191,60

Lehrbuch

der

Algebra

für die

Ober-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Močnik,

k. k. Schulrath

Fünfte vermehrte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1857.

Lehrbuch

der

Algebra

für die

Ober-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Močnik,

k. k. Schulrath.

Fünfte vermehrte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1857.

Vorrede

zur

ersten Auflage.

Damit die Mathematik zu einem wahrhaft bildenden Elemente unter den Unterrichtszweigen des Obergymnasiums werde, müssen nicht nur die Lehren derselben mit wissenschaftlicher Strenge behandelt, sondern auch die klar erfaßten Sätze an Beispielen durchgeübt und auf zweckmäßig gewählte Aufgaben angewendet werden. Nur eine logische, lichtvolle Anordnung, strenge Beweisführung und unausgesetzte Einübung und Anwendung des Bewiesenen sind geeignet, die mathematischen Wahrheiten zu einem lebendigen und bleibenden Eigenthume des Schülers zu machen, und den jugendlichen Geist zu selbstthätiger Forschung anzuregen und zu befähigen.

Dieß sind die Grundsätze, von denen ich bei der Bearbeitung des vorliegenden Lehrbuchs der Algebra geleitet wurde.

Was erstens die Anordnung des Lehrstoffes anbelangt, so ist dieselbe in dem ersten Theile, welcher von den arithmetischen Operazionen handelt, durch die Natur des Gegenstandes selbst gegeben. Insoferne die zusammensetzenden Rechnungsarten als Addizion, Multiplikazion und Potenzerhebung, und ihre Gegensätze, die auflösenden Operazionen als Subtrakzion, Division, Wurzelausziehung und Logarithmenbestimmung auftreten, so sind hiedurch die Gruppen bezeichnet, in welchen alle den arithmetischen Kalkül betreffenden Lehren einzureihen sind. Die Lehre von den Brüchen, so wie jene über die Verhältnisse und Proporzionen als selbstständige Theile aufzuführen, wie dieses in vielen Lehrbüchern der Algebra geschieht, erscheint nicht nothwendig; vielmehr wird den Anforderungen einer logischen Anordnung besser entsprochen, wenn man dieselben als Folgelehren der Division darstellt, da diese in der Anwendung als Theilung oder Vergleichung auftritt, und in der ersteren Beziehung zur Entstehung der Brüche, in der letzteren zur Betrachtung der Verhältnisse Anlaß gibt. Daß die Theorie der Gleichungen jener der Reihen vorangehe, ist ebenfalls eine Forderung des wissenschaftlichen Zusammenhanges. Nicht so entschieden ist die Stellung, welche man der Kombinazionslehre unter den übrigen Theilen der Algebra anzuweisen hat; sie müßte jedenfalls der Theorie der Gleichungen vorangeschickt werden, wenn in dieser die allgemeinen Gesetze der höhern Gleichungen darzustellen wären; insofern man sich aber darin auf die linearen und quadratischen Gleichungen beschränkt, kann die Kombinazionslehre, unbeschadet der systematischen Ordnung, füglich den Schlußstein des algebraischen Unterrichtes bilden. In diesen letzten Abschnitt wurden, um einem von mehreren Professoren der Mathematik geäußerten Wunsche zu entsprechen, auch die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgenommen.

Bezüglich der Begründung der Lehrsätze war ich bemüht, die Beweise so einfach als möglich darzustellen, ohne dadurch der wissenschaftlichen Strenge zu vergeben.

Auch enthält das Werk eine reichhaltige Sammlung von Beispielen und Aufgaben, deren Durchführung theils vollständig angegeben, theils dem eigenen Fleiße des Schülers überlassen wird.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, noch eine Bemerkung beizusetzen. Sollten dieses und meine übrigen Lehrbücher zur Hebung des mathematischen Unterrichtes auf unseren Gymnasien förderlich beitragen, so gebührt das Verdienst meinem hochverehrten Lehrer in der Mathematik, dem leider zu früh hingeschiedenen Professor Dr. L. C. Schulz von Straßnitzki, unter dessen liebevoller und aufmunternder Leitung ich das Glück hatte, in das mathematische Studium eingeführt zu werden, und dessen Werke es vorzüglich sind, die ich bei der Bearbeitung meiner Lehrbücher benützt habe.

Olmütz, im Jänner 1850.

Der Verfasser.

Vorwort

zur

fünften Auflage.

Die vorliegende mit der vierten gleichlautende Auflage unterscheidet sich von den früheren nur durch einige geringere Verbesserungen und durch die Aufnahme einer größeren Anzahl von Uebungsaufgaben. Bedeutendere Veränderungen sind nur in der Rechnung mit imaginären Größen und in der Lehre von den unbestimmten Gleichungen vorgenommen worden.

Möge das Werk auch in dieser neuen Auflage dieselbe nachsichtsvolle Aufnahme finden, die ihm bisher in so freundlicher Weise zu Theil wurde.

Laibach, im Dezember 1856.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Gleichungen.

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Progressionen.

Vierter Abschnitt.

Die Kombinazionslehre.

Einleitung.

Allgemeine Begriffe.

§. 1.

Jeder Gegenstand, der aus Theilen zusammengesetzt ist, oder aus solchen zusammengesetzt gedacht werden kann, heißt eine *Größe*.

Die Menge der in einer Größe vorhandenen gleichartigen Theile bestimmen, heißt diese Größe *messen*. Um eine solche Bestimmung auszuführen, nimmt man irgend eine Größe derselben Art als Maß, als *Einheit* an, und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Größe in der gegebenen enthalten ist; der Ausdruck, welcher dieses angibt, wird eine *Zahl* genannt. Eine Zahl ist demnach nichts anderes, als das Verhältniß einer Größe zu ihrer Einheit.

Dieses Verhältniß ist vollkommen genau bestimmt, wenn man findet, daß die gemessene Größe entweder die ganze Einheit oder einen bestimmten Theil derselben ein oder mehrere Male in sich enthält; die Zahl selbst heißt im ersten Falle eine *ganze*, im zweiten eine *gebrochene* Zahl oder ein *Bruch*.

Jede ganze und gebrochene Zahl drückt also ein genau angebbares Verhältniß zur Einheit aus, und wird darum eine *razionale* Zahl genannt, zum Unterschiede von einer *irrazionalen*, deren Verhältniß zur Einheit sich nur näherungsweise angeben läßt.

Sowohl die razionalen als die irrazionalen Zahlen heißen wirkliche, *reelle* Größen, weil sich ihr Verhältniß zur Einheit wirklich angeben läßt, und zwar entweder ganz genau, oder doch wenigstens auf eine angenäherte Weise. immaginäre Größen oder

§. 2.

Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten vorstellen, heißen *besondere* Zahlen. Sie müssen auch durch besondere Zeichen, *Ziffern*, ausgedrückt werden, unter denen sich jeder dieselbe bestimmte Menge von Einheiten denkt. Z. B. Vier ist eine besondere Zahl, und wird durch das Zeichen 4 dargestellt, unter welchem Jedermann nicht mehr und nicht weniger als vier Einheiten verstehet.

Da unendlich viele besondere Zahlen denkbar sind, so ist es nicht möglich, für jede derselben einen eigenen Namen und ein eigenes Zeichen aufzustellen; man ist also genöthiget, größere Zahlen nach einem festgestellten Gesetze in kleinere zu zerlegen, welche man besonders benennt und bezeichnet, um durch Zusammenfassung dieser kleinern Zahlen jedes größere Ganze darzustellen. Die Art und Weise, mit einigen wenigen Namen und Zeichen durch gehörige Zusammenstellung jede beliebige Zahl auszudrücken, heißt ein Zahlensystem. Decadisches –

Bei jedem Zahlensysteme wählt man sich unter den in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen eine als die größte, die man noch unmittelbar auffassen will, und gibt ihr, so wie den vorangehenden kleinern Zahlen, eigenthümliche Namen. Jene größte Zahl wird die Grundzahl des Zahlensystems genannt. Nun macht man es sich zur unbedingten Regel, sobald beim Zählen der Einheiten die Menge derselben so groß wird, als die Grundzahl, diese Menge als eine neue Einheit einer nächsthöhern Art zu denken, und durch einen besondern Namen auszudrücken. Man hat auf diese Art bei einem Zahlensysteme zuerst einfache oder ursprüngliche Einheiten; sodann Einheiten der ersten Ordnung, deren jede so viele ursprüngliche Einheiten enthält, als die Grundzahl anzeigt; Einheiten der zweiten Ordnung, deren jede die nämliche Menge Einheiten der ersten Ordnung in sich begreift; und so kann man zu Einheiten willkürlich hoher Ordnungen hinaufsteigen. Jede Zahl läßt sich sodann als aus mehreren Theilen bestehend denken, deren jeder eine bestimmte Anzahl Einheiten von einer gewissen Ordnung enthält, welche Anzahl übrigens stets kleiner, als die Grundzahl ist.

Das einfachste und allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Grundzahl zehn ist.

Bei diesem gibt man den zehn ersten Zahlen besondere Namen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten betrachtet man als eine Einheit der ersten Ordnung, und nennt sie einen Zehner. Zehn Zehner heißen ein Hundert, und bilden eine Einheit der zweiten Ordnung. Zehn Hunderte nennt man ein Tausend, welches die Einheit der dritten Ordnung ist. Die folgenden Ordnungen von Einheiten heißen Zehntausende, Hunderttausende, Millionen u. s. w.

Jede Zahl ist nun aus Einheiten, Zehnern, Hunderten, . . . zusammengesetzt; sie wird daher vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einheiten, Zehner, Hunderte,... sie enthält. Die Anzahl von Einheiten irgend einer Ordnung kann nicht größer, als neun sein, da zehn Einheiten einer Ordnung schon eine Einheit der nächst höheren Ordnung geben; um also die Anzahl Einheiten einer jeden Ordnung anzugeben, sind die Namen der ersten neun Zahlen hinreichend. Verbindet man diese neun Namen mit den Benennungen der auf einander folgenden Ordnungen, so kann dadurch jede beliebig große Zahl mit Worten ausgedrückt werden.

Um die Zahlen schriftlich darzustellen, genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu denen noch die Nulle 0 kommt, um das Nichtvorhandensein von Einheiten einer gewissen Ordnung anzuzeigen. Die Anzahl Einheiten irgend einer

Ordnung läßt sich, da sie nicht größer sein kann, als neun, durch die angeführten zehn Zeichen ausdrücken. Man braucht nur noch sichtbar darzustellen, daß eine Ziffer Einheiten, oder Zehner, Hunderte,.... bedeutet. Dieses geschieht durch die Aufeinanderfolge, in welcher die Ziffern hingeschrieben werden; man nimmt an, daß jede Ziffer, wenn man von der Rechten gegen die Linke fortschreitet, an der ersten Stelle Einheiten, an der zweiten Zehner, an der dritten Hunderte, . . . überhaupt an jeder folgenden Stelle gegen die Linke die nächsthöhere Ordnung von Einheiten, also zehnmal so viel bedeutet, als an der nächstvorhergehenden Stelle.

§. 3.

Zahlen, welche keine bestimmte, sondern jede beliebige Menge von Einheiten vorstellen können, nennt man allgemeine Zahlen; sie werden auch nur durch allgemeine Zeichen, gewöhnlich durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes bezeichnet. So kann die allgemeine Zahl a jede beliebige Menge von Einheiten vorstellen; dabei ist jedoch zu merken, daß in einer und derselben Aufgabe derselbe Buchstabe auch nur eine und dieselbe Zahl bedeuten könne. Unter a kann man sich im Allgemeinen 1, oder 2, oder 20, oder jede andere mögliche Zahl denken; nimmt man aber für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Werth, z. B. 20 an, so muß man in dieser Aufgabe dafür durchgängig die Zahl 20 beibehalten. Um anzuzeigen, daß gewisse Zahlen einer Aufgabe noch unbekannt sind, drückt man dieselben durch die letzten Buchstaben des Alphabetes, als u, v, w, x, y, z, aus.

§. 4.

Zahlen, welche dieselbe Menge von Einheiten enthalten, heißen gleich; enthalten sie nicht dieselbe Menge von Einheiten, so werden sie ungleich genannt, und zwar heißt diejenige, welche mehrere Einheiten enthält, die größere, die andere die kleinere.

Das Zeichen der Gleichheit ist $=$; z. B. $2 = 2$, $a = b$ wird gelesen: 2 ist gleich 2, a ist gleich b.

Das Zeichen der Ungleichheit ist $>$ oder $<$; die größere der beiden Zahlen wird in die Öffnung, die kleinere an die Spitze gesetzt. Z. B. $3 > 2$, $5 < 6$ wird gelesen: 3 ist größer als 2, 5 ist kleiner als 6.

Wenn man mit gleichen Zahlen gleiche Veränderungen vornimmt, so müssen wieder gleiche Zahlen zum Vorschein kommen.

§. 5.

Man unterscheidet stetige und unstetige Größen. Stetig nennt man eine Größe, wenn ihre Theile so zusammenhängen, daß das Ende des einen Theiles zugleich der Anfang des nächstfolgenden

Theiles ist; z. B. der Raum. Eine *unstetige* oder *diskrete* Größe dagegen heißt eine solche Größe, die als eine bloße Sammlung gleichartiger Theile, welche auch abgesondert und getrennt noch immer ein Ganzes bilden, betrachtet werden kann; z. B. eine Summe Gulden.

Jede Zahl ist eine diskrete Größe, da die Einheiten und deren Theile, welche die Zahl in sich enthält, von einander abgesondert betrachtet werden können, ohne daß sie darum aufhören, jene Zahl vorzustellen.

§. 6.

Die Wissenschaft von den Größen wird *Mathematik* genannt. Sie zerfällt in die *Arithmetik* und in die *Geometrie*; jene handelt von den Zahlen, diese von den Raumgrößen; die Arithmetik beschäftiget sich also mit diskreten, die Geometrie mit stetigen Größen.

In sofern in der Arithmetik nur besondere Zahlen angewendet werden, heißt sie die *besondere Arithmetik*; wenn darin auch allgemeine Zahlen mit einander in Verbindung gebracht werden, heißt sie die *allgemeine Arithmetik*, auch *Algebra*.

Den Gegenstand des vorliegenden Lehrbuches bildet die allgemeine Arithmetik.

Arithmetische Operazionen.

§. 7.

Die Arithmetik hat erstlich die Aufgabe, aus gegebenen Zahlen mittelst bestimmter Veränderungen andere unbekannte Zahlen zu finden. Dieses Geschäft heißt das *Rechnen* oder der *arithmetische Kalkül*, und die Zahl, welche nach verrichteter Rechnung zum Vorschein kommt, das *Resultat* der Rechnung.

Nach Verschiedenheit der Veränderungen, die mit den gegebenen Zahlen vorgenommen werden, um die gesuchte Zahl zu finden, gibt es eben so verschiedene *Rechnungsarten*.

§. 8.

1. Man kann zu einer Zahl eine oder mehrere beliebig große Zahlen dazu setzen, und nach der Zahl fragen, welche dadurch entsteht; diese Rechnungsart nennt man die *Addizion*. *Addiren heißt demnach eine Zahl suchen, welche zwei oder mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist.*

Die gegebenen Zahlen heißen *Addenden*, und die Zahl, welche durch das Addiren gefunden wird, die *Summe*.

Das Zeichen der Addizion ist $+$ (mehr, plus); der Ausdruck $a + b$ bedeutet also, daß die Zahl b zu der Zahl a zu addiren ist.

§. 9.

2. Wenn man umgekehrt von einer gegebenen Zahl eine andere beliebige Zahl hinwegnehmen, und das Uebriggebliebene angeben soll, so geschieht dieses mittelst einer eigenen Rechnungsart, welche die Subtrakzion genannt wird. Man denkt sich dabei die eine gegebene Zahl als die Summe zweier Zahlen, von denen die eine bekannt ist, und die andere gesucht wird. Subtrahiren heißt daher, aus der Summe zweier Zahlen und aus einer derselben die andere finden.

Die Zahl, von welcher eine andere weggenommen, welche also als die Summe zweier Zahlen betrachtet wird, heißt der Minuend; die Zahl, welche man hinwegnimmt, welche also der bekannte Addend ist, der Subtrahend; und die Zahl, welche durch das Subtrahiren gefunden wird, und den unbekannten Addend vorstellt, der Rest, der Unterschied oder die Differenz.

Das Zeichen der Subtrakzion ist — (weniger, minus); der Ausdruck $a-b$ bedeutet also, daß die Zahl b von der Zahl a hinwegzunehmen ist, a ist der Minuend, b der Subtrahend.

Das Subtrahiren ist dem Addiren entgegengesetzt; die Zahlen, welche man durch die Addizion verbindet, werden durch die Subtrakzion wieder getrennt.

§. 10.

3. Die Operazion, welche man anwendet, wenn eine und dieselbe Zahl öfters gesetzt werden soll, nennt man die Multiplikazion. Multipliziren heißt demnach eine Zahl so oftmal nehmen, als eine andere Einheiten in sich enthält.

Die Zahl, welche man mehrmal nimmt, heißt der Multiplikand; die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplikand genommen werden soll, der Multiplikator; und die Zahl, welche durch das Multipliziren gefunden wird, das Produkt. Der Multiplikand und der Multiplikator werden auch Faktoren genannt.

Das Zeichen der Multiplikation ist ein schiefes Kreuz $\times$ oder blos ein Punkt . zwischen den Faktoren. Das Produkt der Buchstaben wird auch dadurch angezeigt, daß man dieselben ohne Zeichen neben einander setzt; es bedeutet also $a \times b$ oder $a . b$ oder $a\,b$ so viel als: a multiplizirt mit b.

Da die Multiplikazion nach der obigen Erklärung nichts anderes, als eine wiederholte Addizion ist, so pflegt man das Multipliziren die nächst höhere Operazion vom Addiren zu nennen.

Für das Multipliziren kann auch folgende allgemeine Erklärung aufgestellt werden; a mit b multipliziren heißt, aus a auf dieselbe Art ein Resultat bilden, wie b aus der Einheit entstanden ist. Z. B. 8 mit 3 multipliziren heißt, aus 8 auf dieselbe Art eine neue Zahl entstehen lassen, wie 3 aus der Einheit entstanden ist; 3 ist aus der Einheit entstanden, indem man die

Einheit 3mal als Addend setzte, nämlich $3=1+1+1$; man wird daher auch 8 3mal als Addend setzen, also $8\times3=8+8+8=24$.

§. 11.

4. Die Rechnungsart, welche dem Multipliziren entgegengesetzt ist, heißt die Division. Dabei wird untersucht, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern Zahl enthalten ist; man denkt sich zu diesem Ende diese letztere als das Produkt zweier Zahlen, von denen die eine bekannt ist, und die andere gesucht wird. Dividiren heißt also aus dem Produkte zweier Faktoren und aus einem dieser Faktoren den andern suchen.

Das gegebene Produkt, oder die Zahl, welche dividirt wird, heißt der Dividend; der gegebene Faktor, oder die Zahl, durch welche dividirt wird, der Divisor; und der unbekannte Faktor, welcher durch das Dividiren gefunden wird, der Quozient.

Das Zeichen der Division sind zwei über einander stehende Punkte :; der Ausdruck $a:b$ bedeutet also, daß a durch b dividirt werden soll, oder daß a das Produkt zweier Faktoren ist, von denen man den einen b kennt, und den andern zu suchen hat. Ein Ausdruck von der Form $a:b$ heißt ein angezeigter Quozient.

Die Division wird oft auch dadurch angezeigt, daß man den Divisor unter den Dividend, und zwischen beide einen Strich setzt, als $\frac{a}{b}$, welches gelesen wird: a dividirt oder gebrochen durch b. Diese Art der Bezeichnung nennt man die Bruchform.

Wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist, könnte man auch dadurch erfahren, daß man die erstere Zahl von der zweiten so oft subtrahirt, als es möglich ist; die Zahl, welche anzeigt, wie oft diese Subtrakzion verrichtet werden kann, ist der Quozient. Die Division kann daher als eine wiederholte Subtrakzion betrachtet werden, darum pflegt man sie auch die nächst höhere Operazion vom Subtrahiren zu nennen.

§. 12.

5. Das Bedürfniß der Rechnung erfordert es häufig, daß eine und dieselbe Zahl öfters als Faktor gesetzt werde. Die Operazion, durch welche dieses geschieht, heißt das Potenziren oder das Erheben zu einer Potenz. Es heißt also, eine Zahl zur 2^{ten}, 3^{ten}, ...m^{ten} Potenz erheben, diese Zahl 2, 3,... $m$mal als Faktor setzen.

Die Zahl, welche öfters als Faktor gesetzt wird, heißt eine Wurzel des erhaltenen Produktes, und zwar die sovielte Wurzel, als wie oft sie als Faktor erscheint. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Wurzel als Faktor gesetzt werden muß, damit eine dritte Zahl als Produkt herauskommt, heißt der Exponent. Das Produkt endlich, welches man erhält, wenn eine Wurzel öfters als Faktor gesetzt wird, nennt man eine Potenz, und zwar die sovielte

Potenz, als wie oft die Wurzel als Faktor darin erscheint. Eine Potenz ist demnach ein Produkt von mehreren gleichen Faktoren, und jeder von diesen gleichen Faktoren ist eine Wurzel des Produktes.

So gibt z. B. 2, 5mal als Faktor gesetzt, 32 zum Produkte; 2 ist also die Wurzel, und zwar die 5te Wurzel von 32; 5 ist der Exponent; und 32 ist die Potenz, und zwar die 5te Potenz von 2.

Die Potenz einer Zahl wird dadurch angezeigt, daß man der Wurzel rechts oben den Exponenten beisetzt; statt $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ schreibt man also 2^5, und liest dieses: 2 zur 5ten Potenz, oder bloß 2 zur 5ten. Eben so ist

$$a^4 = a.a.a.a$$
$$a^m = a.a.a.a.a\ldots m\text{mal}.$$

Ein Ausdruck von der Form a^m wird eine Potenzgröße, auch bloß Potenz, genannt; insbesondere nennt man die zweite Potenz Quadrat, die dritte Kubus.

§. 13.

6. Dem Potenziren ist erstlich das Wurzelausziehen entgegengesetzt. Es sind dabei die Potenz und der Exponent gegeben, und die Wurzel wird gesucht. Aus einer Zahl die 2te, 3te, ... mte Wurzel ausziehen heißt demnach, eine Zahl suchen, welche 2, 3, ... mmal als Faktor gesetzt, jene gegebene Zahl gibt. Z. B. aus 32 die 5te Wurzel ausziehen heißt eine Zahl suchen, welche, 5mal als Faktor gesetzt 32 gibt; diese Zahl ist 2.

Die Wurzel einer Zahl wird dadurch angezeigt, daß man vor diese Zahl das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ setzt, in dessen Oeffnung der Exponent geschrieben wird. So bezeichnet man die 5te Wurzel aus 32 durch $\sqrt[5]{32}$.

Ein Ausdruck von der Form $\sqrt[m]{a}$ heißt eine Wurzelgröße. Die zweite Wurzel nennt man auch die Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel.

§. 14.

7. Dem Potenziren ist überdieß auch die Exponenziazion entgegengesetzt; dabei sind die Potenz und die Wurzel bekannt, und der Exponent soll bestimmt werden. Z. B. zur wie vielten Potenz muß 2 erhoben werden, um 32 zu erhalten? Diese Forderung wird so angeschrieben: $2^x = 32$.

Eine Potenzgröße von der Form a^x, worin nämlich der Potenzexponent unbekannt ist, heißt eine Exponenzialgröße; den unbekannten Exponenten nennt man den Logarithmus der Potenz, und die gegebene Wurzel die Grundzahl oder Basis; in der früheren Aufgabe ist 5 der Logarithmus von 32 für die Grundzahl 2.

Der Logarithmus einer Zahl wird durch die vorgesetzte Silbe log, der man rechts unten die Basis beisetzt, ausgedrückt; z. B. $\log_2 32 = 5$. Allgemein wird der Ausdruck $\log_b a = m$ gelesen: der Logarithmus von a für die Grundzahl b ist gleich m, d. i. b muß zur m^{ten} Potenz erhoben werden, damit a herauskomme. Würden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis bezogen, so schreibt man statt des letzteren Ausdruckes kürzer blos $\log a = m$, wobei die Basis stillschweigend als bekannt vorausgesetzt wird.

Gleichungen.

§. 15.

Eine andere sehr wichtige Aufgabe der allgemeinen Arithmetik besteht darin, daß aus gegebenen Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Zahlen diese letztern bestimmt werden. So stellt z. B. der Ausdruck $x^2 - 5 = x - 3$ eine Relazion zwischen der unbekannten Zahl x und den bekannten Zahlen 5, 3 vor, aus welcher der Werth von x bestimmt werden kann. Eine solche Gleichstellung zweier Ausdrücke wird eine Gleichung genannt.

Progressionen.

§. 16.

Die Arithmetik betrachtet ferner die Gesetze, nach denen mehrere Größen von einander abhängen. So bestehet zwischen den Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11,...das Gesetz, daß jede folgende Zahl um 2 größer ist, als die vorhergehende. Eine Folge von solchen Zahlen, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, nennt man eine Reihe oder Progression.

Kombinazionen.

§. 17.

Die allgemeine Arithmetik hat endlich die Aufgabe, gegebene Größen auf eine bestimmte Art unter einander zu versetzen oder mit einander zu verbinden. Es wird z. B. verlangt, alle möglichen Stellungen anzugeben, in welche die vier Buchstaben a, b, c, d gebracht werden können. Solche Versetzungen und Verbindungen von Größen werden Kombinazionen genannt.

§. 18.

Die allgemeine Arithmetik umfaßt dem Vorhergehenden zu Folge vier Haupttheile:

1) die Lehre von den arithmetischen Operazionen,
2) die Lehre von den Gleichungen,
3) die Lehre von den Progressionen,
4) die Kombinazionslehre.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den arithmetischen Operazionen.

I. Von den algebraischen Ausdrücken im Allgemeinen.

§. 19.

Eine Größe, welche in der Rechnung als hinzuzugebend, als Addend erscheint, heißt eine additive oder positive Größe, und wird durch das Zeichen + ausgedrückt; eine Größe dagegen, welche in der Rechnung als hinwegzunehmend, als Subtrahend erscheint, heißt subtraktiv oder negativ, und bekommt das Zeichen —. So bedeutet + a eine positive, also eine hinzuzugebende, — a dagegen eine negative, also eine hinwegzunehmende Größe.

Das Zeichen + wird im Anfange eines Ausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben; wenn daher vor einer Größe kein Zeichen steht, so ist sie als positiv anzusehen. Das Zeichen — darf nie weggelassen werden.

Positive und negative Größen nennt man wegen der entgegengesetzten Beziehungen, in denen sie zu einander stehen, entgegengesetzte Größen.

Aus dem Begriffe der positiven und negativen Größen folgt:

1. Zwei gleiche entgegengesetzte Größen heben sich ganz auf. Wenn man z. B. 10 hinzugibt und dann 10 hinwegnimmt, so ist dieß eben so viel, als wenn man nichts hinzugeben und nichts hinwegnehmen würde; also $+ 10 - 10 = 0$. Allgemein ist $+ a - a = 0$.

2. Zwei ungleiche entgegengesetzte Größen heben sich nur zum Theil auf; die kleinere wird nämlich ganz aufgehoben, von der größern aber nur so viel, als die kleinere beträgt. Wenn z. B. 10 hinzugegeben und 6 hinweggenommen werden soll, so denke man sich die hinzuzugebenden 10 in 6 und 4 zerlegt; da nun 6 wieder hinweggenommen werden sollen, so bleiben nur noch 4 als wirklich hinzuzugebend; 10 hinzugeben und 6 hinwegnehmen ist also eben so viel, als 4 hinzugeben; folglich $+ 10 - 6 = + 4$. Soll man 6 hinzugeben und 10 wegnehmen,

so müssen zuerst die hinzugegebenen 6 hinweggenommen werden, wodurch das Hinzugegebene aufgehoben wird, und dann bleiben noch 4 als hinwegzunehmend; es ist also $+6-10=-4$.

§. 20.

Wenn dieselbe Größe öfters als Addend oder als Subtrahend erscheint, so schreibt man die allgemeine Größe nur einmal an und setzt ihr die Zahl vor, welche anzeigt, wie oft die allgemeine Größe als Addend oder Subtrahend steht, und zwar mit dem Zeichen der Addizion oder der Subtrakzion.

Statt $a+a+a+a$ schreibt man $+4a$ oder $4a$.
" $ax^2+ax^2+ax^2$ " " $+3ax^2$ oder $3ax^2$.
" $-bcd-bcd$ " " $-2bcd$.
" $-x^3y^2-x^3y^2-x^3y^2$ " " $-3x^3y^2$.

Diese vor dem Buchstabenausdrucke stehende Zahl wird der Koeffizient genannt. Der Koeffizient zeigt also an, wie oft die darauf folgende allgemeine Größe als Addend oder als Subtrahend gesetzt werden soll, je nachdem derselbe das Zeichen $+$ oder $-$ vor sich hat.

Wenn bei einem Buchstaben kein Koeffizient steht, so ist darunter der Koeffizient 1, welcher nie angeschrieben wird, zu verstehen; es ist demnach a so viel als $1a$, und $-a$ so viel als $-1a$.

Der Koeffizient kann selbst auch eine allgemeine Zahl sein, z. B. in mx kann m als der Koeffizient von x angesehen werden.

Die Begriffe Koeffizient und Exponent müssen von einander wohl unterschieden werden; es ist

$$4a=a+a+a+a,$$
$$a^4=a\,.\,a\,.\,a\,.\,a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; setzt man z. B. $a=3$, so ist

$$4a=3+3+3+3=12,$$
$$a^4=3\,.\,3\,.\,3\,.\,3=81.$$

§. 21.

Eine Größe, die durch ein Zeichen, einen Koeffizienten, und einen Buchstaben, oder auch mehrere ohne Zeichen verbundene Buchstaben dargestellt ist, heißt ein einfacher algebraischer Ausdruck oder ein Monom. So sind die Ausdrücke a, $4ab$, $12a^2bx^3$ einfache algebraische Ausdrücke. Bei einem einfachen algebraischen Ausdrucke sind drei Sachen zu berücksichtigen: die Buchstabengröße, welche eigentlich die Art der Einheiten angibt; der Koeffizient, welcher die Menge solcher Einheiten anzeigt; und das Zeichen, wodurch ausgedrückt wird, ob diese Einheiten als hinzuzugebend oder als hinwegzunehmend anzusehen sind.

Eine Größe, welche mehrere einfache, durch das Zeichen $+$

oder — verbundene Ausdrücke enthält, wird ein zusammengesetzter algebraischer Ausdruck genannt. Die einzelnen Bestandtheile eines zusammengesetzten Ausdruckes nennt man Glieder desselben. Hat ein zusammengesetzter Ausdruck zwei Glieder, so heißt er insbesondere ein Binom; eine dreigliedrige Größe wird ein Trinom, eine mehrgliedrige ein Polynom genannt.

Es sind

$$\left.\begin{array}{l} a + b \\ 3x - 2 \\ ax^2 - 5y \end{array}\right\}\text{Binome,}\quad \left.\begin{array}{l} a + b + c \\ 3m^2 - 5n^2 + 7p^2 \\ ax + by - cz \end{array}\right\}\text{Trinome,}$$

und alle diese Größen zusammengesetzte Ausdrücke.

Zusammengesetzte Ausdrücke werden, wenn damit arithmetische Operazionen vorzunehmen sind, in Klammern eingeschlossen. Um z. B. anzuzeigen, daß $a + 2b + 3c$ mit $4m + 5n + 6p$ zu multipliziren ist, schreibt man $(a + 2b + 3c)(4m + 5n + 6p)$; würde man die Klammern weglassen, so bedeutet der Ausdruck $a + 2b + 3c \times 4m + 5n + 6p$, daß nur $3c$ mit $4m$ zu multipliziren ist, und zu diesem Produkte die vorhergehenden und die nachfolgenden Glieder zu addiren sind.

Wenn in einem zusammengesetzten algebraischen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so pflegt man wegen der leichtern Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Wurzel enthält, und dann zu immer höhern Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt das Polynom fallend, im zweiten steigend geordnet.

So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

Jede dekadische Zahl kann als ein nach den Potenzen der Grundzahl 10 geordnetes Polynom angesehen werden; z. B.

$$\begin{aligned} 7835 &= 7000 + 800 + 30 + 5 \\ &= 7.10^3 + 8.10^2 + 3.10 + 5; \\ 52074 &= 50000 + 2000 + 70 + 4 \\ &= 5.10^4 + 2.10^3 + 7.10 + 4. \end{aligned}$$

Ist allgemein N eine mziffrige dekadische Zahl, in welcher a, b, c....r, s, t nach der Ordnung die Ziffern von der Rechten gegen die Linke vorstellen, so hat man

$$N = t.10^{m-1} + s.10^{m-2} + r.10^{m-3} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a.$$

§. 22.

Größen, in denen derselbe Buchstabenausdruck vorkommt, heißen gleichartig; die Zeichen und Koeffizienten können darin auch verschieden sein. Größen, in denen verschiedene Buchstabenausdrücke vorkommen, werden, selbst wenn sie gleiche Zeichen und Koeffizienten haben, **ungleichartige** Größen genannt.

So sind

$$\left.\begin{array}{l} 3a,\ 3a \\ 3a,\ -4a \\ 2a^2b,\ 7a^2b \end{array}\right\}\ \text{gleichartige Größen.}$$

$$\left.\begin{array}{c} a,\ b \\ 2a,\ -3ab \\ -4xy^2,\ -4x^2y \end{array}\right\}\ \text{ungleichartige Größen.}$$

Gleichartige Größen lassen sich immer in einen einfachen Ausdruck zusammenziehen, was man das **Reduziren** nennt.

Aus dem Begriffe der Koeffizienten und der entgegengesetzten Größen ergeben sich für das Reduziren folgende Sätze:

1. **Zwei gleichartige Größen von gleicher Bezeichnung werden reduzirt**, wenn man das gemeinschaftliche Zeichen mit der Summe der Koeffizienten dem gemeinschaftlichen Buchstabenausdrucke voran setzt.

Hat man z. B. die Größe $2a + 5a$, so ist die allgemeine Größe a zuerst 2mal, dann 5mal, also zusammen 7mal als Addend zu setzen; mithin $2a + 5a = 7a$.

Um den Ausdruck $-7bx - 3bx$ zu reduziren, bedenke man, daß hier die allgemeine Größe bx erstlich 7mal, dann 3mal, folglich im Ganzen 10mal als hinwegzunehmend zu setzen ist; man hat daher $-7bx - 3bx = -10bx$.

Ebenso findet man

$$5x^2 + 7x^2 = 12x^2, \quad -a^2b - 3a^2b = -4a^2b,$$
$$8abc + abc = 9abc, \quad -10ay^2 - 8ay^2 = -18ay^2,$$
$$mx + nx = (m+n)x, \quad a.10^2 + b.10^2 = (a+b).10^2.$$

2. **Zwei gleichartige Größen von ungleicher Bezeichnung werden reduzirt**, wenn man das Zeichen des größern Koeffizienten mit dem Unterschiede der Koeffizienten dem gemeinschaftlichen Buchstabenausdrucke voransetzt.

Ist z. B. der Ausdruck $8a - 5a$ zu reduziren, so hat man a zuerst 8mal als hinzuzusetzend und dann 5mal als hinwegzunehmend zu betrachten, was so viel ist, als wenn a nur 3mal hinzuzusetzen wäre; daher ist $8a - 5a = 3a$.

Auf gleiche Weise folgt

$$10ab - 7ab = 3ab, \quad 3b - 5b = -2b,$$
$$8x^2y^2 - 7x^2y^2 = -x^2y^2, -4m^2 + 3m^2 = -m^2,$$
$$py - qy = (p-q)y, \quad m.10^3 - n.10^3 = (m-n).10^3.$$

3. **Zwei gleiche entgegengesetzte Größen heben sich auf.**

Hat man z. B. $5ab - 5ab$, so soll ab 5mal hinzugesetzt und 5mal hinweggenommen werden, was so viel ist, als wenn gar nichts hinzugesetzt und nichts hinweggenommen würde; also $5ab - 5ab = 0$.

4. **Mehrere gleichartige Größen, welche theils**

positiv, theils negativ sind, werden reduzirt, wenn man zuerst die positiven, dann die negativen, und endlich die daraus hervorgehenden Ausdrücke reduzirt. Z. B.:

$7ab + 3ab + ab = 11ab$,
$-3x^2 - 8x^2 - 10x^2 = -21x^2$,
$5a - 4a + 8a = 13a - 4a = 9a$,
$my + 5my - 3my - 8my = 6my - 11my = -5my$,
$3n^2 - n^2 + 4n^2 - 3n^2 + 7n^2 = 14n^2 - 4n^2 = 10n^2$.
$5a - 3b + 7b - 3a + 9a - 2b = 11a + 2b$.

Man reduzire noch folgende Ausdrücke:
1) $3m - 7m - 4m + m - 2m + 8m$;
2) $4pq + 2pq - pq + 13pq - 20pq$;
3) $7a^2b + 10a^2b + 3a^2b - 5a^2b - a^2b$;
4) $21xyz - 17xyz - 25xyz + 36xyz - 9xyz$;
5) $2a - 3b + 4c - 3a + 5b - 7c + a + 4b - 8c$;
6) $25x + 31y - 17z - 28x + 8y + 37z + x - 29y - 19z$;
7) $12x^2y - 9xy^2 - 19x^2y - 23xy^2 + 10x^2y + 38xy^2$.

§. 23.

Damit Anfänger stets vor Augen haben, daß die im Rechnen vorkommenden Buchstaben nichts als Zahlen bedeuten, ist ihnen als Uebung anzuempfehlen, daß sie in den algebraischen Ausdrücken für die Buchstaben bestimmte Zahlenwerthe einsetzen und dann die angezeigten Operazionen wirklich verrichten. Dieses Geschäft nennt man das Substituiren.

Beispiele.

1) Es soll der Zahlenwerth des Ausdruckes $a + 2b - 3c$ berechnet werden, wenn man darin $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ substituirt.

Man hat

$$a + 2b - 3c = 3 + 2.2 - 3.1 = 3 + 4 - 3 = 4.$$

2) Man setze in dem Ausdrucke $ax^3 - bx^2 + cx - d$ die Werthe $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $x = 2$. Es wird

$$ax^3 - bx^2 + cx - d = 1.2^3 - 2.2^2 + 3.2 - 4$$
$$= 1.8 - 2.4 + 3.2 - 4$$
$$= 8 - 8 + 6 - 4 = 2.$$

3) Der Ausdruck $4x^2 - 4xy + y^2$ gibt für $x = 3$, $y = 5$ den Zahlenwerth 1.

4) Aus $3ab - 5ac + 3bc$ erhält man durch die Substituzion $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ den Zahlenwerth 21.

Man suche noch die Zahlenwerthe folgender Ausdrücke:

5) $6x^3 - 15x^2 + 48x - 10$
für $x = 3$;

6) $m^4 - 4m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + n^3$
für $m = 3$, $n = 2$;

7) $(3x + 5y - 6z)(7x - 2y + 3z)$
für $x = 4,\ y = 5,\ z = 6$;

8) $(a^3b^3 - 3a^2b^2c + 3abc^2 - c^3) : (ab - c)$
für $a = 2,\ b = 4,\ c = 6$.

II. Vom Addiren algebraischer Größen.

§. 24.

Durch das Addiren wird eine Größe gesucht, welche mehreren gegebenen Größen zusammengenommen gleich ist. **Algebraische Größen werden daher addirt, wenn man sie mit ihren Zeichen neben einander setzt.**

Kommen unter den Addenden gleichartige Ausdrücke vor, so werden sie in der Summe reduzirt. Am zweckmäßigsten ist es, die gleichartigen Größen der leichten Uebersicht wegen sogleich beim Anschreiben unter einander zu stellen.

Beispiele.

1) $\begin{array}{r} a \\ +\, b \\ \hline a + b \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} a \\ -\, b \\ \hline a - b \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\, a \\ +\, b \\ \hline -\, a + b \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -\, a \\ -\, b \\ \hline -\, a - b \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 3a - 4b \\ \quad\ \ c - 2d \\ \hline 3a - 4b + c - 2d \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} a + 2b \\ 3a - b \\ \hline 4a + b \end{array}$

7) $\begin{array}{rrr} 2x^2 & - 4xy & + 3y^2 \\ x^2 & + 3xy & - 5y^2 \\ \hline 3x^2 & - \ \ xy & - 2y^2 \end{array}$ 8) $\begin{array}{rrrr} x^3 & - 2x^2 & + 3x & \\ & -\ \ x^2 & - 3x & + 4 \\ \hline x^3 & - 3x^2 & & + 4 \end{array}$

9) $\begin{array}{rrr} 5x & - 3y & -\ \ z \\ 2x & + 4y & + 5z \\ -\ x & - 4y & - 4z \\ \hline 6x & - 3y & \end{array}$ 10) $\begin{array}{rrrrr} 2a^4 & + 3a^3 & - 4a^2 & & \\ & - 2a^3 & + 3a^2 & - 4a & \\ & & + 2a^2 & - 3a & + 4 \\ \hline 2a^4 & +\ \ a^3 & -\ \ a^2 & - 7a & + 4 \end{array}$

11) $13ab - 5cd + (12cd - 4ab) = 9ab + 7cd$

12) $18x + (5x - 8a) + (8a - 3x) = 20x$

13) $5m - 3n + p + (3n - 2p - q) = 5m - p - q$.

Man verrichte noch folgende Addizionen:

14) $20x - 27y + 12z + (39y - 12z - 15x)$;

15) $8mx + 5ny + (3mx - 7ny) + (3ny - 6mx)$;

16) $7a + (8a - 2) + (9 - 5a) - 10$;

17) $3c + 7 + [4b - 2c + (2b + 8)]$;

18) $[(2x - 3y) + (2y - x)] + [5x + (6y - 1)]$.

Sind M und N zwei dekadische Zahlen, und zwar

$$M = d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a,$$
$$N = \qquad r.10^2 + q.10 + p;$$

so ist

$$M + N = d.10^3 + (c + r).10^2 + (b + q).10 + (a + p).$$

Mit Hilfe dieser Formel wird der Anfänger ohne Mühe die Regeln aufstellen, nach denen beim Addiren dekadischer Zahlen verfahren wird.

