

INTEGRALI ELEMENTARNIH FUNKCIJ

MARKO SLAPAR

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Ljubljana

Math. Subj. Class. (2000): 12H05

Dobro znano dejstvo je, da za nekatere elementarne funkcije ne obstajajo nedoločeni integrali, ki bi se lahko zopet izražali samo s pomočjo elementarnih funkcij. Primer takega integrala je $\int e^{x^2} dx$. V članku predstavimo, kaj je v ozadju te teorije, in pokažemo nekaj primerov elementarnih funkcij, ki nimajo elementarnih integralov.

INTEGRALS OF ELEMENTARY FUNCTIONS

It is a well known fact that certain integrals of elementary functions cannot be expressed in elementary terms. An example of such an integral is $\int e^{x^2} dx$. In this paper we show what is behind this theory and give some examples of elementary functions that do not have elementary integrals.

1. Uvod

Iz osnovnega izreka integralskega računa vemo, da sta si računanje nedoločenega integrala in računanje odvoda bolj ali manj inverzni operaciji. Čeprav je računanje odvoda elementarne funkcije preprosto, pa to ne velja za računanje nedoločenega integrala. Med drugim je problem v tem, da se nedoločeni integral bolj nerodno obnaša na produktu funkcij. Metoda per partes nam, razen v izjemnih primerih, ne da prav veliko. Zato verjetno vsak, ki se je kdaj mučil z integracijo, sluti, da so elementarne funkcije, ki imajo elementarne nedoločene integrale, morda bolj izjema kot pravilo. V nadaljevanju članka bomo videli, da je ta slutnja seveda upravičena, vendar pa dokaz tega ni tako preprost.

Za začetek si pogledjmo preprost primer integrala racionalne funkcije

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-2x + 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= x + \frac{1}{x} + \log x - \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \log \frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

Pri računanju integrala smo si pomagali z razcepom racionalne funkcije na parcialne ulomke [6, str. 237–239]. Ta metoda integracije racionalnih funkcij se včasih imenuje tudi metoda nedoločenih koeficientov in nam omogoča

integracijo poljubne racionalne funkcije pod pogojem, da znamo imenovalce faktorizirati na nerazcepne faktorje. Ti so bodisi linearni bodisi kvadratni nerazcepni faktorji. V rezultatu integracije bodo v splošnem nastopale racionalne funkcije, logaritmi racionalnih funkcij in funkcije arctg, ki so posledica nerazcepnih kvadratičnih faktorjev. Slednjih se lahko znebimo, če smo pripravljeni v metodo vpeljati kompleksna števila, saj iz razcepa $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ sledi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{i}{2} \int \frac{dx}{x + i} - \frac{i}{2} \int \frac{dx}{x - i}.$$

Integrala na desni strani sta seveda integrala kompleksnih funkcij. S pomočjo kompleksnega logaritma ($\log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z$), ima sedaj rezultat obliko

$$\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 1)} dx = \frac{x^2 + 1}{x} + \log \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{i}{2} \log \frac{x + i}{x - i} + C.$$

V splošnem lahko vsak polinom v kompleksnem razcepimo na same linearne faktorje. Vsako racionalno funkcijo tako lahko razcepimo na parcialne ulomke, ki bodo v imenovalcih imeli samo potence linearnih faktorjev. Tem sumandom lahko poiščemo nedoločene integrale, ki bodo bodisi zopet cele potence linearnih faktorjev ali pa kompleksni logaritmi linearnih faktorjev. Zato imamo izrek

Izrek 1 (Laplace, 1812). *Nedoločeni integral racionalne funkcije je vedno elementarna funkcija. Le-ta je ali racionalna funkcija ali pa vsota racionalne funkcije in logaritmov racionalnih funkcij, pomnoženih s konstantami.*

Nabor funkcij, ki jih dobimo v integralih racionalnih funkcij, se je z vpeljavo kompleksnih števil zmanjšal, poenostavila pa se je tudi sama metoda integracije racionalnih funkcij. Seveda pa je slaba stran, da bodo povsem realne funkcije dobile nedoločene integrale, ki bodo (navidezno) kompleksni, zato smo za zdaj seveda lahko skeptični glede smiselnosti vpeljave kompleksnih števil. Bolj prepričljive razloge bomo videli v nadaljevanju. Izkazalo se bo namreč, da se integrali elementarnih funkcij, če so seveda elementarni, v splošnem izražajo kot vsota funkcij „iste vrste“ in logaritmov le-teh.

Čeprav se kar nekaj tipov nedoločenih integralov lahko s primerno substitucijo prevede na integral racionalne funkcije, pa v splošnem zgodba ni tako preprosta. Medtem ko je odvod elementarne funkcije zopet elementarna funkcija, pa za integral to vsekakor ni res. Tako se na primer integrali

$$\bullet \int e^{-x^2} dx \quad \bullet \int \frac{dx}{\log x} \quad \bullet \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

ne morejo zapisati samo z elementarnimi funkcijami. Naj omenimo, da je prvi integral tesno povezan z distribucijo normalnih spremenljivk v verjetnosti, drugi z distribucijo praštevil, zadnji pa spada med eliptične integrale.

