PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 2
Strani 86–90

Ivan Vidav:

O PREMOČRTNEM IN KROŽNEM GIBANJU

Ključne besede: matematika, geometrija, fizika, gibanje, premica, krožnica, vijačnica.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1367-Vidav.pdf

O PREMOČRTNEM IN KROŽNEM GIBANJU

Telo, ki se giblje premočrtno s konstantno hitrostjo, pride v enakih časih enako daleč. Isto velja za telo, ki enakomerno kroži po krogu: v enakih časih opiše enako dolge loke, enaki loki na krogu pa imajo enake tetive. Zato se telo tudi v tem primeru v enakih časih enako oddalji. Ali je še kak drug način gibanja s to lastnostjo?

Pa denimo, da se točkasto telo giblje v ravnini tako, da pride v enakih časih enako daleč. To pomeni: če je v času t_1 v točki T_1 in v času t_2 v T_2 in če je nadalje v času t_1' v točki T_1', v času t_2' pa v T_2', potem je razdalja $\overline{T_1'T_2'}$ enaka razdalji $\overline{T_1T_2}$, brž ko je razlika časov enaka, to se pravi, brž ko je $t_2' - t_1' = t_2 - t_1$.

Zaznamujmo s T_0 lego našega telesa v nekem začetnem času $t = 0$ in s $T(t)$ njegovo lego v poljubnem času t. Tu seveda privzamemo, da telo ne dela skokov. Zato je točka $T(t')$ tako blizu točke $T(t)$, kakor želimo, če je le časovna razlika $t' - t$ dovolj majhna.

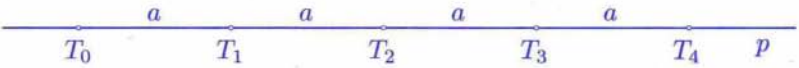
Telo pride čez nekaj časa v neko sosednjo točko $T_2 \neq T_0$ (primer, da telo miruje, seveda izključimo). Zaznamujemo ta čas z 2τ, tako da je $T_2 = T(2\tau)$. Pišimo

$$T(k\tau) = T_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

V času $t = k\tau$ se je potemtakem telo premaknilo iz točke T_0 v T_k. Dobimo zaporedje točk $T_0, T_1, T_2, \ldots$ Vse daljice $\overline{T_kT_{k+1}}$ so enako dolge, saj pride telo iz vsake točke T_k v naslednjo T_{k+1} v enakem času τ. Isto velja za daljice $\overline{T_kT_{k+2}}$, ki so tudi vse med seboj skladne (telo se premakne iz T_k v T_{k+2} v času 2τ), skladne so tudi daljice $\overline{T_kT_{k+3}}$ itd.

Ker je $T_2 \neq T_0$ in $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$, so T_0, T_1 in T_2 različne točke. Ležijo lahko vse tri na isti premici ali pa so oglišča trikotnika, ki je seveda v ravnini, v kateri se giblje telo. Oglejmo si obe možnosti:

(I) T_0, T_1, T_2 so na isti premici, ki jo imenujmo p (slika 1). Očitno je T_1 med T_0 in T_2. (Samo v tem primeru je namreč $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$.) Kje leži točka T_3? Če T_3 ne bi bila na premici p, bi bile točke T_1, T_2, T_3 oglišča pravega trikotnika. Stranice tega trikotnika so $\overline{T_1T_2} = \overline{T_0T_1} = a$, $\overline{T_2T_3} = \overline{T_0T_1} = a$ in $\overline{T_1T_3} = \overline{T_0T_2} = 2a$. Vsota stranic $\overline{T_1T_2}$ in $\overline{T_2T_3}$ je $a+a = 2a$, torej je enaka tretji stranici $\overline{T_1T_3} = 2a$. Toda v pravem trikotniku je vsota dveh stranic vselej večja od tretje stranice. Zato morajo biti oglišča T_1, T_2 in T_3 na isti premici. Torej leži tudi točka T_3 na premici p, in sicer na nasprotni strani točke T_2 kakor T_1.

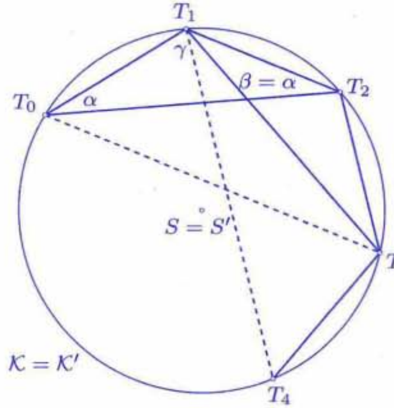


Slika 1.