III. Vom Subtrahiren algebraischer Größen.

§. 25.

Aus dem im §. 9 aufgestellten Begriffe des Subtrahirens folgt der Satz: der Rest muß so beschaffen sein, daß er zu dem Subtrahend addirt, den Minuend gibt.

Beim Subtrahiren einfacher algebraischer Ausdrücke können hinsichtlich der Zeichen vier Fälle vorkommen.

Minuend	$+a$	$+a$	$-a$	$-a$
Subtrahend	$+b$	$-b$	$+b$	$-b$
Rest	x	x	x	x

Nach dem obigen Satze folgt nun

	$x + b = a$	$x - b = a$	$x + b = -a$	$x - b = -a$
dazu	$-b = -b$	$+b = +b$	$-b = -b$	$+b = +b$
so ist	$x = a - b$	$x = a + b$	$x = -a - b$	$x = -a + b$.

Die vollständige Schlußfolgerung geschieht im ersten Falle auf folgende Art. Es sei der Minuend a und der Subtrahend b; den Rest drücke man, da er noch nicht bekannt ist, vorläufig durch den Buchstaben x aus, und es handelt sich darum, den Werth von x auszumitteln. Da die Summe aus dem Reste und dem Subtrahend den Minuend geben muß, so ist $x + b = a$. Wenn man zu zwei gleichen Größen dieselbe Größe addirt, so müssen wieder gleiche Summen herauskommen; addirt man nun sowohl zu $x + b$, als zu a die Größe $-b$, so erhält man einerseits, da sich $+b$ und $-b$ aufheben, bloß x, andererseits aber $a - b$, und es müssen diese Summen gleich sein; also $x = a - b$. Der gesuchte Unterschied ist also im ersten Falle $a - b$.

Dieselben Schlüsse lassen sich auch in den übrigen drei Fällen durchführen.

Vergleicht man nun in jedem der vier Fälle den erhaltenen Rest mit dem Minuend und dem Subtrahend, so bemerkt man, daß der jedesmalige Rest den Minuend mit seinem eigenen und den Subtrahend mit geändertem Zeichen enthält.

Ist von a ein zusammengesetzter Ausdruck $m - n + p$ zu subtrahiren, so hat man

$$\begin{array}{lll} \text{Minuend} & a & \\ \text{Subtrahend} & \underline{m - n + p}; & \\ \text{heißt der Rest} & x, & \\ \text{so muß} & x + m - n + p = a & \text{sein;} \\ \text{addirt man} & \underline{-m + n - p = -m + n - p} & \text{dazu,} \\ \text{so erhält man} & x = a - m + n - p. & \end{array}$$

Man sieht, daß auch hier im Reste der Minuend mit seinem eigenen, der Subtrahend mit den entgegengesetzten Zeichen vorkommt.

Algebraische Größen werden daher subtrahirt, wenn man den Minuend mit seinem eigenen, den Subtrahend aber mit geänderten Zeichen neben einander stellt.

Man pflegt im Subtrahend die veränderten Zeichen sogleich unter die gegebenen zu schreiben. Kommen gleichartige Ausdrücke vor, so werden sie reduzirt.

Beispiele.

1)
$$\begin{array}{l} 3ax \\ -5by \\ + \\ \hline 3ax + 5by \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 3x^2 - 2y^2 \\ 3xy \\ - \\ \hline 3x^2 - 2y^2 - 3xy \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} 2a - 3b \\ a - 2b \\ - \quad + \\ \hline a - b \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} 5m - 3n \\ 2m + n^2 \\ - \quad - \\ \hline 3m - 3n - n^2 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} a - 2b + 3c \\ -2a - 3b + 3c \\ + \quad + \quad - \\ \hline 3a + b \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} 2abx + 3cdy - 4efz \\ -2abx + 2cdy - 2efz \\ + \quad - \quad + \\ \hline 4abx + cdy - 2efz \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} 3a^2 - 4a + 5 \\ 3a^2 - 5a + 4 \\ - \quad + \quad - \\ \hline a + 1 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 6x^2y + 2y^3 \end{array}$$

9) $3a - 2b + c - (2a + b - 3c) = a - 3b + 4c$

10) $6ax - 5by - (2by + 3cz) + (3cz - 5ax) = ax - 7by$

11) $12x - 7y - [a - (3x - 2y)] = 15x - 9y - a.$

Es sollen noch folgende Operazionen verrichtet werden:

12) $9x - 7y + (2x + 3y) - (5x - 8y).$

13) $5a + 2b - 3c - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c).$

14) $7x - 3y - [2x + 4y - (3x - 3y + 2)].$

15) $5m - 2n - [3m - \{2m - (m - 4n)\}].$

16) $a + 2b - 3 + [2a - b - (5b - 4) - (a - b)]$
$- [4a + 3b - \{7a - 2b - (a - 3)\}].$

Wenn M und N zwei dekadische Zahlen bedeuten, und

$$M = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a,$$
$$N = \qquad r \cdot 10^2 + q \cdot 10 + p$$

ist, so hat man

$$M - N = d.10^3 + (c - r).10^2 + (b - q).10 + (a - p);$$

woraus sich die Regeln für das Subtrahiren dekadischer Zahlen leicht entwickeln lassen.

IV. Vom Multipliziren algebraischer Größen.

§. 26.

Aus der Erklärung des Multiplizirens folgt:

1. Jede Zahl mit 1 multiplizirt gibt sich selbst zum Produkte.

a mit 1 multipliziren heißt a einmal als Addend setzen, also $a \times 1 = a$.

Der Faktor 1 pflegt daher, da er das Produkt nicht ändert, auch nicht angeschrieben zu werden.

2. Jede Zahl mit 0 multiplizirt gibt 0 zum Produkte.

a mit 0 multipliziren heißt aus a ein Resultat so bilden, wie 0 aus der Einheit entstanden ist; 0 ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit einmal als Addend und einmal als Subtrahend setzte, nämlich $0 = + 1 - 1$; man wird daher auch a einmal als Addend und einmal als Subtrahend setzen, also $a \times 0 = a - a = 0$.

3. Zwei Faktoren geben in jeder Ordnung mit einander multiplizirt dasselbe Produkt. Es ist $a.b = b.a$.

a mit b multipliziren heißt aus a ein Resultat so bilden, wie b aus der Einheit entstanden ist; b ist aus der Einheit hervorgegangen, indem man die Einheit bmal als Addend setzte; man muß daher auch a bmal als Addend setzen, somit ist

$$a.b = a + a + a + \ldots \text{ bmal.}$$

Eben so folgt

$$b.a = b + b + b + \ldots \text{ amal.}$$

Da jedes b die Einheit bmal in sich enthält, so kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} b.a = &(1 + 1 + 1 + \ldots \text{ bmal})\\ &+ (1 + 1 + 1 + \ldots \text{ bmal})\\ &+ (1 + 1 + 1 + \ldots \text{ bmal})\\ &+ \ldots \text{ amal.}\end{aligned}$$

Nimmt man nun aus jeder b vorstellenden Reihe die erste Einheit, so erhält man dadurch, da es a solche Reihen gibt, a Einheiten oder a; nimmt man aus jeder Reihe die zweite Einheit, so erhält man dadurch wieder a; man wird auf diese Art a so oftmal erhalten, als in b Einheiten vorkommen, also bmal; mithin ist

$$b.a = a + a + a + \ldots \text{ b mal.}$$

Da dieser Werth für b.a mit dem oben für a.b entwickelten übereinstimmt, so folgt

$$a.b = b.a.$$

Um dieses durch ein besonderes Beispiel zu beleuchten, seien 3 und 5 die beiden Faktoren. Man hat

$$\begin{aligned}
3 \times 5 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\
5 \times 3 &= 5 + 5 + 5 \\
&= (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\
&\quad + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\
&\quad + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\
\hline
&= 3 + 3 + 3 + 3 + 3
\end{aligned}$$

also $3 \times 5 = 5 \times 3$.

4. *Der Koeffizient kann als Faktor der Buchstabengröße betrachtet werden, vor welcher er steht.* Z. B. $3a = a + a + a = a \times 3 = 3 \times a$.

§. 27.

Unter dem Produkte von drei oder mehreren Größen versteht man die Größe, welche erhalten wird, wenn man das Produkt zweier Größen mit der dritten, daß neue Produkt mit der vierten, u. s. w. multiplizirt.

Wenn mehrere Faktoren mit einander zu multipliziren sind, so ist es für das Produkt gleichgiltig, in welcher Ordnung die Multiplikazion verrichtet wird.

Man betrachte zuerst das Produkt dreier Faktoren a, b und c.

Weil $b.c = c.b$, so ist auch $a.\underbrace{b.c} = a.\underbrace{c.b}$.

Weil ferner $a.c = c.a$, so ist $\underbrace{a.c}.b = \underbrace{c.a}.b$.

Eben so folgt $c.\underbrace{a.b} = c.\underbrace{b.a}$,

$$\underbrace{c.b}.a = \underbrace{b.c}.a,$$

$$b.\underbrace{c.a} = b.\underbrace{a.c}.$$

Man hat daher

$$a.b.c = a.c.b = c.a.b = c.b.a = b.c.a = b.a.c.$$

Dieselben Folgerungen lassen sich auch für mehr als drei Faktoren durchführen.

§. 28.

In *Hinsicht der Ausführung der Multiplikazion* algebraischer Ausdrücke sind *drei Fälle* zu unterscheiden: entweder sind beide Faktoren einfache Ausdrücke, oder ist ein Faktor zusammengesetzt und der andere einfach, oder es sind beide Faktoren zusammengesetzte Ausdrücke.

1. Wenn beide Faktoren einfache Ausdrücke sind.

Da in jedem der Faktoren Buchstabenausdruck, Koeffizient und Zeichen zu berücksichtigen sind, so hat man auch im Produkte auf diese drei Stücke Rücksicht zu nehmen.

a) Was erstlich die Buchstaben anbelangt, so kann man solche nicht so, wie besondere Zahlen, wirklich multiplizieren; ihr Produkt wird bloß angezeigt, indem man sie, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, ohne Zeichen, und zwar wegen der leichtern Uebersicht in alphabetischer Ordnung, neben einander stellt. So wird das Produkt aus ax und by durch $abxy$ angezeigt.

Kommen in den Faktoren gleiche Buchstaben, oder was dasselbe ist, Potenzen derselben Wurzel vor, so geschieht ihre Multiplikazion nach dem Satze:

Potenzgrößen derselben Wurzel werden multiplizirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält, und ihr zum Exponenten die Summe der Exponenten in den Faktoren gibt.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, sei a^m mit a^n zu multiplizieren. a^m enthält a $m$mal, a^n $n$mal als Faktor; mithin kommt in $a^m . a^n$ der Faktor a zuerst $m$mal, dann $n$mal, also im Ganzen $(m+n)$mal vor; das Produkt ist also a^{m+n}, folglich

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

So ist z. B. $m^5 . m^3 = m^8$.

b) Der Koeffizient des Produktes wird erhalten, wenn man die Koeffizienten der beiden Faktoren multiplizirt.

Ist z. B. $3a$ mit $5b$ zu multiplizieren, so hat man

$$3a \times 5b = 3 \times a \times 5 \times b = 3 \times 5 \times a \times b = 15ab.$$

c) In Beziehung des Zeichens im Produkte gilt der Satz:

Zwei gleichbezeichnete Faktoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Faktoren ein negatives Produkt.

Ist nämlich a mit b zu multiplizieren, so ist das Produkt hinsichtlich seiner Größe ab; in Bezug auf die Zeichen können vier Fälle vorkommen.

Es sei erstlich $+a$ mit $+b$ zu multiplizieren. Dabei hat man aus $+a$ ein Resultat so zu bilden, wie $+b$ aus der Einheit entstanden ist; $+b$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit $b$mal als Addend setzte; man wird daher auch $+a$ $b$mal als Addend setzen, wodurch man gewiß eine positive Größe erhält; also

$$+a . +b = +a + a + a + \ldots b\text{mal} = +ab.$$

Ist $+a$ mit $-b$ zu multiplizieren, so muß man aus $+a$ ein Resultat nach dem Muster von $-b$ bilden; $-b$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit $b$mal als Subtrahend setzte; man muß also auch $+a$ $b$mal als Subtrahend setzen; $+a$ als Subtrahend gesetzt gibt $-a$, und dieses $b$mal genommen, gewiß ein negatives Resultat; man hat daher

$$+a . -b = -a - a - a - \ldots b\text{mal} = -ab.$$

Bei dem Produkte $-a . +b$ schließt man: $+b$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit b mal als Addend gesetzt hat; man muß daher auch $-a$ b mal als Addend, also mit unverändertem Zeichen nehmen, wodurch sicher eine negative Größe zum Vorschein kommt; folglich

$$-a . +b = -a - a - a - \ldots b \text{ mal} = -ab.$$

Ist endlich $-a$ mit $-b$ zu multipliziren, so muß man aus $-a$ nach dem Vorbilde von $-b$ eine neue Zahl entstehen lassen; $-b$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit b mal als Subtrahend setzte; man wird daher auch $-a$ b mal als Subtrahend, also mit geändertem Zeichen setzen, wodurch man b mal $+a$, und mithin ohne Zweifel eine positive Größe erhält; also

$$-a . -b = +a + a + a + \ldots b \text{ mal} = +ab.$$

Es ist also

$$+a . +b = +ab,$$
$$+a . -b = -ab,$$
$$-a . +b = -ab,$$
$$-a . -b = +ab;$$

wodurch der oben aufgestellte Satz erwiesen ist.

Zum bessern Verständnisse sollen dieselben Schlüsse an besondern Zahlen durchgeführt werden; z. B.:

$$+4 . +3 = +4 + 4 + 4 = +12,$$
$$+4 . -3 = -4 - 4 - 4 = -12,$$
$$-4 . +3 = -4 - 4 - 4 = -12,$$
$$-4 . -3 = +4 + 4 + 4 = +12.$$

Sind mehr als zwei Faktoren mit einander zu multipliziren, so gilt in Bezug auf das Zeichen des Produktes Folgendes:

Wenn alle Faktoren positiv sind, so ist auch das Produkt positiv. Sind alle Faktoren negativ, so geben je zwei ein positives Produkt; daher wird auch das ganze Produkt positiv sein, wenn eine gerade Anzahl negativer Faktoren vorhanden ist, und negativ, wenn jene Anzahl eine ungerade ist. Hat man theils positive, theils negative Faktoren, so richtet sich das Zeichen des Produktes bloß nach der Anzahl der negativen Faktoren; das Produkt fällt nämlich positiv oder negativ aus, je nachdem jene Anzahl eine gerade oder ungerade ist.

Beispiele.

1) $2ab . 7cd = 14abcd.$
2) $3ax . -5m = -15amx.$
3) $a^4 . -3a = -3a^5.$
4) $-6a^4 . 3a^2x = -18a^6x.$
5) $-m^4y^3 . -2my^5 = 2m^5y^8.$
6) $5a^2x^3 . -3abx^2 = -15a^3bx^5.$
7) $a^2 . a^3 . a^4 = a^5 . a^4 = a^9.$
8) $a^m . a^n . a^p . a^r = a^{m+n+p+r}.$

9) $2ab^2c^3 . -3a^2b^2c^2 . 4a^2b^3c = -24a^5b^7c^6$.
10) $-2a^2 . 3ab^2 . 5a^2x . -bxy^2 = 30a^5b^3x^2y^2$.

Man entwickle noch folgende Produkte:

11) $17a^5b . -24a^2b^4 = \ldots$
12) $-39mt^2z^3 . -9t^3xz = \ldots$
13) $6a^3b^2x . -8ab^3y . -9a^2bz = \ldots$
14) $mn^2p^3 . 4m^3p^2 . -7m^2np . 10n^3p^4 = \ldots$

§. 29.

2. **Wenn der eine Faktor ein zusammengesetzter, und der andere ein einfacher Ausdruck ist.**

Wenn ein zusammengesetzter Ausdruck $a+b+c$ mit einem einfachen m zu multiplizieren ist, so muß man aus dem ganzen Multiplikand, mithin aus jedem Theile desselben, ein Resultat so bilden, wie m aus der Einheit entstanden ist; man muß daher zuerst aus a ein Resultat so bilden, wie m aus der Einheit entstanden ist, d. h. a mit m multiplizieren; dann muß man aus b nach dem Vorbilde von m eine neue Zahl entstehen lassen, d. i. b mit m multiplizieren; und endlich auch aus c ein Resultat so bilden, wie m aus der Einheit entstanden ist, also auch c mit m multiplizieren, und alle diese Resultate in eines zusammensetzen. Es ist also

$$(a+b+c) . m = a . m + b . m + c . m.$$

d. h. **ein zusammengesetzter Ausdruck wird mit einem einfachen multiplizirt, wenn man jeden Theil des zusammengesetzten Ausdruckes mit dem einfachen multiplizirt.**

Beispiele.

1) $(3a-4b) . 2c = 6ac - 8bc$.
2) $(3a-5b+7) . -2m = -6am + 10bm - 14m$,
3) $(2mx - 5ny + 3pz) . 3abq = 6abmqx - 15abnqy + 9abpqz$.
4) $(a + 2a^2 - 3a^3) . 5a^4 = 5a^5 + 10a^6 - 15a^7$.
5) $(4ax^3 - 3bx^2 + 2cx - d) . 5x^3 =$
$= 20ax^6 - 15bx^5 + 10cx^4 - 5dx^3$.
6) $(4a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - b^3) . -a^2b^2 =$
$= -4a^5b^2 + 3a^4b^3 - 2a^3b^4 + a^2b^5$.

Man entwickle noch folgende Produkte:

7) $(3z^4 + 2z^3 - 5z + 4) . 6z^2 = \ldots$
8) $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) . -2ab = \ldots$
9) $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y) . 12x^2y = \ldots$
10) $(5a^2b^3 + 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5) . -4a^2b^4 = \ldots$

§. 30.

3. **Wenn beide Faktoren zusammengesetzte Ausdrücke sind.**

Es sei $a + b + c$ mit $m + n + p$ zu multipliziren. Hier hat man aus $a + b + c$ ein Resultat so zu bilden, wie $m + n + p$ aus der Einheit entstanden ist; $m + n + p$ ist aus der Einheit hervorgegangen, indem man zuerst m, dann n, endlich p bildete, und diese Größen addirte; man wird daher auch aus $a + b + c$ zuerst ein Resultat nach dem Vorbilde von m, dann eines nach dem Vorbilde von n, endlich eines nach dem Vorbilde von p entstehen lassen, oder was eben so viel heißt, man wird $a + b + c$ zuerst mit m, dann mit n, endlich mit p multipliziren, und diese Resultate addiren. Es ist also

$$\begin{aligned}(a + b + c)\,(m + n + p) = & \;(a + b + c).m \\ & + (a + b + c).n \\ & + (a + b + c).p,\end{aligned}$$

d. h. ein zusammengesetzter Ausdruck wird mit einem zusammengesetzten multiplizirt, wenn man den ganzen einen Faktor mit jedem Theile des andern multiplizirt, und diese Theilprodukte addirt.

Beim Multipliziren geordneter Ausdrücke ist es am zweckmäßigsten, die einzelnen Theilprodukte so unter einander zu stellen, daß jedes folgende um ein Glied weiter gegen die Rechte gerückt wird, weil sich in vielen Fällen die so unter einander stehenden Größen reduziren lassen.

Beispiele.

1) $(3a + 4b)\,(4c - 3d) = (3a + 4b).4c + (3a + 4b).-3d$
$= 12ac + 16bc - 9ad - 12bd.$

2) $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

$$\begin{array}{lll} a^2 & + ab & \\ & - ab & - b^2 \\ \hline a^2 & & - b^2 \end{array}$$

Dieses Beispiel führt auf folgenden merkwürdigen Satz: Die Summe zweier Größen multiplizirt mit ihrer Differenz, gibt die Differenz ihrer Quadrate.

3) $(2x + 3y)\,(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2.$

4)
$$\begin{array}{llll} x^2 & - 2x & + 1 & \\ 6x & - 3 & & \\ \hline 6x^3 & - 12x^2 & + 6x & \\ & - 3x^2 & + 6x & - 3 \\ \hline 6x^3 & - 15x^2 & + 12x & - 3. \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{lllll} 4x^2 & - 4xy & + y^2 & & \\ 4x^2 & + 4xy & + y^2 & & \\ \hline 16x^4 & - 16x^3y & + 4x^2y^2 & & \\ & + 16x^3y & - 16x^2y^2 & + 4xy^3 & \\ & & + 4x^2y^2 & - 4xy^3 & + y^4 \\ \hline 16x^4 & & - 8x^2y^2 & & + y^4. \end{array}$$

6) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a + 1) = a^5 + 1.$
7) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) = a^5 - 1.$
8) $(x - 2y - 3z)(3x + 2y - z) =$
$= x^2 - 4xy - 10xz - 4y^2 - 4yz + 3z^2.$
9) $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)(2a^2 - 3b^3) =$
$= 8a^6 - 36a^4b^3 + 54a^2b^6 - 27b^9.$
10) $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)(1 - 3x + 5x^2 - 7x^3) =$
$= 1 - 5x + 14x^2 - 30x^3 + 41x^4 - 41x^5 + 28x^6.$
11) $(3x^2 - 2x + 1)(x - 1)(3x + 5) = (3x^3 - 5x^2 + 3x - 1)(3x + 5)$
$= 9x^4 - 16x^2 + 12x - 5.$
12) $(a^2 - 2a - 3)(a^2 - 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) =$
$= a^6 - 2a^5 - 7a^4 + 20a^3 - 21a^2 - 18a + 27.$
13) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$
14) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) =$
$= -a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4.$

Man verrichte noch folgende Multiplikazionen:

15) $(16x^4 + 4x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2);$
16) $(b^{2m} - 2b^m c^m + c^{2m})(4b^m - 5c^m);$
17) $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + c)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - c);$
18) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4);$
19) $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac + 2bc)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab);$
20) $(3a - b)(a^2 - 2ab + 3b^2)(2a^3 - 3b^3);$
21) $2x(a^2 - 3a + 4) + 5a(x^2 - 2x - 3)(x - 5);$
22) $(7a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - b)(2a - b + 5);$
23) $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 3).$

Sind die dekadischen Zahlen

$$M = d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a,$$
$$N = \qquad r.10^2 + q.10 + p$$

mit einander zu multiplizиren, so erhält man folgende Theilprodukte:

$$\begin{aligned} dr.10^5 + cr.10^4 + br.10^3 + ar.10^2 \\ + dq.10^4 + cq.10^3 + bq.10^2 + aq.10 \\ + dp.10^3 + cp.10^2 + bp.10 + ap. \end{aligned}$$

In der Form dieser Theilprodukte sind die Regeln für das dekadische Multiplizиren begründet.

V. Vom Dividiren algebraischer Größen.

§. 31.

Aus dem im §. 11 aufgestellten Begriffe der Division ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1. Der Quozient muß mit dem Divisor multiplizirt den Dividend geben.
Ist $a : b = c$, so muß $bc = a$ sein.

2. **Wenn man das Produkt zweier Zahlen durch die eine dieser Zahlen dividirt, so erhält man die andere zum Quozienten.**

Ist a das Produkt zweier Zahlen b und c, also $a = bc$, so muß $a:b = c$ und $a:c = b$ sein.

3. **Jede Zahl durch sich selbst dividirt gibt 1, und jede Zahl durch 1 dividirt gibt sich selbst zum Quozienten.**

Weil $a = a \times 1$, so muß $a:a = 1$ und $a:1 = a$ sein.

4. **Der Quozient $0:0 = \frac{0}{0}$ kann jede beliebige Zahl vorstellen, und ist somit das Symbol der Unbestimmtheit.**

Da man nämlich sowohl $0 = 1 \times 0$, als auch $0 = 2 \times 0$, oder $0 = 5 \times 0$, oder allgemein $0 = a \times 0$ setzen kann, so folgt auch umgekehrt $0:0 = 1$, oder $0:0 = 2$, oder $0:0 = 5$, oder allgemein $0:0 = a$, wo a jede beliebige Zahl bedeuten kann.

§. 32.

Beim Dividiren algebraischer Ausdrücke können **vier** Fälle vorkommen: entweder sind Dividend und Divisor einfache Ausdrücke, oder ist der Dividend zusammengesetzt und der Divisor einfach, oder ist der Dividend einfach und der Divisor zusammengesetzt, oder es sind Dividend und Divisor zusammengesetzte Ausdrücke.

1. **Wenn Dividend und Divisor einfache algebraische Ausdrücke sind.**

In diesem Falle wird auch der Quozient ein einfacher Ausdruck sein, und man hat bei dessen Bestimmung auf die Buchstabengröße, den Koeffizienten und das Zeichen Rücksicht zu nehmen.

a) Um die **Buchstabengröße** des Quozienten zu finden, überlege man, daß der Buchstabenausdruck des Quozienten mit jenem des Divisors multiplizirt die allgemeine Größe des Dividends geben muß; dieses ist nur möglich, wenn der Quozient alle jene Buchstaben des Dividends enthält, die nicht im Divisor vorkommen. **Man findet also die allgemeine Größe des Quozienten, wenn man diejenigen Buchstaben des Dividends, welche im Divisor vorkommen, wegläßt; die übrig bleibenden bilden den Buchstabenausdruck des Quozienten.** So ist

$$abcd:ac = bd.$$

Oft geschieht es, daß der Divisor Buchstaben enthält, die im Dividende nicht vorkommen, die man also in demselben auch nicht weglassen kann; in diesem Falle kann die Division durch jene Buchstaben nicht wirklich verrichtet werden, man zeigt die Division durch dieselben nur an, indem man sich dabei der Bruchform bedient. Z. B.

$$abc:bcd = \frac{a}{d}.$$

Wenn im Dividend und Divisor Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so ist in Bezug auf den Quozienten die Unterscheidung zu machen, ob der Exponent im Dividend größer, gleich oder kleiner ist, als der Exponent im Divisor.

Man soll a^m durch a^n dividiren, und es sei erstlich $m > n$. Hier kommt a im Dividend mmal, im Divisor nmal als Faktor vor; läßt man nun die gleichen Faktoren beiderseits in gleicher Anzahl weg, so bleibt a im Dividend noch $(m - n)$mal als Faktor übrig; der Quozient ist also a^{m-n}.

Für $m > n$ ist also $a^m : a^n = a^{m-n}$,

d. h., wenn eine höhere Potenz durch eine niedrigere Potenz derselben Wurzel dividirt wird, so ist der Quozient gleich der gemeinschaftlichen Wurzel erhoben zu einer Potenz, deren Exponent gleich ist dem Exponenten des Dividends, weniger dem Exponenten des Divisors.

Ist $m = n$, so hat man:

$$a^m : a^n = a^m : a^m = 1.$$

Wenn endlich $m < n$, so wird nach dem Hinweglassen der gleichen Faktoren im Dividend der Faktor 1, im Divisor aber a noch $(n - m)$mal als Faktor übrig bleiben, also der Quozient $\frac{1}{a^{n-m}}$ sein.

Für $m < n$ ist also $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$,

d. h. wenn eine niedrigere Potenz durch eine höhere Potenz derselben Wurzel dividirt wird, so ist der Quozient gleich 1 gebrochen durch die gemeinschaftliche Wurzel mit einem Potenzexponenten, welcher gleich ist dem Exponenten des Divisors, weniger dem Exponenten des Dividends.

b) Der Koeffizient im Quozienten wird gefunden, wenn man den Koeffizienten des Dividends durch den Koeffizienten des Divisors dividirt; denn der so gefundene Koeffizient im Quozienten wird gewiß mit dem Koeffizienten des Divisors multiplizirt wieder den Koeffizienten des Dividends geben.

c) In Hinsicht des Zeichens können im Dividend und Divisor vier Fälle Statt finden.

Es sei erstlich $+a$ durch $+b$ zu dividiren. Der Quozient, welcher hinsichtlich seiner Größe q heißen mag, muß mit dem Divisor $+b$ multiplizirt den Dividend $+a$ geben; nun kann nur eine positive Größe mit einer positiven multiplizirt ein positives Produkt geben; der Quozient q muß also positiv sein, mithin

$$+a : +b = +q.$$

Durch dieselbe Schlußweise ergibt sich auch

$$+a : -b = -q,$$
$$-a : +b = -q,$$
$$-a : -b = +q.$$

In Bezug auf die Zeichen gilt also der Satz:

Wenn Dividend und Divisor gleichbezeichnet sind, so ist der Quozient positiv; haben Dividend und Divisor verschiedene Zeichen, so ist der Quozient negativ.

Beispiele.

1) $15ab : 3a = 5b$.
2) $24abc : -4ab = -6c$.
3) $-4mn : 4n = -m$.
4) $-8ax : -2ab = \frac{4x}{b}$.
5) $18a^7 : -6a^4 = -3a^3$.
6) $28a^5b^2x : 7a^3b^2 = 4a^2x$.
7) $-12a^4 : -6a^6 = \frac{2}{a^2}$.
8) $-15x^3y^3 : 3xy^4 = -\frac{5x^2}{y}$.
9) $14xy^2 : -2xy = \ldots$
10) $-12a^4b^2 : -2a^2b^4 = \ldots$
11) $-9ab^2c^3x : 10a^3b^2cy = \ldots$
12) $5m^2n^3z^4 : mn^2pz = \ldots$

2. Wenn der Dividend ein zusammengesetzter, und der Divisor ein einfacher Ausdruck ist.

Nach dem beim Multipliziren begründeten Verfahren ist:

$$(a + b + c) \,.\, m = am + bm + cm.$$

Wenn nun das Produkt $am + bm + cm$ als Dividend und der eine Faktor m als Divisor gegeben sind, während der andere Faktor $a + b + c$ als Quozient gefunden werden soll, so ist leicht zu sehen, daß jeder Theil des Produktes den gegebenen Faktor multiplizirt mit einem Theile des zu suchenden Faktors enthält; man findet also die einzelnen Theile des gesuchten Faktors (Quozienten), wenn man jeden Theil des Produktes (Dividends) durch den bekannten Faktor (Divisor) dividirt.

Daraus folgt:

Ein zusammengesetzter Ausdruck wird durch einen einfachen dividirt, wenn man jeden Theil des Dividends durch den einfachen Divisor dividirt.

Beispiele.

1) $(15am - 20bm + 35cm) : 5m = 3a - 4b + 7c$.

2) $(18amy - 27bny + 36cpy) : -3y =$
$= -6am + 9bn - 12cp$.

3) $(20a^3bm^3 + 16a^2cm^2 - 9adm) : 4am =$
$= 5a^2bm^2 + 4acm - \frac{9d}{4}$.

4) $(5a^4x - 4a^3x^2 - 3a^2x^3) : a^2x = 5a^2 - 4ax - 3x^2$.

5) $(16a^3 - 12a^2 + 8a - 4) : 2a^2 = 8a - 6 + \frac{4}{a} - \frac{2}{a^2}$.

6) $(24a^3b^3 - 15a^4b^2) : -3a^3b^2 = \ldots$

7) $(2a^3 - 6ab^2 + 30acg - 12a^2g) : 2a = \ldots$

8) $(4abc^3 - 6a^4b + 3ab^3c) : 5a^2b^3 = \ldots$

9) $(5ax^5 + 4a^2x^4 - 3a^3x^5 + 2a^4x^2) : 5a^4x^2 = \ldots$

§. 33.

3. **Wenn Dividend und Divisor zusammengesetzte algebraische Ausdrücke sind.**

Das in diesem Falle zu beobachtende Divisionsverfahren läßt sich am besten aus der Art und Weise ableiten, wie der Dividend durch die Multiplikazion aus dem Divisor und Quozienten entstehet, wie die Theile des Divisors und Quozienten in ihrem Produkte, dem Dividende, zu einander gestellt erscheinen. Ist der Divisor $a + b + c$, der Quozient $m + n + p$, so erhält man durch die Multiplikazion, wenn die Theilprodukte unter einander geschrieben werden,

$$\begin{array}{ll} \text{Divisor} & a + b + c \\ \text{Quozient} & \underline{m + n + p} \\ \text{Dividend} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} am + bm + cm \\ + an + bn + cn \\ + ap + bp + cp. \end{array} \end{array}$$

Der erste Theil am des Dividends ist das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem ersten Theile m des Quozienten; man erhält daher den ersten Theil des Quozienten, wenn man den ersten Theil des Dividends durch den ersten Theil des Divisors dividirt. — Bildet man nun die Bestandtheile, welche m im Produkte hervorgebracht hat, indem man den ganzen Divisor mit m multiplizirt, und zieht dieses Produkt vom Dividende ab; so ist der erste Theil an des Restes das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem zweiten Theile n des Quozienten. Wird daher dieser erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, so erhält man den zweiten Theil des Quozienten. — Wenn man das Theilprodukt, welches n im Dividende hervorbrachte, nämlich das Produkt aus dem ganzen Divisor und aus n, von dem frühern Reste abzieht, so ist der erste Theil des Restes ap, welches das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem dritten Theile p des Quozienten vorstellt. Man findet daher den dritten Theil des Quozienten, wenn man den ersten Theil des letzten Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt u. s. w.

Beim **Dividiren eines zusammengesetzten Ausdruckes durch einen zusammengesetzten** ist daher folgendes Verfahren zu beobachten:

Man dividire den ersten Theil des Dividends durch den ersten

Theil des Divisors; dadurch erhält man den ersten Theil des Quozienten; sodann wird der ganze Divisor mit dem gefundenen ersten Theile des Quozienten multiplizirt und das Produkt vom Dividende abgezogen. Der erste Theil des Restes wird wieder durch den ersten Theil des Divisors dividirt, wodurch der zweite Theil des Quozienten zum Vorschein kommt; mit diesem multiplizirt man den ganzen Divisor und zieht das Produkt von dem frühern Reste ab. Der erste Theil des neuen Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, gibt den dritten Theil des Quozienten. Auf diese Art wird die Division fortgesetzt, bis alle Theile des Dividends in Anspruch genommen wurden; bleibt zuletzt kein Rest, so ist der erhaltene Quozient vollkommen genau; bleibt ein Rest übrig, so ist dieser noch durch den Divisor zu dividiren, der Quozient davon wird jedoch nur angezeigt und in Bruchform dem früher erhaltenen Quozienten angehängt.

Beim Anschreiben des Restes muß immer darauf gesehen werden, daß derselbe so geordnet erscheint, wie es Dividend und Divisor sind.

Beispiele.

1) $(6fgnp - 12dfgm + 5abnp - 10abdm) : (np - 2dm) = 6fg + 5ab$

$$\begin{array}{l}
6fgnp - 12dfgm \\
\underline{-\qquad +\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad + 5abnp - 10abdm \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ 5abnp - 10abdm} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\qquad\qquad +\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

2) $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by) = 3ax + 2by$

$$\begin{array}{l}
3a^2x^2 - 3abxy \\
\underline{-\qquad +\qquad} \\
\qquad + 2abxy - 2b^2y^2 \\
\qquad \underline{+ 2abxy - 2b^2y^2} \\
\qquad \underline{-\qquad\qquad +\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

3) $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$

$$\begin{array}{l}
a^2 + ab \\
\underline{-\quad -\qquad} \\
\;- ab - b^2 \\
\;\underline{- ab - b^2} \\
\qquad 0
\end{array}$$

Dieses Beispiel gibt mit Worten ausgedrückt den Satz: Die Differenz zweier Quadrate, dividirt durch die Summe ihrer Wurzeln, gibt die Differenz der Wurzeln.

Eben so erhält man

4) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$,

d. h. die Differenz zweier Quadrate, dividirt durch die Differenz ihrer Wurzeln, gibt die Summe der Wurzeln.

5) $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4) = 3a^2 + 2a - 1$

$$\begin{array}{l}
6a^4 - 9a^3 + 12a^3 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
\quad + 4a^3 - 8a^2 + 11a \\
\quad + 4a^3 - 6a^2 + 8a \\
\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad - 2a^2 + 3a - 4 \\
\qquad - 2a^2 + 3a - 4 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

6) $(2x^3 - x^2y - 3xy^2 - 4y^3) : (x^2 - 2xy - y^2) = 2x + 3y + \frac{5xy^2 - y^3}{x^2 - 2xy - y^2}$

$$\begin{array}{l}
2x^3 - 4x^2y - 2xy^2 \\
- \quad + \quad + \\
\hline
\quad + 3x^2y - xy^2 - 4y^3 \\
\quad + 3x^2y - 6xy^2 - 3y^3 \\
\quad - \quad + \quad + \\
\hline
\quad + 5xy^2 - y^3
\end{array}$$

7) $(x^4 - 1) : (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1$.

8) $(a^6 - b^6) : (a + b) = a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

9) $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2)$
$= 3x^2 - 2xy - y^2$.

10) $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (1 + 2a - 3a^2 - 4a^3)$
$= 4 - 3a + 2a^2 - a^3$.

11) $(81x^8 - 16y^8) : (3x^2 - 2y^2) = 27x^6 + 18x^4y^2 + 12x^2y^4 + 8y^6$.

12) $(32a^{10}x^5 - 243y^5) : (2a^2x - 3y)$
$= 16a^8x^4 + 24a^6x^3y + 36a^4x^2y^2 + 54a^2xy^3 + 81y^4$.

13) $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$.

14) $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$
$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.

15) $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2) = m^2 - 2mn + n^2$.

16) $(30a^5 - 21a^4 - 2a^3 + 26a^3 - 80a + 15) : (2a^2 - a + 3)$
$= 15a^3 - 3a^2 - 25a + 5$.

Man entwickle noch folgende Quozienten:

17) $(a^5 + b^5) : (a + b)$;

18) $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$;

19) $(m^5 + 6m^4 + 4m^3 - 4m^2 + m - 1) : (m^2 + 5m + 1)$;

20) $(12a^4 + 5a^3b - 16a^2b^2 - 13ab^3 - 6b^4) : (4a^2 - ab - 6b^2)$;

21) $(4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1) : (2x^2 - 3x + 1)$;

22) $(243a^5 - 405a^4 + 270a^3 - 90a^2 + 15a - 1) : (9a^2 - 6a + 1)$;
23) $(32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 + x^5) : (8 - 12x + 6x^2 + x^3)$;
24) $(a^8 + 2a^7b - 2a^6b^2 - 6a^5b^3 + 6a^3b^5 + 2a^2b^6 - 2ab^7 - b^8)$
$: (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

Nimmt man die dekadische Zahl

$$dr.10^5 + (cr + dq).10^4 + (br + cq + dp).10^3 + (ar + bq + cp).10^2 + (aq + bp).10 + ap,$$

welche sich der leichtern Uebersicht wegen auch so schreiben läßt:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} dr.10^5 + cr & .10^4 + br & .10^3 + ar & .10^2 + aq & .10 + ap \\ + dq & + cq & + bq & + bp & \\ & + dp & + cp & & \end{array}$$

als Dividend, und die Zahl

$$d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$$

als Divisor an, so wird sich durch das allgemeine Divisionsverfahren

$$r.10^2 + q.10 + p$$

als Quozient ergeben, und man wird daraus die Regeln für das Dividiren dekadischer Zahlen ableiten können.

§. 34.

4. Wenn der Dividend ein einfacher und der Divisor ein zusammengesetzter Ausdruck ist.

In diesem Falle kann die Division nicht wirklich verrichtet werden; sie wird bloß angezeigt, indem man den Quozienten in Bruchform ausdrückt. Z. B.:

$$a : (1 - a) = \frac{a}{1 - a}.$$

Es ist oft zweckdienlich, den Quozienten in diesem Falle als eine ohne Ende fortlaufende Reihe von Gliedern, in denen sich eine gewisse Gesetzmäßigkeit kund gibt, darzustellen; man wendet zu diesem Ende das für die Division zweier zusammengesetzter Ausdrücke aufgestellte Verfahren an. So findet man

$$\begin{array}{l} a : (1 - a) = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots \\ a - a^2 \\ \underline{- \;\; +} \\ \quad + a^2 \\ \quad + a^2 - a^3 \\ \quad \underline{- \quad\;\; +} \\ \qquad\quad + a^3 \\ \qquad\quad + a^3 - a^4 \\ \qquad\quad \underline{- \quad\;\; +} \\ \qquad\qquad\quad a^4 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Eben so ist

$$x : (1 + x^2) = x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots$$

Die Entwicklung des Quozienten in eine Reihe kann auch dann angewendet werden, wenn der Dividend zwar zusammengesetzt ist, aber die Division nicht ohne Rest aufgehet. Z. B.

$$(x-1):(x+1)=1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\dots$$

$$\begin{array}{l}
x+1 \\
-\;- \\
\hline
\quad -2 \\
\quad -2-\frac{2}{x} \\
\quad\;\, -\quad + \\
\hline
\qquad +\frac{2}{x} \\
\qquad +\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2} \\
\qquad -\quad\; - \\
\hline
\qquad\qquad -\frac{2}{x^2}
\end{array}$$

Eben so findet man

$$(m^2+n^2):(m^2-n^2)=1+\frac{2n^2}{m^2}+\frac{2n^4}{m^4}+\frac{2n^6}{m^6}+\cdots$$

Es ist Anfängern anzurathen, daß sie die Gesetze, welche in den voranstehenden Reihen vorherrschen, mit Worten ausdrücken.

Eigenschaften des Produkts und des Quozienten.

§. 35.

Das Produkt enthält den einen Faktor so oft, als in dem andern Faktor Einheiten vorkommen; der eine Faktor stellt also einen Theil des Produktes vor, und der andere Faktor ist die Zahl, welche anzeigt, wie oft ein solcher Theil im Produkte als dem Ganzen vorkommt.

1. Wenn ein Theil des Produktes 2, 3, ... m mal so groß wird, als er früher war, die Anzahl dieser Theile aber unverändert bleibt, so wird auch das Ganze, das neue Produkt, 2, 3, ... m mal so groß, als es vorhin war. Das Produkt wird also 2, 3, ... m mal so groß, wenn der eine Faktor 2, 3, ... m mal so groß wird und der andere Faktor ungeändert bleibt; oder:

Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den einen Faktor damit multiplizirt und den andern Faktor ungeändert läßt.

Allgemein ist $(a \times b) \times m = a\,m \times b = a \times b\,m$.