Prav tako je včasih težko oceniti, kdaj je integral funkcije elementaren in kdaj ne. Integrala $\int x^x dx$ in $\int x^x \log x dx$ nista elementarna, medtem ko je $\int (x^x + x^x \log x) dx = x^x + C$ elementaren. Podobno je integral $\int \left(\frac{e^x}{x^n} + \frac{ae^x}{x}\right) dx$ elementaren pri konstanti $a = -\frac{1}{(n-1)!}$ (per partes), drugače pa je neelementaren.

2. Elementarne funkcije

V tem razdelku bomo natančno opisali, kaj si predstavljamo pod pojmom elementarne funkcije. Pod pojmom elementarne funkcije si običajno predstavljamo kakršnekoli funkcije, ki jih dobimo iz funkcije $f(x) = x$ le s pomočjo znanih operacij in funkcij: seštevanja, odštevanja, deljenja, množenja, korenjenja, potenciranja, trigonometričnih funkcij in njihovih inverzov, eksponentne in logaritemske funkcije, ter poljubnih kompozitumov le-teh. Na primer

$$\frac{ex^3 - 7x \log x}{\sqrt[6]{e^{-x} - \sin(x/(x^5 + 6))}}.$$

Nabor funkcij, ki sestavljajo elementarne funkcije, se znatno zmanjša, če pri računanju dovolimo še kompleksna števila. V kompleksnem namreč velja

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{in} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (1)$$

S pomočjo teh formul lahko dobimo na primer

$$\arcsin x = -i \log \left(ix + \sqrt{1 - x^2} \right) \quad \text{in} \quad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

Vse trigonometrične in inverzne trigonometrične funkcije se zato lahko zapisejo le s pomočjo logaritemske in eksponentne funkcije, kar računanje in kasnejše definicije precej olajša.

Spomnimo se, da je funkcija f *analitična* na odprtem intervalu $I \subset \mathbb{R}$, če jo v vsaki točki iz I lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto, ki bo na neki okolici te točke tudi konvergirala proti funkciji. Kompleksna funkcija $f = u + iv$ je analitična, če sta analitična tako njen realni del u kot njen imaginarni del v . Analitičnost se seveda ohranja pri seštevanju, odštevanju, množenju funkcij in tudi pri odvajanju ter integriranju. Kvociient analitičnih funkcij bo analitičen na komplementu ničel funkcije v imenovalcu. Naj bo f kompleksna analitična funkcija na odprtem intervalu I in naj tam nima ničel.

Točka x_0 naj bo poljubna točka na intervalu I . *Logaritem* funkcije f definiramo s predpisom $(\log f)(x) = \int_{x_0}^x f'(t)/f(t) dt$, kjer nam izraz pomeni običajen Riemannov integral. Sprememba referenčne točke x_0 spremeni logaritem funkcije do aditivne konstante, kar pa nas ne bo motilo. Če želimo, lahko konstanto vedno določimo tako, da bo veljalo $e^{\log f} = f$. Funkcija $\log f$ je analitična funkcija, saj je integral analitične funkcije. Analogno bi lahko dejali, da je $\log f$ katerakoli (analitična) funkcija g , za katero velja $f'/f = g'$. Če pa je kdo bolj doma v kompleksni analizi, lahko za $\log f$ vzame tudi katerokoli vejo kompleksne logaritemske funkcije. Za poljubno analitično funkcijo f na intervalu I bomo rekli funkciji e^f *eksponentna funkcija* funkcije f . Le-ta je na I zopet analitična.

Za kompleksno funkcijo h rečemo, da je *meromorfna* na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, če je kvocient dveh funkcij f in g ($g \not\equiv 0$), ki sta obe analitični na I . Prostor meromorfnih funkcij na $I \subset \mathbb{R}$ označimo z $\mathcal{M}(I)$ in je očitno obseg. Obseg $\mathcal{M}(I)$ bo za nas pomenil osnovni razred funkcij, s katerimi bomo računali.

Naj bo F poljuben obseg. Z $F[x]$ označimo kolobar polinomov nad obsegom F v nedoločeni x in z $F(x)$ obseg racionalnih funkcij nad F v eni spremenljivki. Analogno imamo v več spremenljivkah kolobar $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomov v n spremenljivkah in $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obseg racionalnih funkcij v n spremenljivkah. Če je $G \supset F$ razširitev obsega F in $\alpha \in G$, je α *algebraičen* element nad F , če je $p(\alpha) = 0$ za kakšen polinom $p \in F[x]$. V nasprotnem primeru je α *transcendenten* element nad F . Za $\alpha \in G$, transcendenten nad F , nam preslikava $\alpha \mapsto x$ poda izomorfizem tako kolobarjev $F[\alpha]$ in $F[x]$ kot tudi obsegov $F(\alpha)$ in $F(x)$. Več in bolj natančno lahko o razširitvah obsegov najdemo v [5].

