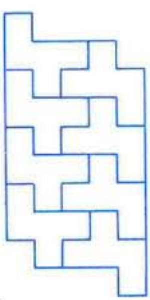
M.C.Escher

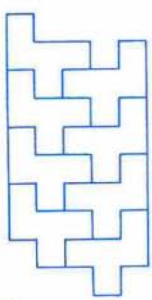
* * *

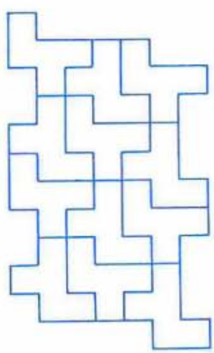
Tri naloge s tlakovanjem

Bralci naj poskusijo rešiti tri naloge iz tlakovanja ravnine, ki so prevzete iz revije *Mathematics in School.*

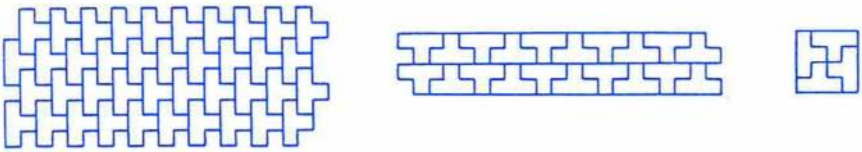
Naloga 1. Nadaljujte začeta tlakovanja ravnine (a), (b) in (c), ki uporabljajo isti osnovni vzorec. Poskušajte najti vsaj še dva druga načina tlakovanja ravnine z istim osnovnim vzorcem.


a)

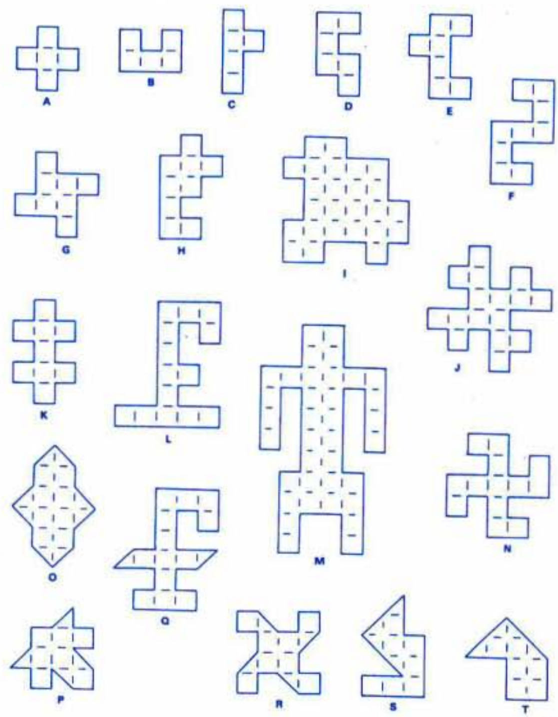

b)


c)

Naloga 2. Nakazane so tri različne možnosti za tlakovanje ravnine (a), (b) in (c) z istim osnovnim vzorcem. Poskušajte najti še kak drug način tlakovanja z istim osnovnim vzorcem.



Naloga 3. Danih je dvajset različnih osnovnih vzorcev. Z vsakim izmed njih poskušajte tlakovati ravnino. Ali vsak osnovni vzorec dopušča več različnih možnosti za tlakovanje?



Milena Strnad