Es wäre daher ganz unrichtig, wenn man, um ein Produkt mit einer Zahl zu multipliziren, jeden Faktor damit multipliziren, und $(a \times b) \times m = a\,m \times b\,m$ setzen würde.

2. Wenn ein Theil des Produktes 2, 3, ... m mal kleiner

wird, und man eben so viele solche Theile beibehält, so wird auch das Ganze, das neue Produkt, 2, 3, ... mmal kleiner als früher ausfallen. Daraus folgt:

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man einen Faktor dadurch dividirt und den andern Faktor ungeändert läßt.

Allgemein $(a \times b):m = (a:m) \times b = a \times (b:m)$.

3. Wenn man einen Theil des Produktes 2, 3, ... mmal so groß, dagegen aber von solchen größern Theilen 2, 3, ... mmal weniger annimmt, so bleibt das Ganze ungeändert.

Ein Produkt wird daher nicht geändert, wenn man den einen Faktor mit einer Zahl multiplizirt, und den andern Faktor durch dieselbe Zahl dividirt.

Allgemein $a \times b = am \times (b:m) = (a:m) \times bm$.

§. 36.

Der Quozient zeigt an, wie oft der Divisor als Theil in dem Dividende als Ganzen enthalten ist.

1. Wird das Ganze 2, 3, ... mmal so groß angenommen, so wird derselbe Theil darin 2, 3 ... mmal so oft enthalten sein; wenn also der Dividend bei ungeändertem Divisor 2, 3, ... mmal so groß wird, so muß auch der Quozient 2, 3, ... mmal so groß werden, als er früher war; oder:

Ein Quozient wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den Dividend damit multiplizirt, den Divisor aber ungeändert läßt.

Allgemein $(a:b) \times m = am:b$.

2. Wenn das Ganze ungeändert bleibt, und man nimmt einen seiner gleichen Theile 2, 3, ... mmal kleiner an, so wird ein solcher Theil in dem Ganzen 2, 3, ... mmal so oft enthalten sein, als einer der frühern Theile.

Ein Quozient wird daher mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den Divisor dadurch dividirt und den Dividend ungeändert läßt.

Allgemein $(a:b) \times m = a:(b:m)$.

Aus diesen beiden Sätzen folgt, daß man einen angezeigten Quozienten auf zweifache Art mit einer Zahl multipliziren könne, entweder indem man den Dividend damit multiplizirt, oder indem man den Divisor dadurch dividirt.

3. Wenn man das Ganze 2, 3, ... mmal kleiner annimmt, so wird derselbe Theil darin auch nicht mehr so oft als früher enthalten sein, sondern die Zahl, welche dieses anzeigt, 2, 3, ... mmal kleiner werden, als sie es vorher war.

Ein Quozient wird daher durch eine Zahl dividirt, wenn man den Dividend dadurch dividirt, und den Divisor unverändert läßt.

Allgemein $(a : b) : m = (a : m) : b$.

4. Wenn das Ganze ungeändert bleibt, und man einen seiner gleichen Theile 2, 3, ... mmal größer annimmt, so wird die Zahl, welche anzeigt, wie oft einer dieser größern Theile in dem ungeänderten Ganzen vorkommt, offenbar 2, 3, ... mmal kleiner, als früher ausfallen. Daraus folgt:

Ein Quozient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Divisor damit multiplizirt, und den Dividend ungeändert läßt.

Allgemein $(a : b) : m = a : bm$.

Ein angezeigter Quozient kann demnach auf zweifache Art durch eine Zahl dividirt werden, entweder indem man den Dividend dadurch dividirt, oder indem man den Divisor damit multiplizirt.

5. Wenn man das Ganze 2, 3, ... mmal so groß annimmt, und wenn zugleich jeder seiner gleichen Theile 2, 3, ... mmal so groß angenommen wird, so wird ein solcher größerer Theil in dem größeren Ganzen eben so oft enthalten sein, als der ungeänderte Theil in dem ungeänderten Ganzen. Wird eben so das Ganze 2, 3, ... mmal kleiner, und auch ein Theil 2, 3, ... mmal kleiner angenommen, so wird ein solcher kleinerer Theil in dem kleineren Ganzen gerade so oft enthalten sein, als der ungeänderte Theil in dem ungeänderten Ganzen.

Ein Quozient bleibt daher beständig, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplizirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Allgemein $a : b = am : bm = (a : m) : (b : m)$.

VI. Folgelehren der Division.

1. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 37.

Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch dieselbe dividirt eine ganze Zahl zum Quozienten gibt. Der Dividend heißt in diesem Falle ein Vielfaches des Divisors, und der Divisor ein Theiler oder ein Maß des Dividends. So ist z. B. 18 durch 6, ab durch a theilbar, ab ist ein Vielfaches von a, und a ist ein Maß von ab.

Durch eins und durch sich selbst ist jede Zahl theilbar. Eine Zahl, welche nur durch eins und durch sich selbst theilbar ist, wird eine **Primzahl** genannt; z. B. 3, 11, 29. Jede durch einen Buchstaben dargestellte Zahl ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angenommen wird, als eine Primzahl anzusehen. Eine Zahl, welche nicht blos durch eins und durch sich selbst, sondern auch noch durch andere Zahlen theilbar ist, heißt eine **zusammengesetzte Zahl**, z. B. 8, 15, abc.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein **gemeinschaftliches Maß** von diesen letztern Zahlen genannt; z. B. 3 ist ein gemeinschaftliches Maß von 12 und 21; m ein gemeinschaftliches Maß von amx, bmy und cmz. Die größte Zahl, durch welche zwei oder mehrere Zahlen theilbar sind, heißt ihr **größtes gemeinschaftliches Maß**; z. B. 12, 36, 60 haben die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinschaftlichen Maßen, 12 aber ist unter diesen das größte; ab ist das größte gemeinschaftliche Maß zwischen 3abm und 5abn.

Zahlen, welche außer der Einheit kein anderes gemeinschaftliches Maß haben, heißen **Primzahlen unter einander**, oder **relative Primzahlen**; z. B. 2, 9, 12; eben so ab, bc, cd, abcd.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein **gemeinschaftliches Vielfaches** von diesen Zahlen; z. B. 20 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 4, 5, 10; 8abcd von 2a, bc, 4d, 8acd. Die kleinste Zahl, welche durch mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ihr **kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches**; so haben 3, 5, 8 die Zahlen 120, 240, 480, . . . zu gemeinschaftlichen Vielfachen, 120 aber ist ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches; eben so ist 15abm das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 5ab und 15m.

a. Allgemeine Sätze.

§. 38.

1. **Haben zwei oder mehrere Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so ist auch ihre Summe dadurch theilbar.**

Es seien a, b und c durch m theilbar, so läßt sich zeigen, daß auch $a + b + c$ durch m theilbar sein müsse. Man setze $a : m = p$, $b : m = q$, $c : m = r$, wo p, q, r, ganze Zahlen vorstellen; so folgt $a = mp$, $b = mq$, $c = mr$. Da gleiche Größen zu gleichen addirt auch gleiche Summen geben, so hat man $a + b + c = mp + mq + mr$; und wenn man die beiden gleichen Ausdrücke durch m dividirt, $(a + b + c) : m = p + p + r$; die Summe $a + b + c$ gibt also durch m dividirt eine ganze Zahl $p + q + r$ zum Quozienten, oder was gleichviel ist, $a + b + c$ ist wirklich durch m theilbar.

2. **Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so ist auch ihr Unterschied dadurch theilbar.**

Es sei m ein gemeinschaftliches Maß von a und b; und zwar

$a:m=p$, $b:m=q$; so hat man $a=mp$, $b=mq$, und durch Subtrakzion $a-b=mp-mq$, oder wenn man zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch m dividirt, $(a-b):m=p-q$, woraus folgt, daß der Unterschied $a-b$ durch m theilbar ist.

3. Wenn eine Zahl durch eine andere Zahl theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache derselben dadurch theilbar.

Es sei a durch m theilbar, und zwar $a:m=p$; man hat $a=mp$, und $ar=mpr$, woraus $ar:m=pr$ folgt; das Vielfache ar von a ist also durch m theilbar.

4. Wenn der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Divisionsrest dadurch theilbar sein.

Es seien a und b durch m theilbar, und es gebe a durch b dividirt den Quozienten q mit dem Reste r; so ist $r=a-bq$. Da a durch m theilbar ist, ferner b, somit auch das Vielfache bq durch m theilbar ist, so muß auch der Unterschied $a-bq$, welcher gleich r ist, durch m theilbar sein.

Aus diesem Satze folgt:

Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Divisor und Rest.

5. Wenn der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Dividend dadurch theilbar sein.

Es gebe a durch b dividirt den Quozienten q mit dem Reste r, und es sei m ein gemeinschaftliches Maß von b und r. Aus dem Begriffe der Division folgt $a=bq+r$. Wenn nun b, somit auch das Vielfache bq, und ferner r durch m theilbar sind, so muß auch die Summe $bq+r$, welche gleich a ist, durch m theilbar sein.

Dieser Satz läßt sich auch so ausdrücken:

Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Divisionsrest ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Dividend und Divisor.

6. Da nach den letzten zwei Sätzen Dividend und Divisor dieselben gemeinschaftlichen Maße unter einander haben, wie der Divisor und der Rest, so folgt:

Das größte gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Rest ist auch das größte gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor.

7. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen wird nicht geändert, wenn man eine derselben durch einen Nichtfaktor der andern multiplizirt oder dividirt.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Begriffe des größten gemeinschaftlichen Maßes zweier Zahlen.

b. Kennzeichen der Theilbarkeit bei besonderen Zahlen.

§. 39.

Ist N eine besondere Zahl, in welcher a, b, c, d, e, ... folgweise die Ziffern an der Stelle der Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, ... bedeuten, so kann man

$$N = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + 10000\,e + \ldots\ldots$$

setzen.

1. Man hat nun, wenn N durch 2 dividirt wird

$$N : 2 = \frac{a}{2} + 5\,b + 50\,c + 500\,d + \ldots\ldots$$

Ist a gleich Null oder durch 2 theilbar, so ist auch N durch 2 theilbar.

Eine Zahl ist also durch 2 theilbar, wenn sie an der Stelle der Einheiten eine der Ziffern 0, 2, 4, 6 oder 8 hat.

Die Zahlen, welche an der Stelle der Einheiten, 0, 2, 4, 6 oder 8 haben, werden gerade Zahlen genannt. Eine gerade Zahl wird, da sie durch 2 theilbar, also ein Vielfaches von 2 ist, allgemein durch 2m ausgedrückt, wo m jede beliebige ganze Zahl vorstellen kann.

Jene Zahlen, welche an der Stelle der Einheiten 1, 3, 5, 7 oder 9 haben, heißen ungerade Zahlen. Da eine ungerade Zahl um 1 größer oder kleiner ist, als eine gerade, so ist 2m + 1 oder 2m — 1 die allgemeine Form für die ungeraden Zahlen.

2. Um das Kennzeichen für die Theilbarkeit durch 3 abzuleiten, bedenke man, daß sich N durch Zerlegung seiner Bestandtheile auch unter folgende Form bringen läßt.

$$N = a + 9b + b + 99c + c + 999d + d + \ldots\ldots$$
$$= a + b + c + d + \ldots + 9b + 99c + 999d + \ldots\ldots$$

Es ist daher

$$N:3 = \frac{a + b + c + d + \ldots\ldots}{3} + 3b + 33c + 333d + \ldots$$

Eine Zahl ist also durch 3 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

Eben so folgt:

$$N:9 = \frac{a + b + c + d + \ldots}{9} + b + 11c + 111d + \ldots$$

d. h. Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 theilbar ist.

3. Man hat ferner:

$$N : 4 = \frac{a + 10b}{4} + 25c + 250d + 2500e + \ldots$$

Da a + 10b die niedrigsten zwei Ziffern als Zahl betrachtet vorstellt, so folgt:

Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn die niedrigsten zwei Stellen durch 4 theilbar sind.

4. Wird N durch 5 dividirt, so hat man

$$N : 5 = \frac{a}{5} + 2b + 20c + 200d + \ldots$$

Ist a gleich Null oder durch 5 theilbar, so ist auch N durch 5 theilbar.

Eine Zahl ist also durch 5 theilbar, wenn sie an der Stelle der Einheiten 0 oder 5 hat.

5. Ferner erhält man

$$N : 10 = \frac{a}{10} + b + 10c + 100d + \ldots$$

Damit N durch 10 theilbar sei, muß $a = 0$ sein.

Eine Zahl ist also durch 10 theilbar, wenn sie rechts eine Null hat.

6. Um das Kennzeichen für die Theilbarkeit durch 11 zu entwickeln, muß man wieder eine zweckmäßige Zerlegung in den Bestandtheilen von N vornehmen; es ist

$$N = a + 11b - b + 99c + c + 1001d - d + 9999e + e + 100001f - f + \ldots$$

oder

$$N = (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots) + 11b + 99c + 1001d + 9999e + 100001f + \ldots$$

Daher

$$N : 11 = \frac{(a + c + e \ldots) - (b + d + f + \ldots)}{11} + b + 9c + 91d + 909e + 9091f + \ldots$$

Der Ausdruck $a + c + e + \ldots$ stellt die Ziffernsumme an der ersten, dritten, fünften, ... überhaupt an den ungeraden Stellen, $b + d + f + \ldots$ dagegen die Ziffernsumme an der zweiten, vierten, sechsten, ... also an den geraden Stellen vor.

Eine Zahl ist demnach durch 11 theilbar, wenn der Unterschied zwischen den Ziffernsummen an den ungeraden und geraden Stellen Null oder eine durch 11 theilbare Zahl ist.

Es gibt auch Kennzeichen für die Theilbarkeit durch andere als die bisher betrachteten Zahlen, aber sie sind verwickelter und in der Ausübung von keinem wesentlichen Vortheile.

c. Zerlegung in Faktoren.

§. 40.

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich in lauter Primfaktoren zerlegen.

Jede zusammengesetzte Zahl muß erstlich in zwei Faktoren zerlegt werden können; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Faktoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; im letztern

Falle wird das Zerlegen so lange fortgesetzt, bis man zuletzt lauter Primzahlen zu Faktoren erhält.

$$\text{Z. B.}\quad 210 = 21 \times 10$$
$$21 = 3 \times 7$$
$$10 = 2 \times 5$$
$$\text{daher}\quad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Um eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, verfährt man auf folgende Art:

Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quozienten dividire man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quozienten, bis man endlich auf einen Quozienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quozient sind die Primfaktoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Es soll z. B. 630 in Primfaktoren zerlegt werden. Man hat folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 = 315 \\ 315 : 3 = 105 \\ 105 : 3 = 35 \\ 35 : 5 = 7 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

also

$$630 = 2 \times 315 = 2 \times 3 \times 105 = 2 \times 3 \times 3 \times 35$$
$$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Bei einfachen algebraischen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfaktoren vor; sind darin Potenzgrößen enthalten, so wird die Wurzel so oft als Faktor gesetzt, als der Exponent Einheiten enthält. Z. B.

$$abc = a.b.c;\ ab^2m^3 = a.b.b.m.m.m.$$

Beispiele.

$$1)\quad \begin{array}{r|l} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$660 = 2.2.3.5.11 \qquad 420 = 2.2.3.5.7$$

$$3)\quad \begin{array}{r|l} 110ab^2 & 2 \\ 55ab^2 & 5 \\ 11ab^2 & 11 \\ ab^2 & a \\ b^2 & b \\ b & b \end{array}$$

$$110ab^2 = 2.5.11.a.b.b.$$

4) $\begin{array}{r|l} 21a^2mx & 3 \\ 7a^2mx & 7 \\ a^2mx & a \\ amx & a \\ mx & m \\ x & x \end{array}$

$$21a^2m^2x = 3 \,.\, 7 \,.\, a \,.\, a \,.\, m \,.\, x.$$

Schwieriger ist es, zusammengesetzte algebraische Ausdrücke in Faktoren zu zerlegen. Hier soll nur der Fall betrachtet werden, wenn alle Glieder des zusammengesetzten Ausdruckes ein gemeinschaftliches Maß haben.

Wenn sämmtliche Glieder eines zusammengesetzten algebraischen Ausdruckes ein gemeinschaftliches Maß haben, so kann derselbe in zwei Faktoren zerlegt werden, indem man das gemeinschaftliche Maß als den einen Faktor heraushebt; der andere Faktor wird gefunden, wenn man den gegebenen Ausdruck durch den herausgehobenen Faktor dividirt.

Beispiele.

1) $3ax - 4bx = x(3a - 4b)$.
2) $20x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x = 4x(5x^3 - 4x^2 + 3x - 1)$.
3) $10x^3y^2 + 15x^2y^3 - 25xy^4 = 5xy^2(2x^2 + 3xy - 5y^2)$.
4) $6a^3b^2x - 3ab^2x^2 + 9a^2b^3x^3 = 3ab^2x(2a^2 - x + 3abx^2)$.

d. Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maßes mehrerer Zahlen.

§. 41.

1. Um das größte gemeinschaftliche Maß zwischen zwei oder mehreren Zahlen zu finden, zerlege man dieselben in ihre Primfaktoren, und hebe unter diesen diejenigen heraus, die in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen, und zwar jeden so oft, als er in allen Zahlen zugleich erscheint. Das Produkt dieser Faktoren ist gewiß ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen andern Faktor hinzufügen würde, durch dieses Produkt nicht mehr alle gegebenen Zahlen theilbar wären.

Beispiele.

1) Man suche das g. g. Maß zwischen 300 und 420.

$300 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5,$
$420 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7,$
g. g. Maß $= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 60.$

2) Es soll das g. g. Maß zwischen 320, 400, 680 gefunden werden.

$$320 = 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 5,$$
$$400 = 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 5\ .\ 5,$$
$$680 = 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 5\ .\ 17,$$
$$\text{g. g. Maß} = 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 5 = 40.$$

3) Es soll das g. g. Maß zwischen $4a^2bc$ und $6abc^2$ gefunden werden.

$$4a^2bc = 2\ .\ 2\ .\ a\ .\ a\ .\ b\ .\ c,$$
$$6abc^2 = 2\ .\ 3\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ c,$$
$$\text{g. g. Maß} = 2abc.$$

4) Das g. g. Maß zwischen $10x^2y^3z^4$, $20x^3y^2z^4$ und $5x^3y^3z^3$ ist $5x^2y^2z^3$.

Man suche noch das g. g. Maß

5) zwischen 108, 450, 540;

6) „ 420, 560, 620, 760;

7) „ $12acdx$, $14a^2cdx$, $16acdx^2$.

§. 42.

2. Das größte gemeinschaftliche Maß zwischen zwei oder mehreren Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Faktoren bestimmt werden.

Es seien erstlich zwei Zahlen a und b, zwischen denen das g. g. Maß gesucht wird, und es sei $a > b$. Man dividire a durch b. Erhält man eine ganze Zahl zum Quozienten, so ist b ein gemeinschaftliches Maß von a und b, weil beide Zahlen durch b theilbar sind, und zwar das größte, weil kein gemeinschaftliches Maß größer sein kann als die kleinere der beiden Zahlen. Ist aber a durch b nicht theilbar, so daß nach der Division noch ein Rest r, übrig bleibt, so weiß man, daß der Dividend a und der Divisor b dasselbe g. g. Maß haben, wie der Divisor b und der Rest r_1; anstatt zwischen a und b, wird man daher zwischen b und r_1, das g. g. Maß suchen, was offenbar leichter ist, da b und r_1 kleinere Zahlen vorstellen als a und b. Zu diesem Ende dividirt man b durch r_1; geht die Division ohne Rest auf, so ist r_1 das g. g. Maß zwischen b und r_1, folglich auch zwischen a und b. Bleibt aber ein Rest r_2, so wird man wieder, anstatt zwischen dem Dividende b und dem Divisor r_1, das g. g. Maß zwischen dem Divisor r_1 und dem Reste r_2 suchen, indem man r_1 durch r_2 dividirt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist aus den eben entwickelten Gründen das gesuchte g. g. Maß zwischen a und b. Daß aber zuletzt die Division ohne Rest aufgehen müsse, ist leicht einzusehen; der jedesmalige Rest ist eine ganze Zahl und wenigstens um 1 kleiner als der Divisor, dieser Rest wird in der folgenden Division zum Divisor, folglich muß der neue Rest noch kleiner ausfallen, so daß im ungünstigsten Falle noch so viel Divisionen, als der Divisor Einheiten enthält, ein Rest $= 0$ herauskommen,

d. i. die Division ohne Rest aufgehen muß. Der vorhergehende Rechnungsgang läßt sich durch folgende Darstellung versinnlichen:

Dividend a,	Divisor b,	Rest r_1,
" b,	" r_1,	" r_2,
" r_1,	" r_2,	" r_3,
" r_2,	" r_3,	" 0,

r_3 ist das g. g. Maß von a und b.

Für die Auffindung des g. g. Maßes zweier Zahlen dient daher folgendes **Verfahren**:

Man dividire die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das g. g. Maß der zwei gegebenen Zahlen. Ist der letzte Divisor 1, so sind die beiden Zahlen relative Primzahlen.

Dieses Verfahren läßt sich vorzüglich bei besondern Zahlen und bei zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken mit Vortheil anwenden. Bei den letztern muß oft, um die nachfolgende Division bequem zu verrichten, der Divisor mit einem Nichtfaktor des Restes multiplizirt, oder der Rest durch einen Nichtfaktor des Divisors dividirt werden, was, wie gesagt wurde, das g. g. Maß nicht ändert.

Beispiele.

1) Man suche das g. g. Maß zwischen 1134 und 3654.

3654 : 1134 = 3 mit dem Reste 252 oder

1134 : 252 = 4 " " " 126

252 : 126 = 2 " " " 0

1134	3654	3
126	252	4
	0	2

g. g. Maß = 126.

2) Man suche das g. g. Maß zwischen 637 und 4277.

637	4277	6
182	455	1
0	91	2
		2

g. g. Maß = 91.

3) Es soll das g. g. Maß zwischen 377 und 848 gefunden werden.

377	848	2
1	94	
—	0	

g. g. Maß = 1; 377 und 848 sind also relative Primzahlen.

4) Zwischen 7774 und 3718 findet man das g. g. Maß 338.

5) Zwischen 27671 und 21708 ist 67 das g. g. Maß.

6) Zwischen 61778 und 35234 ist 158 das g. g. Maß.

7) Es soll das g. g. Maß zwischen $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ und $a^2 - b^2$ gesucht werden.

$$
\begin{array}{l}
(3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2 \\
\;3a^3 \qquad\quad - 3ab^2 \\
\;- \qquad\qquad + \\
\hline
\qquad - 2a^2 + a + 2b^2 + b \\
\qquad - 2a^2 \qquad + 2b^2 \\
\qquad + \qquad\qquad - \\
\hline
\qquad\qquad + a + b \text{ Rest.}
\end{array}
$$

$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$

Das gesuchte g. g. Maß ist also der letzte Divisor $a + b$.

8) Man suche das g. g. Maß zwischen

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ und } 7x^2 + 22x + 16.$$

Damit die Division der beiden Ausdrücke in ganzen Zahlen verrichtet werden könne, multiplizire man den ersten mit 7, welche Zahl kein Maß des zweiten Ausdruckes ist; man hat dann:

$$
\begin{array}{l}
(70x^2 + \;\;98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\
\;70x^2 + 220x + 160 \\
\;- \qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad - 122x - 244 \text{ Rest, durch } - 122 \text{ dividirt, } x + 2.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\
\;7x^2 + 14x \\
\;- \qquad - \\
\hline
\qquad + 8x + 16 \\
\qquad + 8x + 16 \\
\qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das g. g. Maß ist also $x + 2$.

9) Das g. g. Maß zwischen
$4x^3 - 16x^2 + 23x - 20$ und $6x^2 - 7x - 20$
ist $2x - 5$.

10) Das g. g. Maß zwischen
$6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ und $9y^3 - 27y^2 + 35y - 25$
ist $3y^2 - 4y + 5$.

Es soll das g. g. Maß gefunden werden:

11) zwischen 50149 und 51119;
12) „ 3552 und 5143;
13) „ 8658 und 1405;
14) „ 39215 und 73997;
15) „ 55660 und 66055;
16) „ $x^3 - 49x - 120$ und $x^2 + 10x + 25$;
17) „ $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$ und $a^2 - 5ab + 4b^2$;
18) „ $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$
und $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
19) „ $36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3$
und $27a^5b^2 - 18a^4b^2 - 9a^3b^2$;

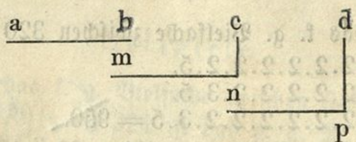
20) zwischen $15x^5 + 10x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy^4$
und $12x^3y^2 + 38x^2y^3 + 16xy^4 - 10y^5$.

§. 43.

Das hier angewendete Verfahren, um das g. g. Maß zwischen zwei Zahlen zu finden, dient auch zur Auffindung des g. g. Maßes zwischen mehreren Zahlen.

Ist das g. g. Maß zwischen den Zahlen a, b, c und d zu finden, so suche man zuerst das g. g. Maß zwischen a und b, dieses sei m; dann suche man das g. g. Maß zwischen m und c, dieses sei n; endlich suche man das g. g. Maß zwischen n und d, welches p heißen mag; p ist dann das g. g. Maß zwischen a, b, c, d.

Man kann dieses durch folgende Zusammenstellung anschaulich machen:



Nach der Voraussetzung enthält m alle gemeinschaftlichen Faktoren von a und b; n enthält alle gemeinschaftlichen Faktoren von m und c, also auch von a, b und c; p endlich enthält alle gemeinschaftlichen Faktoren von n und d, folglich auch von a, b, c und d es ist also p wirklich das g. g. Maß zwischen a, b, c und d.

Beispiele.

1) Man suche das g. g. Maß zwischen 1554, 3552 und 5143.

1554	3552	2
222	444	3
	0	2

Zwischen 1554 und 3552 ist also 222 das g. g. Maß.

222	5143	23
0	703	
	37	

37 ist also das g. g. Maß zwischen 222 und 5143, folglich auch zwischen 1554, 3552 und 5143.

2) Es soll das g. g. Maß zwischen

$$3x^2 - 2xy - 5y^2,\ 2x^2 + 9xy + 7y^2 \text{ und } 2x^2 - 2y^2$$

gefunden werden.

Als das g. g. Maß zwischen $3x^2 - 2xy - 5y^2$ und $2x^2 + 9xy + 7y^2$ erhält man $x + y$.

Zwischen $x + y$ und $2x^2 - 2y^2$ ist ferner $x + y$ das g. g. Maß, welches daher zugleich das g. g. Maß zwischen den gegebenen drei Ausdrücken ist.

e. Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen.

§. 44.

1. Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zwischen zwei oder mehreren Zahlen zu finden, zerlege man sie in ihre Primfaktoren, und nehme aus diesen alle verschiedenen Faktoren, und zwar jeden so oft, als er in irgend einer Zahl am öftesten vorkommt. Das Produkt aus diesen Faktoren ist gewiß ein gemeinschaftliches Vielfaches der gegebenen Zahlen, weil es alle Faktoren einer jeden Zahl in sich enthält; es ist aber auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, weil man keinen jener Faktoren weglassen darf, ohne daß dieses Produkt aufhören würde, durch alle gegebenen Zahlen theilbar zu sein.

Beispiele.

1) Man suche das k. g. Vielfache zwischen 320 und 480.

$$320 = 2.2.2.2.2.2.5,$$
$$480 = 2.2.2.2.2.3.5,$$
k. g. Vielfaches $= 2.2.2.2.2.2.3.5 = \cancel{950}.$ 960

2) Es soll das k. g. Vielfache zwischen 60, 108 und 1050 gefunden werden.

$$60 = 2.2.3.5,$$
$$108 = 2.2.3.3.3,$$
$$1050 = 2.3.5.5.7,$$
k. g. Vielfaches $= 2.2.3.3.3.5.5.7 = 18900.$

3) Es ist das k. g. Vielfache zwischen $6amn$, $10am^2n$ und $5a^2n^3$ zu bestimmen.

$$6amn = 2.3.a.m.n,$$
$$10am^2n = 2.5.a.m.m.n,$$
$$5a^2n^3 = 5.a.a.n.n.n,$$
k. g. Vielfaches $= 2.3.5.a.a.m.m.n.n.n$
$= 30a^2m^2n^3.$

Es ist das k. g. Vielfache zu finden:

4) zwischen 300, 620;
5) „ 120, 168, 192;
6) „ $48a^2xy$, $60ax^2y$, $72axy^2$.

§. 45.

2. Auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von zwei oder mehreren Zahlen kann ohne Zerlegung derselben in Faktoren ausgemittelt werden.

Es seien erstlich zwei Zahlen a und b. Haben diese kein gemeinschaftliches Maß, so ist ihr Produkt ab selbst zugleich ihr k. g. Vielfaches. Sind aber a und b nicht relative Primzahlen, so sei m ihr g. g. Maß, und zwar $a:m = p$, $b:m = q$, wo p und q keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr enthalten können; man hat sofort $a = mp$, $b = mq$. Jedes Vielfache von a muß also die Faktoren m und p, jedes Vielfache von b muß die Faktoren m und q, und daher jedes gemeinschaftliche Vielfache von a und b die Faktoren m, p und q enthalten; jenes Produkt nun, welches nur diese drei Faktoren enthält, wird gewiß das k. g. Vielfache zwischen a und b sein. Dieses k. g. Vielfache mpq läßt sich auch so darstellen:

$$\begin{aligned} mpq &= mp \,.\, q = a(b:m) \\ &= mq \,.\, p = b(a:m). \end{aligned}$$

Das k. g. Vielfache zweier Zahlen wird also gefunden, wenn man zuerst ihr g. g. Maß sucht, durch dieses dann eine von den beiden Zahlen dividirt, und mit dem Quozienten die andere multiplizirt.

Beispiele.

1) Man suche das k. g. Vielfache zwischen 648 und 972.

$$\begin{array}{r|r|l} 648 & 972 & 1 \\ 0 & 324 & 2 \end{array} \qquad 324 \text{ ist das g. g. M.}$$

$$648:324 = 2;\ 972.2 = 1944$$

oder

$$972:324 = 3;\ 648.3 = 1944,$$

$$\text{k. g. Vielfaches} = 1944.$$

2) Man suche das k. g. Vielfache zwischen 880 und 904.

Das g. g. Maß ist 8, daher

$880:8 = 110$; $904.110 = 99440$ das k. g. Vielfache.

3) Es soll das k. g. Vielfache zwischen $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ und $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$ gefunden werden.

Das g. g. Maß zwischen diesen beiden Ausdrücken ist $3a^2x - 2by^2$. Man hat dann

$$(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4) : (3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2$$

und

$$(9a^4x^2 - 4b^2y^4)(3a^2x - 2by^2) = 27a^6x^3 - 12a^2b^2xy^4 - 18a^4bx^2y^2 + 8b^3y^6$$ das k. g. Vielfache.

Man suche das k. g. Vielfache

4) zwischen 240 und 486;

5) „ 561 und 1530;

6) „ 1479 und 1769;

7) „ 1717 und 2222;

8) „ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $x^2 - y^2$;

9) „ $a^2 + 10a + 25$ und $a^3 - 49a - 120$.

§. 46.

Aus der Betrachtung des oben gefundenen Ausdruckes m p q folgt, daß das k. g. Vielfache der zwei Zahlen a und b deren g. g. Maß nur einmal, und zugleich die Quozienten enthält, welche aus der Division der beiden Zahlen durch ihr g. g. Maß hervorgeben.

Auf demselben Grundsatze beruhet auch das Verfahren, um das k. g. Vielfache zwischen mehr als zwei Zahlen zu finden. Haben zwei oder mehrere unter den gegebenen Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kann man, ohne das k. g. Vielfache zu ändern, anstatt dieser Zahlen ihr gemeinschaftliches Maß nur einmal, und zugleich die Quozienten setzen, welche aus der Division jener Zahlen durch das gemeinschaftliche Maß hervorgehen. Ist ferner eine der gegebenen Zahlen ein Maß von einer andern größern, so kann die kleinere Zahl, ohne das k. g. Vielfache zu ändern, ganz unberücksichtiget gelassen werden.

Für die Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen kann demnach folgendes praktische Verfahren angewendet werden:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in einer Reihe neben einander, und lasse die kleinern Zahlen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weg.
2. Man untersuche, ob nicht zwei oder mehrere der übriggebliebenen Zahlen ein gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so hebt man dieses Maß links heraus, und dividirt dadurch alle Zahlen, deren Maß es ist; die Quozienten, so wie die nicht theilbaren Zahlen setzt man in eine darunter befindliche Reihe neben einander.
3. Mit dieser neuen Reihe verfährt man eben so wie mit der ursprünglich aufgestellten, und wiederholt dieses Verfahren so lange, bis man zuletzt eine Reihe erhält, in welcher lauter relative Primzahlen vorkommen.
4. Multiplizirt man dann die in der letzten Reihe befindlichen relativen Primzahlen und die links herausgehobenen Maße mit einander, so ist das Produkt das gesuchte k. g. Vielfache der gegebenen Zahlen.

Beispiele.

1) Es soll das k. g. Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 80 gesucht werden.

	~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, 18, 24, 32, 45, 80,
2	~~9~~, 12, 16, 45, 40,
2	6, 8, 45, 20,
2	~~3~~, 4, 45, 10,
2	2, 45, ~~5~~,

k. g. Vielfaches $= 2.45.2.2.2.2 = 1440$.

2) Man suche das k. g. Vielfache von a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$.

$$\begin{array}{r|llll} & a & 2a^2, & 3ab^2, & 12abm, \\ 2 & & a^2, & 3ab^2, & 6abm, \\ 3 & & a^2, & ab^2, & 2abm, \\ a & & a, & b^2, & 2bm, \\ b & & a, & b, & 2m, \end{array}$$

k. g. Vielfaches $= a.b.2m.2.3.a.b = 12a^2b^2m.$

3) Es soll das k. g. Vielfache zwischen den Zahlen m, $2m^2$, $3n$, $8mn$, $12m(m-n)$ gefunden werden.

$$\begin{array}{r|lllll} & m & 2m^2, & 3n, & 8mn, & 12m(m-n), \\ 2 & & m^2, & 3n, & 4mn, & 6m(m-n), \\ 2 & & m^2, & 3n, & 2mn, & 3m(m-n), \\ 3 & & m^2, & n, & 2mn, & m(m-n), \\ m & & m, & & 2n & m-n, \end{array}$$

k. g. Vielfaches $= m.2n.(m-n).2.2.3.m$
$= 24m^2n(m-n).$

2. Von den Brüchen.

§. 47.

Ein **Bruch** ist eine Zahl, welche einen oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält. Ein Bruch entsteht also, wenn man die Einheit in mehrere gleiche Theile theilt, und von solchen Theilen einen oder mehrere nimmt.

Zur Angabe eines Bruches sind zwei Zahlen erforderlich: die eine, welche anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt wurde, sie heißt der **Nenner**; und die andere, welche angibt, wie viele solcher Theile genommen werden, man nennt sie den **Zähler**. Beim Anschreiben setzt man den Nenner unter den Zähler, und zwischen beiden einen Strich.

In dem Bruche $\frac{a}{b}$ (a bTheile) ist a der Zähler, b der Nenner; der Bruch $\frac{a}{b}$ drückt also aus, daß die Einheit in b gleiche Theile getheilt wurde, und daß man einen solchen Theil amal zu nehmen hat; $\frac{a}{b}$ bedeutet somit den b^{ten} Theil der Einheit amal genommen.

Man unterscheidet **gemeine** und **Dezimalbrüche**. **Dezimalbrüche** heißen diejenigen Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{19}{100}$, $\frac{3251}{1000}$; alle übrigen sind **gemeine** Brüche.

A. Gemeine Brüche.

§. 48.

Die gemeinen Brüche werden in echte und unechte Brüche eingetheilt. Ein echter Bruch ist derjenige, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner; jeder andere Bruch, dessen Zähler entweder gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt ein unechter Bruch. Ein echter Bruch ist kleiner als die Einheit, ein unechter dagegen ist der Einheit gleich oder größer als die Einheit.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruche zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte Zahl; z. B.

$$3\tfrac{5}{8},\quad a + \frac{m}{n},\quad b - \frac{x}{y}.$$

Ein Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche bestehet, dessen Nenner wieder so beschaffen sein kann, heißt ein Kettenbruch. Von solchen Brüchen wird weiter unten besonders die Rede sein.

a) Allgemeine Sätze.

§. 49.

1. Jeder Bruch kann als ein angezeigter Quozient betrachtet werden, worin der Zähler als Dividend und der Nenner als Divisor vorkommt.

Der Bruch $\frac{a}{b}$ bedeutet den b^{ten} Theil der Einheit amal genommen, oder mit a multiplizirt. Man erhält aber den b^{ten} Theil der Einheit, wenn man die Einheit durch b dividirt; also ist $\frac{a}{b} = (1 : b) \,.\, a$. Ein angezeigter Quozient $1 : b$ wird nun mit a multiplizirt, wenn man den Dividend damit multiplizirt; folglich

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Durch den hier erwiesenen Satz ist nun auch das Verfahren gerechtfertiget, nach welchem bei der Division, wenn zuletzt ein Rest übrig bleibt, welcher sich durch den Divisor nicht mehr dividiren läßt, dieser Rest als Zähler eines Bruches angenommen wird, dessen Nenner der Divisor ist. Der Quozient ist in diesem Falle eine gemischte Zahl.

2. Ein Bruch mit seinem Nenner multiplizirt gibt den Zähler.

Es ist $\frac{a}{b} \,.\, b = (a : b) \,.\, b = a : 1 = a,$

§. 50.

3. Um aus einem unechten Bruche die Ganzen herauszuziehen, darf man nur den Zähler durch den Nenner dividiren. Z. B.

$$\frac{8}{8}=1,\quad \frac{17}{5}=3\tfrac{2}{5},\quad \frac{3m}{m}=3,\quad \frac{am+b}{m}=a+\frac{b}{m}.$$

4. Jede ganze Zahl kann in einen Bruch, dessen Nenner gegeben ist, verwandelt werden, wenn man die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner multiplizirt, und dieses Produkt als den Zähler des Bruches annimmt.

Es ist $a = a:1 = am:m = \frac{am}{m}$.

5. Jede gemischte Zahl kann in einen Bruch verwandelt werden, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplizirt, und den Zähler dazu addirt oder davon subtrahirt, je nachdem der Bruch positiv oder negativ ist; diese Zahl ist der Zähler, der Nenner wird ungeändert beibehalten.

Es ist $a+\frac{m}{n}=\left(a+\frac{m}{n}\right):1$. Wird hier Dividend und Divisor mit n multiplizirt, so erhält man $(an+m):n$ oder $\frac{an+m}{n}$; folglich ist $a+\frac{m}{n}=\frac{an+m}{n}$.

Eben so folgt:

$$a-\frac{m}{n}=\left(a-\frac{m}{n}\right):1=(an-m):n=\frac{an-m}{n}.$$

Beispiele.

1) $1+\frac{a-b}{a+b}=\frac{a+b+a-b}{a+b}=\frac{2a}{a+b}$.

2) $x+\frac{1+x^2}{x}=\frac{x^2+1+x^2}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$.

3) $a-1+\frac{a^2+1}{a+1}=\frac{a^2-1+a^2+1}{a+1}=\frac{2a^2}{a+1}$.

4) $m+n-\frac{m^2+n^2}{m+n}=\frac{m^2+2mn+n^2-m^2-n^2}{m+n}=\frac{2mn}{m+n}$.

5) $x^2-2x+2-\frac{x^3-6x^2+5}{x-2}=\frac{x^3-4x^2+6x-4-x^3+6x^2-5}{x-2}$

$$=\frac{2x^2+6x-9}{x-2}.$$

Man verwandle noch folgende gemischte Zahlen in Brüche:

6) $x+y+\frac{2y^2}{x-y}$.

7) $a^2+b^2+\frac{a^4-2b^4}{a^2+b^2}$.

8) $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

9) $1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

10) $x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$.

11) $2x + 1 - \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2 + 4x + 1}$.

12) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a}{a + 1}$.

§. 51.

6. **Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man entweder den Zähler damit multiplizirt und den Nenner ungeändert läßt, oder wenn man den Nenner dadurch dividirt und den Zähler ungeändert läßt.**

Es ist

$$\frac{a}{b} \times m = (a : b) \times m = am : b = \frac{am}{b}$$

oder $\frac{a}{b} \times m = (a : b) \times m = a : (b : m) = \frac{a}{b : m}$.

Die zweite Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren, kann nur dann angewendet werden, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

Beispiele.

1) $\frac{3ab}{m} \times 4c = \frac{12abc}{m}$.

2) $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} \times 5y^2 = \frac{2a^2x^2}{3b^2}$.

3) $\frac{a+b}{m} \cdot (a-b) = \frac{a^2 - b^2}{m}$.

4) $\frac{a-b}{2ab} \cdot 2b = \frac{a-b}{a}$.

5) $\left(a + \frac{b^2 - a^2}{a}\right) \times a = \frac{b^2}{a} \times a = b^2$.

6) $\left(1 + \frac{1-a}{1+a}\right)(1+a) = \frac{2}{1+a} \cdot (1+a) = 2$.

Man entwickle noch die Produkte:

7) $\left\{\frac{x^2 + 2xz + z^2}{4xz} - 1\right\} \cdot 2x$.

8) $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^5 - 5x^3 + 2x} \cdot (3x^2 - 4x - 1)$.

9) $\left(\frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} + 4\right) \cdot -3x^3$.

10) $\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a-1}\right\} \cdot (a-1)$.

11) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2n}{n^2-1}\right\} \cdot n(n+1)$.

12) $\left\{1+\frac{a^2b^2-2abc^2+c^4}{4abc^2}\right\}.(a^2b^2-2abc^2+c^4)$.

Wenn der Zähler eines Bruches ungeändert bleibt, der Nenner aber ohne Ende fort abnimmt, so muß der Werth des Bruches ins Unendliche fort wachsen. Wird also der Nenner unendlich klein, d. i. kleiner als jede noch so kleine angebbare Größe, folglich $=0$, so muß der Bruch $\frac{a}{0}$ unendlich groß, d. i. größer als jede noch so große angebbare Größe sein; eine solche unendlich große Zahl bezeichnet man durch ∞. Es ist demnach

$$\frac{a}{0}=\infty,$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{\infty}=0.$$

§. 52.

7. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man entweder den Zähler dadurch dividirt und den Nenner ungeändert läßt, oder wenn man bei ungeändertem Zähler den Nenner mit jener Zahl multiplizirt.

Es ist

$$\frac{a}{b}:m=(a:b):m=(a:m):b=\frac{a:m}{b},$$

oder $\frac{a}{b}:m=(a:b):m=a:bm=\frac{a}{bm}$.

Die erste Art, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, kann nur dann angewendet werden, wenn der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

Beispiele.

1) $\frac{12amx}{5bc}:-4ax=-\frac{3m}{5bc}$.

2) $\frac{2a}{3my}:3my=\frac{2a}{9m^2y^2}$.

3) $\frac{10m^3n^2}{xy^2}:5m^2n^2=\frac{2m}{xy^2}$.

4) $\left(1+\frac{b}{1-b}\right):(1+b)=\frac{1}{1-b}:(1+b)=\frac{1}{1-b^2}$.

5) $\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right):2m=\frac{2m}{m+n}:2m=\frac{1}{m+n}$.

Man verrichte noch folgende Divisionen:

6) $\left\{a + b + \frac{a-b}{a+b}\right\} : (a + b).$

7) $\left\{\frac{mx^2}{a^2 - x^2} - m\right\} : (2x^2 - a^2).$

8) $\frac{4 + 9x - 5x^2 + x^2}{3 - 4x} : (2 - x + 3x^2).$

9) $\frac{9a^2 - 18ab + 6a + 30b - 35}{2a - 3b} : (3a - 5).$

10) $\frac{1 - 2m + 3m^2 - 4m^3}{1 - 2m + m^2} : (1 + 2m + m^2).$

§. 53.

8. Ein Bruch bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Es ist

$$\frac{a}{b} = a:b = am : bm = \frac{am}{bm},$$

$$\text{und } \frac{a}{b} = a:b = (a:m) : (b:m) = \frac{a:m}{b:m}.$$

Mit Hilfe des ersten Theiles dieses Satzes kann man jeden Bruch ohne Aenderung seines Werthes auf einen neuen Nenner bringen, sobald dieser neue Nenner ein Vielfaches des frühern Nenners ist; man darf nur den neuen Nenner durch den alten dividiren, und mit dem Quozienten den alten Zähler multipliziren; das Produkt ist der neue Zähler. Es soll z. B. der Bruch $\frac{4}{5}$ auf den Nenner 40 gebracht werden; man hat

$$40 : 5 = 8;\ 4 \times 8 = 32, \text{ also } \frac{4}{5} = \frac{32}{40}.$$

Um $\frac{a}{b}$ auf den Nenner bm zu bringen, hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} = \frac{am}{bm}.$$

Auf dieselbe Art können auch mehrere Brüche auf einen neuen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden, nur muß dieser ein gemeinschaftliches Vielfaches aller gegebenen Nenner sein. Gewöhnlich bringt man die Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; zu diesem Zwecke sucht man zuerst das k. g. Vielfache aller gegebenen Nenner, welches der neue k. g. Nenner ist; um sodann den neuen Zähler eines jeden Bruches zu finden, dividirt man den neuen Nenner durch den alten, und multiplizirt mit dem Quozienten den alten Zähler.

Beispiele.

1) Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{a}{b}, \frac{3m}{4bc}, \frac{4n}{c^2d}$ auf den k. g. Nenner gebracht werden.

Das k. g. Vielfache aller Nenner, somit der neue Nenner, ist $4bc^2d$. Man hat dann

$$\begin{array}{ll} 4bc^2d:2 = 2bc^2d; & 2bc^2d \times 1 = 2bc^2d \\ 4bc^2d:b = 4c^2d; & 4c^2d \times a = 4ac^2d \\ 4bc^2d:4bc = cd; & cd \times 3m = 3cdm \\ 4bc^2d:c^2d = 4b; & 4b \times 4n = 16bn \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r|l} & 4bc^2d \\ \hline \frac{1}{2} \quad 2bc^2d & 2bc^2d \\ \frac{a}{b} \quad 4c^2d & 4ac^2d \\ \frac{3m}{4bc} \quad cd & 3cdm \\ \frac{4n}{c^2d} \quad 4b & 16bn \end{array}$$

also

$$\frac{1}{2} = \frac{2bc^2d}{4bc^2d}, \quad \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4ac^2d}{4bc^2d}, \quad \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

2) Man soll die Brüche

$$\frac{a-1}{a+1}, \quad \frac{a-2}{a+2}, \quad \frac{a-3}{a+3}$$

auf den k. g. Nenner bringen.

Das k. g. Vielfache der Nenner ist

$$(a+1)(a+2)(a+3) = a^3 + 6a^2 + 11a + 6.$$

Man hat dann

$$\begin{array}{r|l} & (a+1)(a+2)(a+3) \\ \hline \frac{a-1}{a+1} \quad (a+2)(a+3) & (a-1)(a+2)(a+3) = a^3 + 4a^2 + a - 6 \\ \frac{a-2}{a+2} \quad (a+1)(a+3) & (a-2)(a+1)(a+3) = a^3 + 2a^2 - 5a - 6 \\ \frac{a-3}{a+3} \quad (a+1)(a+2) & (a-3)(a+1)(a+2) = a^3 - 7a - 6 \end{array}$$

folglich

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{a^3+4a^2+a-6}{a^3+6a^2+11a+6},$$
$$\frac{a-2}{a+2}=\frac{a^3+2a^2-5a-6}{a^3+6a^2+11a+6},$$
$$\frac{a-3}{a+3}=\frac{a^3-7a-6}{a^3+6a^2+11a+6}.$$

Man bringe noch folgende Brüche auf den k. g. Nenner:

3) $\frac{a}{1+a}$, $\frac{a}{1-a}$, $\frac{a^2}{1-a^2}$, $\frac{a^3}{1+2a+a^2}$.

4) $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x^2+2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x+1}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Wird Zähler und Nenner eines Bruches mit -1 multiplizirt, so werden dadurch die Zeichen im Zähler und Nenner in die entgegengesetzten verwandelt. Ein Bruch wird demnach nicht geändert, wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt. Z. B.:

$$\frac{y-x}{a-b}=\frac{x-y}{b-a};\quad \frac{m-n}{-q}=\frac{n-m}{q}.$$

Die Formänderung eines Bruches durch die Multiplikazion von Zähler und Nenner dient auch dazu, um einem Bruche, dessen Zähler und Nenner selbst wieder gebrochene Zahlen sind, die Form eines gewöhnlichen Bruches zu geben; man darf nur die zwei Bestandtheile des Bruches mit dem k. g. Vielfachen der beiden Nenner multiplizieren. Z. B.:

$$1)\ \frac{\frac{a}{m+n}}{\frac{a-b}{m-n}}=\frac{\frac{a}{m+n}\cdot(m+n)(m-n)}{\frac{a-b}{m-n}\cdot(m+n)(m-n)}=\frac{a(m-n)}{(a-b)(m+n)}.$$

$$2)\ \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}}=\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot(x+1)(x-1)}{\frac{x}{x^2-1}\cdot(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{x}.$$

$$3)\ \frac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\ldots\qquad 4)\ \frac{x-\frac{x^2-2x+3}{x}}{x-\frac{x^2-3x-2}{x}}=\ldots$$

Mit Hilfe des zweiten Theils des obigen Satzes kann man einen Bruch, dessen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl theilbar sind, abkürzen; man darf nur Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß dividiren. Z. B.:

$$\frac{4am}{6bn}=\frac{2am}{3bn},\quad \frac{12a^2bx^2}{15acx^2}=\frac{4ab}{5cx}.$$

b) Rechnungsoperazionen mit gemeinen Brüchen.

§. 54.

Damit Brüche addirt werden können, müssen sie einen gemeinschaftlichen Nenner haben. Hat man $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ zu addiren, so hat man den mten Theil der Einheit zuerst amal, dann bmal, also zusammen (a + b)mal zu nehmen; folglich

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m},$$

d. h. Brüche von gleichen Nennern werden addirt, wenn man die Zähler addirt, und die Summe der Zähler zum Zähler annimmt, als Nenner aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

Beispiele.

1) $\frac{a+b}{n} + \frac{a-b}{n} = \frac{a+b+a-b}{n} = \frac{2a}{n}$.

2) $\frac{a+b+c}{3m} + \frac{a-b}{3m} + \frac{a-c}{3m} = \frac{a}{m}$.

3) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{anp}{mnp} + \frac{bmp}{mnp} + \frac{cmn}{mnp} = \frac{anp+bmp+cmn}{mnp}$.

4) $\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{3} = \frac{3m+3n}{6} + \frac{2m-2n}{6} = \frac{5m+n}{6}$.

5) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)(a+b)+(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$.

6) $n + \frac{1}{1+n} + \frac{1+n^2}{1-n} = \frac{2+n+n^2}{1-n^2}$.

7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}$.

8) $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{y^2+1}{y^2-1} + \frac{y^2-2y-1}{y^2+2y+1} = \frac{4y^3+4y+4}{y^3+y^2-y-1}$.

9)
$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c \\ \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c \\ \hline \frac{7}{6}a + \frac{17}{12}b + \frac{31}{20}c \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{l} \frac{3x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{9} \\ \frac{5x^2}{6} - \frac{3xy}{5} + \frac{7y^2}{12} \\ \hline \frac{19x^2}{12} - \frac{19xy}{15} + \frac{25y^2}{36}. \end{array}$$

Man entwickle noch folgende Summen:

11) $\frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{2(x-y)}$;

12) $\frac{2-3x^2}{3+4x^2} + \frac{6-8x^2}{2+3x^2}$;

13) $\frac{5a+8b}{a+b} + \frac{3a-b}{a-b} + \frac{a-4b}{a+b} + \frac{a-3b}{a-b}$;

14) $\frac{3x^2-5ax}{2x-3a} + x - 2a + \frac{x^2+ax}{5x+a}$;

15) $\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}y + (\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}y) + (\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y)$;

16) $\frac{a-2b+3c}{a+b+c} + \frac{3a+b+2c}{a+b-c} + \frac{2a+2b-c}{a-b+c}$.

§. 55.

Beim Subtrahiren der Brüche wird vorausgesetzt, daß dieselben, wenn sie nicht einen gemeinschaftlichen Nenner haben, auf einen solchen gebracht wurden. Ist nun $\frac{b}{m}$ von $\frac{a}{m}$ zu subtrahiren, so hat man amal den m^{ten} Theil der Einheit, weniger bmal den m^{ten} Theil der Einheit, also $(a-b)$mal den m^{ten} Theil; folglich

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m},$$

d. h. **Brüche von gleichen Nennern werden subtrahirt, wenn man die Zähler subtrahirt, und unter den Rest als Zähler, den gemeinschaftlichen Nenner schreibt.**

Beispiele.

1) $\frac{a+b}{m}-\frac{a-b}{m}=\frac{a+b-a+b}{m}=\frac{2b}{m}$,

2) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$,

3) $x-\frac{a}{2b}=\frac{2bx}{2b}-\frac{a}{2b}=\frac{2bx-a}{2b}$,

4) $\frac{a^2+2a-1}{a^2-2a+1}-1=\frac{a^2+2a-1-a^2+2a-1}{a^2-2a+1}=\frac{4a-2}{a^2-2a+1}$,

5) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$,

6) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-2}-\frac{4x-3}{x-3}$

$$=\frac{2x(x-2)(x-3)+(3x+1)(x-1)(x-3)-(4x-3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+9}{x^3-6x^2+11x-6},$$

7)
$$\begin{array}{rrr} \frac{2a}{3} & -\frac{3b}{4} & -\frac{4c}{5} \\ \frac{a}{2} & -\frac{2b}{3} & +\frac{3c}{4} \\ - & + & - \\ \hline \frac{a}{6} & -\frac{b}{12} & -\frac{31c}{20}, \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{rrr} \frac{x^3}{4} & -\frac{3x^2}{5} & -\frac{4x}{9} \\ \frac{x^3}{4} & -\frac{2x^2}{3} & +\frac{2x}{3} \\ - & + & - \\ \hline & \frac{x^2}{15} & -\frac{10x}{9}. \end{array}$$

Man verrichte noch folgende Subtrakzionen:

9) $\frac{a^2+5ab-b^2}{a^2+4ab+4b^2}-\frac{a-b}{a+2b}$;

10) $\frac{x^2-5xy+y^2}{8x^3-8x^2y+2xy^2}-\frac{x-3y}{4x^2-y^2}$;

11) $\frac{3a^2-2ax}{2a+3x}-a+2x-\frac{2a^2-3ax}{3a+2x}$;

12) $\left(\frac{5a^2}{4}-\frac{4ab}{3}+\frac{3b^2}{2}\right)-\left(\frac{4a^2}{5}-\frac{3ab}{4}-\frac{2b^2}{3}\right)$;

13) $x-3+\frac{2x+4}{5}-\frac{3x^2-2x+1}{x+1}-\frac{x^2+1}{x-1}$;

14) $1-\frac{a^2+a+1}{a^2-1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2-a+1}{a^2+1}+\frac{a-1}{a+1}$.

§. 56.

1. Wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizirt wird, ist bereits angeführt worden.

2. Es sei irgend eine Zahl Z mit einem Bruche $\frac{m}{n}$ zu multipliziren. Z mit $\frac{m}{n}$ multipliziren heißt, aus Z auf dieselbe Art ein Resultat bilden, wie $\frac{m}{n}$ aus der Einheit entstanden ist; $\frac{m}{n}$ ist aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe in n gleiche Theile theilte, und einen solchen mmal setzte, oder was gleichviel ist, indem man die Einheit durch n dividirte und den Quozienten mit m multiplizirte, nämlich $\frac{m}{n} = (1:n) \times m$; man wird daher auch Z durch n dividiren, und den Quozienten mit m multipliziren; folglich

$$Z \times \frac{m}{n} = (Z:n) \times m.$$

a) Bedeutet nun Z eine ganze Zahl a, so hat man

$$a \times \frac{m}{n} = (a:n) \times m = \frac{a}{n} \times m = \frac{am}{n};$$

d. h. eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multiplizirt, wenn man sie mit dem Zähler multiplizirt und das Produkt durch den Nenner dividirt.

b) Stellt Z einen Bruch $\frac{a}{b}$ vor, so ist

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) \times m = \frac{a}{bn} \times m = \frac{am}{bn};$$

d. h. ein Bruch wird mit einem Bruche multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizirt, und das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividirt.

Da $a \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$ und $\frac{m}{n} \times a = \frac{am}{n}$, so ist auch

$$a \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times a;$$

eben so ist wegen $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$ und $\frac{m}{n} \times \frac{a}{b} = \frac{am}{bn}$ auch

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times \frac{a}{b}.$$

Der für ganze Zahlen bewiesene Satz, daß zwei Faktoren in jeder Ordnung multiplizirt dasselbe Produkt geben, gilt also auch in dem Falle, wenn einer oder beide Faktoren Brüche sind.

Beispiele:

1) $(a-2b+3c)\times\frac{2m}{3n}=\frac{2am-4bm+6cm}{3n}$,

2) $(a-x)\times\frac{a+x}{ax}=\frac{a^2-x^2}{ax}$,

3) $3ax\times\left(a-b+\frac{c}{3ax}\right)=3ax\times\frac{3a^2x-3abx+c}{3ax}$
$=3a^2x-3abx+c$,

4) $\frac{2ab}{cd}\times-\frac{3ax}{cm}=-\frac{6a^2bx}{c^2dm}$,

5) $\frac{a+b}{m-n}\times\frac{a-b}{m+n}=\frac{a^2-b^2}{m^2-n^2}$,

6) $\left(1+\frac{b}{a}\right).\frac{a-b}{2b}=\frac{a+b}{a}.\frac{a-b}{2b}=\frac{a^2-b^2}{2ab}$,

7) $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(a-\frac{2b}{3c}\right)=\frac{3a^2c^2+abc-2b^2}{3c^2}$,

8) $\left(\frac{8a-3b}{3a+2b}-2\right)\left(2+\frac{2a-9b}{4a+7b}\right)=\frac{20a^2-60ab-35b^2}{12a^2+29ab+14b^2}$,

9) $\frac{6a}{7b}.\frac{2b}{3d}.-\frac{14c}{15g}.-\frac{5d}{6a}=\frac{4c}{9g}$,

10) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right).\frac{a}{a+b}.\frac{b}{b-a}=\frac{a}{b}$,

11) $\left(\frac{a^3}{2b}-\frac{a}{3b^2}+\frac{a}{4b^3}\right).\frac{3a^2}{4b^2}=\frac{3a^5}{8b^3}-\frac{a^4}{4b^4}+\frac{3a^3}{16b^5}$,

12) $\left(\frac{3a}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{c}{2}\right).\left(\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)=$
$=\frac{a^2}{2}+\frac{17ab}{144}-\frac{4ac}{15}-\frac{b^2}{2}+\frac{109bc}{120}-\frac{2c^2}{5}$,

13) $\left[\frac{p^2x^2}{2q^2y^2}+\frac{2px^3}{3q^3y}-\frac{3x^4}{4q^4}\right]\left[\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2}-\frac{3px^3}{2q^3y}+\frac{2x^4}{q^4}\right]=$
$=\frac{2p^4x^4}{3q^4y^4}-\frac{59p^3x^5}{32q^5y^3}-\frac{2p^2x^6}{q^6y^2}+\frac{15px^7}{8q^7y}-\frac{3y^8}{2q^8}$.

Man entwickle noch folgende Produkte:

14) $\frac{12x^3-3x}{25x^2+10x+1}.(5x+1)$;

15) $\frac{2a^2-ax}{ax-x^2}.\frac{a^2x^3-ax^3}{2a-x}$;

16) $\frac{x^2+2x+4}{x^4-2x^2+4}.\frac{x^6+8}{x^3-9}$;

17) $\left(\frac{x+m}{x}-\frac{2x}{x-m}\right).\frac{x-m}{x^2+m^2}$;

18) $\left(\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right).\frac{x^2-1}{x}$;

19) $\left(\frac{5x^2}{3}+\frac{2x}{5}-2\right)\left(\frac{7x^2}{10}-\frac{5x}{4}+\frac{2}{3}\right)$;

20) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a-1}-\frac{3}{a+1}-\frac{4}{a+2}\right).\frac{a^2-1}{a^2+5a-6}$.

§. 57.

1. Das Verfahren für die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl ist bereits oben abgeleitet worden.

2) Es sei nun irgend eine Zahl Z durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ zu dividiren und der Quozient werde einstweilen durch x ausgedrückt, also $Z : \frac{m}{n} = x$. Der Quozient muß mit dem Divisor multiplizirt wieder den Dividend geben, also ist $x \cdot \frac{m}{n} = Z$. Wenn man diese zwei gleichen Ausdrücke mit n multiplizirt, so müssen auch die Produkte gleich sein, folglich $x \cdot m = Z \cdot n$; und wenn man diese letzten Größen wieder durch m dividirt, so müssen eben so auch die Quozienten gleich sein, nämlich $x = (Z \cdot n) : m$. Es ist also

$$Z : \frac{m}{n} = Z \times n : m$$

a) Stellt Z eine ganze Zahl a vor, so ist

$$a : \frac{m}{n} = (a \times n) : m = a \times \frac{n}{m}.$$

b) Bedeutet Z einen Bruch $\frac{a}{b}$, so ist eben so

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \times n\right) : m = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m}.$$

Da nun $\frac{n}{m}$ durch die Umkehrung des Divisors $\frac{m}{n}$ entsteht, so kann man sagen:

Eine Zahl (eine ganze Zahl oder ein Bruch) wird durch einen Bruch dividirt, wenn man dieselbe mit dem umgekehrten Bruche multiplizirt.

Für die Division eines Bruches durch einen Bruch kann auch noch ein anderes Verfahren aufgestellt werden; es ist nämlich

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \times n\right) : m = \frac{a}{b : n} : m = \frac{a : m}{b : n},$$

d. h. ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, wenn man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner, und dann den Quozienten der Zähler durch den Quozienten der Nenner dividirt.

Dieses letztere Verfahren des Dividirens kann übrigens nur dann angewendet werden, wenn Zähler und Nenner des Dividends beziehungsweise durch Zähler und Nenner des Divisors theilbar sind.

Beispiele.

1) $(a^2-b^2):\frac{a+b}{a-b}=(a^2-b^2)\times\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{a+b}$
$$=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2,$$

2) $3y:\left(1-\frac{y}{x}\right)=3y:\frac{x-y}{x}=3y\times\frac{x}{x-y}=\frac{3xy}{x-y},$

3) $\frac{2ab}{3cd}:-\frac{5mn}{7pq}=\frac{2ab}{3cd}\times-\frac{7pq}{5mn}=-\frac{14abpq}{15cdmn},$

4) $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}:\frac{a-b}{c+d}=\frac{a+b}{c-d},$

5) $\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(a-\frac{b}{c}\right)=\frac{ac+b}{c}:\frac{ac-b}{c}=\frac{ac+b}{ac-b},$

6) $\frac{5a^2-24ab-5b^2}{ab}:\left(1-\frac{5b}{a}\right)=\frac{5a^2-24ab-5b^2}{ab-5b^2},$

7) $\left(3x+\frac{4x^2-3x+2}{x^2+2x-1}\right):\left(2x-\frac{x-3}{x+3}\right)=$
$$=\frac{3x^4+19x^3+24x^2-16x+6}{2x^4+9x^3+11x^2+x-3},$$

8) $\left(\frac{3x^2}{4y}-\frac{9x^2}{25}+\frac{xy}{10}\right):\frac{3x}{5y}=\frac{5x^2}{4}-\frac{3xy}{5}+\frac{y^2}{6},$

9) $\left(\frac{2a^2}{9}-\frac{ax}{12}-\frac{3x^2}{16}\right):\left(\frac{2a}{3}-\frac{3x}{4}\right)=\frac{a}{3}+\frac{x}{4}$

$$\frac{2a^2}{9}-\frac{ax}{4}$$
$$-\;+$$
$$\frac{ax}{6}-\frac{3x^2}{16}$$
$$\frac{ax}{6}-\frac{3x^2}{16}$$
$$-\;+$$
$$0$$

10) $\left(\frac{8x^6}{27y^3}-\frac{27a^3}{8b^6}\right):\left(\frac{2x^2}{3y}-\frac{3a}{2b^2}\right)=\frac{4x^4}{9y^2}+\frac{ax^3}{b^2y}+\frac{9a^2}{4b^4}.$

Man führe noch folgende Divisionen aus:

11) $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3}:-\frac{14a^2y^2z^2}{45b^3c^2x};$

12) $\left\{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right\}:\frac{ab}{a^2-b^2};$

13) $\frac{a^4+6a^3y+12a^2y^2+8ay^3}{a^3y-27y^4}:\frac{a^3+4a^2y+4ay^2}{a-3y};$

14) $\left[\frac{a^2-2ab}{4a^2b-b^3}-\frac{3ab-b^2}{4a^3-4a^2b+ab^2}\right]:\left[\frac{3a^2}{8a^3-b^3}+\frac{5a}{12a^2-3b^2}\right];$

15) $\left(\frac{x^9}{27}-\frac{8a^6}{125}\right):\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2a^2}{5}\right);$

16) $\left\{\frac{16a^6}{25m^2}+\frac{4a^3c^5}{3mp}-\frac{9b^2}{n^2}+\frac{25c^{10}}{36p^2}\right\}:\left\{\frac{4a^3}{5m}-\frac{3b^4}{n}+\frac{5c^5}{6p^2}\right\}.$

B. Dezimalbrüche.

§. 58.

Die Dezimalbrüche werden auf eine eigenthümliche Art angeschrieben; man schreibt nämlich nur den Zähler an, und schneidet in demselben von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen Punkt, den Dezimalpunkt, ab, als der Potenzexponent von 10 im Nenner Einheiten enthält, oder was gleichviel ist, als im Nenner Nullen vorkommen; sollten nicht genug Ziffern vorhanden sein, um sie abschneiden zu können, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt. Z. B.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78\cdot317,$$

$$\frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0\cdot5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0\cdot00037.$$

Die Ziffern rechts nach dem Dezimalpunkte werden Dezimalen genannt.

Heißt überhaupt A die Ziffernreihe des Zählers, so bedeutet

$\frac{A}{10^2}$ einen Dezimalbruch mit 2 Dezimalen

$\frac{A}{10^3}$ " " " 3 "

allgemein $\frac{A}{10^m}$ " " " m "

Um die Bedeutung der Ziffern eines Dezimalbruches zu ermitteln, betrachten wir den Dezimalbruch $\frac{A}{10^4}$, welcher 4 Dezimalen enthält; die Zahl vor dem Dezimalpunkte heiße m, und die Dezimalziffern in der Ordnung gegen die Rechte seien a, b, c, d; so ist

$$A = m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

daher

$$\frac{A}{10^4} = \frac{m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d}{10^4}$$

$$= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}.$$

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Dezimalpunkte steht, eine ganze Zahl; die erste Dezimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

Z. B. $34\cdot781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000}$

$$= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}.$$

Daraus ergibt sich nun auch die Art und Weise, einen Dezimalbruch zu lesen; man spricht nämlich zuerst die Ganzen vor dem Dezimalpunkte aus, und dann jede Dezimalstelle einzeln mit Hinzufügung ihres Nenners. Man kann den Nenner der einzelnen Dezimalen beim Aussprechen auch weglassen, und nur alle Dezimalziffern, 0 nicht ausgenommen, in der Ordnung nennen.

Der Werth eines Dezimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts beliebig viele Nullen anhängt. Es ist z. B.

$$\frac{23}{100} = \frac{230}{1000} = \frac{2300}{10000} = \frac{23000}{100000} = \ldots$$

oder

$$0{\cdot}23 = 0{\cdot}230 = 0{\cdot}2300 = 0{\cdot}23000 = \ldots$$

a) Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch und umgekehrt.

§. 59.

Man kann jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln. Es ist nämlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,.\,10^m}{b\,.\,10^m} = \frac{a\,.\,10^m : b}{10^m} = \frac{q}{10^m},$$

wenn der Quozient $a\,.\,10^m : b = q$ gesetzt wird. Jeder gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ kann daher in einen Dezimalbruch verwandelt werden, wenn man den Zähler a mit irgend einer Potenz von 10 multiplizirt, welches geschieht, wenn man zu a so viele Nullen hinzusetzt, als der Exponent dieser Potenz Einheiten enthält, und dann dieses Produkt durch den Nenner b dividirt; dieser Quozient q ist dann der Zähler des gesuchten Dezimalbruches $\frac{q}{10^m}$, in welchem so viele Dezimalstellen vorkommen, als dem Zähler a Nullen angehängt wurden. Es ist übrigens nicht nothwendig, daß man zum Zähler a gleich die ganze Anzahl von Nullen hinzusetze; man kann dieselben auch nach und nach zu den einzelnen Divisionsresten hinzufügen.

Beispiele.

1) $\frac{3}{4} = 3{\cdot}0 : 4 = 0{\cdot}75,$
   20
   ″

2) $\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2{\cdot}632,$
   790
   400
   250
   ″ ″

3) $\frac{12347}{80} = 12347 : 80 = 154{\cdot}3375.$

Damit sich ein gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Dezimalbruch ganz genau verwandeln lasse, muß $a \,.\, 10^m$ durch b theilbar sein. Sind nun a und b relative Primzahlen, so ist dieses nur dann möglich, wenn 10^m durch b theilbar ist, d. h. wenn b keinen von 2 und 5 verschiedenen Faktor enthält.

In allen Fällen, wo der Nenner b außer 2 und 5 noch andere Faktoren enthält, kann der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ durch keinen Dezimalbruch vollkommen genau dargestellt werden. Es läßt sich jedoch immer ein Dezimalbruch angeben, welcher von dem gegebenen gemeinen um weniger verschieden ist, als jede noch so kleine gegebene Größe. Denn, ist $a \,.\, 10^m$ durch b nicht theilbar, so muß der Quozient q eine gemischte Zahl sein. Setzen wir also

$$\frac{a \,.\, 10^m}{b} = q = p + \frac{r}{b},$$

wo $r < b$ ist; wir erhalten daraus $\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b \,.\, 10^m}$, und daher $\frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b \,.\, 10^m}$. Da nun $r < b$, also $\frac{r}{b} < 1$ ist, so muß auch $\frac{r}{b \,.\, 10^m} < \frac{1}{10^m}$ sein. Der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ und dem Dezimalbruche $\frac{p}{10^m}$ ist also kleiner, als $\frac{1}{10^m}$; ist $m = 3$, so ist der Unterschied kleiner als $\frac{1}{10^3} = 0{\cdot}001$, für $m = 6$ ist der Unterschied kleiner als $0{\cdot}000001$, für $m = 10$ kleiner als $0{\cdot}0000000001$. Man sieht also, daß, je größer m genommen wird, der Dezimalbruch $\frac{p}{10^m}$ um so weniger von dem gemeinen $\frac{a}{b}$ verschieden sei, so wie, daß wenn m hinlänglich groß angenommen wird, der Unterschied kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine Größe.

Bei praktischen Rechnungen, wo es sich nur um die Ausmittelung einiger Dezimalen handelt, entwickelt man den Dezimalbruch nur so weit, als es das Bedürfniß der Rechnung erfordert; vergrößert jedoch die letzte beibehaltene Dezimale um 1, wenn die nächste darauf folgende Dezimale, die man schon vernachlässiget, 5 oder größer als 5 sein sollte. Z. B.

4) $\frac{23}{78} = 23{\cdot}0 : 78 = 0{\cdot}29487\ldots$

```
740
 380
  680
  560
   14
```

Da der Nenner 78 keine Zahl ist, in der blos 2 und 5 als Faktoren vorkämen, so wird die Division nie ohne Rest aufgehen, und es läßt sich daher $\frac{23}{78}$ durch einen Dezimalbruch nie vollkommen genau, sondern nur näherungsweise bestimmen, und zwar ist der Fehler, den man begeht, wenn man bei der 3ten, 4ten, 5ten Dezimale stehen bleibt, beziehungsweise kleiner als $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$. Braucht man für irgend einen praktischen Zweck nur 4 Dezimalstellen, so würde man $\frac{23}{78} = 0·2949$ setzen, wo die letzte Dezimale um 1 vergrößert erscheint, weil die nächste vernachlässigte Dezimale 7 größer als 5 ist.

Man verwandle noch folgende gemeine Brüche in Dezimalbrüche:

5) $\frac{13}{16}$; 6) $\frac{5}{11}$; 7) $\frac{21}{32}$; 8) $\frac{26}{36}$;

9) $\frac{137}{25}$; 10) $\frac{26}{111}$; 11) $\frac{36}{37}$; 12) $\frac{169}{350}$.

§. 60.

Wenn ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Dezimalbruch darstellen läßt, näherungsweise in einen Dezimalbruch verwandelt wird, so müssen bei der Entwicklung einige Dezimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehren. Dieses folgt unmittelbar aus der Natur des Verfahrens. Der Rest muß nämlich bei der Division immer kleiner sein, als der Divisor; man kann daher nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es ganze Zahlen gibt, welche kleiner sind, als der Divisor. Es muß daher im allerungünstigsten Falle wenigstens unter so vielen Resten, als der Divisor Einheiten enthält, einer der vorigen Reste zum Vorschein kommen, woraus sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quozienten und dieselben Reste, wie vorher, ergeben müssen. Z. B.

$\frac{7}{15} = 7·0 : 15 = 0·46666\ldots$ $\frac{3}{7} = 3·0 : 7 = 0·428571\,428\ldots$

100	20
100	60
100	40
10	50
	10
	30
	20
	60
	4

Solche Dezimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, heißen *periodische*; die immer wiederkehrende Ziffernreihe nennt man die *Periode*, welche stets weniger Ziffern enthalten muß, als in dem Nenner des verwandelten Bruches Einheiten vorkommen. Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen; es ist also

$$\frac{7}{15} = 0{\cdot}4\dot{6}; \quad \frac{3}{7} = 0{\cdot}\dot{4}2857\dot{1}.$$

§. 61.

Bei der Verwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn der Dezimalbruch ein endlicher ist.

Da braucht man den Dezimalbruch nur in Form eines gemeinen Bruches anzuschreiben, und diesen, wenn es angehet, abzukürzen.

Z. B. $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, $31{\cdot}325 = \frac{31325}{1000} = \frac{6265}{200} = \frac{1253}{40}$.

2. Wenn der Dezimalbruch ein periodischer ist, worin der Periode keine andere Dezimale vorangehet.

Drückt man die Periode durch b und die Anzahl ihrer Ziffern durch n aus, so läßt sich der periodische Dezimalbruch durch die Formel

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \ldots$$

darstellen. Multiplizirt man diesen Ausdruck mit 10^n, so erhält man

$$x \,.\, 10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

Subtrahirt man nun den frühern Ausdruck von dem letztern, so folgt

$$x \,.\, 10^n - x = b, \text{ oder } (10^n - 1) \,.\, x = b$$

und daraus

$$x = \frac{b}{10^n - 1};$$

d. h. ein periodischer Dezimalbruch, worin der Periode keine Dezimale vorangehet, ist gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler die Periode b, und der Nenner $10^n - 1$ eine Zahl ist, welche mit so vielen Neunern geschrieben wird, als die Periode Ziffern enthält.

1) $0{\cdot}\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; 2) $0\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

3) $2{\cdot}\dot{3}0\dot{1} = 2\frac{301}{999}$; 4) $15{\cdot}\dot{3}5\dot{1} = 15\frac{351}{999} = 15\frac{13}{37}$.

5) $0{\cdot}\dot{2}\dot{3} = \ldots$ 6) $3{\cdot}\dot{1}2\dot{3} = \ldots$

7) $0{\cdot}\dot{9}4\dot{5} = \ldots$ 8) $0{\cdot}\dot{8}4615\dot{3} = \ldots$

3. Wenn der zu verwandelnde Dezimalbruch ein periodischer

ist, worin der Periode noch andere Dezimalen vorangehen.

Es seien wieder b die Periode, n die Anzahl ihrer Ziffern, ferner a die der Periode vorangehenden Dezimalen, und m ihre Anzahl; so hat man für den Dezimalbruch den Ausdruck

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots,$$

welcher zuerst mit 10^{m+n}, dann mit 10^m multiplizirt, die Ausdrücke

$$x \,.\, 10^{m+n} = a \,.\, 10^n + b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \ldots$$

$$x \,.\, 10^m \quad = a \qquad + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

gibt. Durch die Subtrakzion des zweiten Ausdruckes von dem ersten erhält man sofort

$$x \,.\, 10^{m+n} - x \,.\, 10^m = a \,.\, 10^n + b - a$$

oder

$$x \,.\, 10^m \,(10^n - 1) = (a \,.\, 10^n + b) - a,$$

und daraus

$$x = \frac{(a \,.\, 10^n + b) - a}{(10^n - 1) \,.\, 10^m}.$$

Der Ausdruck $a \,.\, 10^n + b$ bedeutet nun offenbar eine Zahl, welche aus den der Periode vorangehenden Dezimalziffern und aus der Periode zusammengesetzt ist; und der Nenner $(10^n - 1) \,.\, 10^m$ eine Zahl, welche mit so vielen Neunern, als die Periode Ziffern enthält, und mit so vielen rechts folgenden Nullen, als Dezimalen der Periode vorangehen, geschrieben wird. Man hat daher den Satz:

Ein periodischer Dezimalbruch, worin der Periode noch andere Dezimalen vorangehen, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die der Periode vorangehenden Dezimalen sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die der Periode vorangehenden Dezimalen, ebenfalls als ganze Zahl betrachtet, abzieht, und diese Differenz zum Zähler, zum Nenner aber eine Zahl annimmt, die mit so vielen Neunern, als die Periode Ziffern enthält, mit so vielen rechts folgenden Nullen, als Dezimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

1) $0{\cdot}3\dot{7} = \frac{37-3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$,

2) $0{\cdot}2\dot{1}\dot{5} = \frac{215-2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}$,

3) $3{\cdot}31\dot{7}0\dot{8} = 3\frac{31708-31}{99900} = 3\frac{31677}{99900} = 3\frac{10559}{33300}$.

4) $0{\cdot}7\dot{3} = \ldots$ 5) $0{\cdot}2\dot{9}7\dot{4} = \ldots$

6) $2{\cdot}06\dot{9} = \ldots$ 7) $0{\cdot}45\dot{4}6\dot{8} = \ldots$

8) $6{\cdot}428\dot{5}3\dot{5} = \ldots$ 9) $0{\cdot}749\dot{3}2\dot{4} = \ldots$

b) Rechnungsoperazionen mit Dezimalbrüchen.

§. 62.

Um Dezimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren, schreibt man sie so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen, mithin auch die Dezimalpunkte, genau unter einander zu stehen kommen, und addirt oder subtrahirt sie sodann von der Rechten gegen die Linke, wie ganze Zahlen. Die fehlenden Dezimalstellen kann man sich durch Nullen ersetzt denken.

Beispiele.

1)
```
        35·312
         0·5678
        39·2
         0·09456
Summe   75·17436.
```

2)
```
       215·3456
        91·45923
Rest   123·88637
```

3) $13 \cdot 196 + 335 + 0 \cdot 93 + 2 \cdot 144 = \ldots$

4) $9248 - 0 \cdot 793 = \ldots$

5) $3 \cdot 914 - 9 \cdot 2145 + 6 \cdot 8103 + 12 \cdot 8 - 25 + 37 \cdot 39 = \ldots$

§. 63.

Sind die beiden Dezimalbrüche $\frac{a}{10^m}$ und $\frac{b}{10^n}$, von denen der erste m, der zweite n Dezimalen enthält, und wo a und b die Zahlenausdrücke der beiden Dezimalbrüche nach Hinweglassung des Dezimalpunktes sind, mit einander zu multipliziren, so hat man

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Da ab das Produkt der beiden Dezimalbrüche, als ganze Zahlen betrachtet, vorstellt, und der Nenner 10^{m+n} anzeigt, daß man von jenem Produkte m + n, d. i. so viele Dezimalen, als ihrer in beiden Faktoren vorkommen, abzuschneiden habe, so ergibt sich für das Multipliziren der Dezimalbrüche folgende Regel:

Man multiplizire die gegebenen Faktoren, ohne Rücksicht auf die Dezimalpunkte, wie ganze Zahlen, und schneide dann vom Produkte rechts so viele Dezimalstellen ab, als ihrer in beiden Faktoren zusammen enthalten sind.

Wenn das Produkt nicht so viele Ziffern hat, als abgeschnitten werden sollen, so ersetze man die fehlenden Stellen links durch Nullen.

Beispiele.

1) $4{\cdot}305 \times 2{\cdot}74$	2) $1{\cdot}3145 \times 0{\cdot}02071$
274	2071
16 220	1 3145
3 01 35	92 015
8 61 0	2629 0
11·78| 570	0·02722 3295.

3) $12{\cdot}947 \times 11{\cdot}18 = \ldots$
4) $3{\cdot}0194 \times 0{\cdot}0019 = \ldots$
5) $317{\cdot}15 \times 43{\cdot}037 = \ldots$
6) $0{\cdot}234567 \times 7158 = \ldots$
7) $3{\cdot}14159 \times 3{\cdot}14159 = \ldots$
8) $0{\cdot}52134 \times 0{\cdot}18913 = \ldots$
9) $7{\cdot}85 \times 3{\cdot}193 \times 9{\cdot}7 = \ldots$
10) $1{\cdot}234 \times 2{\cdot}345 \times 3{\cdot}456 = \ldots$
11) $3{\cdot}015 \times 9{\cdot}21 \times 58 \times 27{\cdot}2 = \ldots$

Da $\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}$ ist, so folgt:

Ein Dezimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multiplizirt, wenn man den Dezimalpunkt um so viele Stellen gegen die Rechte rückt, als der Multiplikator Nullen hat.

Z. B. $3{\cdot}141 \times 10 = 31{\cdot}41$
$3{\cdot}141 \times 100 = 314{\cdot}1$
$3{\cdot}141 \times 1000 = 3141$
$3{\cdot}141 \times 10000 = 31410.$

Will man in dem Produkte nur eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen beibehalten, so kann man die darauf folgenden Ziffern schon während der Multiplikazion weglassen. Man erreicht dieses am zweckmäßigsten durch folgendes Verfahren, dessen Richtigkeit leicht zu ersehen ist:

1. Man schreibe die Einheiten des einen Faktors unter die sovielte Dezimalstelle des andern, als man im Produkte Dezimalen haben will, und setze die übrigen Ziffern in umgekehrter Ordnung darneben, so daß dieser ganze Faktor umgekehrt erscheint.

2. Man fange die Entwicklung eines jeden abgekürzten Theilproduktes mit je zwei über einander stehenden Ziffern an, nehme aber aus der ersten weggelassenen Ziffer des Multiplikands die entsprechende Korrektur vor. Die einzelnen Theilprodukte sind dann in ihrer niedersten Stelle gleichnamig mit jener Stelle des Produktes, mit welcher abgebrochen werden soll, und werden daher als Addizionsposten unter einander geschrieben.

3. Man addirt die abgekürzten Theilprodukte, und schneidet in der Summe die verlangte Anzahl Dezimalen ab.

Um z. B. das Produkt $35{\cdot}2156 \times 3{\cdot}506$ in 3, und jenes

$8 \cdot 071245 \times 21 \cdot 0815$ in 4 Dezimalen zu erhalten, würde man die abgekürzten Multiplikazionen so vornehmen:

1) $35 \cdot 2156 \times 3 \cdot 506$

$$\begin{array}{r} 6\,053 \\ \hline 105\,647 \\ 17\,608 \\ 211 \\ \hline 123 \cdot 466 \end{array}$$

2) $8 \cdot 07\,1245 \times 21 \cdot 0815$

$$\begin{array}{r} 5\,18\,012 \\ \hline 16\,14\,249 \\ 80\,712 \\ 6\,457 \\ 81 \\ 40 \\ \hline 170 \cdot 1539. \end{array}$$

Man entwickle noch folgende abgekürzte Produkte:

3) $3 \cdot 59712 \times 4 \cdot 76802$ in 4 Dezimalen;
4) $1 \cdot 2156 \times 39 \cdot 8527$ „ 3 „
5) $713 \cdot 58 \times 0 \cdot 939$ „ 3 „
6) $0 \cdot 00935 \times 0 \cdot 01478$ „ 5 „
7) $1 \cdot 025 \times 1 \cdot 025 \times 1 \cdot 025$ „ 3 „

§. 64.