Definicija 1. Naj bodo $f_1, f_2, \dots, f_n$ meromorfne funkcije na intervalu I . Potem je $\mathbb{C}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ obseg funkcij oblike

$$h = \frac{p(f_1, f_2, \dots, f_n)}{q(f_1, f_2, \dots, f_n)},$$

kjer sta $p, q \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinoma in $q \neq 0$.

Definicija 2. *Elementaren obseg* funkcij je vsak obseg oblike $\mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$, kjer so $f_1, \dots, f_n$ meromorfne funkcije na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$, in je f_k ali algebraična nad $\mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{k-1})$, ali je logaritem funkcije iz $\mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{k-1})$, ali pa je eksponentna funkcija neke funkcije iz $\mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{k-1})$. Meromorfna funkcija f je *elementarna*, če je vsebovana v kakšnem elementarnem obsegu funkcij.

Čeprav je interval I , na katerem so funkcije meromorfne, formalno del definicije, pa se s tem ne bomo preveč obremenjevali. Princip enoličnosti nam namreč pove, da je meromorfná funkcija natanko določena že, ko poznamo njene vrednosti na katerikoli množici s stekališčem. Za interval lahko tako vzamemo katerikoli interval, na katerem so vse funkcije dobro definirane. V nadaljevanju bomo na interval I zato preprosto pozabili.

Primer 1. Funkcija $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$, je elementarna funkcija, saj je $f \in \mathbb{C}(x, \log x, e^{s \log x})$. Če je $s \in \mathbb{Q}$, je f tudi algebraična nad $\mathbb{C}(x)$, in je zato f že v elementarnem obsegu $\mathbb{C}(x, f)$, če pa je s celo element $\mathbb{Z}$, je f že v $\mathbb{C}(x)$.

Primer 2. Iz formul (1) sledi, da so trigonometrične funkcije $\sin x$, $\cos x$ in $\tan x$ v elementarnem obsegu $\mathbb{C}(x, e^{ix})$, funkcija $\arcsin x$ pa se nahaja v elementarnem obsegu $\mathbb{C}(x, \sqrt{1-x^2}, \log(ix + \sqrt{1-x^2}))$.

Primer 3. Funkcija

$$\frac{\pi x^3 - 7x \ln x}{\sqrt[6]{e^{-x} - \sin(x/(x^5 + 6))}}$$

je v elementarnem obsegu $\mathbb{C}\left(x, \ln x, e^x, e^{i \frac{x}{x^5+6}}, \sqrt[6]{e^{-x} - \sin(x/(x^5 + 6))}\right)$.

Pomembna lastnost obsegov elementarnih funkcij je, da so zaprti za odvajanje.

Izrek 2. Naj bo funkcija f v elementarnem obsegu K . Potem je $f' \in K$.

Dokaz. Naj bo $K = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$. Izrek bomo dokazali z indukcijo po n . Če je $n = 0$, je $K = \mathbb{C}(x)$. Ker je odvod racionalne funkcije racionalna funkcija, je K zaprt za odvajanje. Predpostavimo torej, da je $L = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{n-1})$ zaprt za odvajanje in je $K = L(f_n)$, pri čemer je f_n ali logaritem, ali eksponent funkcije iz L , ali pa algebraičen nad L . Dovolj je, če pokažemo, da je $f'_n \in K$. Če je $f_n = e^g$, $g \in L$, potem je $f'_n = g'e^g$, in ker je $g' \in L$ po predpostavki, je $f'_n \in K$. Podobno naj bo $f_n = \log g$ in $f'_n = g'/g \in L \subset K$. Naj bo sedaj f_n algebraičen nad L . Predpostavimo, da je $p(f_n) = 0$ za polinom $p(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$, kjer je stopnja polinoma p najmanjša možna. Zato velja $q(f_n) \neq 0$ za polinom $q(t) = mt^{m-1} + a_{m-1}(m-1)t^{m-2} + \dots + a_1$. Po drugi strani pa velja

$$0 = (p(f_n))' = q(f_n)f'_n + a'_{m-1}f_n^{m-1} + a'_{m-2}f_n^{m-2} + \dots + a'_0.$$

Torej je

$$f'_n = -\frac{a'_{m-1}f_n^{m-1} + a'_{m-2}f_n^{m-2} + \dots + a'_0}{q(f_n)}.$$

Ker so odvodi $a'_k \in L$ po indukcijski predpostavki, je desna stran v K . S tem je dokaz končan. ■