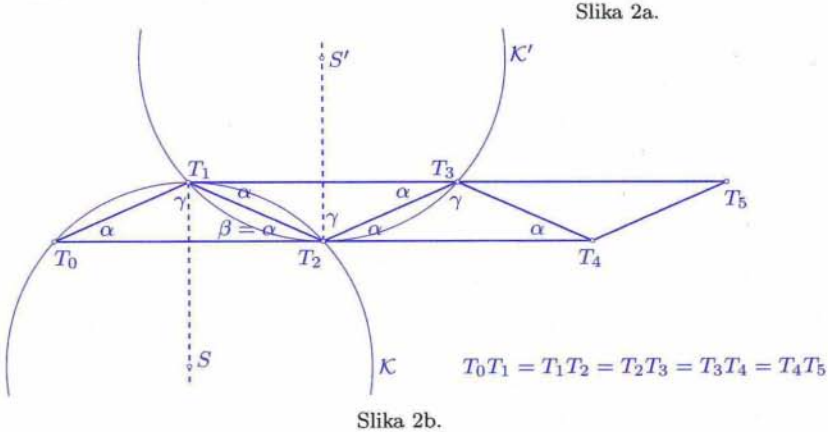
Če izhajamo iz trojke T_1, T_2, T_3 namesto iz trojke T_0, T_1, T_2, ugotovimo, da je tudi točka T_4 na premici p. Tako nadaljujemo in vidimo, da so v tem primeru vse točke T_k na premici p.

(II) T_0, T_1, T_2 so oglišča trikotnika, in sicer enakokrakega z vrhom v T_1, ker je $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$ (sliki 2a in 2b). Naj bodo njegovi koti α, β in γ. Kje leži v tem primeru točka T_3? Trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ sta skladna (ujemata se v vseh stranicah: $\overline{T_0T_1} = \overline{T_1T_2}$, $\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_3}$ in $\overline{T_0T_2} = \overline{T_1T_3}$), zato imata pripadajoči očrtani krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ enak polmer. Ker gresta obe krožnici skozi točki T_1 in T_2, imamo spet dve možnosti:

(IIa) Središči S in S' krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ležita na isti strani stranice T_1T_2. V tem primeru središči sovpadata in prav tako obe krožnici, torej $S' = S$ in $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. (Središče krožnice, ki je očrtana enakokrakemu trikotniku, leži na isti strani kraka kakor trikotnik. V našem primeru sta torej oba trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ na isti strani stranice T_1T_2, kakor kaže slika 2a.) Ker se krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ujemata, ima štirikotnik $T_0T_1T_2T_3$ očrtano krožnico, namreč $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$.



Slika 2a.



Slika 2b.

(IIb) Središči S in S' sta na nasprotnih straneh stranice T_1T_2. Isto velja v tem primeru za trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$, ki sta tudi na nasprotnih straneh imenovane stranice (slika 2b). Enakokraki trikotnik $T_1T_2T_3$ ima pri vrhu T_2 kot γ, pri T_1 in T_3 pa sta kota enaka $\alpha = \beta$. Zato je štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ paralelogram, nasprotne stranice so v njem vzporedne. Očrtane krožnice ta štirikotnik nima. Krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ sta namreč tu različni.

Poiščimo zdaj točko T_4! Oglejmo si najprej primer (IIa). Ker sta štirikotnika $T_0T_1T_2T_3$ in $T_1T_2T_3T_4$ skladna (ujemata se v vseh stranicah in obeh diagonalah), premore tudi štirikotnik $T_1T_2T_3T_4$ očrtano krožnico. Ta krožnica pa je $\mathcal{K}$, saj gre $\mathcal{K}$ skozi oglišča T_1, T_2 in T_3 (slika 2a). To pa pomeni, da je tudi točka T_4 na krožnici $\mathcal{K}$. Če tako nadaljujemo, ugotovimo, da ležijo vse točke T_k v primeru (IIa) na krožnici $\mathcal{K}$.

V primeru (IIb) štirikotnik $T_1T_3T_4T_2$ nima očrtane krožnice, ker je skladni štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ nima. Zato ležita trikotnika $T_1T_2T_3$ in $T_2T_3T_4$ na nasprotnih straneh stranice T_2T_3 (slika 2b). Točke T_1, T_3, T_4 in T_2 so oglišča paralelograma in je zato stranica T_2T_4 vzporedna stranici T_1T_3. Ker je tudi stranica T_0T_2 vzporedna stranici T_1T_3, vidimo, da so v tem primeru točke T_0, T_2 in T_4 na isti premici.

Vzemimo zdaj zaporedje točk

$$T'_j = T(j \cdot \frac{\tau}{2}), \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Telo pride iz točke T'_j v naslednjo točko T'_{j+1} pri vsakem j v času $\frac{\tau}{2}$. Novo zaporedje vsebuje prejšnje: pri $j = 2k$ je namreč $T'_{2k} = T(2k \cdot \frac{\tau}{2}) = T(k\tau) = T_k$. Glede lege točk T'_j imamo seveda tudi zdaj tri možnosti:

- (I) Vse točke T'_j so na isti premici. To velja potem tudi za točke $T'_{2k} = T_k$, tako da so vse točke T'_j na premici p. Za prvotno zaporedje nastopi torej primer (I).
- (IIa) Vse točke T'_j ležijo na krožnici, ki je očitno krožnica $\mathcal{K}$, na kateri so točke T_k. Torej imamo pri prvotnem zaporedju T_k prav tako primer (IIa).
- Če nastopi za zaporedje T'_j primer (IIb), so točke $T'_0 = T_0$, $T'_2 = T_1$ in $T'_4 = T_2$ na isti premici. To pa pomeni, da nastopi za zaporedje T_k primer (I). Ker smo izčrpali vse možnosti za zaporedje T'_j in se primer (IIb) za prvotno zaporedje pri tem ni pojavil, sklepamo, da primer (IIb) sploh ni mogoč. Tako smo dokazali, da so vse točke T_k prvotnega zaporedja bodisi na premici p bodisi na krožnici $\mathcal{K}$.

Izberimo poljubno naravno število $n \geq 1$ in postavimo

$$T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Za vsak n dobimo zaporedje točk $T_0^{(n)}, T_1^{(n)}, \ldots$ Kakor za zaporedje T_k dokažemo, da ležijo vse točke teh zaporedij bodisi na premici bodisi na krožnici. Ker je $T_{kn}^{(n)} = T(kn \cdot \frac{\tau}{n}) = T(k\tau) = T_k$, je prvotno zaporedje vsebovano v vsakem izmed naših zaporedij. Če so torej vse točke T_k na premici p, velja isto za vse točke $T_j^{(n)}$ pri poljubnem j in poljubnem n. Kadar pa ležijo točke T_k na krožnici $\mathcal{K}$, so tudi vse točke $T_j^{(n)}$ na $\mathcal{K}$.

Naj bo t poljuben čas in se vprašajmo, kje je telo ob času t, se pravi, kje leži točka $T(t)$. Denimo, da so vse točke zaporedja T_k na premici p. Izračunajmo kvocient t/τ. Če je racionalen, npr. enak ulomku j/n, je $t = j\tau/n$, točka $T(t) = T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}$ pa leži, kakor smo pravkar ugotovili, na premici p. Če kvocient t/τ ni racionalno število, izberimo ulomek j/n, ki se zelo malo razlikuje od tega kvocienta. Potem se $j\tau/n$ zelo malo razlikuje od t. Ker telo ne naredi nobenega skoka, je pripadajoča točka $T_j^{(n)}$ zelo blizu točke $T(t)$. Toda točka $T_j^{(n)}$ je na premici p. To pa pomeni, da so na premici p točke, ki so poljubno blizu točke $T(t)$. To je očitno mogoče le tedaj, kadar je tudi $T(t)$ na p. Torej za vsak t, naj bo kvocient t/τ racionalen ali iracionalen, leži $T(t)$ na premici p. Podobno se prepričamo, da so vse točke $T(t)$ na krožnici $\mathcal{K}$, kadar nastopi za zaporedje T_k primer (IIa) in so vse točke T_k na $\mathcal{K}$. Tako smo dokazali trditev

(A) Če se točkasto telo giblje v ravnini tako, da se v enakih časih enako oddalji, je njegov tir premica ali krožnica.

Torej točka ne more potovati po elipsi tako, da bi prišla v enakih časih vedno enako daleč.

— — —

Krožnica je ravninska krivulja, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive. Ali je še kaka druga krivulja s to lastnostjo?

Pa naj bo K ravninska krivulja (K ni premica), pri kateri pripadajo enakim lokom enake tetive. Če se točkasto telo giblje po tej krivulji s konstantno hitrostjo, opiše v enakih časih enako dolge loke, tem lokom pa pripadajo enako dolge tetive. Zato pride telo v enakih časih enako daleč. Po trditvi (A) je tir K krožnica. Torej:

(B) Krožnica je edina krivulja v ravnini, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive.

Trditev (A) – kot nalogo jo je postavil David White z Oklahoma State University v časopisu American Math. Monthly, (1997), Problem 10587 – sodi v diferencialno geometrijo in jo lahko dokažemo tudi z njenimi metodami. Vendar v diferencialni geometriji predpostavljamo, da ima točkasto telo v vsakem trenutku natanko določeno hitrost. V zgornjem dokazu nismo privzeli, da hitrost obstaja, temveč samo to, da telo nikoli ne napravi nobenega skoka.

Tu smo obravnavali gibanje v ravnini. Kako je v prostoru? Vijačnica je prostorska krivulja. Opiše jo točka, ki enakomerno kroži po krožnici, krožnica pa se s konstantno hitrostjo premika v smeri, pravokotni na ravnino krožnice. Ni težko dokazati, da pride telo, ki se giblje s konstantno hitrostjo po vijačnici, v enakih časih enako daleč. To pa je tudi edina prostorska krivulja s to lastnostjo. Velja namreč trditev, ki pa je tu ne bomo dokazovali:

(C) Če se točkasto telo giblje v trirazsežnem prostoru tako, da pride v enakih časih enako daleč, je njegov tir bodisi premica bodisi krožnica bodisi vijačnica.

Ivan Vidav