Beim Dividiren der Dezimalbrüche darf man nur Dividend und Divisor mittelst angehängter Nullen mit gleich vielen Dezimalen darstellen, und dann mit Weglassung der Dezimalpunkte die Division wie bei ganzen Zahlen verrichten. Denn es ist

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = a : b$$

Beispiele:

1) $16 \cdot 25 : 1 \cdot 25 = 1625 : 125 = 13$
2) $3 \cdot 1452 : 1 \cdot 234 = 31452 : 12340 = 2 \cdot 54878 \ldots$
3) $0 \cdot 284716 : 0 \cdot 053 = 284716 : 53000 = 5 \cdot 372$
4) $0 \cdot 37 : 5 \cdot 8413 = 3700 : 58413 = 0 \cdot 06334 \ldots$
5) $38 \cdot 5 : 72961 = \ldots$
6) $4 \cdot 1935 : 0 \cdot 378 = \ldots$
7) $317 \cdot 11808 : 8 \cdot 48 = \ldots$
8) $0 \cdot 474628 : 35 \cdot 42 = \ldots$
9) $0 \cdot 023456 : 0 \cdot 1789 = \ldots$
10) $11 \cdot 9021904 : 51 \cdot 436 = \ldots$

Da $\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}$ ist, so folgt:

Ein Dezimalbruch wird durch eine Potenz von 10 dividirt, wenn man den Dezimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt, als der Divisor Nullen enthält.

3. B. 712·63 × 10 = 71·263,
712·63 × 100 = 7·1263,
712·63 × 1000 = 0·71263,
712·63 × 10000 = 0·071263.

Will man im Quozienten **nur eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen** beibehalten, so bedient man sich der abgekürzten Division, welche darin besteht, daß man, anstatt dem Reste eine Nulle anzuhängen, die letzte Ziffer rechts im Divisor wegläßt.

3. B. 312·8156 : 8.5·2.1.4.7 = 3·67091
57 1715
6 0427
777
10
1

C. Kettenbrüche.

§. 65.

Ein Bruch, dessen Nenner nebst der ganzen Zahl noch einen Bruch enthält, dessen Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder dieselbe Beschaffenheit hat, wird ein **zusammenhängender, kontinuirlicher**, oder ein **Kettenbruch** genannt. Die allgemeine Form eines solchen Bruches ist

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \ldots$$

wo a, b, c, d, ... was immer für ganze Zahlen vorstellen können.

Die einzelnen Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ .., aus denen der Kettenbruch besteht, heißen **Glieder** desselben. Je nachdem der Kettenbruch eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat, oder ins Unendliche fortschreitet, heißt er ein **endlicher** oder ein **unendlicher**.

Besonders wichtig sind solche Kettenbrüche, deren Glieder sämmtlich 1 zum Zähler, und eine positive Zahl zum Nenner haben; ihre allgemeine Form ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots$$

Nur von solchen Kettenbrüchen soll hier die Rede sein.

a) Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch, und umgekehrt.

§. 66.

Es sei zunächst der **echte Bruch** $\frac{a}{b}$ **in einen Ketten-**

bruch zu verwandeln. Damit man zum Zähler 1 erhalte, dividire man Zähler und Nenner durch a; man bekommt

$$\frac{a}{b} = \frac{a:a}{b:a} = \frac{1}{b:a}.$$

Da nach der Voraussetzung $b > a$ ist, so setze man $b : a = q_1 + \frac{r_1}{a}$, wo q_1 den Quozienten, und r_1 den Rest der Division bedeutet, somit $a > r_1$ ist. Man hat dann

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{a}}.$$

Verfährt man mit dem echten Bruche $\frac{r_1}{a}$ auf dieselbe Art, wie früher mit $\frac{a}{b}$, so erhält man

$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_1 : r_1}{a : r_1} = \frac{1}{a : r_1} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

wenn $a : r_1 = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$ gesetzt wird. Es wird dann

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Wird mit dem echten Bruche $\frac{r_2}{r_1}$ wieder wie mit dem vorigen verfahren, und so auch mit jedem sich noch weiter etwa ergebenden, so erhält man, wenn die folgenden Quozienten durch $q_3, q_4, \ldots$ bezeichnet werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \ldots$$

wodurch der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen Kettenbruch dargestellt erscheint.

Zur Bestimmung der Nenner führte folgende Rechnung:

$b : a$	gibt	q_1	zum Quozienten,	r_1	zum Reste,	
$a : r_1$	„	q_2	„ „	r_2	„ „	
$r_1 : r_2$	„	q_3	„ „	r_3	„ „	
$r_2 : r_3$	„	q_4	„ „	r_4	„ „	

u. s. w.

Aus diesem Schema wird man sogleich ersehen, daß zur Bestimmung der Nenner des für $\frac{a}{b}$ gesuchten Kettenbruches der nämliche Rechnungsgang eingehalten wird, wie bei der Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen a und b.

Um daher einen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, suche man zwischen Zähler und Nenner das größte gemeinschaftliche Maß, und nehme die hierbei erhaltenen Quozienten als Nenner der auf einander folgenden Glieder des Kettenbruches an, deren Zähler immer 1 ist.

Daß man bei dieser Operazion stets einen endlichen Kettenbruch erhalten muß, geht ganz einfach aus dem Umstande hervor, daß a und b, wenn $\frac{a}{b}$ auf die kleinste Benennung gebracht ist, 1 zum größten gemeinschaftlichen Maße haben, daß man somit nothwendig einmal auf einen Rest = 1 kommen müsse, mit welchem die Kette abbricht. Wäre in der obigen allgemeinen Entwicklung z. B. $r_3 = 1$, so hätte man den endlichen Kettenbruch:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4}$$

Soll ein unechter Bruch $\frac{a}{b}$, wo also $a > b$ ist, durch einen Kettenbruch dargestellt werden, so verwandle man ihn zuerst in eine gemischte Zahl, suche für den angehängten echten Bruch die entsprechende Kette, und setze dieser noch die erhaltene ganze Zahl voraus. Der Kettenbruch hat in diesem Falle die Form

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots$$

Beispiele.

1) Es soll $\frac{69}{151}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden.

Man hat folgende Rechnung:

151 : 69 = 2 mit dem Reste 13 oder	69	151	$2 = q_1$
69 : 13 = 5 „ „ „ 4	4	13	$5 = q_2$
13 : 4 = 3 „ „ „ 1		1	$3 = q_3$
4 : 1 = 4			$4 = q_4$

daher $\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

2) Man verwandle $\frac{108}{887}$ in einen Kettenbruch.

108	887	8
16	23	4
2	7	1
	1	2
		3
		2

also $\frac{108}{887} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

3) Um $\frac{2704}{655}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, hat man

$$\frac{2704}{655} = 4 + \frac{84}{655}$$

84	655	7
17	67	1
1	16	3
		1
		16

daher $\frac{2704}{655} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16}}}}}$.

Es sollen noch folgende Brüche in Kettenbrüche verwandelt werden:

4) $\frac{92}{381}$; 5) $\frac{373}{50}$; 6) $\frac{349}{739}$;

7) $0{\cdot}513$; 8) $\frac{113}{355}$; 9) $\frac{1234}{4749}$.

§. 67.

Wenn man umgekehrt aus dem Kettenbruche den zugehörigen gemeinen Bruch finden will, so darf man denselben nur von den letzten Gliedern angefangen durch das Einrichten der gemischten Zahlen nach und nach auf eine immer kleinere Zahl von Gliedern reduziren, bis man auf den gesuchten Erzeugungsbruch zurückkommt. So ist allgemein

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\frac{bc+1}{c}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c}{bc+1}}$$

$$= \cfrac{1}{\frac{abc+a+c}{bc+1}} = \frac{bc+1}{abc+a+c}.$$

Beispiele.

1) $$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{41}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{5}{41}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{128}{41}}}$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{41}{128}} = \cfrac{1}{\frac{553}{128}} = \frac{128}{553},$$

2) $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{30}{13}}$$

$$= 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30},$$

3) $$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{23}{131}.$$

Wir werden weiter unten ein zweites Verfahren kennen lernen, um zu einem Kettenbruche den entsprechenden gemeinen Bruch zu finden.

b) Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. 68.

Ein gemeiner Bruch, welchen man erhält, wenn man bei irgend einem Gliede der Kette stehen bleibt, und die darauf folgenden Glieder vernachlässiget, wird ein Näherungsbruch genannt, und zwar der erste, zweite, dritte . . ., je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, . . . Glieder in Anspruch nimmt. Bezeichnet man für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots}}}}$$

die auf einander folgenden Näherungsbrüche durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots$, so ist

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \quad \frac{Z_3}{N_3} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}},$$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}}}, \text{ u. s. w.}$$

Bei einem endlichen Kettenbruche stellt der letzte Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch selbst vor.

Die Näherungsbrüche eines Kettenbruches besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, von denen wir hier nur die wichtigsten nachweisen wollen.

§. 69.

1. Jeder Näherungsbruch kann aus den zwei ihm unmittelbar vorhergehenden Näherungsbrüchen bestimmt werden; und zwar ist der Zähler gleich dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches multiplizirt mit dem Nenner des Gliedes, bei dem man stehen bleibt, mehr dem Zähler des vorvorhergehenden Näherungsbruches; eben so ist der Nenner eines jeden Näherungsbruches gleich dem Nenner des vorhergehenden multiplizirt mit dem Nenner, bei dem man stehen bleibt, mehr dem Nenner des vorvorhergehenden Näherungsbruches.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich durch unmittelbare Redukzion nachweisen. Es ist

$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}$, daher $Z_1 = 1$, $N_1 = q_1$.

$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}$,

daher $Z_2 = q_2$, $N_2 = q_1 q_2 + 1$.

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{q_2 q_3 + 1}{q_3}}} = \frac{1}{q_1 + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1}$$

$$= \frac{Z_2 q_3 + Z_1}{N_2 q_3 + N_1},$$

daher $Z_3 = Z_2 q_3 + Z_1$, $N_3 = N_2 q_3 + N_1$.

Durch das Redukzionsverfahren würde man eben so finden:

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4}{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1}$$

$$= \frac{(q_2 q_3 + 1) q_4 + q_2}{(q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3) q_4 + (q_1 q_2 + 1)} = \frac{Z_3 q_4 + Z_2}{N_3 q_4 + N_2},$$

daher $Z_4 = Z_3 q_4 + Z_2$, $N_4 = N_3 q_4 + N_2$.

Anstatt die Näherungsbrüche durch wirkliche Redukzionen, die sich immer verwickelter gestalten werden, zu suchen, können wir ihre Bestimmung auf einem andern einfachern Wege vornehmen, welcher uns zugleich die Ueberzeugung verschaffen wird, daß sich die in den bisher entwickelten Näherungsbrüchen vorwaltende Gesetzmäßigkeit nach der Natur der Entwicklung auch in den später folgenden nicht verlieren könne.

Betrachtet man, um z. B. $\frac{Z_4}{N_4}$ zu bestimmen, die Theile des Kettenbruches, welche zu $\frac{Z_3}{N_3}$ und $\frac{Z_4}{N_4}$ gehören, so sieht man, daß sich der zu $\frac{Z_4}{N_4}$ gehörige Theil von dem zu $\frac{Z_3}{N_3}$ gehörigen nur dadurch unterscheidet, daß dort $q_3 + \frac{1}{q_4}$ steht, wo hier nur q_3 vorkommt; man wird daher, um den Werth von $\frac{Z_4}{N_4}$ zu erhalten, nur in dem Werthe von $\frac{Z_3}{N_3}$ statt q_3 überall $q_3 + \frac{1}{q_4}$ zu setzen brauchen; man erhält dadurch

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{Z_2\left(q_3 + \frac{1}{q_4}\right) + Z_1}{N_2\left(q_3 + \frac{1}{q_4}\right) + N_1} = \frac{Z_2(q_3 q_4 + 1) + Z_1 q_4}{N_2(q_3 q_4 + 1) + N_1 q_4}$$

$$= \frac{(Z_2 q_3 + Z_1) q_4 + Z_2}{(N_2 q_3 + N_1) q_4 + N_2} = \frac{Z_3 q_4 + Z_2}{N_3 q_4 + N_2}, \text{ wie oben.}$$

Um den Werth von $\frac{Z_5}{N_5}$ zu erhalten, setzt man in dem Werthe von $\frac{Z_4}{N_4}$, $q_4 + \frac{1}{q_5}$ anstatt q_4; man bekommt dadurch

$$\frac{Z_5}{N_5} = \frac{Z_3\left(q_4 + \frac{1}{q_5}\right) + Z_2}{N_3\left(q_4 + \frac{1}{q_5}\right) + N_2} = \frac{Z_3(q_4 q_5 + 1) + Z_2 q_5}{N_3(q_4 q_5 + 1) + N_2 q_5}$$

$$= \frac{(Z_3 q_4 + Z_2) q_5 + Z_3}{(N_3 q_4 + N_2) q_5 + N_3} = \frac{Z_4 q_5 + Z_3}{N_4 q_5 + N_3},$$

somit $Z_5 = Z_4 q_5 + Z_3$, $N_5 = N_4 q_5 + N_3$.

Aus dem Gange der Entwicklung ist ersichtlich, daß man eben so

$$Z_6 = Z_5 q_6 + Z_4,\quad N_6 = N_5 q_6 + N_4,$$
$$Z_7 = Z_6 q_7 + Z_5,\quad N_7 = N_6 q_7 + N_5$$

u. s. w.

bekommen müsse, daß also allgemein

$$Z_r = Z_{r-1} q_r + Z_{r-2},\quad N_r = N_{r-1} q_r + N_{r-2}$$

ist.

Mit Rücksicht auf die hier nachgewiesene Eigenschaft lassen sich aus den zwei ersten Näherungsbrüchen ohne Schwierigkeit alle nach einander folgenden Näherungsbrüche, und daher bei einem endlichen Kettenbruche auch der Erzeugungsbruch bestimmen.

Beispiele.

1) Für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}}$$

hat man

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{2},\quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{3}{7};$$

daher

$$\begin{aligned}
Z_3 &= 3 \,.\, 4 + 1 = 13, \\
N_3 &= 7 \,.\, 4 + 2 = 30, \quad \text{und } \frac{Z_3}{N_3} = \frac{13}{30}; \\
Z_4 &= 13 \,.\, 5 + 3 = 68, \\
N_4 &= 30 \,.\, 5 + 7 = 157, \quad \text{und } \frac{Z_4}{N_4} = \frac{68}{157}; \\
Z_5 &= 68 \,.\, 6 + 13 = 421, \\
N_5 &= 157 \,.\, 6 + 30 = 972, \quad \text{und } \frac{Z_5}{N_5} = \frac{421}{972},
\end{aligned}$$

welcher letztere Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch vorstellt, welcher dem gegebenen Kettenbruche entspricht.

2) Der Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

hat folgende

Nenner	3,	1,	2,	5,	2;
Näherungsbrüche . . .	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{14}{11}$,	$\frac{75}{59}$,	$\frac{164}{129}$,

3) $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{11}$

Nenner 5, 2, 1, 3, 1, 11;

Näherungsbrüche . . $\frac{11}{5}$, $\frac{24}{11}$, $\frac{35}{16}$, $\frac{129}{59}$, $\frac{164}{75}$, $\frac{1933}{884}$.

Man verwandle noch folgende Brüche in Kettenbrüche, und bestimme die einzelnen Näherungswerthe:

4) $\frac{111}{53}$; 5) $\frac{999}{439}$; 6) $\frac{328}{135}$;

7) $\frac{157}{972}$; 8) 2·357; 9) $\frac{7837}{16415}$.

Aus der Natur der Rechnung folgt von selbst, daß sowohl die Zähler als die Nenner in den auf einander folgenden Näherungsbrüchen immer größer werden müssen.

§. 70.

2. Die Näherungsbrüche sind gegen den gegebenen Bruch abwechselnd zu groß oder zu klein, je nachdem sie eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten.

Drückt man die nach dem ersten, zweiten, dritten, . . . Gliede weggelassenen Glieder durch x_1, x_2, x_3, . . . aus, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + x_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2 + x_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3}$$

$$= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4 + x_4} = \ldots$$

Nun ist $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1 + x_1}$, daher $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$.

Ferner ist $\frac{1}{q_2} > \frac{1}{q_2 + x_2}$, daher

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2 + x_2}, \text{ oder } \frac{Z_2}{N_2} < \frac{a}{b}.$$

Eben so ist $\frac{1}{q_3} > \frac{1}{q_3 + x_3}$, daher $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} < \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3}$, somit

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} > \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3}, \text{ oder } \frac{Z_3}{N_3} > \frac{a}{b}.$$

Auf dieselbe Art überzeugt man sich, daß

$$\frac{Z_4}{N_4} < \frac{a}{b}, \quad \frac{Z_5}{N_5} > \frac{a}{b}, \quad \frac{Z_6}{N_6} < \frac{a}{b}, \text{ u. s. w.}$$

ist. Es ist daher wirklich der erste, dritte, fünfte, . . . Näherungsbruch größer, der zweite, vierte, sechste, . . . dagegen kleiner als der gegebene Bruch. Der wahre Bruch liegt demnach immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen.

§. 71.

3. Wenn man von dem Produkte aus dem Zähler eines Näherungsbruches und dem Nenner des folgenden das Produkt aus dem Zähler dieses letztern und dem Nenner des erstern abzieht, so ist der Unterschied $+1$, oder -1, je nachdem der erstere Näherungsbruch eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthält.

Es ist

$$\begin{aligned}
Z_1 N_2 - Z_2 N_1 &= 1.(q_1 q_2 + 1) - q_2 . q_1 = +1, \\
Z_2 N_3 - Z_3 N_2 &= Z_2 (N_2 q_3 + N_1) - (Z_2 q_3 + Z_1) N_2 \\
&= Z_2 N_1 - Z_1 N_2 = -1, \\
Z_3 N_4 - Z_1 N_3 &= Z_3 (N_3 q_4 + N_2) - (Z_3 q_4 + Z_2) N_3 \\
&= Z_3 N_2 - Z_2 N_3 = +1.
\end{aligned}$$

Eben so findet man

$$\begin{aligned}
Z_4 N_5 - Z_5 N_4 &= -1, \\
Z_5 N_6 - Z_6 N_5 &= +1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

4. Der Unterschied zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen ist immer gleich ± 1 dividirt durch das Produkt der Nenner.

Man hat

$$\begin{aligned}
\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} &= \frac{Z_1 N_2 - Z_2 N_1}{N_1 N_2} = \frac{+1}{N_1 N_2}, \\
\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3} &= \frac{Z_2 N_3 - Z_3 N_2}{N_2 N_3} = \frac{-1}{N_2 N_3}, \\
\frac{Z_3}{N_3} - \frac{Z_4}{N_4} &= \frac{Z_3 N_4 - Z_4 N_3}{N_3 N_4} = \frac{+1}{N_3 N_4},
\end{aligned}$$

u. s. f.

5. Der Unterschied zwischen dem Näherungsbruche und dem wahren ist stets kleiner als 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches.

Da der wahre Bruch immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegt, so wird der Unterschied $\frac{Z_1}{N_1} - \frac{a}{b}$ gewiß kleiner sein als der Unterschied $\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2}$, somit

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_1 N_2}.$$

Aber wegen $N_2 > N_1$ ist $N_1 N_2 > N_1^2$, und $\frac{1}{N_1 N_2} < \frac{1}{N_1^2}$, daher um so mehr

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_1^2}.$$

Eben so findet man

$$\frac{a}{b} - \frac{Z_2}{N_2} < \frac{1}{N_2^2},\quad \frac{Z_3}{N_3} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_3^2},\quad \frac{a}{b} - \frac{Z_4}{N_4} < \frac{1}{N_4^2},\ \text{u. s. w.}$$

Da $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \ldots$, daher

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \ldots$$

ist, so folgt, daß jeder folgende Näherungsbruch von dem wahren um weniger verschieden ist, als der vorhergehende, daß sich also die auf einander folgenden Näherungsbrüche dem gegebenen Bruche immer mehr nähern, bis der letzte, wenn es einen gibt, mit dem wahren Bruche selbst zusammenfällt.

Es läßt sich leicht bestimmen, wie weit die Näherungsbrüche entwickelt werden müssen, bis der letzte den gegebenen Bruch bis zu einem bestimmten Grade der Genauigkeit darstellt. Da nämlich

$$\frac{a}{b} - \frac{Z_r}{N_r} < \frac{1}{N_r^2}$$

ist, so wird $\frac{a}{b}$ durch den Näherungsbruch $\frac{Z_r}{N_r}$ gewiß bis auf $\frac{1}{10^m}$ genau bestimmt, oder, was gleichviel ist,

$$\frac{a}{b} - \frac{Z_r}{N_r} < \frac{1}{10^m}$$

sein, sobald

$$\frac{1}{N_r^2} \leqq \frac{1}{10^m},\ \text{d. i.}\ N_r^2 \geqq 10^m \ \text{oder}\ N_r \geqq \sqrt{10^m}$$

wird. Man hat also nur bis zu demjenigen Näherungsbruche zu rechnen, dessen Nenner gleich oder größer ist als die Quadratwurzel aus der umgekehrten Näherungsgrenze. Wird z. B. $\frac{a}{b}$ auf $\frac{1}{10000}$ genau verlangt, so muß $N_r \geqq \sqrt{10000} = 100$ sein; man wird daher nur bis zu dem Näherungsbruche fortrechnen, dessen Nenner gleich oder größer als 100 ist.

§. 72.

Wir wollen nun die vier letzten Sätze durch ein Beispiel beleuchten.

Verwandelt man $\frac{3178}{625}$ in einen Kettenbruch, so erhält man

$$\frac{3178}{625} = 5 + \frac{1}{11} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

Nenner . . . . . . $11, \ 1, \ 3, \ 1, \ 4, \ 2;$

Näherungsbrüche . . $\frac{56}{11}, \frac{61}{12}, \frac{239}{47}, \frac{300}{59}, \frac{1439}{283}, \frac{3178}{625}$.

Werden die Näherungsbrüche in Dezimalbrüche verwandelt, so hat man

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{56}{11} = 5{\cdot}090\,909; \qquad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{61}{12} = 5{\cdot}083\,333;$$
$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{239}{47} = 5{\cdot}085\,106; \qquad \frac{Z_4}{N_4} = \frac{300}{59} = 5{\cdot}084\,746;$$
$$\frac{Z_5}{N_5} = \frac{1439}{283} = 5{\cdot}084\,805.$$

Da nun der gegebene Bruch $\frac{a}{b} = \frac{Z_6}{N_6} = \frac{3178}{625} = 5{\cdot}084800$ ist, so sieht man sogleich, daß

a) der erste, dritte, fünfte Bruch größer, der zweite und vierte dagegen kleiner sind, als der gegebene Bruch.

b) Man überzeugt sich leicht, daß

$$56 \,.\, 12 - 61 \,.\, 11 = +1;$$
$$61 \,.\, 47 - 239 \,.\, 12 = -1;$$
$$239 \,.\, 59 - 300 \,.\, 47 = +1;$$
$$300 \,.\, 283 - 1439 \,.\, 59 = -1;$$
$$1439 \,.\, 625 - 3178 \,.\, 283 = +1$$

ist, und daher

c) $\frac{56}{11} - \frac{61}{12} = \frac{+1}{11 \,.\, 12}; \qquad \frac{61}{12} - \frac{239}{47} = \frac{-1}{12 \,.\, 47};$

$\frac{239}{47} - \frac{300}{59} = \frac{+1}{47 \,.\, 59}; \qquad \frac{300}{59} - \frac{1439}{283} = \frac{-1}{59 \,.\, 283};$

$\frac{1439}{283} - \frac{3178}{625} = \frac{+1}{283 \,.\, 625}.$

d) Für die Unterschiede zwischen den einzelnen Näherungsbrüchen und dem gegebenen Bruche findet man endlich

$$\frac{56}{11} - \frac{3178}{625} = 5{\cdot}090909 - 5{\cdot}0848 = 0{\cdot}006109 < \frac{1}{11^2} = 0{\cdot}008\ldots$$
$$\frac{3178}{625} - \frac{61}{12} = 5{\cdot}0848 - 5{\cdot}083333 = 0{\cdot}001467 < \frac{1}{12^2} = 0{\cdot}007\ldots$$
$$\frac{239}{47} - \frac{3178}{625} = 5{\cdot}085106 - 5{\cdot}0848 = 0{\cdot}000306 < \frac{1}{47^2} = 0{\cdot}0004\ldots$$
$$\frac{3178}{625} - \frac{300}{59} = 5{\cdot}0848 - 5{\cdot}084746 = 0{\cdot}000054 < \frac{1}{59^2} = 0{\cdot}0002\ldots$$
$$\frac{1439}{283} - \frac{3178}{625} = 5{\cdot}084805 - 5{\cdot}0848 = 0{\cdot}000005 < \frac{1}{283^2} = 0{\cdot}00001\ldots$$

§. 73.

6. Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen läßt sich kein gemeiner Bruch einschalten, dessen Nenner nicht größer ist, als die Nenner der beiden Näherungsbrüche.

Gesetzt, es würde der gemeine Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den Näherungsbrüchen $\frac{Z_r}{N_r}$ und $\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}$ liegen, so wäre, wenn r eine ungerade Zahl ist, $\frac{Z_r}{N_r} > \frac{p}{q} > \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}$, daher

$$\frac{Z_r}{N_r} - \frac{p}{q} < \frac{Z_r}{N_r} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} \text{ oder } \frac{Z_r q - N_r p}{N_r q} < \frac{1}{N_r N_{r+1}}.$$

Der Unterschied $\frac{Z_r}{N_r} - \frac{p}{q} = \frac{Z_r q - N_r p}{N_r q}$ muß nach der Voraussetzung positiv sein; da ferner Z_r, N_r, p, q ganze Zahlen sind, so muß $Z_r q - N_r p$ nicht nur positiv, sondern auch eine ganze Zahl sein, also $\geqq 1$; der kleinste Werth, den $\frac{Z_r q - N_r p}{N_r q}$ annehmen kann, ist $\frac{1}{N_r q}$; wenn daher allgemein $\frac{Z_r q - N_r p}{N_r q} < \frac{1}{N_r N_{r+1}}$ sein soll, so muß ganz gewiß auch $\frac{1}{N_r q} < \frac{1}{N_r N_{r+1}}$ oder $N_r q > N_r N_{r+1}$, und daher $q > N_{r+1}$ sein. Damit also der Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den angeführten zwei Näherungsbrüchen liegen könne, muß der Nenner q größer sein, als die Nenner der Näherungsbrüche.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn r eine gerade Zahl ist.

Aus dem hier erwiesenen Satze folgt, daß *jeder Näherungsbruch so beschaffen ist, daß er unter allen gemeinen Brüchen, deren Nenner nicht größer sind, als der seinige, dem Werthe des Kettenbruches am nächsten kommt.*

Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche ist von großer praktischer Wichtigkeit. Will man nämlich das Verhältniß zweier großer Zahlen durch kleinere möglichst angenähert darstellen, so verwandelt man den Quozienten jener Zahlen in einen Kettenbruch, und sucht die Näherungsbrüche; jeder derselben drückt das gesuchte Verhältniß genauer aus, als alle möglichen gemeinen Brüche, deren Nenner nicht größer sind, als der seinige; man ist überdieß auch im Stande, bei jedem Näherungsbruche den Grad der Näherung zu beurtheilen.

§. 74.

1) Ein Wiener Fuß ist = 0·316111 Meter; man soll die Näherungswerthe bestimmen.

Es ist

$$0{\cdot}316111 = \frac{316111}{1000000} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$\begin{array}{cccccccc} 3, & 6, & 8, & 2, & 5, & 2, & 1, & 1 \;\ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{6}{19}, & \frac{49}{155}, & \frac{104}{329}, & \frac{569}{1800}, & \frac{1242}{3929}, & \frac{1811}{5729}, & \frac{3053}{9658}, \;\ldots \end{array}$$

Man hat also folgende Näherungsverhältnisse:

3	Wien.	Fuß	=	1	Meter
19	"	"	=	6	"
155	"	"	=	49	"
329	"	"	=	104	"
1800	"	"	=	569	"
3929	"	"	=	1242	"
5729	"	"	=	1811	"
9658	"	"	=	3053	"

u. s. w.

2) 1 Wiener Metzen = 1·9471 Wiener Kubikfuß.

Um die Näherungswerthe zu finden, hat man

$$1{\cdot}9471 = \frac{19471}{10000} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{17} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 17, & 1, & 9, & 2, & 1, & 2, & 6; \\ \frac{2}{1}, & \frac{35}{18}, & \frac{37}{19}, & \frac{368}{189}, & \frac{773}{397}, & \frac{1141}{586}, & \frac{3055}{1569}, & \frac{19471}{10000}, \end{array}$$

daher die Näherungswerthe:

1	Wiener	Metzen	=	2	Wiener Kubikfuß.
18	"	"	=	35	" "
19	"	"	=	37	" "
189	"	"	=	368	" "
397	"	"	=	773	" "
586	"	"	=	1141	" "
1569	"	"	=	3055	" "
10000	"	"	=	19471	" "

3) Ein Wiener Pfund hat 0·56001199 Kilogramm. Welches sind die fünf ersten Näherungswerthe dieses Verhältnisses, und wie genau ist der fünfte Näherungswerth?

4) Der Wiener Eimer hat 1·792 Kubikfuß. Welches ist das Verhältniß dieser Körpermasse auf 0·001 genau?

5) Nach dem österreichischen Münzsysteme verhält sich der Werth des Silbers zu jenem des Goldes wie 1 : 15·2873. Welche Näherungswerthe hat dieses Verhältniß?

3. Von den Verhältnissen.

§. 75.

In dem Vorhergehenden sind die angezeigten Quozienten als Brüche betrachtet worden. Man kann aber einen angezeigten Quozienten auch noch von einer andern Seite auffassen, nämlich als die Vergleichung zweier gleichartiger Zahlen, um zu ersehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Eine solche Vergleichung zweier Zahlen wird ein **Verhältniß** genannt; der Dividend heißt das **Vorderglied**, der Divisor das **Hinterglied**, der wirkliche Quozient zwischen beiden der **Exponent** des Verhältnisses. Der angezeigte Quozient $8:2$ als Verhältniß betrachtet, wird gelesen: 8 verhält sich zu 2, oder kürzer: 8 zu 2; 8 ist das Vorderglied, 2 das Hinterglied, der Exponent ist 4, weil $8:2 = 4$ ist.

Die Größe eines Verhältnisses hängt von dem Exponenten ab; so lange dieser unverändert bleibt, ändert sich auch das Verhältniß nicht. Zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, sind daher einander **gleich**. So sind $8:4$ und $10:5$ gleiche Verhältnisse, weil sie denselben Exponenten 2 haben; eben so die Verhältnisse $am:a$ und $bm:b$, welchen beiden der Exponent m zukommt.

§. 76.

Weil jedes Verhältniß als eine angezeigte Division anzusehen ist, so gelten alle Sätze, welche in Bezug auf den Dividend, Divisor und Quozienten bewiesen wurden, auch in Beziehung auf das Vorderglied, Hinterglied und den Exponenten des Verhältnisses. Daraus ergeben sich für die Verhältnisse insbesondere folgende Sätze:

1. **In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multiplizirt mit dem Exponenten.**

   Wenn $a:b = q$, so ist $a = bq$.

2. **Ein Verhältniß bleibt beständig, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplizirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.**

Wenn $a:b = q$ ist, so muß auch sowohl $am:bm = q$, als auch $\frac{a}{m}:\frac{b}{m} = q$ sein; die Verhältnisse $am:bm$ und $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ sind also dem Verhältnisse $a:b$ gleich.

Mit Hilfe des ersten Theiles dieses Satzes kann man ein Verhältniß, dessen Glieder Brüche enthalten, durch ganze **Zahlen** darstellen; man braucht nur Vorder- und Hinterglied mit dem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner zu multipliziren. Z. B.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times 12 : \frac{3}{4} \times 12 = 8 : 9,$$

$$\frac{a}{m} : b = \frac{a}{m} . m : bm = a : bm,$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . bd : \frac{c}{d} . bd = ad : bc,$$

$$\frac{m}{ab} : \frac{n}{ac} = \frac{m}{ab} . abc : \frac{n}{ac} . abc = cm : bn.$$

Der zweite Theil des letzten Satzes gibt ein Mittel an die Hand, ein Verhältniß, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abzukürzen; man darf nur Vorder- und Hinterglied durch jenes Maß dividiren. Z. B.

$$12 : 8 = \frac{12}{4} : \frac{8}{4} = 3 : 2,$$

$$abm : acm = b : c.$$

§. 77.

Wenn man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder, und eben so alle Hinterglieder mit einander multiplizirt, so bilden die Produkte ein neues Verhältniß, welches in Hinsicht der gegebenen einfachen Verhältnisse ein zusammengesetztes Verhältniß genannt wird.

Sind z. B. $a : b$
$c : d$
$e : f$ einfache Verhältnisse,

so ist $ace : bdf$ ein zusammengesetztes Verhältniß.

Wenn man irgend ein Vorderglied und irgend ein Hinterglied in den einfachen Verhältnissen durch dieselbe Zahl multiplizirt oder dividirt, so wird dadurch auch sowohl das Vorder- als das Hinterglied des zusammengesetzten Verhältnisses durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt, folglich bleibt dieses letztere ungeändert.

4. Von den Proporzionen.

§. 78.

Die Gleichstellung von zwei gleichen Verhältnissen wird eine Proporzion genannt. Ist nämlich $a : b = q$, und $c : d = q$, so ist auch $a : b = c : d$; dieser Ausdruck nun bildet eine Proporzion, welche gelesen wird: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. a heißt das erste, b das zweite, c das dritte, d das vierte Glied; auch heißen a und d die äußern, b und c die innern Glieder der Proporzion.

Wenn in einer Proporzion die innern Glieder gleich sind, so heißt dieselbe eine stetige Proporzion, z. B. $a : b = b : c$. Das innere Glied b wird die mittlere stetige Proporzionale, und c die dritte stetige Proporzionale genannt.

Wenn zwei Arten von Zahlen so zusammenhängen, daß zu einer 2, 3, 4, . . . mmal so großen Zahl der einen Art auch eine 2, 3, 4, . . . mmal so große Zahl der andern Art gehört, so heißen die beiden Arten von Zahlen gerade proporzionirt, oder sie stehen in einem geraden Verhältnisse. So sind Waare und Preis gerade proporzionirt; denn wenn eine Elle von einer bestimmten Waare a Gulden kostet, so werden 2, 3, 4, . . . m Ellen von derselben Waare 2a, 3a, 4a, . . . ma Gulden kosten.

Wenn dagegen zwei Arten von Zahlen so von einander abhängen, daß zu einer 2, 3, 4, . . . mmal so großen Zahl der einen Art nur der 2te, 3te, 4te, . . . mte Theil von der Zahl der andern Art gehört, so sind die beiden Arten von Zahlen verkehrt proporzionirt, oder sie stehen in einem verkehrten Verhältnisse. Dieses ist z. B. bei der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Arbeitstage der Fall; denn wenn ein Arbeiter zu einer bestimmten Arbeit a Tage braucht, so werden unter übrigens gleichen Umständen 2 Arbeiter für dieselbe Arbeit nur $\frac{a}{2}$ Tage, 3 Arbeiter nur $\frac{a}{3}$ Tage, . . . m Arbeiter nur $\frac{a}{m}$ Tage brauchen.

§. 79

Von den Proporzionen sind nachstehende Sätze besonders wichtig:

1. In jeder Proporzion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern Glieder.

Es sei $a : b = c : d$, und $a : b = q$, so muß auch $c : d = q$ sein. Daraus folgt $a = bq$, $c = dq$. Multiplizirt man die ersten zwei gleichen Größen mit d, und die zweiten mit b, so erhält man $ad = bdq$, $bc = bdq$, woraus sich $ad = bc$ ergibt.

Dieser Satz gibt ein leichtes Mittel an die Hand, sich von der Richtigkeit einer Proporzion zu überzeugen; man darf nur sehen, ob das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der innern Glieder gleich ist.

Aus diesem Satze folgt:

In einer stetigen Proporzion ist das Quadrat der mittlern Proporzionale gleich dem Produkte der beiden andern Glieder.

Ist z. B. $a : b = b : c$, so hat man $b^2 = ac$.

2. Jedes äußere Glied einer Proporzion ist gleich dem Produkte der beiden innern Glieder, dividirt durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Produkte der beiden äußern Glieder, dividirt durch das andere innere Glied.

Es sei die Proporzion $a : b = c : d$, daher $ad = bc$. Dividirt man diese gleichen Ausdrücke einmal durch d, und das andere Mal durch a, so hat man

$$a = \frac{bc}{d} \text{ und } d = \frac{bc}{a}.$$

Wenn $ad = bc$, so ist auch $bc = ad$. Dividirt man diese zwei gleichen Ausdrücke zuerst durch c und dann durch b, so bekommt man

$$b = \frac{ad}{c} \text{ und } c = \frac{ad}{b}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man aus drei gegebenen Gliedern einer Proporzion das noch unbekannte Glied finden. Man nennt dieses das **Auflösen der Proporzion**.

Beispiele.

1) Aus $x : 2 = 8 : 4$ folgt $x = \frac{2 \times 8}{4} = 4$, daher

$4 : 2 = 8 : 4$ die vollständige Proporzion.

2) $5 : x = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$ gibt $x = \frac{5 \times \frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$,

3) $a : m = x : n$ gibt $x = \frac{an}{m}$,

4) $3\frac{1}{2} : 5\frac{2}{3} = 7\frac{3}{4} : x$ gibt $x = \frac{\frac{17}{3} \times \frac{31}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{527}{42} = 12\frac{23}{42}$.

Man löse noch folgende Proporzionen auf:

5) $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$;

6) $4\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$;

7) $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : x$;

8) $x : (m - 2n) = (9m + 8n) : (3m - 4n)$;

9) $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$;

10) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : \frac{a + b}{a - b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a + b} : x$.

§. 80.

3. **Aus zwei gleichen Produkten läßt sich eine Proporzion bilden, wenn man jedes der beiden Produkte in zwei Faktoren zerlegt, und die Faktoren des einen Produktes zu den äußern, die Faktoren des andern Produktes zu den innern Gliedern annimmt.**

Es sei $ad = bc$. Dividirt man jeden dieser gleichen Ausdrücke durch bd, so erhält man $ad : bd = bc : bd$, oder wenn man das erste Verhältniß durch d, das zweite durch b abkürzt,

$$a : b = c : d.$$

4. **Wenn man in einer Proporzion die innern Glieder unter einander, oder die äußern Glieder unter einander, oder die innern Glieder mit den äußern verwechselt, so erhält man durch jede solche Versetzung wieder eine richtige Proporzion.**

Es sei die Proporzion $a : b = c : d$, somit $ad = bc$.

Verwechselt man in dieser Proporzion die innern Glieder, so folgt

$$a : c = b : d.$$

Durch Verwechslung der äußern Glieder in diesen beiden Proporzionen erhält man

$$d : b = c : a,$$
$$d : c = b : a.$$

Verwechselt man endlich in allen vier Proporzionen die innern Glieder mit den äußern, so hat man

$$b : a = d : c,$$
$$c : a = d : b,$$
$$b : d = a : c,$$
$$c : d = a : b.$$

Daß die letzten sieben Ansätze richtige Proporzionen sind, folgt daraus, daß in denselben das Produkt der äußern Glieder ad und jenes der innern bc, oder umgekehrt ist, und daß die Produkte ad und bc einander gleich vorausgesetzt wurden.

Es kann daher jede Proporzion durch bloße Versetzung ihrer Glieder auf achtfache Art dargestellt werden.

§. 81.

5. **Wenn man ein äußeres und ein inneres Glied einer Proporzion mit derselben Zahl multiplizirt oder durch dieselbe Zahl dividirt, so erhält man wieder eine richtige Proportion.**

Es sei $a : b = c : d$, daher $ad = bc$. Wenn man diese gleichen Größen mit m multiplizirt oder durch m dividirt, so erhält man wieder Gleiches; folglich ist auch

$$adm = bcm \quad \text{und} \quad \frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}.$$

Zerlegt man jedes dieser Produkte auf alle mögliche Arten in zwei Faktoren, und bildet daraus Proporzionen, so erhält man

$$am \,.\, d = bm \,.\, c, \quad \text{daher } am : bm = c : d,$$
$$am \,.\, d = b \,.\, cm, \quad \text{„} \quad am : b = cm : d,$$
$$a \,.\, dm = bm \,.\, c, \quad \text{„} \quad a : bm = c : dm,$$
$$a \,.\, dm = b \,.\, cm, \quad \text{„} \quad a : b = cm : dm;$$

$$\frac{a}{m} \cdot d = \frac{b}{m} \cdot c, \text{ daher } \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d,$$

$$\frac{a}{m} \cdot d = b \cdot \frac{c}{m} \quad ,, \quad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d,$$

$$a \cdot \frac{d}{m} = \frac{b}{m} \cdot c, \quad ,, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m},$$

$$a \cdot \frac{d}{m} = b \cdot \frac{c}{m} \quad ,, \quad a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m};$$

wodurch der obige Satz erwiesen erscheint.