3. Liouvillov izrek

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je odvod vsake elementarne funkcije prav tako elementarna funkcija. Še več, izrek, ki smo ga pokazali zgoraj, nam pove, da odvod ni nič bolj kompliciran kot sama funkcija, v smislu, da se nahaja v istem elementarnem obsegu. Kot bomo videli, za integral ne velja enako. Integral elementarne funkcije je pogosto neelementaren. Če pa je integral elementarne funkcije elementaren, lahko precej natančno povemo, kakšno obliko bo imel. To je vsebina Liouvillovega izreka iz leta 1835, ki je osnova tako za algoritmčno računanje nedoločenih integralov [2] kot tudi za dokazovanje, da določena elementarna funkcija nima elementarnega integrala. Izreka tukaj ne bomo pokazali, za dokaz pa se bralec lahko obrne na [3].

Izrek 3 (Liouville, 1835). *Naj bo $f \in K = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$. Potem ima f elementaren integral natanko takrat, ko velja*

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \frac{g'_k}{g_k} + h',$$

kjer so $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ in $g_1, \dots, g_m, h \in K$. Takrat velja

$$\int f(x) dx = \sum_{k=1}^m a_k \log g_k + h.$$

Naj bo K kot v formulaciji izreka in označimo s

$$K_0 = \{f \in K; f = \sum_{k=1}^m a_k \frac{g'_k}{g_k} + h', \text{ kjer so } g_1, \dots, g_m, h \in K, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}\}.$$

Liouvillov izrek nam pove, da ima elementarna funkcija f , ki se nahaja v elementarnem obsegu K , elementaren integral natanko tedaj, ko se nahaja v podmnožici K_0 . Ker za dva elementarna obsega $L \subset K$ seveda velja $L_0 \subset K_0$, je vseeno, kateri elementarni obseg izberemo za preverjanje elementarnosti integrala funkcije f . Vsekakor pa je bolje vzeti čim „manjši“ obseg, saj bo tako preverjanje lažje. V primeru, ko je $K = \mathbb{C}(x)$ obseg racionalnih funkcij, nam Laplaceov izrek pove, da je $K_0 = K$, in ima tako vsaka racionalna funkcija elementaren integral. Prav tako je $K = K_0$ za elementarne obsege tipa $\mathbb{C}(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$ ali $\mathbb{C}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, saj znamo integrale funkcij iz teh obsegov s primernimi substitucijami prevesti na integrale racionalnih funkcij. V splošnem pa bomo videli, da $K \setminus K_0 \neq \emptyset$, in s tem pokazali obstoj elementarnih funkcij, ki nimajo elementarnih integralov. Prva taka preprosta elementarna obsega sta $\mathbb{C}(x, e^g)$ in $\mathbb{C}(x, \log g)$, kjer je g poljubna nekonstantna racionalna funkcija.

Opomba 1. Ko integriramo povsem realno funkcijo, običajno želimo tudi končni rezultat predstaviti samo z realnimi funkcijami. To seveda lahko vedno storimo s pomočjo primernih formul, ki nam bodo kompleksne funkcije zamenjale z realnimi. Vendar pa je pri Liouvillovem izreku ključno, da razširimo razred funkcij na kompleksne. Primer je $\int (1/(1+x^2)) dx = \operatorname{arctg} x$, ki ga ne moremo zapisati kot vsoto realne racionalne funkcije in z realnimi konstantami pomnoženih logaritmov realnih racionalnih funkcij. To dejstvo sicer ni povsem očitno in je lepa vaja.

4. Elementarna obsega $\mathbb{C}(x, e^g)$ in $\mathbb{C}(x, \log g)$

Lema 4. Če je g racionalna funkcija, ki ni konstanta, je $e^{g(x)}$ transcendentna nad $\mathbb{C}(x)$.

Dokaz. Predpostavimo, da je e^g algebraična nad $\mathbb{C}(x)$. Potem obstaja monični polinom $p \in \mathbb{C}(x)[y]$ minimalne stopnje n , da velja

$$p(e^g) = e^{ng} + a_{n-1}e^{(n-1)g} + \dots + a_0 = 0.$$

Odvajamo zgornjo enakost in dobimo novo polinomsko enačbo

$$q(e^g) = ng'e^{ng} + (a'_{n-1} + (n-1)g'a_{n-1})e^{(n-1)g} + \dots + a'_0 = 0.$$

Ker je bil polinom p minimalen, mora p deliti polinom q . Posebej mora veljati $a'_0 = ng'a_0$ oziroma

$$\frac{a'_0}{a_0} = ng'.$$

Če enačbo integriramo, dobimo $\log a_0 = ng + C$ oziroma $a_0 = De^{ng}$, kjer sta C in D kompleksni konstanti. Funkcija e^g , razumljena kot funkcija, definirana na kompleksnih številih, ima v polih racionalne funkcije g bistveno singularnost. Če je g polinom, pa ima bistveno singularnost v neskončnosti. Ker pa ima vsaka racionalna funkcija v singularnostih kvečjemu pol, dobimo protislovje. ■

Opomba 2. Zelo podobno vidimo, da je $\log g$ transcendenten nad $\mathbb{C}(x)$, če je g nekonstantna racionalna funkcija. V tem primeru zopet vzamemo monični polinom $p \in \mathbb{C}(x)[y]$ minimalne stopnje, za katerega naj bi veljalo

$$p(\log g) = (\log g)^n + a_{n-1}(\log g)^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Če to enakost odvajamo, dobimo polinomsko enačbo

$$q(\log g) = (a'_{n-1} + n(g'/g))(\log g)^{n-1} + \dots + (a'_0 + a_1(g'/g)) = 0.$$

Ker je stopnja q manjša kot stopnja p in je bil p po predpostavki minimalne stopnje, mora biti $q = 0$. Posebej mora zato veljati $a'_{n-1} = -ng'/g$ oziroma $e^{a_{n-1}} = D/g^n$. Če a_{n-1} ni konstanten, je $e^{a_{n-1}}$ transcendenten nad $\mathbb{C}(x)$ po lemi 4 in pridemo v protislovje, če pa je a_{n-1} konstanten, je tak tudi g , kar pa smo izključili.

Lema 5. *Naj bo $g \in \mathbb{C}(x)$ nekonstantna racionalna funkcija in $p \in \mathbb{C}(x)[e^g]$ poljuben polinom pozitivne stopnje n s koeficienti v $\mathbb{C}(x)$. Potem je $(p(e^g))'$ zopet polinom stopnje n v $\mathbb{C}(x)[e^g]$ in $p(e^g)$ deli $(p(e^g))'$ v $\mathbb{C}(x)[e^g]$ natanko tedaj, ko je p monom.*

Opomba 3. Preden dokažemo lemo, pokomentirajmo izraz $(p(e^g))'$. Kot smo že omenili, iz transcendentnosti e^g nad $\mathbb{C}(x)$ sledi, da sta kolobarja $\mathbb{C}(x)[e^g]$ in $\mathbb{C}(x)[y]$ izomorfna, in sicer s kanoničnim izomorfizmom, ki preslika e^g v nedoločeno y . Če je $p \in \mathbb{C}(x)[e^g]$ polinom $p(e^g) = a_n e^{ng} + a_{n-1} e^{(n-1)g} + \dots + a_0$, kjer so $a_j \in \mathbb{C}(x)$, izraz $(p(e^g))'$ ne pomeni nič drugega kot odvajanje funkcije $p(e^{g(x)})$ po spremenljivki x . Ker je prostor $\mathbb{C}(x)[e^g]$ zaprt za odvajanje, saj je $(p(e^g))' = (a'_n + na_n g') e^{ng} + (a'_{n-1} + (n-1)a_{n-1} g') e^{(n-1)g} + \dots + a'_0 \in \mathbb{C}(x)[e^g]$, je vprašanje, ali $p(e^g)$ deli $(p(e^g))'$, smiselno. Če s pomočjo izomorfizma $e^g \mapsto y$ razumemo polinom p kot polinom v $\mathbb{C}(x)[y]$, se ta odvod prenese na operator $\partial: \mathbb{C}(x)[y] \rightarrow \mathbb{C}(x)[y]$, podan z $\partial p = (a'_n + na_n g') y^n + (a'_{n-1} + (n-1)a_{n-1} g') y^{n-1} + \dots + a'_0$. Operator ∂ seveda zadošča Leibnizovemu pravilu $\partial(pq) = p\partial q + q\partial p$. V povsem algebraičnem jeziku nam zgornja lema pove, da $p \in \mathbb{C}(x)[y]$ deli ∂p v $\mathbb{C}(x)[y]$ natanko tedaj, ko je $p = ay^n$ za neki $a \in \mathbb{C}(x)$.

Dokaz. Če je p monom, je dokaz preprost. Naj bo $f_n \in \mathbb{C}(x)$ vodilni koeficient polinoma p . Velja

$$(f_n e^{ng})' = (f'_n + n f_n g') e^{ng}.$$

Seveda je $f'_n + n f_n g' \in \mathbb{C}(x)$ neničeln, saj bi bila drugače funkcija $f_n e^{ng}$ konstantna. Pokažimo sedaj, da $p(e^g)$ ne more deliti $(p(e^g))'$, če ima p pozitivno stopnjo in ni monom. Naj bosta $f_n e^{ng}$ in $f_m e^{mg}$ dva različna neničelna sumanda v $p(e^g)$. Ker je e^g transcendenten nad $\mathbb{C}(x)$, je $\mathbb{C}(x)[e^g]$ izomorfen $\mathbb{C}(x)[y]$, kjer je y nedoločenska. Zato je deljivost v $\mathbb{C}(x)[e^g]$ povsem enaka deljivosti v $\mathbb{C}(x)[y]$ in mora po zgornjem izračunu veljati

$$\frac{f'_n + n f_n g'}{f_n} = \frac{f'_m + m f_m g'}{f_m}$$

oziroma

$$\left(\frac{f_n e^{ng}}{f_m e^{mg}} \right)' = 0.$$

Ta enakost narekuje obstoj konstante C , da velja $(f_n/f_m) = Ce^{(m-n)g}$. Ker je funkcija $e^{(m-n)g}$ transcendentna nad $\mathbb{C}(x)$, to ni mogoče. ■