Mit Hilfe des ersten Theiles dieses Satzes kann jede Proporzion, in welcher Brüche vorkommen, in ganzen Zahlen dargestellt werden. Um ein äußeres Glied von seinem Nenner zu befreien, wird dasselbe und zugleich ein inneres Glied mit jenem Nenner multiplizirt; dadurch fällt dieser Nenner in dem äußern Gliede weg, und in dem innern erscheint er als Faktor. Hat man ein inneres Glied von dem Nenner zu befreien, so wird dasselbe und zugleich ein äußeres Glied mit jenem Nenner multiplizirt; in dem innern Gliede fällt dadurch der Nenner weg, während er in dem äußern als Faktor vorkommt. Um daher aus einer Proporzion die Brüche wegzuschaffen, braucht man nur die Nenner der äußern Glieder als Faktoren in die innern, und die Nenner der innern Glieder als Faktoren in die äußern Glieder zu übertragen. Z. B.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = e : f \text{ gibt } ad : bc = e : f,$$

$$m : \frac{n}{p} = \frac{q}{r} : x \quad ,, \quad mpr : n = q : x,$$

$$x : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \quad ,, \quad x : 2 = 3 \times 6 : 5 \times 3 \times 4,$$

$$\text{oder } x : 2 = 18 : 60.$$

Der zweite Theil des obigen Satzes wird angewendet, um eine Proporzion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl theilbar sind, abzukürzen; man darf nur jene zwei Glieder durch ihr gemeinschaftliches Maß dividiren. Z. B.

$$aq : b = cq : d \quad \text{gibt } a : b = c : d,$$

$$x : 8 = 3 : 20 \quad ,, \quad x : 2 = 3 : 5,$$

$$x : 5 \times 6 = 5 : 6 \times 10 \quad ,, \quad x : 1 = 5 : 2.$$

§. 82.

6. Wenn man in zwei oder mehreren Proporzionen die gleichvielten Glieder mit einander multiplizirt, so bilden die Produkte wieder eine Proporzion.

Es sei $a : b = c : d$, somit $ad = bc$,
ferner $e : f = g : h$, ,, $eh = fg$,
endlich $k : l = m : n$, ,, $kn = lm$.

Durch die Multiplikazion erhält man $adehkn = bcfglm$.

Gibt man dem letzten Ausdrucke die Form $aek \cdot dhn = bfl \cdot cgm$, so folgt daraus die Proporzion

$$aek : bfl = cgm : dhn,$$

deren Richtigkeit eben zu beweisen war.

7. **Wenn man die gleichvielten Glieder zweier Proporzionen durch einander dividirt, so bilden die Quozienten wieder eine Proporzion.**

Es sei $a : b = c : d$, daher $ad = bc$,
und $e : f = g : h$, „ $eh = fg$.

Durch die Division erhält man $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$.

Zerlegt man diese gleichen Größen in Faktoren, so hat man $\frac{a}{e} \cdot \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{g}$, woraus die Proporzion

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$$

folgt.

§. 83.

8. **In jeder Proporzion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, so wie sich jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält.**

Es sei die Proporzion $a : b = c : d$. Ist nun $a : b = q$, so muß auch $c : d = q$ sein; daraus folgt $a = bq$, $c = dq$, und durch die Addizion $a + c = bq + dq$, oder wenn man q als Faktor heraushebt, $a + c = (b + d) \cdot q$. Dividirt man jede dieser zwei gleichen Größen durch $b + d$, so hat man $(a + c) : (b + d) = q$. Da nun sowohl das Verhältniß $(a + c) : (b + d)$, als auch die Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ denselben Exponenten q haben, so sind alle diese Verhältnisse gleich; folglich

$$\begin{aligned}(a + c) : (b + d) &= a : b \\ &= c : d.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Art kann man auch beweisen: Wenn mehr als zwei Verhältnisse einander gleich sind, z. B.

$$a : b = c : d = e : f = g : h = \ldots$$

so muß auch

$$\begin{aligned}(a + c + e + g + \ldots) : (b + d + f + h + \ldots) &= a : b \\ &= c : d \\ &= e : f \\ &= g : h \\ &\ldots\end{aligned}$$

sein.

9. **In jeder Proporzion verhält sich der Unterschied der Vorderglieder zum Unterschiede der Hinterglieder, so wie sich jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält.**

Es sei die Proporzion $a : b = c : d$, und $a : b = q$, so muß auch $c : d = q$ sein. Daraus folgt

$$a = b\,q,$$
$$c = d\,q,$$

Durch Subtrakzion $a - c = b\,q - d\,q$,
oder $a - c = (b - d) \,.\, q$,
daher auch $(a - c) : (b - d) = q$,
und somit $(a - c) : (b - d) = a : b$
$= c : d$.

§. 84.

10. **In jeder Proporzion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses, wie sich die Vorderglieder zu einander, oder wie sich die Hinterglieder zu einander verhalten.**

Es sei $a : b = c : d$. Verwechselt man die innern Glieder unter einander, so hat man $a : c = b : d$, und dann ist nach dem vorletzten Satze

$$(a + b) : (c + d) = a : c,$$
$$= b : d.$$

11. **In jeder Proporzion verhält sich der Unterschied der Glieder des ersten Verhältnisses zum Unterschiede der Glieder des zweiten Verhältnisses, wie sich die Vorderglieder zu einander, oder wie sich die Hinterglieder zu einander verhalten.**

Es sei $a : b = c : d$. Durch Verwechslung der innern Glieder erhält man $a : c = b : d$, und daraus nach dem vorletzten Satze

$$(a - b) : (c - d) = a : c$$
$$= b : d.$$

12. **In jeder Proporzion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrem Unterschiede, so wie sich die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrem Unterschiede verhält.**

Es sei die Proporzion $a : b = c : d$. Nach den beiden letztern Sätzen ist

$$(a + b) : (c + d) = a : c$$
$$(a - b) : (c - d) = a : c,$$

Die Verhältnisse $(a + b) : (c + d)$ und $(a - b) : (c - d)$ sind beide demselben dritten Verhältnisse $a : c$ gleich, folglich sind sie auch unter einander gleich, also

$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d),$$

und nach Verwechslung der innern Glieder

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

5. Die einfache Regeldetri.

§. 85.

Wenn zwei Arten von Zahlen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse stehen, und wenn zwei Zahlen der einen Art gegeben sind, von den beiden zugehörigen Zahlen der andern Art aber nur die eine bekannt ist, so kann die andere unbekannte Zahl dieser zweiten Art durch Aufstellung und Auflösung einer Proporzion gefunden werden. Das Rechnungsverfahren, welches dabei angewendet wird, heißt die *einfache Regeldetri.*

Die einfache Regeldetri beruhet auf folgenden zwei Sätzen:

1) *Wenn zwei Arten von Zahlen gerade proporzionirt sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben Ordnung genommen.*

Es seien A und a zwei Zahlen einer Art, B und b die zugehörigen Zahlen einer zweiten Art, und zwar seien diese beiden Arten von Zahlen gerade proporzionirt. Ist nun $A = ma$, so muß nach dem Begriffe der geraden Proporzionalität auch $B = mb$ sein. Man hat daher $A : a = m$, und $B : b = m$, und somit

$$A : a = B : b.$$

2. *Wenn zwei Arten von Zahlen verkehrt proporzionirt sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in umgekehrter Ordnung genommen.*

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die beiden zugehörigen Zahlen der andern Art, und diese zwei Arten von Zahlen verkehrt proporzionirt. Ist nun $A = m\,a$, so muß $B = \frac{b}{m}$ oder $b = m\,B$ sein. Man hat daher $A : a = m$, und $b : B = m$; folglich

$$A : a = b : B.$$

Bei der einfachen Regeldetri ist daher Folgendes zu beobachten:

Man beurtheile, ob die beiden Arten von Zahlen gerade oder verkehrt proporzionirt sind, und setze das Verhältniß von zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der beiden Zahlen der andern Art, in der nämlichen Ordnung genommen, wenn beide Arten gerade, und in umgekehrter, wenn sie verkehrt proporzionirt sind. Diese Proporzion wird aufgelöset.

Es ist an sich gleichgiltig, in welches Glied der Proporzion die unbekannte Zahl x zu stehen kommt; am zweckmäßigsten erscheint es, dieselbe in das erste Glied zu setzen.

Beispiele.

1) 7 Ellen Tuch kosten 40 fl., was kosten 42 Ellen von demselben Tuche?

Da 2, 3, 4mal so viel Ellen auch 2, 3, 4mal so viel Gulden kosten, so sind hier die beiden Arten von Zahlen gerade proporzionirt; daher hat man folgende Rechnung:

7 Ellen 30 fl. $\quad x : 30 = 42 : 7$
42 „ x „ $\quad$ also $x = 180$ fl.

2) 100 fl. Kapital geben jährlich 6 fl. Interesse; wie viel Interesse geben 3050 fl. Kapital?

100 fl Kap. 6 fl. Int. $\quad x : 6 = 3050 : 100$
3050 „ „ x „ „ $\quad x = 183$ fl. Int.

3) 16 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 4 Tagen zu Stande bringen?
2, 3, 4mal so viel Arbeiter brauchen für dieselbe Arbeit nur den 2ten, 3ten, 4ten Theil der Zeit; die beiden Arten von Zahlen sind also hier verkehrt proporzionirt, und man hat

16 Arb. 6 Tage $\quad x : 16 = 6 : 4$
x „ 4 „ $\quad x = 24$ Arbeiter.

4) Wenn der Metzen Roggen a Groschen kostet, wiegt ein Groschenlaib b Loth, wie viel muß unter übrigens gleichen Umständen ein Groschenlaib wiegen, wenn der Metzen Roggen den Preis von c Groschen hat?

a Grosch. b Loth $\quad x : b = a : c$
c „ x „ $\quad x = \frac{a\,b}{c}$ Loth.

5) Ein Manuskript gibt 162 Seiten zu 35 Zeilen; wie viele Seiten wird es geben, wenn auf jede Seite 45 Zeilen kommen?

6) Wie viel Mark 12-löthiges Silber geben 20 Mark 15-löthiges Silber?

7) Ein bewegter Körper legt in a Sekunden b Fuß zurück; wie viel in c Sekunden?

§. 86.

Ein Betrag, der sich auf die Zahl 100 bezieht, wird das Prozent genannt.

Es sei nun p der Ertrag von 100, und e der Ertrag von der Summe s, so hat man den Regeldetri-Ansatz

$$p : e = 100 : s.$$

und daraus

$$e = \frac{ps}{100},\ s = \frac{100e}{p},\ p = \frac{100e}{s}.$$

Diese Formeln mit Worten ausgedrückt, geben die bekannten Regeln für die Prozentrechnung, und es wird nicht schwer sein, folgende Beispiele darnach durchzuführen.

1) Eine Stadt hat eine Bevölkerung von 13750 Seelen; wie viel sind 11% davon?

2) Beim Verkauf einer Waare betrug der 8% Gewinn 83 fl.; wie viel hat die Waare beim Einkaufe gekostet?

3) Nach der Duvillard'schen Sterblichkeitstafel erreichen von 502216 20jährigen Personen 297070 das 50ste Jahr; wie viel % sind in der Zwischenzeit gestorben?

4) Im Kronlande Krain sind im Jahre 1850 15595 Menschen geboren worden; davon kommen auf die Hauptstadt Laibach 685; wie viel % ist das?

5) Das salzhältigste Meer ist der Ozean zwischen Europa und Amerika; er enthält 36·7 % Salz; wie viel Salz ist in einem Kubikfuß Meerwasser enthalten, wenn dieses 68½ Pfd. wiegt?

6. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 87.

Wenn eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren andern Arten einzeln im geraden oder verkehrten Verhältnisse steht, und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer andern Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt und zu suchen, so heißt das Rechnungsverfahren, durch welches man diese unbekannte Zahl findet, die zusammengesetzte Regeldetri.

Die zusammengesetzte Regeldetri beruht auf folgendem Satze:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren andern Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proporzionirt ist; so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proporzionirt sind.

Es sei die Zahl A von den Zahlen B, C so abhängig, wie
die Zahl . . . . a „ „ „ b, c,
wo die mit gleichlautenden Buchstaben bezeichneten Zahlen zu derselben Art gehören, und es seien die Zahlen der ersten Art mit den Zahlen der zweiten Art gerade, mit den Zahlen der dritten Art aber verkehrt proporzionirt. Heißt nun α eine Zahl der ersten Art, welche zu den Zahlen b, C gehört, so hat man folgende Reihen zusammengehöriger Zahlen:

$$A,\ B,\ C;$$
$$\alpha,\ b,\ C;$$
$$a,\ b,\ c.$$

Betrachtet man die zwei ersten Reihen, so sieht man, daß die Zahl α aus A entstanden ist, indem man B in b geändert hat; da nun die Zahlen der ersten und zweiten Art gerade proporzionirt sind, so hat man

$$A : \alpha = B : b.$$

Betrachtet man eben so die zweite und dritte Reihe, so bemerkt man, daß a aus α hervorgehet, wenn sich C in c ändert; da nun die Zahlen der ersten Art mit denen der dritten Art in verkehrtem Verhältnisse stehen, so hat man

$$\alpha : a = c : C.$$

Durch Multiplikazion dieser beiden Proporzionen ergibt sich

$$A\alpha : a\alpha = Bc : bC,$$
oder $$A : a = Bc : bC,$$
in welcher Proporzion der oben aufgestellte Satz enthalten ist.

Man pflegt diese letztere Proporzion wegen der leichtern Uebersicht auch so zu schreiben:

$$\begin{aligned} A : a = B &: b \\ c &: C, \end{aligned}$$

wo man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multipliziren sind.

§. 88.

Bei der zusammengesetzten Regeldetri verfährt man daher auf folgende Art:

Man setze die unbekannte und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältniß. Das zweite Verhältniß der Proporzion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse gefunden werden, wenn man die Art, zu welcher x gehört, mit jeder andern Art vergleicht, um zu sehen, ob die beiden Arten gerade oder verkehrt proporzionirt sind, und dann die beiden zu x und der damit gleichnamigen Zahl dazu gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben oder in umgekehrter Ordnung zu einem Verhältnisse aufstellt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proporzionirt ist. Die Proporzion wird sodann aufgelöset.

Beispiele.

1) Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Fuß Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Fuß Länge vollenden?

20 Arb. 12 Std. tägl. 5 Woch. 375 Fuß Länge
12 „ 10 „ „ x „ 600 „ „

$$\begin{array}{rcl} x : 5 & = & 20 : 12 \\ & & 12 : 10 \\ & & 600 : 375 \\ \hline x : 1 & = & 16 : 1 \\ x & = & 16 \text{ Wochen.} \end{array}$$

2) 100 fl. Kapital geben in 1 Jahre $5\frac{1}{2}$ fl. Interessen; wie lange muß ein Kapital von 3860 fl. anliegen, damit es $743\frac{1}{20}$ fl. Interessen abwirft?

100 fl. Kap. 1 Jahr $5\frac{1}{2}$ fl. Int.
3860 „ „ x „ $743\frac{1}{20}$ „ „

$$\begin{array}{rcl} x : 1 & = & 100 : 3860 \\ & & 743\frac{1}{20} : 5\frac{1}{2} \\ \hline x : 1 & = & 7 : 2 \\ x & = & 3\frac{1}{2} \text{ Jahr.} \end{array}$$

3) Wie viel Stunden des Tags müssen 14 Arbeiter arbeiten, wenn sie in 8 Wochen, zu 5 Tagen wöchentlich, dieselbe Arbeit liefern wollen, wie sie von 16 Arbeitern in 7 Wochen, die Woche zu 6 Tagen und den Tag zu 11 Stunden, geliefert wird?

x Stund. tägl. 14 Arb. 8 Woch. 5 Tage wöch.
11 „ „ 16 „ 7 „ 6 „ „

$$\begin{array}{rcl} x : 11 & = & 16 : 14 \\ & & 7 : 8 \\ & & 6 : 5 \\ \hline x : 11 & = & 6 : 5 \\ x & = & 13\frac{1}{5} \text{ Stunden täglich.} \end{array}$$

4) Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine a, das andere b Zähne; wenn nun das erste Rad in s Minuten m Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in t Minuten um?

5) 12 Zentner werden 10 Meilen weit um $6\frac{1}{2}$ fl. geführt; a) wie weit werden $24\frac{3}{4}$ Zentner um $30\frac{1}{2}$ fl. geführt; b) wie viel Zentner wird der Fuhrmann um $13\frac{5}{8}$ fl. $18\frac{1}{4}$ Meilen weit führen; c) wie viel Frachtlohn wird man zahlen müssen, damit 37 Ztr. $25\frac{1}{2}$ Meilen weit geführt werden?

§. 89.

Heißt K das Kapital, welches zu P Prozent in Z Jahren J Interessen bringt, so hat man zur Bestimmung einer dieser Größen, z. B. J, aus den übrigen folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Kap. in 1 Jahre P fl. Int.
K „ „ „ Z „ J „ „

$$\begin{array}{rcl} J : P & = & K : 100 \\ & & Z : 1 \\ \hline \text{also } J : P & = & KZ : 100 \\ \text{und } 100J & = & KPZ. \end{array}$$

Werden diese letzten zwei gleichen Ausdrücke zuerst durch 100, dann durch PZ, ferner durch KZ, endlich durch KP dividirt, so erhält man beziehungsweise

$$J = \frac{KPZ}{100},\ K = \frac{100J}{PZ},\ P = \frac{100J}{KZ},\ Z = \frac{100J}{KP},$$

welche Formeln, in die gewöhnliche Wortsprache übertragen, die Sätze für die Lösung der Aufgaben über die einfache Zinsrechnung enthalten.

Beispiele.

1) Wie viel Interessen geben 3791 fl. zu 4 % in 3 Jahren?

2) Wie viel Zins geben a) 1287 fl., b) $3745\frac{1}{2}$ fl., c) 8391 fl. 34 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % in α) 2 Jahren, β) $3\frac{1}{2}$ Jahren, γ) 2 Jahren 4 Monaten 18 Tagen?

3) Wie viel Zins tragen K fl. Kapital in T Tagen zu 6 %?

4) In welcher Zeit geben 5844 fl. Kapital, zu $4\frac{1}{3}$ % angelegt, $886\frac{1}{3}$ fl. Interesse?

5) Wie groß muß das Kapital sein, welches zu $5\frac{1}{4}$ % in $2\frac{7}{12}$ Jahren $950\frac{3}{4}$ fl. Zins trägt?

6) Zu wie viel % müssen 1424 fl. angelegt werden, damit sie in $3\frac{1}{3}$ Jahren $237\frac{1}{3}$ fl. Interessen geben?

7. Die Theilregel.

§. 90.

Wenn eine gegebene Zahl in mehrere Theile so getheilt werden soll, daß diese Theile ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche jenes Verhältniß ausgedrückt wird, heißen Verhältnißzahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältnißzahlen gegeben, so wird die einfache, sind mehrere Reihen von Verhältnißzahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu vertheilende Zahl, a, b, c und d die Verhältnißzahlen. Nennt man die noch unbekannten Theile u, x, y und z, so muß $u : x = a : b$, $x : y = b : c$, $y : z = c : d$ sein, was man oft kürzer so anzeigt: $u : x : y : z = a : b : c : d$. Verwechselt man in den vorangehenden Proporzionen die innern Glieder, so hat man

$$u : a = x : b, \quad x : b = y : c, \quad y : c = z : d,$$

also

$$u : a = x : b = y : c = z : d,$$

woraus

$$\begin{aligned}(u + x + y + z) : (a + b + c + d) &= u : a \\ &= x : b \\ &= y : c \\ &= z : d\end{aligned}$$

Da nun $u + x + y + z = s$ sein muß, so erhält man aus dem letzten Ausdrucke

$$u = \frac{s}{a+b+c+d} \cdot a; \quad x = \frac{s}{a+b+c+d} \cdot b;$$

$$y = \frac{s}{a+b+c+d} \cdot c; \quad z = \frac{s}{a+b+c+d} \cdot d.$$

Daraus ergibt sich für die einfache Theilregel folgendes Verfahren:

Man dividire die zu vertheilende Zahl durch die Summe aller Verhältnißzahlen und multiplizire den Quozienten mit jeder Verhältnißzahl; die Produkte sind die gesuchten Theile.

Wenn die Verhältnißzahlen Brüche enthalten, so werden sie zuerst in ganzen Zahlen dargestellt, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplizirt. Haben alle Verhältnißzahlen ein gemeinschaftliches Maß, so werden sie dadurch abgekürzt.

Beispiele.

1) Es sollen 2155 fl. unter drei Personen nach dem Verhältnisse der Zahlen 5, 3, 2 vertheilt werden.

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ & 3 \\ & \underline{2} \\ 2155 : & 10 = 215\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 215\frac{1}{2} \times 5 & = & 1077\frac{1}{2} \\ 215\frac{1}{2} \times 3 & = & 646\frac{1}{2} \\ 215\frac{1}{2} \times 2 & = & \underline{431} \\ & & 2155. \end{array}$$

2) Packfong besteht aus $53\frac{1}{2}$ Theilen Kupfer, 29 Theilen Zink, und $17\frac{1}{2}$ Theilen Nickel. Wie viel von jedem dieser drei Bestandtheile braucht man, um 28 Pfund Packfong zu erhalten.

$$\begin{array}{r|r} 53\frac{1}{2} & 107 \\ 29 & 58 \\ 17\frac{1}{2} & 35 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcrl} 0{\cdot}14 \times 107 & = & 14{\cdot}98 & \text{℔. Kupfer,} \\ 0{\cdot}14 \times 58 & = & 8{\cdot}12 & \text{„ Zink.} \\ 0{\cdot}14 \times 35 & = & \underline{4{\cdot}9} & \text{„ Nickel.} \\ & & 28 & \end{array}$$

$$28 : 200 = 0{\cdot}14$$

3) Vier Gemeinden, von denen A 738 fl. 25 kr., B 815 fl., C 513 fl. 39 kr., D 618 fl. 50 kr. Steuern zahlt, sollen nach Verhältniß der Steuer zu einer Schulbaulichkeit, deren Kosten sich auf 924 fl. 18 kr. belaufen, beitragen; welcher Beitrag entfällt auf jede Gemeinde?

$$\begin{array}{llcll} \text{A } 738 \text{ fl. } 25 \text{ kr.} & = & 738{\cdot}417 & \text{fl.} \\ \text{B } 815 \text{ „ — „} & = & 815 & \text{„} \\ \text{C } 513 \text{ „ } 39 \text{ „} & = & 513{\cdot}65 & \text{„} \\ \text{D } 618 \text{ „ } 50 \text{ „} & = & \underline{618{\cdot}833} & \text{„} \end{array}$$

$$924{\cdot}3 : 2685{\cdot}9 = 0{\cdot}344127.$$

$$\begin{array}{llcrcl} \text{A zahlt} & 0{\cdot}344127 \times 738{\cdot}417 & = & 254{\cdot}109 & = & 254 \text{ fl. } 7 \text{ kr.} \\ \text{B „} & 0{\cdot}344127 \times 815 & = & 280{\cdot}464 & = & 280 \text{ „ } 28 \text{ „} \\ \text{C „} & 0{\cdot}344127 \times 513{\cdot}65 & = & 176{\cdot}761 & = & 176 \text{ „ } 46 \text{ „} \\ \text{D „} & 0{\cdot}344127 \times 618{\cdot}833 & = & 212{\cdot}956 & = & \underline{212 \text{ „ } 57 \text{ „}} \\ & & & & & 924 \text{ fl. } 18 \text{ kr.} \end{array}$$

4) Zu einem Unternehmen gibt A 3100 fl., B 3500 fl., C 4200 fl. her. Wenn nun dabei 324 fl. gewonnen werden, wie viel kommt auf jeden?

5) Es soll die Zahl 3710 in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten, wie die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

§. 91.

Die zusammengesetzte Theilregel läßt sich auf die einfache zurückführen.

Es sei eine Zahl s mit Bezugnahme auf mehrere Umstände in drei Theile zu theilen, die sich in einer Beziehung wie a : b : c, in einer zweiten Beziehung wie d : e : f, und in einer dritten Beziehung wie g : h : k verhalten. Heißen x, y, z die noch unbekannten Theile, so muß sich $x:y$ nicht nur wie $a:b$, sondern auch wie $d:e$ und wie $g:h$ verhalten; es muß also das Verhältniß $x:y$ gleich sein dem zusammengesetzten Verhältnisse aus $a:b$, $d:e$, $g:h$, also dem Verhältnisse $adg:beh$. Eben so muß $y:z = beh:cfk$ sein. Es besteht also die Forderung, die Theile x, y, z so zu bestimmen, daß der Bedingung

$$x:y:z = adg:beh:cfk$$

Genüge geleistet werde, was eine Aufgabe der einfachen Theilregel ist.

Daraus folgt, daß bei der zusammengesetzten Theilregel Folgendes zu beobachten ist:

Man multiplizire die auf denselben Theil Bezug habenden Verhältnißzahlen mit einander, und betrachte die Produkte als Verhältnißzahlen einer einfachen Theilregel, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Beispiele.

1) Zu einer Unternehmung vereinigen sich drei Personen; A gibt 8000 fl. auf 5 Monate, B 4000 fl. auf 6 Monate, C 2000 fl. auf 8 Monate her. Die Unternehmung wirft einen reinen Gewinn von 4600 fl. ab; wie viel davon wird jede der drei Personen bekommen?

A 8000 fl. durch 5 M.	40000	5	460 × 5 =	2300 fl.
B 4000 „ „ 6 „	24000	3	460 × 3 =	1380 „
C 2000 „ „ 8 „	16000	2	460 × 2 =	920 „
	4600 : 10 = 460			4600 fl.

2) Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 250 fl. Aus der Gemeinde A arbeiteten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jenem Lohne wird jede der drei Gemeinde haben?

A 11 Mann durch 10 Tage zu 9 St.	990	11
B 9 „ „ 9 „ „ 10 „	810	9
C 15 „ „ 5 „ „ 6 „	450	5
	250 : 25 = 10.	

A bekommt	10 × 11 =	110 fl.
B „	10 × 9 =	90 „
C „	10 × 5 =	50 „
		250 fl.

3) A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 fl.; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 fl. bei, und noch zwei Monate später gesellt sich auch C mit 3000 fl. dazu. Beim Jahresschlusse zeigt sich ein Gewinn von 2118 fl.; wie viel bekommt jeder davon?

V. Von den Potenzgrößen.

Erweiterter Begriff des Potenzirens.

§. 92.

Der in der Einleitung aufgestellte und bisher zu Grunde gelegte Begriff einer Potenz, als eines Produktes von mehreren gleichen Faktoren, hat nur dann eine Bedeutung, wenn der Exponent, welcher die Anzahl der gleichen Faktoren angibt, eine ganze positive Zahl ist; auf gebrochene oder negative Exponenten ist er nicht anwendbar. Wäre die Zahl a z. B. zur Potenz $\frac{1}{2}$ oder -1 zu erheben, so müßte man nach dem obigen Begriffe einer Potenz a $\frac{1}{2}$mal oder -1mal als Faktor setzen, was offenbar keinen Sinn hat. Man sah sich daher genöthiget, den ursprünglichen zu eingeschränkten Begriff zu erweitern, und stellte folgende für jede Art von Exponenten giltige Erklärung auf:

Eine Zahl a zur mten Potenz erheben heißt aus a durch die nächst höhere Operazion ein Resultat so bilden, wie m aus der Einheit entstanden ist.

Es wurde schon bemerkt, daß das Multipliziren die nächst höhere Operazion vom Addiren, und die Division die nächst höhere Operazion vom Subtrahiren ist.

Aus dieser Erklärung wollen wir nun die Bedeutung einer Potenz für die verschiedenen Formen, unter denen der Potenzexponent erscheinen kann, ableiten.

1) Der Exponent sei eine *ganze positive* Zahl.

Man betrachte z. B. a^4. a zur 4ten Potenz erheben heißt aus a durch die nächsthöhere Operazion ein Resultat so bilden, wie 4 aus der Einheit entstanden ist; 4 ist aus der Einheit entstanden, indem man diese 4mal als *Addend* setzte; es ist nämlich $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; man wird daher mit a dasselbe mittelst der nächst höhern Operazion vornehmen, nämlich a 4mal als *Faktor* setzen, somit $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Wenn also der Exponent eine ganze positive Zahl ist, so ist die Potenz nichts anderes, als ein Produkt von mehreren gleichen Faktoren; was eben der ursprüngliche Begriff der Potenz war.

2) Der Exponent sei gleich *Null*.

a zur Potenz 0 erheben heißt aus a durch die nächst höhere Operazion eine Zahl so bilden, wie der Exponent 0 aus der Einheit entstanden ist; 0 ist aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe einmal als *Addend* und einmal als *Subtrahend* setzte, nämlich $0 = 1 - 1$; man muß daher a einmal als *Faktor* und einmal als *Divisor* setzen; also $a^0 = a : a = 1$. *Jede Zahl zur* 0^{ten} *Potenz erhoben ist* somit *gleich* 1.

3) Der Exponent sei eine *ganze negative* Zahl.

Untersucht man z. B. die Bedeutung von a^{-2}, so soll aus a durch die nächst höhere Operazion ein Resultat so gebildet werden, wie -2 aus der Einheit hervorging; -2 ist aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe 2mal als Subtrahend, oder einmal als *Addend* und 3mal als *Subtrahend* setzte, nämlich $-2 = 1 - 1 - 1 - 1$; man muß daher b einmal als *Faktor* und 3mal als *Divisor* setzen, also $a^{-2} = [(a : a) : a] : a = [1 : a] : a = 1 : a^2 = \frac{1}{a^2}$.

Allgemein sei a^{-m}. a zur Potenz $-m$ erheben, heißt aus a durch die nächst höhere Operazion ein Resultat so entstehen lassen, wie $-m$ aus der Einheit entstanden ist; um $-m$ aus der Einheit zu erhalten, muß man dieselbe $m$mal als Subtrahend, oder was gleichviel ist, einmal als *Addend* und $(m + 1)$mal als *Subtrahend* setzen; man wird daher, um a^{-m} zu erhalten, a einmal als *Faktor* und $(m + 1)$mal als *Divisor* setzen, wodurch man bekommt

$$a^{-m} = [\{((a : a) : a) : a\} : a] : \ldots = \frac{1}{a^m}.$$

Eine Potenzgröße mit einem negativen Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner eine Potenzgröße mit derselben Wurzel und demselben, jedoch positiven Exponenten ist.

4) Wenn der Exponent ein *Bruch* $\frac{m}{n}$ ist.

a zur Potenz $\frac{m}{n}$ erheben heißt, aus a durch die nächst höhere Operazion ein Resultat so bilden, wie $\frac{m}{n}$ aus der Einheit entstanden ist; $\frac{m}{n}$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit in n *gleiche Addenden* zerlegte, und einen derselben m*mal* als *Addend* setzte; man wird daher, um $a^{\frac{m}{n}}$ zu erhalten, a in n *gleiche Faktoren* zerlegen, und einen derselben $m$mal als *Faktor* setzen; wenn man a in n gleiche Faktoren zerlegt, so muß einer derselben $n$mal als Faktor gesetzt wieder a geben; ein solcher Faktor ist also $\sqrt[n]{a}$, daher ist

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,\ldots\, \text{mmal}$$

$$\text{oder } a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Eine Potenzgröße mit gebrochenem Exponenten bedeutet also, daß man aus der Wurzel zuerst die sovielte Wurzel ausziehen soll, als der Nenner des Potenzexponenten anzeigt, und dann dieses Resultat zur sovielten Potenz zu erheben hat, als der Zähler des gebrochenen Exponenten Einheiten enthält.

Setzt man $m = 1$, so ist

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

d. h. eine Zahl zur Potenz $\frac{1}{n}$ erheben, heißt so viel, als aus ihr die nte Wurzel ausziehen.

a) Allgemeine Sätze über die Potenzgrößen.

§. 93.

Da Potenzgrößen mit gebrochenen Exponenten als Wurzelgrößen zu betrachten sind, und von diesen später besonders gehandelt werden wird, so sollen hier nur Potenzgrößen mit ganzen positiven oder negativen Exponenten in Betrachtung gezogen werden.

Aus dem Begriffe des Potenzirens ergeben sich folgende Sätze:

1. Die erste Potenz einer Zahl ist immer der Zahl selbst gleich; nämlich $a^1 = a$.

Der Exponent 1 wird daher nicht angeschrieben, sondern immer von selbst verstanden, wenn kein anderer Exponent da ist.

2. Jede Potenz von 1 ist wieder 1.

3. Wegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ist $a^{-m} \,.\, a^m = 1$, also auch

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Daraus folgt:

Man kann jede Potenzgröße, die im Zähler als Faktor vorkommt, als Faktor in den Nenner, und umgekehrt übertragen, wenn man nur das Zeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

So ist

$$\frac{a^2 b^{-3}}{c^{-2} d} = \frac{a^2}{d} \,.\, b^{-3} \,.\, \frac{1}{c^{-2}} = \frac{a^2}{d} \,.\, \frac{1}{b^3} \,.\, c^2 = \frac{a^2 c^2}{b^3 d},$$

$$\frac{5x}{y} = 5x \,.\, \frac{1}{y} = 5xy^{-1},$$

$$ab^{-2} c^3 d^{-4} = \frac{ac^3}{b^2 d^4}.$$

b) Zeichen der Potenzen.

§. 94.

In Hinsicht auf die Zeichen der Potenzen sind folgende zwei Sätze zu merken:

1. Eine positive Wurzel zu was immer für einer Potenz erhoben gibt ein positives Resultat.

$$(+a)^n = +a . +a . +a . +a \ldots \text{nmal}$$

ist ein Produkt von lauter positiven Faktoren, und daher selbst positiv, also

$$(+a)^n = +a^n.$$

Der Satz gilt auch, wenn der Exponent negativ ist; denn

$$(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n}.$$

2. Eine negative Wurzel zu einer geraden Potenz erhoben, gibt ein positives, zu einer ungeraden Potenz erhoben aber ein negatives Resultat.

$$(-a)^{2m} = -a . -a . -a . -a \ldots 2\text{mmal}$$

ist ein Produkt von 2m negativen Faktoren, also von negativen Faktoren in gerader Anzahl, daher positiv;

$$(-a)^{2m+1} = -a . -a . -a \ldots (2m+1)\text{mal}$$

ist auch ein Produkt von lauter negativen Faktoren, diese kommen jedoch in ungerader Anzahl vor, daher ist das Produkt selbst negativ; man hat also

$$(-a)^{2m} = +a^{2m},$$
$$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

Dasselbe gilt auch für negative Exponenten; denn

$$(-a)^{-2m} = \frac{1}{(-a)^{2m}} = \frac{1}{+a^{2m}} = +a^{-2m},$$

$$(-a)^{-(2m+1)} = \frac{1}{(-a)^{2m+1}} = \frac{1}{-a^{2m+1}} = -a^{-(2m+1)}.$$

c) Rechnungsoperazionen mit Potenzgrößen.

1. Addiren und Subtrahiren der Potenzgrößen.

§. 95.

Potenzgrößen werden auf dieselbe Art, wie algebraische Größen überhaupt, addirt und subtrahirt. Nur bei gleichartigen Potenzgrößen kann eine Zusammenziehung vorgenommen werden; es sind aber Potenzgrößen gleichartig, wenn sie sowohl dieselbe Wurzel, als denselben Exponenten haben.

Beispiele.

1) $3a^2 + 4a^2 + 6a^2 = 13a^2$,
2) $5a^4 - 2a^4 = 3a^4$,
3) $2a^5 + 7a^5 - 9a^5 = 0$,
4) $ax^m - bx^m + cx^m = (a - b + c)x^m$.

2. Multipliziren der Potenzgrößen.

§. 96.

Beim Multiplíziren von Potenzgrößen gilt im Allgemeinen dasselbe, wie für das Multiplíziren algebraischer Größen überhaupt; sie werden nämlich ohne Zeichen neben einander gesetzt, z. B.

$$3a^2x^3 . 2b^3y^2 = 6a^2b^3x^3y^2,$$
$$5ab^2m^3 . -4c^3n^4 = -20ab^2c^3m^3n^4.$$

Eine Abkürzung im Verfahren kann nur dann Statt haben, wenn entweder gleiche Wurzeln oder gleiche Exponenten vorkommen.

A) Wenn die Wurzeln gleich sind, so verfährt man nach dem bereits bei der Multiplikazion erwiesenen Satze:

Potenzgrößen derselben Wurzel werden multiplizirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält, und ihr die Summe der Exponenten in den Faktoren zum Exponenten gibt.

Beispiele über diesen Satz findet man bei der Lehre vom Multipliziren algebraischer Größen.

B) Wenn die Exponenten gleich sind.

Es sei a^m mit b^m zu multipliziren. Weil

$$\begin{array}{l} a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,.\, \text{mmal} \\ b^m = b \,.\, b \,.\, b \,.\, b \,.\,.\,.\,.\, \text{mmal} \\ \hline \end{array}$$

so ist $a^m . b^m = ab . ab . ab . ab . . . . \text{mmal}$
oder $a^m . b^m = (ab)^m$,

d. h. Potenzgrößen desselben Exponenten werden multiplizirt, wenn man das Produkt der Wurzeln zu der gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Kehrt man den letzten Ausdruck um, so hat man

$$(ab)^m = a^m . b^m,$$

d. h. Ein Produkt wird zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Faktor zu dieser Potenz erhebt, und diese Potenzen mit einander multiplizirt.

Beispiele.

1) $a^2 . b^2 = (ab)^2$,
2) $10^3 . 5^3 = 50^3$,
3) $a^5 . b^5 . c^5 = (abc)^5$,
4) $(a+b)^3 (a-b)^3 = (a^2 - b^2)^3$,
5) $(xy)^4 = x^4 y^4$,
6) $(-3a)^4 = 81 a^4$,
7) $(abcd)^n = a^n b^n c^n d^n$,
8) $(2ax)^5 = 32 a^5 x^5$,
9) $(-4ab)^2 . (3a)^3 = 16 a^2 b^2 . 27 a^3 = 432 a^5 b^2$,
10) $(5mx)^4 . (-3my)^3 = \ldots$
11) $(7a)^3 . (2a)^4 . (3a)^2 = \ldots$
12) $\left(\frac{3xy}{5ab}\right)^6 . \left(\frac{10xz}{9bc}\right)^6 . \left(\frac{6ab^2c}{x}\right)^6 = \ldots$

3. Dividiren der Potenzgrößen.

§. 97.

Auch beim Dividiren der Potenzgrößen wird im Allgemeinen dasselbe Verfahren angewendet, welches für das Dividiren algebraischer Größen überhaupt aufgestellt wurde. Z. B.

$$24a^3b^2x : -3a^3x = -8b^2,$$
$$35a^2b : 7a^2c = \frac{5b}{c}.$$

Eine Abkürzung im Verfahren kann nur dann vorgenommen werden, wenn entweder die Wurzeln oder die Exponenten gleich sind.

a) Wenn die Wurzeln gleich sind.

Es ist bereits bei der Division algebraischer Größen bewiesen worden, daß

$$\text{für } m > n, \quad a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$\text{für } m < n, \quad a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

ist. Da nun

$$\frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n},$$

so wird, mag $m \gtrless n$ sein, stets

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

d. h. Potenzgrößen derselben Wurzel werden dividirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel zu einer Potenz erhebt, deren Exponent gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

Diese Regel gilt auch, wenn $m = n$ ist; denn für diesen Fall hat man $a^m : a^n = 1$, aber es ist auch $a^{m-n} = a^0 = 1$, also ist auch unter dieser Voraussetzung $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Beispiele über diesen Satz sind bei der Lehre vom Dividiren algebraischer Größen angeführt worden.

b) Wenn die Exponenten gleich sind.

Man dividire a^m durch b^m. Es ist

$$a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, .\, .\, .\ \text{mmal}$$
$$b^m = b \,.\, b \,.\, b \,.\, b \,.\, .\, .\, .\ \text{mmal}$$

daher $$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \ \text{mmal},$$

oder $$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

d. h. Potenzgrößen desselben Exponenten werden dividirt, wenn man den Quozienten der Wurzeln zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Durch Umkehrung des letzten Ausdruckes erhält man

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

d. h. Ein Bruch (Quozient) wird zu einer Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner zu derselben Potenz erhebt, und die Potenz des Zählers durch die Potenz des Nenners dividirt.

Beispiele.

1) $(abc)^2 : (ab)^2 = c^2$,

2) $(36a^3b^2)^3 : (4ab)^3 = (9a^2b)^3$,

3) $(a^2 - b^2)^4 : (a - b)^4 = (a + b)^4$,

4) $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^2 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^2 = \frac{81a^2}{64y^2}$,

5) $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^m$,

6) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^3 = \frac{27a^3}{64b^3}$,

7) $\left(-\frac{x}{2y}\right)^4 = \frac{x^4}{16y^4}$,

8) $\left[\frac{4(a+b)}{5(c-d)}\right]^3 = \frac{64(a+b)^3}{125(c-d)^3}$,

9) $\left(\frac{8mn}{5pq}\right)^4 = \ldots$ 10) $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3 \cdot \left(\frac{5x}{4a}\right)^2 = \ldots$

11) $\left(\frac{3x}{2y}\right)^3 - \left(\frac{6x}{5y}\right)^2 = \ldots$ 12) $\left(1 - \frac{3a + 2bx}{2bx}\right)^4 = \ldots$

Aus dem letzten Satze folgt auch:

Wenn alle Glieder einer Proporzion zu derselben Potenz erhoben werden, so erhält man wieder eine Proporzion.

Ist $a : b = c : d$, so muß auch $(a : b)^m = (c : d)^m$, oder $a^m : b^m = c^m : d^m$ sein.

§. 98.

Die für das Multipliziren und Dividiren von Potenzgrößen mit positiven Exponenten abgeleiteten Sätze gelten auch für negative Exponenten. Es ist

A) $a^m \,.\, a^{-n} = a^m \,.\, \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

$$a^{-m} \,.\, a^{-n} = \frac{1}{a^m} \,.\, \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

B) $a^{-m} \,.\, b^{-m} = \frac{1}{a^m} \,.\, \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(a\,b)^m} = (a\,b)^{-m}$.

a) $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$,

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \,.\, a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n},$$

$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m} : \frac{1}{a^n} = a^{-m} \,.\, a^n = a^{-m+n}.$$

b) $\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$.

4. Potenziren der Potenzgrößen.

§. 99.

Es ist

$$(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots \text{nmal}$$
$$= a^{m+m+m+m+\ldots \text{nmal}}$$

oder

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

d. h. eine Potenzgröße wird zu einer Potenz erhoben, wenn man die Wurzel zum Produkte der Exponenten erhebt.

Der Satz gilt auch für negative Exponenten; denn

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn},$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}.$$

Beispiele.

1) $(a^3)^2 = a^6$.

2) $(x^{-2})^4 = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$.

3) $(3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}$.

4) $(-2x^2y^3z)^5 = -32x^{10}y^{15}z^5$.

5) $[(-a^2)^4]^3 = (a^8)^3 = a^{24}$.