Izrek 6 (Liouville, 1835). *Naj bosta $f, g \in \mathbb{C}(x)$ in g ni konstantna. Funkcija fe^g ima elementaren integral natanko tedaj, ko obstaja racionalna funkcija R , da velja*

$$f = R' + Rg'.$$

Preden se spustimo v dokaz izreka, na dveh primerih pogledjmo njegovo uporabo.

Primer 4. Pokažimo, da funkcija e^{x^2} nima elementarnega integrala. Seveda od tod sledi, da Gaussoy integral iz uvoda prav tako ni elementaren. Po izreku 6 ima funkcija e^{x^2} elementaren integral natanko tedaj, ko obstaja taka racionalna funkcija R , da velja

$$1 = R' + 2xR.$$

Takoj lahko opazimo, da R ne more biti polinom, ker bi potem desna stran enakosti morala biti polinom stopnje vsaj 1. Torej ima R vsaj en pol na kompleksni ravnini, denimo v točki a . Naj bo stopnja pola v točki a enaka k . Lokalno okoli točke a lahko R zapišemo kot

$$R(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^k},$$

kjer je ϕ holomorfná in neničelna v okolici točke a . Za spremembo imena spremenljivke iz x v z smo se odločili samo zaradi poudarka, da R sedaj razumemo kot holomorfno funkcijo. Odvod je tedaj v okolici a oblike

$$R'(z) = \frac{(z-a)\phi'(z) - k\phi(z)}{(z-a)^{k+1}} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^{k+1}},$$

kjer je ψ holomorfná in neničelna v okolici a . Tako ima

$$R'(z) + 2zR(z) = \frac{\psi(z) + 2z(z-a)\phi(z)}{(z-a)^{k+1}}$$

v točki a zopet pol stopnje natanko $k+1$ in ne more biti konstanta.

Primer 5. Integral $\int \frac{dx}{\log x}$ lahko s substitucijo $\log x = u$ prevedemo v integral

$$\int \frac{e^u}{u} du.$$

Pokažimo, da ta integral ne more biti elementaren. Če bi bil, bi morala obstajati racionalna funkcija R , za katero bi veljalo

$$\frac{1}{u} = R' + R. \quad (2)$$

R očitno ne more biti polinom, zato ima R pol v vsaj eni točki $a \in \mathbb{C}$, ki naj bo pozitivne stopnje k . Desna stran (2) ima tedaj v a pol stopnje $k+1 \geq 2$. Ker ima leva stran pol samo v točki 0, ki pa je stopnje 1, (2) ne more biti izpolnjena. Z večkratno uporabo formule per partes lahko pokažemo, da je integral

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx$$

prav tako neelementaren za vsako naravno število n .

Dokaz (izreka 6). Pogoje je vsekakor zadosten, saj je v primeru, ko je $f = R' + Rg'$, funkcija Re^g integral fe^g . Poglejmo, da je pogoj tudi potreben. Funkcija $F(x) = f(x)e^{g(x)}$ je elementarna in se nahaja v elementarnem obsegu $\mathbb{C}(x, e^{g(x)})$. Po izreku 3 ima F elementaren integral natanko tedaj, ko jo lahko zapišemo kot

$$F(x) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{(r_j(x, e^{g(x)}))'}{r_j(x, e^{g(x)})} + \left(r(x, e^{g(x)}) \right)',$$

kjer so $r_1, \dots, r_n, r \in \mathbb{C}(x, y)$ racionalne funkcije v dveh spremenljivkah in $a_1, \dots, a_n$ kompleksne konstante. Seveda lahko vsako racionalno funkcijo r_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ zapišemo kot $r_j = p_j/q_j$, kjer sta $p_j, q_j \in \mathbb{C}(x)[y]$. Enako lahko zapišemo $r = p/q$, $p, q \in \mathbb{C}(x)[y]$ in predpostavimo, da sta si p in q tuja v $\mathbb{C}(x)[y]$, kar pomeni, da ne obstaja polinom v $\mathbb{C}(x)[y]$ pozitivne stopnje, ki bi delil tako p kot q . Zgornja enačba tako dobi obliko