6) $[(a^m)^{-p}]^n = a^{-mnp} = \frac{1}{a^{mnp}}$.

7) $[a^2(b-c)^3]^4 = a^8(b-c)^{12}$.

8) $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^3 = \frac{a^6b^9}{c^3d^{12}}$.

9) $\left(-\frac{2a^3x}{3b^2y^2}\right)^4 = \frac{16a^{12}x^4}{81b^8y^8}$.

10) $(3a^2bx^34)^{-2} = \ldots$ 11) $(-2x^{-3}y^2z^{-1})^4 = \ldots$

12) $\left(\frac{5m^2x^{-4}}{4n^4y^{-3}}\right)^3 = \ldots$ 13) $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2y}\right)^3\right]^2 = \ldots$

14) $\left(\frac{2a^2x^3}{3by^2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4 = \ldots$

15) $\left\{\frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2z^3)^4 \cdot (-5y^3z)^3}{(4x^3y^2)^2 \cdot (2y^2z^4)^3}\right\}^2 = \ldots$

Da $(a^m)^n = a^{mn}$ und $(a^n)^m = a^{mn}$, so folgt

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Man kann daher die Ordnung im Potenziren beliebig wählen.

d) Potenziren zusammengesetzter Ausdrücke.

1. Erheben eines zusammengesetzten Ausdruckes auf die zweite Potenz.

§. 100.

Wenn man eine Größe mit sich selbst multiplizirt, so erhält man ihr Quadrat. Um also das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, darf man dieses nur mit $a + b$ multipliziren; man findet dadurch

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

d. h. das Quadrat eines Binoms besteht aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Produkte beider Theile und dem Quadrate des zweiten Theiles.

Beispiele.

1) $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$.

2) $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$.

3) $(a^2 - 2b)^2 = a^4 - 4a^2b + 4b^2$.

4) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2ac}{bd} + \frac{c^2}{d^2}.$

5) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}.$

6) $\left(\frac{2x}{3a} - \frac{3y}{4b}\right)^2 = \frac{4x^2}{9a^2} - \frac{xy}{ab} + \frac{9y^2}{16b^2}.$

7) $\left(\frac{3a^2}{4x} - \frac{b^2}{2y}\right)^2 = \ldots$

8) $\left(\frac{m^2p}{ab^3} + \frac{b^2c}{mq^2}\right)^2 = \ldots$

9) $\{(8a - 3b) + (4a - b)x\}^2 = \ldots$

10) $\{(2a^3 + 5b^3)y^2 - (5a^3 - 3b^3)y^3\}^2 = \ldots$

Um ein Trinom $a + b + c$ zum Quadrate zu erheben, betrachte man dasselbe als ein Binom, indem man $a + b$ als den ersten, und c als den zweiten Theil ansieht; es ist also

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2.$$

Eben so findet man

$$(a + b + c + d)^2 =$$
$$= [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2,$$
$$(a + b + c + d + e)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$
$$+ 2(a + b + c + d)e + c^2$$

u. s. w.

Aus den hier abgeleiteten Ausdrücken ergibt sich für das Quadriren eines Polynoms folgendes Bildungsgesetz:

Der erste Theil der Wurzel gibt sein eigenes Quadrat; jeder folgende Wurzeltheil gibt im Quadrate zwei Bestandtheile, nämlich das Produkt aus der doppelten Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile und aus sich selbst, und sein eigenes Quadrat.

Beispiele.

1) $(a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - (2a + 4b) \cdot 3c + 9c^2$
$= a^2 + 4ab + 4b^2 - 6ac - 12bc + 9c^2.$

2) $(4 + 2y - y^2)^2 = 16 + 16y - 4y^2 - 4y^3 + y^4.$

3) $(3x - 5y + 8z)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2 + 48xz - 80yz + 64z^2.$

4) $(3 - 4x + 5x^2 - 6x^3)^2 = 9 - 24x + 46x^2 - 76x^3$
$+ 73x^4 - 60x^5 + 36x^6.$

5) $\left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2 = 4 - 2a + \frac{35a^2}{12} - \frac{2a^3}{3} + \frac{4a^4}{9}.$

6) $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3c}{4d} - \frac{4e}{5f}\right)^2 =$
$= \frac{4a^2}{9b^2} + \frac{ac}{bd} + \frac{9c^2}{16d^2} - \frac{16ae}{15bf} - \frac{6ce}{5df} + \frac{16e^2}{25f^2}.$

7) $(5x^2 - 3x + 1)^2 = \dots$
8) $(4 - 8m + 5m^2 + 2m^3)^2 = \dots$
9) $(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5)^2 = \dots$
10) $(27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2 = \dots$
11) $\left(\frac{3y^2}{4b^2} + \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \dots$
12) $\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{3x}{4a} - 1\right)^2 = \dots$

§. 101.

Da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läßt, so kann man das fürs Quadriren zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke abgeleitete Verfahren auch auf dekadische Zahlen anwenden.

Um z. B. 3417 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2$$
$$= 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2 + 2.3400.10 + 10^2 + 2.3410.7 + 7^2;$$

oder wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt:

$3417^2 =$	3000^2	. . .	9000000
	$+ 2.3000.400$	. . .	2400000
	$+ 400^2$	. . .	160000
	$+ 2.3400.10$	. . .	68000
	$+ 10^2$	. . .	100
	$+ 2.3410.7$	. . .	47740
	$+ 7^2$	. . .	49
			11675889;

oder mit Hinweglassung der Nullen:

3417^2		
3^2	. . .	9.
$2 . 3 . 4$	. . .	24.
4^2	. . .	16.
$2 . 34 . 1$	. . .	68.
1^2	. . .	1.
$2 . 341 . 7$	. . .	4774.
7^2	. . .	49
		11675889

Man verfährt daher, um eine dekadische Zahl zum Quadrat zu erheben, auf folgende Art:

1. Man erhebt die erste oder höchste Ziffer zum Quadrat.
2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile: das Produkt aus der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.
3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addirt; die Summe ist das gesuchte Quadrat.

Beispiele.

$41{\cdot}7^2$

	4^2 . . .	16.
2 . 4 . 1	. . .	8.
	1^2 . . .	1.
2 . 41 . 7	. . .	574.
	7^2 . . .	49
		1738·89

31417^2

	3^2 . . .	9	.			
2 . 3 .	1 . . .		6 .			
	1^2 . . .		1	.		
2 . 31 .	4 . . .		24	8 .		
	4^2 . . .			16	.	
2 . 314 .	1 . . .			62	8 .	
	1^2 . . .				1	.
2 . 3141 .	7 . . .			43	97	4
	7^2 . . .					49
		9	87	02	78	89

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Ziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viele Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu zwei Ziffern, wo dann die erste Klasse links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Klassen, als die Quadratwurzel Ziffern enthält.

2. Erheben eines zusammengesetzten Ausdruckes auf die dritte Potenz.

§. 102.

Multiplizirt man das Quadrat einer Größe mit dieser Größe selbst, so erhält man ihren Kubus. Es ist also

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)\,(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\end{aligned}$$

d. h. der Kubus eines Binoms ist gleich dem Kubus des ersten Theiles, mehr dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multiplizirt mit dem zweiten Theile, mehr dem dreifachen ersten Theile multiplizirt mit dem Quadrate des zweiten Theiles, mehr dem Kubus des zweiten Theiles.

Beispiele.

1) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$
2) $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3.$
3) $(m^3 - 2n^2)^3 = m^9 - 6m^6n^2 + 12m^3n^4 - 8n^6.$

4) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^3}{a^3}+\frac{3x^2y}{a^2b}+\frac{3xy^2}{ab^2}+\frac{y^3}{b^3}$.

5) $(5a^2+4bx^3)^3=\ldots$

6) $\left(\frac{5m}{3x^2}-\frac{4x^2}{7m}\right)^3=\ldots$

7) $\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{4a}{9x}\right)^3=\ldots$

§. 103.

Um nach dem eben entwickelten Satze den Kubus eines Trinoms $a+b+c$ zu erhalten, betrachtet man $a+b$ als den einen Theil und findet

$$(a+b+c)^3=$$
$$=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2\,.\,c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$

Eben so folgt

$$(a+b+c+d)^3=[(a+c+b)+d]^3=$$
$$=(a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3,$$

u. s. f.

Wenn man diese dritten Potenzen aufmerksam betrachtet, so sieht man:

Der erste Wurzeltheil gibt seinen eigenen Kubus; jeder folgende Wurzeltheil gibt drei Bestandtheile, das dreifache Quadrat der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile multiplizirt mit jenem Wurzeltheile, die dreifache Summe aller vorhergehenden Theile multiplizirt mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Kubus.

Beispiele:

1) $(y^2+2y-3)^3=y^6+6y^5+12y^4+8y^3-9(y^2+2y)^2$
$+27(y^2+2y)-27=y^6+6y^5+12y^4+8y^3-9y^4-36y^3$
$-36y^2+27y^2+54y-27=y^6+6y^5+3y^4-28y^3$
$-9y^2+54y-27$.

2) $(x^2-3xy+2y^2)^3=x^6-9x^5y+33x^4y^2-63x^3y^3+66x^2y^4$
$-36xy^5+8y^6$.

3) $(1-2x-3x^2+4x^3)^3=1+6x+3x^2-16x^3+39x^4+30x^5$
$-132x^6+204x^7-144x^8+64x^9$.

4) $(2x^3+x^2y-3xy^2-4y^3)^3=$
$=8x^9+12x^8y-30x^7y^2-83x^6y^3-3x^5y^4$
$+159x^4y^5+141x^3y^6-60x^2y^7-144xy^8-64y^9$.

5) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+1\right)^3=\frac{x^6}{27}-\frac{x^5}{2}+\frac{7x^4}{12}-\frac{9x^3}{8}+\frac{7x^2}{4}-\frac{3x}{2}+1$.

6) $(x^3 + 10x^2 - 15x - 5)^3 = \ldots$
7) $(a - 2a^2 + 4a^4 - 8a^8)^3 = \ldots$
8) $\left(\frac{m^3}{4} + \frac{2m^2}{3} - \frac{3m}{2} - 4\right)^3 = \ldots$
9) $\left(4ax - \frac{2x^3}{3a} + \frac{9x^5}{8a^3}\right)^3 = \ldots$

§. 104.

Sucht man nach dem hier entwickelten Bildungsgesetze für den Kubus eines algebraischen Polynoms den Kubus einer dekadischen Zahl, z. B. 4213; so erhält man, wenn die Bestandtheile unter einander gestellt werden:

$$\begin{array}{lrr}
4213^3 = (4000 + 200 + 10 + 3)^3 & & \\
= & 4000^3 \;\ldots & 64000000000 \\
& + 3 \,.\, 4000^2.200 \;\ldots & 9600000000 \\
& + 3 \,.\, 4000 \,.200^2 \;\ldots & 480000000 \\
& + 200^3 \;\ldots & 8000000 \\
& + 3 \,.\, 4200^2.\ 10 \;\ldots & 529200000 \\
& + 3 \,.\, 4200 \,.\, 10^2 \;\ldots & 1260000 \\
& + 10^3 \;\ldots & 1000 \\
& + 3 \,.\, 4210^2.\ 3 \;\ldots & 159516900 \\
& + 3 \,.\, 4210 \,.\ 3^2 \;\ldots & 113670 \\
& + 3^3 \;\ldots & 27 \\
\hline
& & = 74778091597
\end{array}$$

Abraham a Santa Clara.

oder mit Weglassung der Nullen:

$$\begin{array}{lrr}
 & 4213^3 & \\
\hline
 & 4^3 \;\ldots & 64. \\
3 \,. & 4^2.2 \;\ldots & 96. \\
3 \,. & 4 \,.2^2 \;\ldots & 48. \\
 & 2^3 \;\ldots & 8. \\
3 \,. & 42^2.1 \;\ldots & 5292. \\
3 \,. & 42 \,.1^2 \;\ldots & 126. \\
 & 1^3 \;\ldots & 1. \\
3 \,. & 421^2.3 \;\ldots & 1595169. \\
3 \,. & 421 \,.3^2 \;\ldots & 11367. \\
 & 3^3 \;\ldots & 27 \\
\hline
 & & 74778091597.
\end{array}$$

Zur Entwicklung des Kubus einer dekadischen Zahl ergibt sich demnach folgendes Verfahren:

1. Man erhebe die erste oder höchste Wurzelziffer zum Kubus.
2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile: das Produkt aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Produkt aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Kubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addirt.

Beispiele.

$1{\cdot}23^3$		3054^3				
1^3 . . .	1.	3^3 . . .	27	. . .	.	
$3.1^2.2$	6.	$3.30^2.5$	1	350	0.	
$3.1.2^2$ . . .	12.	$3.30.5^2$ . . .		22	50	
2^3 . . .	8.	5^3 . . .			125	.
$3.12^2.3$ . . .	1296.	$3.305^2.4$ . . .		111	630	0.
$3.12.3^2$ . . .	324.	$3.305.4^2$ . . .			146	40.
3^3 . . .	27	4^3 . . .				64
	1·860867		28	484	401	464

Da die erste Wurzelziffer im Kubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, und wegen jeder folgenden Wurzelziffer im Kubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Kubus einer Zahl immer entweder dreimal so viel Ziffern, als deren die Kubikwurzel hat, oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Kubus von der Rechten angefangen in Klassen zu drei Ziffern, wo die erste Klasse zur Linken auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten kann, so hat man so viele Klassen, als die Kubikwurzel Ziffern enthält.

VIII. Von den Wurzelgrößen.

a) Allgemeine Sätze.

§. 105.

1. **Die erste Wurzel aus einer Größe ist die Größe selbst**; daher wird für die erste Wurzel weder der Exponent, noch das Wurzelzeichen angeschrieben; statt $\sqrt[1]{a}$ schreibt man also nur a. Bei der zweiten Wurzel wird wohl das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben; wenn daher das Wurzelzeichen ohne Exponenten dasteht, so versteht man immer die zweite Wurzel; $\sqrt{a}$ bedeutet also $\sqrt[2]{a}$.

2. **Die Wurzel muß so beschaffen sein, daß sie auf die Potenz des Wurzelexponenten erhoben, die Größe unter dem Wurzelzeichen gibt.**

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Begriffe einer Wurzelgröße; ist $\sqrt[m]{a} = b$, so muß $b^m = a$ sein.

3. Jede Wurzel aus 1 ist wieder 1.

Weil $1^m = 1$, so ist auch $\sqrt[m]{1} = 1$.

4. Wenn man eine Größe zu einer bestimmten Potenz erhebt, und dann aus dem Resultate wieder die eben sovielte Wurzel auszieht; oder wenn man umgekehrt aus einer Größe eine bestimmte Wurzel auszieht, und diese dann zur eben sovielten Potenz erhebt: so erhält man wieder die ursprüngliche Größe.

Es ist also

$$\sqrt[m]{a^m} = a \text{ und } (\sqrt[m]{a})^m = a.$$

Diesem zu Folge kann jede Größe in Form einer Wurzelgröße dargestellt werden, man darf ihr nur als Wurzel- und Potenzexponenten dieselbe Zahl geben. Z. B. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

§. 106.

5. Wenn eine Größe zu einer Potenz zu erheben, und daraus eine Wurzel auszuziehen ist, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung diese beiden Operazionen vorgenommen werden.

Es sei die Größe a zur mten Potenz zu erheben, und daraus die nte Wurzel auszuziehen. Setzt man $\sqrt[n]{a} = b$, so muß $b^n = a$ sein, daher $(b^n)^m = a^m$; es ist aber $(b^n)^m = (b^m)^n$, folglich $(b^m)^n = a^m$, und wenn man beiderseits die nte Wurzel auszieht,

$$\sqrt[n]{(b^m)^n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ oder } b^m = \sqrt[n]{a^m},$$

also, weil $b = \sqrt[n]{a}$ ist, auch

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

6. Jede Wurzelgröße kann in eine Potenzgröße mit gebrochenem Exponenten verwandelt werden, wenn man den Potenzexponenten zum Zähler, und den Wurzelexponenten zum Nenner des Bruches annimmt.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Potenzirens ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Nach dem vorhergehenden Satze ist aber auch

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

$$\text{mithin } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Man kann dieses auch so ausdrücken:

Aus einer Potenzgröße wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividirt.

§. 107.

7. Der Werth einer Wurzelgröße wird nicht geändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplizirt oder dividirt.

Es ist

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}},$$

$$\text{und } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}.$$

Der erste Theil dieses Satzes gibt ein Mittel an die Hand, mehrere Wurzelgrößen auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten zu bringen. Man suche nämlich zwischen den gegebenen Wurzelexponenten ein gemeinschaftliches Vielfaches, am besten das kleinste; dieses ist der neue Wurzelexponent. Nun dividire man den neuen Wurzelexponenten durch jeden alten, und multiplizire mit dem Quozienten sowohl den Wurzel- als den Potenzexponenten.

Es seien z. B. die Wurzelgrößen $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{c^3}$, $\sqrt[10]{d^7}$, mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darzustellen. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Wurzelexponenten 2, 3, 5, 10 ist 30, man hat also

$$\begin{array}{llll} 30 : 2 = 15, & \text{daher} & \sqrt[2]{a} = \sqrt[30]{a^{15}}, \\ 30 : 3 = 10, & \text{„} & \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}}, \\ 30 : 5 = 6, & \text{„} & \sqrt[5]{c^3} = \sqrt[30]{c^{18}}, \\ 30 : 10 = 3, & \text{„} & \sqrt[10]{d^7} = \sqrt[30]{d^{21}}. \end{array}$$

Mit Hilfe des zweiten Theiles des obigen Satzes kann man eine Wurzelgröße, worin Wurzel- und Potenzexponent ein gemeinschaftliches Maß haben, abkürzen. Z. B.

$$\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[mp]{a^p} = \sqrt[m]{a}.$$

b) Zeichen der Wurzeln.

§. 108.

1. Es sei zuerst $\sqrt[2n]{+a}$. Aus $+a$ die 2nte Wurzel ausziehen heißt eine Größe suchen, welche 2nmal als Faktor gesetzt $+a$ gibt; nun kann sowohl eine positive, als eine negative Größe in gerader

Anzahl als Faktor gesetzt ein positives Resultat geben; $\sqrt[2n]{+a}$ kann also positiv oder negativ sein.

Eine gerade Wurzel aus einer positiven Größe kann also sowohl positiv als negativ sein.

2. Man untersuche ferner $\sqrt[2n]{-a}$. Hier ist eine Größe zu suchen, welche 2nmal, also in gerader Anzahl, als Faktor gesetzt, $-a$, d. i. ein negatives Produkt gibt; nun existirt weder eine positive, noch eine negative reelle Größe, die in gerader Anzahl als Faktor gesetzt, ein negatives Resultat geben würde. Der Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ enthält also eine Forderung, welcher durch keine reelle Größe Genüge geleistet werden kann; er bildet eine Größe ganz eigener Art, die man imaginär nennt. Man sagt:

Eine gerade Wurzel aus einer negativen Größe ist imaginär.

Wenn man auch bisher für die imaginäre Größe $\sqrt[2n]{-a}$ in der Arithmetik keinen andern Sinn ausgemittelt hat, als den einer Größe, die 2nmal als Faktor gesetzt $-a$ gibt, so ist sie darum aus dem Gebiete der Mathematik doch nicht zu verbannen, da sie schon beim algebraischen Kalkül oft wichtige Vortheile darbietet, in der Geometrie aber ihre ganze bestimmte Bedeutung hat. Wenn in einer rein arithmetischen Aufgabe, in welcher nur nach einer reellen Größe gefragt werden kann, eine imaginäre Größe als Resultat erscheint, so gibt sie zu erkennen, daß die Bedingungen der Aufgabe einen Widerspruch in sich enthalten.

3. Unter $\sqrt[2n+1]{+a}$ versteht man eine Größe, welche $(2n+1)$mal als Faktor gesetzt $+a$ gibt; nun kann nur eine positive Größe in ungerader Anzahl als Faktor gesetzt ein positives Resultat geben, somit ist $\sqrt[2n+1]{+a}$ positiv.

Eine ungerade Wurzel aus einer positiven Größe kann daher nur positiv sein.

4. Auf dieselbe Art überzeugt man sich, daß $\sqrt[2n+1]{-a}$ nur negativ sein kann.

Eine ungerade Wurzel aus einer negativen Größe ist also negativ.

c) Rechnungsoperazionen mit Wurzelgrößen.

1. Addiren und Subtrahiren der Wurzelgrößen.

§. 109.

Bei Wurzelgrößen wird die Summe oder Differenz in den meisten Fällen bloß angezeigt; nur wenn die Wurzelgrößen gleichartig sind, d. i. wenn sie sowohl gleiche Wurzelexponenten, als gleiche Größen unter den Wurzelzeichen haben, kann eine Zusammenziehung vorgenommen werden.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} = 10\sqrt[3]{a}$.

2) $7\sqrt[m]{x^n} - 3\sqrt[m]{x^n} = 4\sqrt[m]{x^n}$.

3) $5\sqrt[8]{a^3} + 2\sqrt[4]{a} - 5\sqrt[4]{a} - 3\sqrt[8]{a^3} = 2\sqrt[8]{a^3} - 3\sqrt[4]{a}$.

4) $a + b\sqrt{m} + c - d\sqrt{m} = a + c + (b - d)\sqrt{m}$.

5) $3\sqrt{a} - 6\sqrt[3]{a} + m\sqrt{a} + n\sqrt[3]{a} = \ldots$

6) $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b} = \ldots$

2. Multipliziren der Wurzelgrößen.

§. 110.

Wurzelgrößen können nur wirklich multiplizirt werden, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben; ist dieses nicht der Fall, so müssen sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten gebracht werden.

Es sei nun $\sqrt[m]{a}$ mit $\sqrt[m]{b}$ zu multipliziren.

Setzt man $\sqrt[m]{a} = x$ und $\sqrt[m]{b} = y$, so muß $x^m = a$, $y^m = b$ sein, daher $x^m y^m = ab$, oder $(xy)^m = ab$, und wenn man beiderseits die mte Wurzel auszieht, $xy = \sqrt[m]{ab}$, oder wenn statt x und y ihre Werthe gesetzt werden,

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab},$$

d. h. Wurzelgrößen desselben Exponenten werden multiplizirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Produkte der Größen unter den Wurzelzeichen auszieht.

Beispiele.

1) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^3}$.

2) $\sqrt[m]{a^{m+p}} \cdot \sqrt[m]{a^{m-p}} = \sqrt[m]{a^{2m}} = a^2$.

3) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{1000} = 10$.

4) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^5}$.

5) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[60]{x^{50} y^{27}}$.

6) $3\sqrt[3]{b^2} \cdot 5\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[12]{b} = 15\sqrt[12]{b^{18}} = 15\sqrt{b^3}$.

7) $(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{c}) \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{ax} - 2\sqrt[3]{bx} + 3\sqrt[3]{cx}$.

8) $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2 c$.

9) $(8 - 3\sqrt{5})(7 + 2\sqrt{5}) = 26 - 5\sqrt{5}$.

10) $(3\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7} - 3\sqrt[4]{3}) = 42 - 12\sqrt{3} - \sqrt[4]{147}$.

11) $(\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{ab}$.

12) $(\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{xy})(2\sqrt[6]{ab} - \sqrt[6]{xy})(5\sqrt{ab} + 4\sqrt{xy}) =$
$= 10ab - 12xy - 17\sqrt{abxy} + 30\sqrt[3]{a^2b^2xy} -$
$- 4\sqrt[3]{abx^2y^2} - 5\sqrt[6]{a^5b^5xy} + 24\sqrt[6]{abx^5y^5}$.

13) $\sqrt[4]{\frac{a^3}{m^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{a}} = \ldots$

14) $(3\sqrt{5a} + 4\sqrt{2a}) \cdot \sqrt[3]{4a} = \ldots$

15) $(4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = \ldots$

16) $(2\sqrt{3a} - 3\sqrt{2a})(3\sqrt{3a} + 2\sqrt{2a}) = \ldots$

17) $\sqrt{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} \cdot \sqrt{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \ldots$

18) $(a\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(2\sqrt{abc} - b\sqrt{c} + c\sqrt{b}) = \ldots$

19) $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{6})(2\sqrt{3} - 4\sqrt{10}) = \ldots$

20) $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \ldots$

Mit Hilfe des vorhergehenden Satzes kann man jeden Faktor einer Wurzelgröße unter das Wurzelzeichen bringen, man braucht ihn nur zu jener Potenz zu erheben, welche der Wurzelexponent anzeigt.

So ist

1) $a\sqrt[m]{b^p} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b^p} = \sqrt[m]{a^m b^p}$.

2) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$.

3) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Durch Umkehrung des oben gefundenen allgemeinen Ausdruckes erhält man

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b},$$

d. h. aus einem Produkte wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus jedem Faktor auszieht, und diese Wurzeln mit einander multiplizirt.

Dieser Satz ist dann anzuwenden, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen Faktoren enthält, aus denen sich die verlangte Wurzel ausziehen läßt. Da wird die Wurzel wirklich ausgezogen, und es werden nur noch die übrigen Faktoren, aus denen die Wurzel nicht ausgezogen werden kann, unter dem Wurzelzeichen zurückbleiben. Dieses Verfahren kann oft sehr vortheilhafte Zusammenziehungen herbeiführen.

Beispiele.

1) $\sqrt[5]{a^{10}b^3} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b^3} = a^2 \cdot \sqrt[5]{b^3}$.
2) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
3) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$.
4) $\sqrt[3]{x^6y^5} = \sqrt[3]{x^6 \cdot y^3 \cdot y^2} = x^2y\sqrt[3]{y^2}$.
5) $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$.
6) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.
7) $4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$.
8) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - \sqrt{128} = \ldots$
9) $6\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{20} = \ldots$
10) $5a\sqrt{12x^3} - 2x\sqrt{27a^2x} + ax\sqrt{48x} = \ldots$

3. Dividiren der Wurzelgrößen.

§. 111.

Beim Dividiren der Wurzelgrößen müssen diese, wenn sie nicht schon gleiche Wurzelexponenten haben, auf solche gebracht werden.

Es sei nun $\sqrt[m]{a}$ durch $\sqrt[m]{b}$ zu dividiren.

Setzt man $\sqrt[m]{a} = x$, $\sqrt[m]{b} = y$, so ist $x^m = a$, $y^m = b$, daher $\frac{x^m}{y^m} = \frac{a}{b}$, oder $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{a}{b}$. Daraus folgt $\frac{x}{y} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, oder wenn man statt x und y ihre Werthe substituirt,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

d. h. Wurzelgrößen desselben Exponenten werden dividirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Quozienten der Größen unter den Wurzelzeichen auszieht.

Da umgekehrt

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

ist, so hat man auch den folgenden Satz:

Aus einem Bruche (Quozienten) wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus Zähler und Nenner auszieht, und die Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners dividirt.

Läßt sich aus dem Zähler, oder aus dem Nenner, oder aus einigen Faktoren derselben die verlangte Wurzel ausziehen, so kann der Ausdruck dadurch auf eine einfachere Form gebracht werden.

Beispiele.

1) $\sqrt[m]{ax} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{x}.$

2) $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a}.$

3) $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^5}.$

4) $\sqrt[n]{\frac{a}{x}} : \sqrt[p]{\frac{b}{x}} = \sqrt[np]{\frac{a^p}{x^p}} : \sqrt[np]{\frac{b^n}{x^n}} = \sqrt[np]{\frac{a^p\, x^{n-p}}{b^n}}.$

5) $\sqrt{a+x} : \sqrt[4]{a^2-x^2} = \sqrt[4]{(a+x)(a+x)} : \sqrt[4]{(a+x)(a-x)}$
$= \sqrt[4]{\frac{a+x}{a-x}}.$

6) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{a^2}{b^3}.$

7) $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}\, b^{mp}\, c^q}{x^{mr}\, y^{ms}}} = \frac{a^n\, b^p \sqrt[m]{c^q}}{x^r\, y^s}.$

8) $(\sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}.$

9) $(3 - 4\sqrt[3]{9}) : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9} - 4\sqrt[3]{3}.$

10) $(a - \sqrt{a} + \sqrt[6]{a^5} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{a^5} - \sqrt[4]{a^3}) : (\sqrt{a} - 1) =$
$= \sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{a^3}.$

11) $(8a\sqrt[6]{a} - 12\sqrt[6]{a^4b^3} - 6a\sqrt{b} + 9b\sqrt{a} + 4\sqrt[6]{a^3b^4} - 6b\sqrt[6]{b})$
$: (2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}) = 4\sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt[3]{b^2}.$

12) $m\sqrt{a} : \sqrt[4]{a} = \ldots$

13) $(B - b) : (\sqrt{B} - \sqrt{b}) = \ldots$

14) $(8x - 6\sqrt{x} - 4x\sqrt[3]{x}) : -2\sqrt[3]{x} = \ldots$

15) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt[6]{a^5} = \ldots$

16) $(\sqrt{ax} - \sqrt{cx} + \sqrt{az} - \sqrt{cz}) : (\sqrt{a} - \sqrt{c}) = \ldots$

17) $\sqrt[3]{\left\{\frac{m + n + 2\sqrt{mn}}{m - n}\right\}} : \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\right\}} = \ldots$

18) $\frac{4a^2 - 9b^2}{125a^3 - b^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{25a^2 - 10ab + b^2}{4a^2 - 12ab + 9b^2}}$
$: \frac{4a^2 + 12ab + 9b^2}{25a^2 + 10ab + b^2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2 - 9b^2}{25a^2 - b^2}} = \ldots$

Aus dem letzten Satze folgt auch:

Wenn man aus allen Gliedern einer Proporzion dieselbe Wurzel auszieht, so erhält man wieder eine Proporzion.

Ist $a:b = c:d$, so muß auch $\sqrt[m]{(a:b)} = \sqrt[m]{(c:d)}$, oder $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$ sein.

4. Potenziren der Wurzelgrößen.

§. 112.

Es ist schon bei den allgemeinen Sätzen bewiesen worden, daß

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

ist, d. h.

Eine Wurzelgröße wird zu einer Potenz erhoben, wenn man die Größe unter dem Wurzelzeichen zu jener Potenz erhebt, und daraus die entsprechende Wurzel auszieht.

Beispiele.

1) $(\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8} = a^2\sqrt[3]{a^2}$.

2) $(\sqrt[4]{ab^2c^3})^3 = \sqrt[4]{a^3b^6c^9} = bc^2\sqrt[4]{a^3b^2c}$.

3) $\left(\sqrt[m]{\frac{a^n\,b^p}{c^r}}\right)^s = \sqrt[m]{\frac{a^{ns}\,b^{ps}}{c^{rs}}}$.

4) $(2a + 3\sqrt{b})^2 = 4a^2 + 12a\sqrt{b} + 9b$.

5) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = 30 - 12\sqrt{6}$.

6) $\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right\}^2 = a - \sqrt{b}$.

7) $(4a^2\sqrt{ax^2})^4 = \ldots$

8) $(2 - 3\sqrt{5})^2 = \ldots$

9) $(3x^2\sqrt{y} - 2y^2\sqrt{x})^2 = \ldots$

10) $(\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-a})^2 = \ldots$

11) $[\sqrt{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} - \sqrt{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}]^2 = \ldots$

12) $(4a\sqrt[3]{b} - 3b\sqrt[3]{a})^3 = \ldots$

13) $(a - 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a^2})^3 = \ldots$

14) $[\sqrt{a^3 + \sqrt{a^6-b^6}} - \sqrt{a^3 - \sqrt{a^6-b^6}}]^3 = \ldots$

5. Wurzelausziehen aus Wurzelgrößen.

§. 113.

Es soll aus $\sqrt[n]{a}$ die mte Wurzel ausgezogen werden.

Man setze $\sqrt[n]{a} = x$ und $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{x} = y$, so ist $x^n = a$,

$y^m = x$, daher $y^{mn} = x^n$ und $y = \sqrt[mn]{x^n}$, oder wenn man statt y und x^n ihre Werthe setzt,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

d. h. aus einer Wurzelgröße wird eine Wurzel ausgezogen, wenn man die Wurzelexponenten multiplizirt, und das Produkt zum neuen Wurzelexponenten annimmt.

Beispiele.

1) $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}.$

2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[8]{5}.$

3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}} = \sqrt[mnp]{x}.$

Aus $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ folgt umgekehrt, daß man, wenn der Wurzelexponent eine zusammengesetzte Zahl ist, die verlangte Wurzel erhält, wenn man jenen Wurzelexponenten in seine Faktoren zerlegt, und dann nach und nach die Wurzeln auszieht, deren Exponenten die einzelnen Faktoren sind.

Beispiele.

1) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

2) $\sqrt[10]{1004} = \sqrt[5]{\sqrt{1004}} = \sqrt[5]{32} = 2.$

3) $\sqrt[6mn]{a^p} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}}}}.$

4) $3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} + \sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} = \ldots$

5) $4a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt{a^3\sqrt{a^8}} = \ldots$

6. Irrazionale Wurzelgrößen und Razionalmachen des Nenners.

§. 114.

Die Wurzel aus einer ganzen Zahl kann nie ein Bruch sein, weil kein Bruch zu einer Potenz erhoben eine ganze Zahl geben kann. Ist daher $\sqrt[m]{A}$, wo A eine ganze Zahl vorstellt, zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen enthalten; so läßt sich diese Wurzel weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl vollkommen genau darstellen. Gleichwohl läßt sich stets ein Bruch, und zwar ein Dezimalbruch finden, der von dem wahren Werthe der Wurzel um weniger verschieden ist, als jede noch so kleine angebbare Größe. Es ist

$$\sqrt[m]{A} = \frac{10^n \sqrt[m]{A}}{10^n} = \frac{\sqrt[m]{A \cdot 10^{mn}}}{10^n}.$$

Da $\sqrt[m]{A}$ durch keine ganze oder gebrochene Zahl darstellbar ist, so gilt dasselbe auch von $10^n \sqrt[m]{A}$ oder $\sqrt[m]{A \cdot 10^{mn}}$. Es sei nun a die größte ganze Zahl, welche in $\sqrt[m]{A \cdot 10^{mn}}$ enthalten ist, und man setze $\sqrt[m]{A \cdot 10^{mn}} = a + w$, wo $w < 1$ sein muß; so ist

$$\sqrt[m]{A} = \frac{a+w}{10^n} = \frac{a}{10^n} + \frac{w}{10^n},$$

daher

$$\sqrt[m]{A} - \frac{a}{10^n} = \frac{w}{10^n},$$

und, weil $w < 1$ ist,

$$\sqrt[m]{A} - \frac{a}{10^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Nimmt man daher für $\sqrt[m]{A}$ den Werth $\frac{a}{10^n}$, so begeht man einen Fehler, welcher kleiner als $\frac{1}{10^n}$ ist; aber n kann beliebig groß genommen, daher $\frac{1}{10^n}$ beliebig klein gemacht werden; der Fehler, den man begehet, kann also kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

$\sqrt[m]{A}$ ist demnach eine Zahl, deren Verhältniß zur Einheit sich weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl vollkommen genau, wohl aber näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen läßt, oder $\sqrt[m]{A}$ ist eine irrazionale Zahl. So sind $\sqrt{5}$, $\sqrt[8]{10}$ irrazional.

Eine algebraische Wurzelgröße $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ heißt irrazional, wenn der Potenzexponent n durch den Wurzelexponenten m nicht theilbar ist; sonst ist sie razional. Z. B. Die Wurzelgrößen $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, $\sqrt[p]{x^{mp}} = x^m$ sind razional, die Wurzelgrößen $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{a^r}$ dagegen irrazional.

Jeder Bruch, dessen Nenner irrazional ist, kann ohne Aenderung seines Werthes mit einem razionalen Nenner dargestellt werden. Wie dieses Geschäft, welches das Razionalmachen des Nenners heißt, in den einfachern und häufiger vorkommenden Fällen ausgeführt werden kann, wird aus dem Folgenden ersichtlich.

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ razional zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner mit $\sqrt[n]{b^{n-m}}$; es ist

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b},$$

in welcher letztern Form der Bruch mit einem razionalen Nenner erscheint.

Beispiele.

$$1)\ \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b},$$

$$2)\ \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$3)\ \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2}} = \frac{a\sqrt[10]{a^9}}{a}.$$

$3\sqrt[10]{a^5}\cdot\sqrt[10]{a^4} = 3\sqrt[10]{a^9}$

Man mache noch folgende Brüche razional:

$$4)\ \frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}};\quad 5)\ \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}};\quad 6)\ \frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}};$$

$$7)\ \frac{a\sqrt{3}}{2b\sqrt[4]{5}};\quad 8)\ \frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}};\quad 9)\ \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

2. Hat der Bruch die Form $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$ oder $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$, so wird er razional gemacht, wenn man Zähler und Nenner im ersten Falle mit $b\mp\sqrt{c}$, im zweiten mit $\sqrt{b}\mp\sqrt{c}$ multiplizirt; denn es ist

$$\frac{a}{b\pm\sqrt{c}} = \frac{a(b\mp\sqrt{c})}{(b\pm\sqrt{c})(b\mp\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b^2-c},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}.$$

Beispiele.

$$1)\ \frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \frac{15+3\sqrt{2}}{25-2} = \frac{15+3\sqrt{2}}{23},$$

$$2)\ \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7-4\sqrt{3},$$

$$3)\ \frac{15}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{15(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} =$$
$$= 5(\sqrt{5}-\sqrt{2}),$$

$$4)\ \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{6\sqrt{5^2}+4\sqrt{15}+3\sqrt{15}+2\sqrt{3^2}}{(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{36+7\sqrt{15}}{45-12} = \frac{36+7\sqrt{15}}{33}$$

Es sollen noch folgende Brüche mit einem razionalen Nenner dargestellt werden:

5) $\frac{7}{4-2\sqrt{3}}$; 6) $\frac{a}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 7) $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$;

8) $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$; 9) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; 10) $\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$;

11) $\frac{2}{\sqrt{13-2\sqrt{3}}}$; 12) $\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}$; 13) $\frac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}$.

7. Die imaginären Größen.

§. 115.

In §. 108 wurde nachgewiesen, daß eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl nicht reell sein könne, und auf eine neue Art von Zahlen führe, welche **imaginär** genannt werden.

Da man bei allgemeinen Untersuchungen, in denen Wurzelgrößen auftreten, selten im Voraus entscheiden kann, ob sich das Resultat als eine reelle oder als eine imaginäre Zahl darstellen wird, so ist man, um solche Untersuchungen allgemein halten zu können, genöthiget, die imaginären Größen nach denselben Gesetzen in Rechnung zu ziehen, denen die reellen Wurzelgrößen unterworfen sind. Um nun hiebei nach sicheren Grundsätzen vorzugehen, wird die imaginäre Größe $\sqrt{-b^2}$ in der Rechnung jedesmal in ein Produkt umgewandelt, worin der eine Faktor reell und der andere $\sqrt{-1}$ ist. Es ist nämlich

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2 \cdot -1} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = b\sqrt{-1}.$$

Eben so findet man

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m \cdot -1} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{-1}.$$

Eine Zahl von der Form $b\sqrt{-1}$ heißt eine **reine imaginäre Zahl**.

Wird zu einer reellen Zahl a eine imaginäre $b\sqrt{-1}$ addirt, so ist die Summe $a+b\sqrt{-1}$ weder rein reell noch rein imaginär, sondern aus einem reellen und einem imaginären Theile zusammengesetzt. Eine Zahl von dieser Form wird eine **komplexe Zahl** genannt. Da sich, wie dieses in der höhern Analysis nachgewiesen wird, jede imaginäre Größe auf den Ausdruck $a+b\sqrt{-1}$, wo a auch Null sein kann, zurückführen läßt, so wird es hier genügen, zu zeigen, wie die Rechnungen mit solchen imaginären Größen, in denen $\sqrt{-1}$ als Faktor vorkommt, vorgenommen werden.

Wir werden zu diesem Ende zunächst die verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ betrachten.

Wenn man eine Wurzelgröße auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, so kommt die Größe unter dem Wurzelzeichen zum Vorschein; es ist daher

$$(\sqrt{-1})^2 = -1;$$

ferner

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = -1 \cdot -1 = +1.$$

Allgemein ist, wenn n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1; \qquad (\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1; \qquad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

a) Die Summe und die Differenz zweier imaginären Zahlen $m\sqrt{-1}$ und $n\sqrt{-1}$ sind wieder imaginär; es ist nämlich

$$m\sqrt{-1} + n\sqrt{-1} = (m+n)\sqrt{-1};$$
$$m\sqrt{-1} - n\sqrt{-1} = (m-n)\sqrt{-1}.$$

Nur für $m = n$ wird die Differenz gleich Null.

Eben so geben zwei komplexe Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ und $c + d\sqrt{-1}$ im Allgemeinen sowohl zur Summe als zur Differenz eine komplexe Zahl; denn es ist

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1};$$
$$(a + b\sqrt{-1}) - (c + d\sqrt{-1}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{-1}.$$

Für $a = c$ wäre die Differenz rein imaginär, für $b = d$ rein reell.

b) Zwei imaginäre Zahlen geben ein reelles Produkt und einen reellen Quozienten. Es ist

$$\sqrt{-m} \cdot \sqrt{-n} = \sqrt{m}\sqrt{-1} \cdot \sqrt{n}\sqrt{-1} = \sqrt{mn}(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{mn};$$
$$\sqrt{-m} : \sqrt{-n} = \sqrt{m}\sqrt{-1} : \sqrt{n}\sqrt{-1} = \sqrt{m:n}.$$

Dagegen ist für eine reelle und eine imaginäre Zahl sowohl das Produkt als der Quozient imaginär.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-m} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{am} \cdot \sqrt{-1};$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{-m} = \sqrt{a} : \sqrt{m} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} : \sqrt{m} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} : -\sqrt{m} = -\sqrt{a:m} \cdot \sqrt{-1}.$$

Das Produkt aus zwei komplexen Zahlen ist im Allgemeinen wieder eine komplexe Zahl.