$$\begin{aligned} f(x)e^{g(x)} = & \sum_{j=1}^n a_j \frac{(p_j(x, e^{g(x)}))'}{p_j(x, e^{g(x)})} - \sum_{j=1}^n a_j \frac{(q_j(x, e^{g(x)}))'}{q_j(x, e^{g(x)})} + \\ & + \frac{(p(x, e^{g(x)}))' q(x, e^{g(x)}) - p(x, e^{g(x)}) (q(x, e^{g(x)}))'}{(q(x, e^{g(x)}))^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vsak p_j lahko v $\mathbb{C}(x)[y]$ razcepimo na produkt $p_j = p_{j,1} \cdots p_{j,k}$, kjer so $p_{j,1}, \dots, p_{j,k}$ bodisi nerazcepni monični polinomi (vodilni koeficient je 1) v $\mathbb{C}(x)[y]$ ali pa so elementi $\mathbb{C}(x)$. Podobno lahko razcepimo tudi polinome q_j .

Z uporabo enakosti $\frac{(st)'}{st} = \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t}$ postane izraz (3) še preprostejši, in sicer

$$f(x)e^{g(x)} = \sum_{j=1}^m a_j \frac{(p_j(x, e^{g(x)}))'}{p_j(x, e^{g(x)})} + \frac{(p(x, e^{g(x)}))' q(x, e^{g(x)}) - p(x, e^{g(x)}) (q(x, e^{g(x)}))'}{(q(x, e^{g(x)}))^2}, \quad (4)$$

pri čemer so p_j vsi bodisi monični nerazcepni polinomi iz $\mathbb{C}(x)[y]$ bodisi elementi $\mathbb{C}(x)$. Predpostavimo lahko tudi, da so vsi p_j različni med seboj, saj v primeru ponavljanja ustrezne člene seštejemo.

Ker je po lemi 4 e^g transcendenten nad $\mathbb{C}(x)$, je preslikava, podana z $e^g \mapsto y$, izomorfizem tako med obsegoma $\mathbb{C}(x, y)$ in $\mathbb{C}(x, e^g)$ kot tudi kolobarjema $\mathbb{C}(x)[y]$ in $\mathbb{C}(x)[e^g]$. Zato je izraz (4) ekvivalenten enačbi

$$f(x)y = \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial p_j}{p_j} + \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2} \quad (5)$$

v obsegu $\mathbb{C}(x, y)$. Operator $\partial: \mathbb{C}(x)[y] \rightarrow \mathbb{C}(x)[y]$ je definiran v opombi 3.

Leva stran enačbe (5) je element $\mathbb{C}(x)[y]$, medtem ko je desna stran v splošnem racionalna funkcija v dveh spremenljivkah. Poskrbeti moramo torej, da se vsi nerazcepni polinomi na desni strani krajšajo iz imenovalca. Naj bo p_k eden od nerazcepnih moničnih polinomov v (5). Po lemi 5 p_k ne more deliti ∂p_k , razen če je $p_k = y$ (potenca pri y je nujno 1, saj so faktorji nerazcepni). Predpostavimo sedaj, da p_k ni enak y . Ker so vsi p_j med seboj različni in so vsi nerazcepni, se p_k ne more pokrajšati iz imenovalca v (5) znotraj izraza $\sum_j^m a_j \partial p_j / p_j$. Da se bo pokrajšal s pomočjo izraza $(q\partial p - p\partial q)/q^2$, mora nastopiti kot nerazcepni faktor v razcepu polinoma q . Naj bo q_1 neki nerazcepen monični polinom iz $\mathbb{C}(x)[y]$, ki nastopa v razcepu polinoma q in ni enak y . Torej je $q = \tilde{q}q_1^l$ za neko pozitivno naravno potenco l in q_1 ne deli $\tilde{q}$. Dobimo

$$\frac{q\partial p - p\partial q}{q^2} = \frac{\partial p}{\tilde{q}q_1^l} - p \frac{\partial \tilde{q}}{\tilde{q}^2 q_1^l} - lp \frac{\partial q_1}{\tilde{q}q_1^{l+1}}.$$

Zopet uporabimo lemo 5 in ugotovimo, da je stopnja q_1 v imenovalcu $(q\partial p - p\partial q)/q^2$ nujno enaka $l+1 > 1$. Ker pa je stopnja p_k v imenovalcu $\sum_j^m a_j \partial p_j / p_j$ enaka 1, se ne more pokrajšati. Prav tako vidimo, da polinom q ne more imeti v razcepu nerazcepnih faktorjev različnih od y , saj bi tudi ti prispevali v imenovalcu izraza (5).

Če povzamemo zgornje, dobimo, da lahko samo eden izmed p_j vsebuje tudi spremenljivko y in je enak y , preostali pa morajo biti elementi $\mathbb{C}(x)$. Prav tako mora biti q enak y^l za neki $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato mora biti izraz (5) oblike

$$f(x)y = \sum_j a_j \frac{\partial p_j}{p_j} + a \frac{\partial y}{y} + \frac{y^l \partial p - p \partial y^l}{y^{2l}}, \quad (6)$$

kjer so $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}(x)$, $p \in \mathbb{C}(x)[y]$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $a, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. Ko nadalje polinom p razpišemo po potencah y , dobimo obliko

$$f(x)y = S(x) + ag'(x) + \sum_j (R'_j(x) + g'(x)jR_j(x))y^j,$$

kjer indeks j teče po neki končni množici celih števil in so $R_j \in \mathbb{C}(x)$. S $S \in \mathbb{C}(x)$ smo označili vsoto $\sum_j a_j p'_j / p_j$. Seveda se morata izraza na levi in desni ujemati pri vsaki potenci y . Konkretno pri $j = 1$ dobimo

$$f(x) = R'_1 + g'R_1.$$

S tem je dokaz končan. ■

Primer 6. Z majhno modifikacijo zgornjega dokaza lahko obravnavamo tudi integral funkcije $\sin x/x$. Ker velja

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx = \frac{1}{2i} \int \frac{e^u - e^{-u}}{u} du,$$

bo integral elementaren natanko tedaj, ko bo elementaren integral funkcije $F(x) = (e^x - e^{-x})/x \in \mathbb{C}(x, e^x)$. Od tu naprej ravnamo povsem enako kot v dokazu izreka 6. Hitro se lahko prepričamo, da so vse manipulacije v dokazu 6 do formule (5) pravzaprav samo posledica dejstev, da operiramo znotraj obsega $\mathbb{C}(x, y) \cong \mathbb{C}(x, e^y)$ in da izraz $f(x)y \in \mathbb{C}(x, y)$ v imenovalcu nima nerazcepnih polinomov iz $\mathbb{C}(x)[y]$, različnih od y . Tako je tudi v našem primeru z $g(x) = x$ in $y = e^x$. Integral $F(x)$ bo zato elementaren natanko tedaj, ko bomo lahko zapisali

$$\frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^{-1} = \sum_j a_j \frac{\partial p_j}{p_j} + a \frac{\partial y}{y} + \frac{y^l \partial p - p \partial y^l}{y^{2l}},$$

kjer so $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}(x)$, $p \in \mathbb{C}(x)[y]$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $a, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ oziroma

$$\frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^{-1} = S(x) + a + \sum_j (R'_j(x) + jR_j(x))y^j,$$

kjer indeks j teče po neki končni množici celih števil in so $R_j \in \mathbb{C}(x)$ in $S = \sum_j^m a_j p_j' / p_j$. Posebej mora veljati $R_1' + R_1 = 1/x$. Podobno, kot smo videli v zgornjih dveh primerih, bo imela pri vsaki racionalni funkciji R_1 , ki ni polinom, vsota $R_1' + R_1$ pol stopnje več kot 1 v vsaj eni točki, kar pa ne velja za $1/x$. Ker seveda R_1 ne more biti polinom, dobimo protislovje.

Zelo podobno, kot smo zgradili teorijo za funkcije oblike e^g , bi lahko poiskali kriterij za elementarnost integralov funkcij oblike $f \log g$, kjer sta f in g racionalni funkciji:

Izrek 7. *Naj bosta $f, g \in \mathbb{C}(x)$ in g ni konstantna. Funkcija $f \log g$ ima elementaren integral natanko tedaj, ko obstajata racionalna funkcija R in kompleksna konstanta C , da velja*

$$f = R' + \frac{Cg'}{g}.$$

Pokažimo samo, da je pogoj zadosten

$$\int f \log g \, dx = \int \left(R' + C \frac{g'}{g} \right) \log g \, dx = \frac{C}{2} (\log g)^2 + R \log g - \int R \frac{g'}{g} \, dx.$$

Zadnji integral je integral racionalne funkcije in zato elementaren po Laplaceovem izreku.

Primer 7. Za vsak kompleksen $a \neq 0$ je integral

$$\int \frac{\log x}{x - a} \, dx$$

neelementaren, saj bi moral biti R , ki zadošča pogoju iz izreka, oblike $R(x) = \log(x - a) - C \log x + D$ za neki konstanti $C, D \in \mathbb{C}$. Funkcija take oblike pa ni racionalna funkcija. To lahko vidimo na različne načine. Med drugim opazimo, da mora imeti $R(x)$ v a singularnost, vendar pa mora biti $R(x) |x - a|^{1/2}$ omejena v okolici točke a .

LITERATURA

- [1] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, preprint.
- [2] R. H. Risch, *The problem of integration in finite terms*, Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1970), str. 605–608.
- [3] M. Rosenlicht, *Integration in finite terms*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), str. 963–972.
- [4] E. A. Marchisotto in G. Zakeri, *An invitation to Integration in Finite Terms*, College Math. J. **25** (1994) 4, str. 295–308.
- [5] I. Vidav, *Algebra*, Matematika – fizika 4, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.
- [6] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika – fizika 6, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1987.