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

Eine Ausnahme bilden die zwei komplexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$, welche man **konjugirte** Zahlen nennt. Diese besitzen die Eigenschaft, daß nicht nur ihre Summe, sondern auch ihr Produkt reell ist. Man hat nämlich

$$(a + b\sqrt{-1}) + (a - b)\sqrt{-1} = 2a;$$
$$(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 - b^2(\sqrt{-1})^2 = a^2 + b^2.$$

Auch der Quozient von zwei komplexen Zahlen bietet wieder eine komplexe Zahl dar. Es ist

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Hier wurde der Divisor (Nenner) reell gemacht, indem man dabei auf dieselbe Art verfuhr, wie bei der Razionalmachung eines irrazionalen Nenners.

c) Da $(a\sqrt{-1})^n = a^n(\sqrt{-1})^n$ ist, so folgt, daß die Potenz einer imaginären Zahl reell oder imaginär ist, je nachdem $\sqrt{-1}$ zu jener Potenz erhoben ein reelles oder ein imaginäres Resultat gibt. Z. B.

$$(a\sqrt{-1})^3 = a^3(\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1};$$
$$(a\sqrt{-1})^4 = a^4(\sqrt{-1})^4 = a^4.$$

Die Potenz einer komplexen Zahl ist jedesmal wieder eine komplexe Zahl. Z. B.

$$(a+b\sqrt{-1})^2 = a^2+2ab\sqrt{-1}+(b\sqrt{-1})^2 = (a^2-b^2)+2ab\sqrt{-1}.$$

Die Entwicklung einer bestimmten Wurzel aus einer imaginären oder einer komplexen Zahl ist viel schwieriger, und gehört nicht in das Gebiet der Elementar-Mathematik.

Beispiele.

1) $4a+b\sqrt{-1}-(2a-3b\sqrt{-1}) = 2a+4b\sqrt{-1}.$

2) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}-\sqrt{-16} = 2\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}-4\sqrt{-1} =$
$= \sqrt{-1}.$

3) $a\sqrt{-x^2}-b\sqrt{-y^4}+c\sqrt{-z^6} = (ax-by^2+cz^3)\sqrt{-1}.$

4) $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5} = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{15}\,.\,\sqrt{-1}.$

5) $(m+\sqrt{-n})(m-\sqrt{-n}) = m^2-(\sqrt{-n})^2 = m^2+n.$

6) $(2a\sqrt{-1}-3b\sqrt{-1})(3a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}) =$
$= -6a^2+ab+3b^2.$

7) Es sei das Produkt

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})$$

zu entwickeln.

Multiplizirt man hier den ersten Faktor mit dem zweiten, den dritten mit dem vierten, und sodann die beiden Produkte mit einander, so erhält man

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Wenn man aber den ersten Faktor mit dem dritten, den zweiten mit dem vierten, und die dadurch gefundenen Produkte mit einander multiplizirt, so erscheint

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

als das gesuchte Produkt. Man hat somit die merkwürdige Gleichung

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

$-4+4$
0

von deren Richtigkeit man sich auch durch die Spezialisirung der Größen a, b, c, d überzeugen kann.

8) $\sqrt{-8} : \sqrt{-2} = \sqrt{8} \, . \sqrt{-1} : \sqrt{2} \, . \sqrt{-1} = \sqrt{4} = 2.$

9) $-x : \sqrt{-x} = -x : \sqrt{x} \, . \sqrt{-1} = -x\sqrt{-1} : \sqrt{x} \, . (\sqrt{-1})^2$
$= -x\sqrt{-1} : -\sqrt{x} = \sqrt{x} \, . \sqrt{-1} = \sqrt{-x}.$

10) $\sqrt{-20} - \sqrt{-15} : \sqrt{-5} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}.$

11) $\sqrt{-4} - 2\sqrt{-16} + 5\sqrt{-36} = \ldots$

12) $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = \ldots$

13) $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}) = \ldots$

14) $(\sqrt{-2} + \sqrt{-3} + \sqrt{-4})(\sqrt{-2} - \sqrt{-3} - \sqrt{-4}) = \ldots$

15) $(x-1)(x+1)(x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}) = \ldots$

16) $(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}) = \ldots$

17) $(3 - \sqrt{-5})^2 = \ldots$

18) $(\sqrt{a} - b\sqrt{-1})^2 = \ldots$

19) $(3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3})^2 = \ldots$

20) $(1 - \sqrt{-3})^3 = \ldots$

Man mache den Nenner reell in:

21) $\dfrac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}},$ 22) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{-2}}{\sqrt{3} + \sqrt{-2}},$

23) $\dfrac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}},$ 24) $\dfrac{6\sqrt{-6} + 5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5} - 5\sqrt{-6}},$

d) Wurzelausziehen aus zusammengesetzten Ausdrücken.

1. Ausziehen der zweiten Wurzel aus einem zusammengesetzten Ausdrucke.

§. 116.

Das Verfahren, nach welchem aus einem geordneten zusammengesetzten algebraischen Ausdrucke die Quadratwurzel ausgezogen wird, läßt sich aus dem Gesetze ableiten, nach welchem die Theile einer zusammengesetzten Wurzel im Quadrate zusammengestellt erscheinen.

1. Der erste Theil im Quadrate ist die zweite Potenz des ersten Wurzeltheiles. Man findet daher den ersten Wurzeltheil, wenn man aus dem ersten Theile des Quadrates die Quadratwurzel auszieht.

2. Wird das Quadrat des ersten Wurzeltheiles abgezogen, so sind die nächsten zwei Glieder die Bestandtheile, welche aus dem zweiten Wurzeltheile hervorgegangen sind, und zwar ist das erste übriggebliebene Glied das Produkt aus dem doppelten ersten Wurzeltheile und aus dem zweiten Theile der Wurzel. Dividirt man daher dieses erste Glied des Restes durch den doppelten bereits bekannten ersten Wurzeltheil, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel. — Nun bildet man die Bestandtheile, welche dieser zweite Wurzeltheil gibt, nämlich das Produkt aus dem doppelten ersten

und aus dem zweiten Wurzeltheile, und das Quadrat des zweiten Wurzeltheiles, welches geschieht, wenn man zu dem doppelten ersten Wurzeltheile den zweiten addirt, und die Summe mit diesem zweiten Wurzeltheile multiplizirt; es ist nämlich $2ab + b^2 = (2a + b)b$.

3. Wird das so gebildete Produkt von dem gegebenen Ausdrucke abgezogen, so kommen im Reste die Bestandtheile vor, die der dritte Wurzeltheil gibt, und zwar zuerst das Produkt aus der doppelten Summe der ersten zwei Wurzeltheile und aus dem dritten Theile der Wurzel. Wird daher der Rest durch die doppelte Summe der bereits gefundenen Wurzeltheile dividirt, so erhält man den dritten Wurzeltheil. Die Bestandtheile, welche dieser dritte Wurzeltheil im Quadrate hervorbringt, nämlich das Produkt aus der doppelten Summe der vorhergehenden und aus diesem neuen Wurzeltheile, und dessen Quadrat, findet man, wenn man zu der doppelten Summe der frühern Theile den dritten Wurzeltheil addirt, und die Summe mit diesem neuen Wurzeltheile multiplizirt; denn es ist

$$2(a + b)c + c^2 = [2(a + b) + c] . c.$$

4. Wenn man, nachdem dieses Produkt subtrahirt wurde, wieder den neuen Rest durch die doppelte Summe der bereits gefundenen Wurzeltheile dividirt, so erhält man den vierten Wurzeltheil.

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens wird zuletzt entweder kein Rest übrig bleiben, in welchem Falle die Quadratwurzel vollkommen genau ist; oder es bleibt, wenn der vorgelegte Ausdruck kein vollständiges Quadrat ist, ein Rest, und die Wurzel ist irrazional.

Beispiele.

1) $$\begin{array}{l} \sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2} = 2a - 3b \\ 4a^2 \\ - \\ \hline - 12ab + 9b^2 : (4a - 3b) \times -3b \\ - 12ab + 9b^2 \\ + \quad - \\ \hline 0. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{l} \sqrt{9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4 + 6m^2p^2 - 4n^2p^2 + p^4} = 3m^2 - 2n^2 + p^2 \\ 9m^4 \\ - \\ \hline - 12m^2n^2 + 4n^4 \qquad : (6m^2 - 2n^2) \times -2n^2 \\ - 12m^2n^2 + 4n^4 \\ + \quad - \\ \qquad + 6m^2p^2 - 4n^2p^2 + p^4 : (6m^2 - 4n^2 + p^2) \times p^2 \\ \qquad + 6m^2p^2 - 4n^2p^2 + p^4 \\ \qquad - \quad + \quad - \\ \hline \qquad 0. \end{array}$$

3) $\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5$

$$-x^4$$
$$+6x^3 - x^2 \qquad : (2x^2 + 3x) \times 3x$$
$$+6x^3 + 9x^2$$
$$- \quad -$$
$$-10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) \times -5$$
$$-10x^2 - 30x + 25$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$0.$$

4) $\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \dots$

$$-1$$
$$-x^2 \qquad : \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) \times - \frac{x^2}{2}$$
$$-x^2 + \frac{x^4}{4}$$
$$+ \quad -$$
$$-\frac{x^4}{4} : \left(2 - x^2 - \frac{x^4}{8}\right) \times - \frac{x^4}{8}$$
$$-\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{64}$$
$$+ \quad - \quad -$$
$$-\frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{64}$$

u. s. w.

5) $\sqrt{(25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6)}$
$= 5 - 7a + 9a^2 - 11a^3.$

6) $\sqrt{(9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16)}$
$= 3y^3 - 2y^2 + y - 4.$

7) $\sqrt{1 - 4x} = 1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - \dots$

8) $\sqrt{\left[\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right]} = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1.$

9) $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25\right]}$
$= \frac{3x^3}{4y^3} - \frac{x^2}{3y^2} - \frac{2x}{y} + 5.$

10) $\sqrt{4a^2 - 16a\sqrt{-b} - 16b} = \dots$

11) $\sqrt{16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4} = \dots$

12) $\sqrt{[16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1]} = \dots$

13) $\sqrt{[16 - 32y + 32y^2 - 32y^3 + 20y^4 - 8y^5 + 4y^6]} = \dots$

14) $\sqrt{[4x^8 - 12x^7 + 25x^6 - 44x^5 + 70x^4 - 76x^3 + 73x^2}$
$- 60x + 36] = \dots$

15) $\sqrt{\left\{\frac{25a^6}{81} - \frac{10a^5}{27} - \frac{31a^4}{81} + \frac{38a^3}{27} - \frac{38a^2}{81} - \frac{8a}{9} + 1\right\}} = \dots$

§. 117.

So wie wir hier die Methode für das Ausziehen der Quadratwurzel aus algebraischen Polynomen begründet haben, eben so läßt sich aus dem Gesetze, nach welchem die einzelnen Wurzelziffern im Quadrate zusammengestellt erscheinen, auch für das Ausziehen der Quadratwurzel aus besonderen Zahlen folgendes Verfahren ableiten:

1. Man theile die Zahl, von den Einheiten angefangen, in Klassen zu zwei Ziffern, wobei die erste Klasse links auch nur eine Ziffer enthalten kann. Bei einem Dezimalbruche geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Dezimalpunkte gegen die Linke, und die Eintheilung der Dezimalen vom Dezimalpunkte gegen die Rechte; wenn in den Dezimalen die letzte Klasse rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird, damit die Anzahl der Dezimalen eine gerade werde, eine Nulle angehängt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Quadrat in der höchsten Klasse vorkommt, setze sie als erste Ziffer in die Quadratwurzel, und ziehe deren Quadrat von jener Klasse ab.

3. Zu diesem und jedem folgenden Reste setze man die nächst niedrigere Klasse herab, und betrachte die dadurch entstehende Zahl, nach Hinweglassung der letzten Ziffer, als einen neuen Theildividend, welcher durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel dividirt, die nächstfolgende Wurzelziffer gibt, die zugleich als Ergänzung zu dem Divisor geschrieben wird. Der auf diese Art ergänzte Divisor wird mit der neuen Wurzelziffer multiplizirt, und das Produkt von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während des Multiplizirens abgezogen.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Klassen der gegebenen Zahl in Rechnung gezogen hat. Enthält das Quadrat Dezimalklassen, so setzt man in der Wurzel den Dezimalpunkt, bevor die erste Klasse von Dezimalen in Rechnung gezogen wird.

5. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist die Quadratwurzel vollkommen genau, im entgegengesetzten Falle ist sie nur angenähert, kann aber auch da mit jeder beliebigen Genauigkeit in Dezimalen bestimmt werden, wenn man jedem Reste eine Klasse von zwei Nullen anhängt, und übrigens so wie früher verfährt.

Beispiele.

1) $\sqrt{13|54|24} = 368$

4 54	:	66.6
58 24	:	728.8
„ „ „		

2) $\sqrt{5|94|38|44} = 243$

1 94	:	44.4
18 38	:	483.3
3 89 44	:	4868.8
„ „ „ „		

3) $\sqrt{1|52\cdot27|56} = 12\cdot34$
52 : 22.2
8 27 : 243.3
98 56 : 2464.4
„ „ „ „

4) $\sqrt{3\cdot5_0} = 1\cdot87082 \ldots$
2 50 : 28.8
2600 : 367.7
310000 : 37408.8
1073600 : 374162.2
325276

5) $\sqrt{28} = \ldots$ 6) $\sqrt{0\cdot015} = \ldots$
7) $\sqrt{1920056} = \ldots$ 8) $\sqrt{319\cdot0768} = \ldots$
9) $\sqrt{531\cdot2468} = \ldots$ 10) $\sqrt{33557799} = \ldots$

Wenn die Quadratwurzel sehr viele Dezimalstellen enthalten soll, so kann man die Rechnung bedeutend abkürzen, wenn man, nachdem bereits die Hälfte der Dezimalen durch das gewöhnliche Verfahren bestimmt wurden, anstatt zu dem Reste eine neue Klasse anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer wegläßt, und die folgenden Wurzelziffern nach der abgekürzten Division entwickelt.

Z. B. Um die Quadratwurzel aus 7 in 8 Dezimalen zu entwickeln, hat man

$\sqrt{7} = 2\cdot64575131$
300 : 46.6
2400 : 524.4
30400 : 5285.6
397500 : 52907.7
27151 : 5,2,9,1,4
694
165
6.

2. Ausziehen der dritten Wurzel aus einem zusammengesetzten Ausdrucke.

§. 118.

Das Verfahren für das Ausziehen der Kubikwurzel aus einer geordneten zusammengesetzten Größe beruhet auf dem Verfahren, nach welchem ein zusammengesetzter Ausdruck auf die dritte Potenz erhoben wird.

1. Der erste Theil im Kubus ist die dritte Potenz des ersten Wurzeltheiles. Zieht man daher aus dem ersten Theile des Kubus die Kubikwurzel aus, so erhält man den ersten Wurzeltheil.

2. Wird von dem gegebenen Ausdrucke der Kubus des ersten Wurzeltheiles abgezogen, so enthalten die ersten drei Glieder des Restes die Bestandtheile, welche aus dem zweiten Wurzeltheile hervorgingen, und zwar ist das erste Glied das Produkt aus dem dreifachen Quadrate des ersten Wurzeltheiles und aus dem zweiten

Theile der Wurzel. Man findet daher diesen zweiten Theil der Wurzel, wenn man das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat des bereits bekannten ersten Wurzeltheiles dividirt.

3. Entwickelt man die Bestandtheile, welche dieser neue Theil der Wurzel im Kubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des ersten Theiles multiplizirt mit dem zweiten, den dreifachen ersten Wurzeltheil multiplizirt mit dem Quadrate des zweiten Theiles, und den Kubus des zweiten Wurzeltheiles, und subtrahirt diese drei Bestandtheile von dem frühern Reste, so muß der neue Rest die Glieder enthalten, welche der dritte Wurzeltheil im Kubus hervorbringt, und zwar zuerst das dreifache Quadrat der ersten zwei Wurzeltheile multiplizirt mit dem dritten Theile. Wird daher der Rest durch das dreifache Quadrat der ersten zwei Wurzeltheile dividirt, so erhält man den dritten Theil der Kubikwurzel.

4. Bildet man sofort die drei Bestandtheile, welche aus diesem neuen Wurzeltheile hervorgehen, subtrahirt dieselben von dem letzten Reste, und dividirt wieder den neuen Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzeltheile, so erhält man den vierten Theil der Kubikwurzel.

5. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Kubikwurzel razional; bleibt ein Rest, so ist sie irrazional.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6} = ax^2 - by^2$

$$\begin{array}{l}
a^3x^6 \\
- \\
\hline
-3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6 : 3a^2x^4 \\
-3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^2y^6 \\
+ \qquad\qquad - \qquad\qquad + \\
\hline
0
\end{array}$$

2) $\sqrt[3]{\left[\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right]} = \frac{a}{2b} - \frac{4c}{3d}$

$$\begin{array}{l}
\frac{a^3}{8b^3} \\
- \\
\hline
-\frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3} : \frac{3a^2}{4b^2} \\
-\frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3} \\
+ \qquad - \qquad + \\
\hline
0
\end{array}$$

$$3)\ \sqrt[3]{a^3+x^3} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} \dots$$

$$\begin{array}{l}
a^3 \\
\underline{-} \\
\quad x^3 \qquad\qquad : 3a^2 \\
\quad x^3 + \frac{x^6}{3a^3} + \frac{x^9}{27a^6} \\
\quad \underline{- \quad - \quad\ -} \\
\quad\quad -\frac{x^6}{3a^3} - \frac{x^9}{27a^6} : 3a^2 + \frac{2x^3}{a} + \frac{x^6}{3a^4}
\end{array}$$

u. s. w.

$$4)\ \sqrt[3]{[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27]} = y^2 - 2y + 3$$

$$\begin{array}{l}
y^6 \\
\underline{-} \\
\quad -6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \qquad : \ 3y^4 \\
\quad -6y^5 + 12y^4 - \ 8y^3 \\
\quad \underline{+ \quad\ - \quad\ +} \\
\qquad\quad +9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\
\qquad\quad +9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 55y + 27 \\
\qquad\quad \underline{\ - \quad\ + \quad\ - \quad\ + \quad -} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$5)\ \sqrt[3]{[27 - 27x + 90x^2 - 55x^3 + 90x^4 - 27x^5 + 27x^6]} = 3 - x + 3x^2$$

$$6)\ \sqrt[3]{\left\{\begin{array}{l}125 - 225a + 285a^2 - 507a^3 + 474a^4 - 384a^5 \\ \qquad + 392a^6 - 192a^7 + 96a^8 - 64a^9\end{array}\right\}} = 5 - 3a + 2a^2 - 4a^3$$

$$7)\ \sqrt[3]{\left[\frac{27a^3}{64b^3} + \frac{27a^2}{16b^2} - \frac{9a}{8b} - 2 - \frac{b}{a} + \frac{4b^2}{3a^2} - \frac{8b^3}{27a^3}\right]} =$$

$$= \frac{3a}{4b} + 1 - \frac{2b}{2a}.$$

$$8)\ \sqrt[3]{x^4 - a} = \dots$$

$$9)\ \sqrt[3]{[8a - 60\sqrt[3]{a^2b} - 125b + 150\sqrt[3]{ab^2}]} = \dots$$

$$10)\ \sqrt[3]{[8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8]} = \dots$$

$$11)\ \sqrt[3]{[a^9 - 6a^7b^2 + 9a^6b^3 + 12a^5b^4 - 36a^4b^5 + 19a^3b^6 + 36a^2b^7 - 54ab^8 + 27b^9]} = \dots$$

$$12)\ \sqrt[3]{\left\{1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6}\right\}} = \dots$$

§. 119.

Durch ähnliche Schlüsse, durch welche das Verfahren beim Ausziehen der Kubikwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken begründet wurde, läßt sich aus dem Bildungsgesetze des Kubus einer dekadischen Zahl für das Ausziehen der Kubikwurzel aus besondern Zahlen folgende Methode ableiten:

1. Man theile die Zahl von den Einheiten angefangen gegen

die Linke in Klassen zu drei Ziffern ab, wobei die höchste Klasse auch nur eine oder zwei Ziffern haben kann. Kommen in der gegebenen Zahl auch Dezimalen vor, so werden diese vom Dezimalpunkte angefangen gegen die Rechte ebenfalls in Klassen zu drei Ziffern eingetheilt, und der letzten Klasse rechts, wenn sie weniger als drei Ziffern enthalten sollte, statt der fehlenden Stellen Nullen angehängt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Kubus in der höchsten Klasse vorkommt, schreibe sie als erste Ziffer in die Kubikwurzel, und ziehe ihren Kubus von der höchsten Klasse ab.

3. Zu diesem, so wie zu jedem folgenden Reste setze man die nächst niedrigere Klasse hinzu, und betrachte die dadurch entstehende Zahl, nach Hinweglassung der letzten zwei Ziffern, als Theildividend, der durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzeltheile dividirt, die nächste Ziffer der Kubikwurzel gibt. Nun bildet man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Kubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multiplizirt mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multiplizirt mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer, und ihren Kubus; schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte, und subtrahirt die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

4. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man alle Klassen heruntergesetzt hat. Kommen in der vorgelegten Zahl Dezimalklassen vor, so setzt man in die Wurzel den Dezimalpunkt, bevor die erste Dezimalklasse in Rechnung gezogen wird.

5. Bleibt am Ende der Rechnung kein Rest, so hat man die Kubikwurzel vollständig gefunden; sonst ist dieselbe nicht vollkommen genau, kann aber in Dezimalen mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man jedem Reste eine Klasse von drei Nullen anhängt, und übrigens wie vorhin verfährt.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{78|953|589} = 429$

64

$149,53 \quad : \quad 48 \ldots 3 \cdot 4^2$

$3 \cdot 4^2 \cdot 2 \ldots 96.$

$3 \cdot 4 \cdot 2^2 \ldots 48.$

$2^3 \ldots 8$

$48655,89 : 5292 \ldots 3 \cdot 42^2$

$3 \cdot 42^2 \cdot 9 \ldots 47628.$

$3 \cdot 42 \cdot 9^2 \ldots 10206.$

$9^3 \ldots 729$

„ „ „ „ „

2) $\sqrt{60\,006{\cdot}085\,875} = 39{\cdot}15$

```
 27
 33 006       :  27
 24 3
  7 29
   729
   687 085    :  4563
   456 3
     1 17
       1
   229 614875 :  458643
   229 3215
       29325
         125
          ,,
```

3) $\sqrt[3]{5} = 1{\cdot}7099\ldots$

```
 1
 4000      : 3
 21
 147
  343
  8700 0000 : 86700
  7803 00
     41 310
        729
     855 6171000 : 8762043
     788 58387
         415287
            729
      66 6178701
```

4) $\sqrt[3]{9104} = \ldots$ 5) $\sqrt[3]{12{\cdot}9054} = \ldots$

6) $\sqrt[3]{0{\cdot}068427} = \ldots$ 7) $\sqrt[3]{54637281} = \ldots$

8) $\sqrt[3]{34{\cdot}17739} = \ldots$ 9) $\sqrt[3]{8104{\cdot}978} = \ldots$

XI. Von den Logarithmen.

a) Allgemeine Sätze.

§. 120.

Wie schon in der Einleitung §. 14 gesagt wurde, heißt der Exponent, welcher anzeigt, zu welcher Potenz eine bestimmte Zahl, die Grundzahl oder Basis, erhoben werden muß, um eine gegebene Zahl zu erhalten, der Logarithmus dieser letzteren Zahl in Bezug auf jene Basis.

Wenn

$$b^m = M,\ b^n = N,\ b^p = P,\ b^q = Q,\ \ldots$$

ist, so sind

die Exponenten $m, n, p, q, \ldots$

die Logarithmen von $M, N, P, Q, \ldots$

für die Basis b, was man so anschreibt:

$$m = \log M,\ n = \log N,\ p = \log P,\ q = \log Q,\ \ldots$$

Für $b = 2$ ist

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ \ldots$$

daher

$$\log 1 = 0,\ \log 2 = 1,\ \log 4 = 2,\ \log 8 = 3,\ \log 16 = 4,\ \ldots$$

Aus dem Begriffe eines Logarithmus lassen sich folgende allgemeine Sätze ableiten:

1. Der Logarithmus der Basis in Bezug auf diese Basis selbst ist immer gleich 1.
   Ist b die Basis, so ist $\log b = 1$, weil $b^1 = b$ ist.
2. Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0.
   Es ist $b^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$.
3. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.
   Es sei für die Basis b

$$\log M = m,\ \log N = n,\ \log P = p,$$

so ist

$$M = b^m,\ N = b^n,\ P = b^p.$$

Multiplizirt man nun diese drei gleichen Ausdrücke, so hat man

$$MNP = b^{m+n+p}.$$

Die Basis b muß also zur Potenz $m + n + p$ erhoben werden, um die Zahl MNP zu geben, also ist $m + n + p$ der Logarithmus von MNP, folglich

$$\log MNP = m + n + p,$$

oder wenn man für m, n, p, ihre Werthe setzt,

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

Beispiele.

1) $\log 6 = \log 2 + \log 3$
2) $\log 15 = \log 3 + \log 5$
3) $\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$

Man sieht: wenn für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt sind, so lassen sich daraus durch bloße Addizion auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

4) $\log 3abc = \log 3 + \log a + \log b + \log c$
5) $\log (m^2 - n^2) = \log (m+n)(m-n) = \log (m+n) + \log (m-n).$
6) $\log 6xyz = \ldots$ 7) $\log b\,(c+d) = \ldots$
8) $\log (x^2 - 1) = \ldots$ 9) $\log ab\,(x^2 - y^2) = \ldots$

4. Der Logarithmus eines Bruches (Quozienten) ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.
   Es sei für die Basis b

$$\log M = m,\ \log N = n;$$

so ist

$$M = b^m,\ N = b^n,$$

daher durch die Division

$$\frac{M}{N} = b^{m-n},$$

folglich

$$\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

Beispiele.

1) $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31$

2) $\log 35{\cdot}29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100$

3) $\log \frac{a+b}{a-b} = \log (a+b) - \log (a-b)$

4) $\log \frac{2ab}{3x} = \log 2ab - \log 3x = \log 2 + \log a + \log b - \log 3 - \log x$

5) $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \log (x^2 - y^2) - \log 2xy = \log (x+y)$
$+ \log (x-y) - \log 2 - \log x - \log y.$

6) $\log \frac{ab + cd}{mn + pq} = \ldots$ 7) $\log \frac{1}{ab} = \ldots$

8) $\log \frac{5mx}{(1-m^2)} = \ldots$ 9) $\log \frac{3(a^2-b^2)x}{3a+2b} = \ldots$

5. Der Logarithmus einer Potenzgröße ist gleich dem Potenzexponenten multiplizirt mit dem Logarithmus der Wurzel.

Es sei b die Basis und $\log M = m$, so ist $M = b^m$; erhebt man jede dieser gleichen Größen auf die pte Potenz, so erhält man $M^p = b^{mp}$, woraus

$$\log M^p = mp = p \log M$$

folgt.

Beispiele.

1) $\log 8^3 = 3 \log 8$

2) $\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a)$

3) $\log 2a^3 = \log 2 + \log a^3 = \log 2 + 3 \log a$

4) $\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n)$

5) $\log \frac{ax^m y^n}{bz^p} = \log a + m \log x + n \log y - \log b - p \log z.$

6) $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3\right] = 2 (\log a - \log b) + 3 (\log m - \log n).$

7) $\log 5a^2x^3 = \ldots$ 8) $\log \frac{2a^3}{3bx^2} = \ldots$

9) $\log \frac{8mn^2x^4}{9p^2qy^3} = \ldots$ 10) $\log \frac{1}{(2a^2)^3 \cdot (56^3)^2} = \ldots$

11) $\log \frac{3a^2(x^2-1)}{7b^2(x^2-9)} = \ldots$ 12) $\log \frac{a^5x - ax^3}{2(a^2-x^2)} = \ldots$

6. Der Logarithmus einer Wurzelgröße ist gleich dem Logarithmus der Größe unter dem Wurzelzeichen dividirt durch den Wurzelexponenten.

Es sei b die Basis und $\log M = m$, so ist $M = b^m$; zieht man aus jeder dieser gleichen Größen die pte Wurzel aus, so hat man $\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$; folglich ist

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

Beispiele.

1) $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}$

2) $\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}$

3) $\log \frac{a \sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \frac{2}{3} \log x - \log y$

4) $\log m \sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}} = \log m + \frac{1}{4} (\log a + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c)$

5) $\log \frac{1}{\sqrt[n]{a^2 - x^2}} = \log 1 - \frac{\log (a^2 - x^2)}{n} = - \frac{\log (a+x) + \log (a-x)}{n}$.

6) $\log \sqrt[4]{x^2 a^3} = \ldots$ 7) $\log \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}} = \ldots$

8) $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \ldots$ 9) $\log \sqrt[n]{x^n \sqrt[p]{y^q}} = \ldots$

10) $\log \frac{a(a+1)\sqrt[3]{a^2}}{b(a-1)\sqrt{b}} = \ldots$ 11) $\log \frac{1}{b^2 \sqrt[5]{a^3 c}} = \ldots$

12) $\log \sqrt[n]{(a^2 b^3 c^4)^m} = \ldots$ 13) $\log (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}})^q = \ldots$

14) $\log \sqrt{\frac{5 + 3\sqrt{4}}{7 - 5\sqrt[3]{4^2}}} = \ldots$ 15) $\log \sqrt[4]{\frac{3^4 \cdot \sqrt{17.13}}{7.14^2 . \sqrt[3]{69}}} = \ldots$

§. 121.

7. **Gleiche Zahlen haben in Beziehung auf verschiedene Grundzahlen auch verschiedene Logarithmen.**

Heißt p der Logarithmus von M in Bezug auf die Basis B, und q der Logarithmus von M in Bezug auf die Basis b, wo B und b als verschiedene Zahlen vorausgesetzt werden; so ist $M = B^p$ und $M = b^q$, daher $B^p = b^q$. Wäre nun $p = q$, so müßte auch $B = b$ sein, was der Voraussetzung widerspricht; die Logarithmen p und q müssen daher von einander verschieden sein.

8. **Das Verhältniß der Logarithmen einer Zahl für zwei verschiedene Grundzahlen ist gleich dem Verhältnisse der Logarithmen jeder andern Zahl in Bezug auf dieselben zwei Grundzahlen.**

Bezeichnet man die Logarithmen für die Grundzahl B mit Log, und jene für die Basis b mit log, so ist, wenn man

$$\text{Log } M = p, \qquad \log M = q$$

setzt

$$M = B^p, \qquad M = b^q.$$

Daraus folgt $B^p = b^q$, oder wenn man beiderseits den Logarithmus in Bezug auf b nimmt, $p \log B = q \log b$.

Aber $\log b = 1$, daher $p \log B = q$, woraus

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\log B}, \text{ oder } \frac{\text{Log } M}{\log M} = \frac{1}{\log B}$$

folgt.

Auf dieselbe Art erhält man auch, wenn N irgend eine von M verschiedene Zahl bezeichnet, $\frac{\text{Log } N}{\log N} = \frac{1}{\log B}$; daher

$$\frac{\text{Log } M}{\log M} = \frac{\text{Log } N}{\log N}.$$

$\log_{10} 100 = 2$ | $\log_2 100 = 6{\cdot}54$ .... $2 \log 10 = 6{\cdot}54 \cdot \log 2$
$10^2 = 100$ | $2^{6{\cdot}54} = 100$ $10^2 = 2^{6{\cdot}54}$ $(2^{3{\cdot}434})^2 = 2^{6{\cdot}54}$

b) Bestimmung der Logarithmen.

§. 122.

Wenn man eine und dieselbe Wurzel als Basis annimmt, und sich durch deren Potenzirung alle Zahlen in ihrer natürlichen Folge entstanden denkt, so bilden die Potenzexponenten als die Logarithmen jener Zahlen ein **logarithmisches System**.

Eine negative Zahl kann nicht die Grundzahl eines Logarithmensystems sein, weil sich durch ihre auf einander folgenden Potenzen nicht alle möglichen Zahlen darstellen lassen. Wollte man z. B. — 10 als Basis annehmen, so hätte man

$$(-10)^0 = 1, \qquad (-10)^1 = -10,$$
$$(-10)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-10}, \qquad (-10)^2 = 100,$$
$$(-10)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}, \qquad (-10)^3 = -1000,$$
$$(-10)^{\frac{7}{9}} = -\sqrt[9]{10^7}, \qquad (-10)^4 = 10000,$$

u. s. w.

Man sieht, daß, während man die Exponenten allmälig wachsen läßt, die entsprechenden Potenzen keinem bestimmten Bildungsgesetze unterliegen, sondern bald positiv, bald negativ, bald reell, bald imaginär ausfallen; auch ist ersichtlich, daß sich z. B. die Zahlen 10, 1000 . . . durch keine Potenz von — 10 darstellen lassen.

Auch die Einheit eignet sich nicht als Grundzahl eines Systems, weil jede Potenz von 1 wieder 1 ist.

Nur eine positive, von der Einheit verschiedene Zahl kann also als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Da jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenz einer positiven Grundzahl stets ein positives Resultat gibt, so folgt, daß die Logarithmen negativer Zahlen nicht reell ausfallen können, somit imaginär seien. Wenn bei Rechnungen, die man mit Hilfe der Logarithmen ausführt, negative Zahlen vorkommen, so sieht man während der Rechnung von den Vorzeichen ganz ab, und berücksichtiget diese erst bei der Bestimmung des Vorzeichens in dem Resultate.

Das in der Anwendung gewöhnlich vorkommende Logarithmensystem ist das Briggische, dessen Basis 10 ist. Im Briggischen Systeme bedeutet daher der Logarithmus einer Zahl den Potenzexponenten, zu welchem 10 erhoben werden muß, um jene Zahl zu geben.

Außer den Briggischen Logarithmen werden in gewissen Rechnungen manchmal auch die natürlichen Logarithmen, deren Basis 2·718281829 ist, angewendet.

Wenn die Logarithmen eines Systems bekannt sind, so kann man daraus auch die Logarithmen eines jeden andern Systems berechnen. Werden nämlich die Logarithmen in Bezug auf die Basis B durch Log, und jene für die Basis b durch log bezeichnet, so ist, wie schon früher bewiesen wurde, $\frac{\text{Log } M}{\log M} = \frac{1}{\log B}$, woraus $\text{Log } M = \log M \,.\, \frac{1}{\log B}$ folgt. Sind also die Logarithmen aller Zahlen für die Basis b bekannt, so nimmt man aus diesem Systeme den Logarithmus der andern Basis B, und dividirt die Einheit durch denselben; wenn man dann mit diesem beständigen Faktor $\frac{1}{\log B}$ den Logarithmus irgend einer Zahl in dem bekannten Systeme multiplizirt, so erhält man den Logarithmus derselben Zahl in dem neuen Systeme, dessen Basis B ist.

Es wird daher hinreichen, die Logarithmen eines bestimmten Systems zu entwickeln, und zwar soll hier das Briggische System als das allgemein gebräuchliche, in's Auge gefaßt werden.

§. 123.

Es ist $10^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$,
$10^1 = 10$, „ $\log 10 = 1$,
$10^2 = 100$, „ $\log 100 = 2$,
$10^3 = 1000$, „ $\log 1000 = 3$,
u. s. w.

ferner

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, daher $\log \frac{1}{10} = -1$,
$10^{-2} = \frac{1}{100}$, „ $\log \frac{1}{100} = -2$,
$10^{-3} = \frac{1}{1000}$, „ $\log \frac{1}{1000} = -3$,
u. s. w.

Daraus folgt, daß im Briggischen Systeme nur wenige Zahlen ganze Zahlen zu Logarithmen haben; die Logarithmen aller

Zahlen, welche zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, 100 und 1000, . . ., zwischen 1 und $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$, . . . liegen, sind Brüche. Man hat in den Logarithmen statt der gemeinen durchgängig die Dezimalbrüche eingeführt, so daß ein Logarithmus im Allgemeinen aus einer ganzen Zahl und einem angehängten Dezimalbruche besteht. Die ganze Zahl in dem Logarithmus wird dessen **Kennziffer** oder **Karakteristik**, und der Dezimalbruch dessen **Mantisse** genannt.

Die Logarithmen, die nicht ganze Zahlen sind, sind sämmtlich irrazionale Zahlen, deren Werthe aber um so genauer sind, je mehr Dezimalstellen sie enthalten. Gewöhnlich gibt man den Mantissen 5, 6 oder 7 Dezimalstellen. Solche Logarithmen weisen stets auf zwei Rechnungen hin, auf eine Potenzirung und auf eine Wurzelausziehung. Z. B. der Logarithmus von 7 ist 0·845098, d. h.

$$7 = 10^{0 \cdot 845098} = 10^{\frac{845098}{1000000}} = \sqrt[1000000]{10^{845098}}$$

Wenn man nämlich 10 zur 845098sten Potenz erhebt, und aus dieser Potenz die 1000000ste Wurzel auszieht, so erhält man eine von 7 so wenig abweichende Zahl, daß man dieselbe für 7 setzen kann.

Aus dem Obigen sieht man ferner, daß zu Zahlen, welche größer als 1 sind, positive, zu Zahlen aber, welche kleiner als 1, somit echte Brüche sind, negative Logarithmen gehören. **Negative Mantissen** pflegt man übrigens in der Rechnung zu beseitigen; man führt statt derselben positive Mantissen mit einer negativen Karakteristik ein, indem man den negativen Logarithmus von einer Zahl abzieht, die um 1 größer ist als die Karakteristik, wodurch eine positive Mantisse zum Vorschein kommt, und indem man dann diese um 1 größere Zahl als negative Karakteristik hinter die Mantisse hinsetzt. Z. B.

$$\begin{aligned} -2 \cdot 345679 &= 3 - 2 \cdot 345679 - 3. \\ &= 0 \cdot 654321 - 3. \end{aligned}$$

Um das Verfahren abzuleiten, nach welchem man zu einer gegebenen Zahl den Briggischen Logarithmus berechnen kann, bedenke man, daß wenn man $a = \sqrt{m n}$ annimmt, $\log a = \frac{\log m + \log n}{2}$ wird; d. h. **wenn eine Zahl gleich ist der Quadratwurzel aus dem Produkte zweier andern Zahlen, so ist der Logarithmus der erstern Zahl gleich der halben Summe aus den Logarithmen der beiden andern Zahlen.** Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich zu jeder gegebenen Zahl der entsprechende Logarithmus auf folgende Art berechnen. Man nimmt die zwei auf einander folgenden Potenzen von 10, zwischen denen die gegebene Zahl liegt, deren Logarithmen ganze Zahlen und bekannt sind; multiplizirt jene Potenzen und zieht aus dem Produkte die Quadratwurzel; der Logarithmus von der so gefundenen Quadratwurzel ist gleich der halben Summe aus den Logarithmen der mit einander multiplizirten Potenzen von 10. Nun liegt die gegebene Zahl zwischen der gefundenen Quadratwurzel und einer der beiden Potenzen von 10, und ist durch diese beiden Zahlen in engere Grenzen eingeschlossen, als durch die beiden Potenzen von 10. Man sucht wieder eine Zahl, welche zur noch nähern Begrenzung der gegebenen Zahl dienen wird, indem man aus dem Produkte der beiden frühern Grenzzahlen die Quadratwurzel auszieht; den Logarithmus der gefundenen Quadratwurzel setzt man der halben Summe aus den bekannten Logarithmen der zwei mit einander multiplizirten Zahlen gleich. Auf diese Weise verfährt man weiter, bis man zwei Grenzzahlen bekommt, deren Logarithmen in so viel Dezimalen übereinstimmen, als man ihrer haben will, wo sodann der in beiden Logarithmen übereinstimmende Theil der Logarithmus der gegebenen Zahl ist.

Aus einem Beispiele wird dieses Verfahren deutlicher.

Man suche den Logarithmus von 13 in 5 Dezimalen. 13 liegt zwischen den Potenzen 10 und 100, deren Logarithmen 1 und 2 sind. Man bestimmt also

$$a = \sqrt{10 \,.\, 100} = \sqrt{1000} = 31 \cdot 6227766,$$

und es ist

$$\log a = \log 31 \cdot 6227766 = \frac{\log 10 + \log 100}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1 \cdot 5.$$

Nun kennt man die Logarithmen von 10 und $a = 31 \cdot 6227766$, von welchen Zahlen 13 näher eingeschlossen ist, als von 10 und 100. Man sucht weiter eine Zahl b, welche an 13 noch näher liegt, als $31 \cdot 6227766$, indem man setzt

$$b = \sqrt{10 \times a} = \sqrt{316 \cdot 227766} = 17 \cdot 7827942,$$

wo sodann

$\log b = \log 17 \cdot 7827942 = \dfrac{\log 10 + \log a}{2} = \dfrac{1 + 1 \cdot 5}{2} = 1 \cdot 25$ ist. Die Zahl 13 liegt nun zwischen den nähern Grenzen 10 und $b = 17 \cdot 7827942$; man sucht daher wieder

$$c = \sqrt{10 \,.\, b} = \sqrt{177 \cdot 827942} = 13 \cdot 3352144,$$

und setzt

$$\log c = \log 13 \cdot 3352144 = \frac{\log 10 + \log b}{2} = \frac{1 + 1 \cdot 25}{2} = 1 \cdot 125.$$

Nun hat man für die Zahl 13 die noch engern Grenzen 10 und $c = 13 \cdot 3352144$.

Durch fortgesetztes Verfahren findet man

$$\begin{array}{llll}
d = \sqrt{10c} = \sqrt{133{\cdot}352144} & = 11{\cdot}5478201; & \log d & = 1{\cdot}0625 \\
e = \sqrt{cd} = \sqrt{153{\cdot}9926562} & = 12{\cdot}4093780; & \log e & = 1{\cdot}09375 \\
f = \sqrt{ce} = \sqrt{165{\cdot}4817162} & = 12{\cdot}8639696; & \log f & = 1{\cdot}109375 \\
g = \sqrt{cf} = \sqrt{171{\cdot}5437920} & = 13{\cdot}0974727; & \log g & = 1{\cdot}117188 \\
h = \sqrt{fg} = \sqrt{168{\cdot}4854899} & = 12{\cdot}9801960; & \log h & = 1{\cdot}113281 \\
i = \sqrt{gh} = \sqrt{170{\cdot}0077625} & = 13{\cdot}0387024; & \log i & = 1{\cdot}115234 \\
k = \sqrt{hi} = \sqrt{169{\cdot}2449128} & = 13{\cdot}0094163; & \log k & = 1{\cdot}114258 \\
l = \sqrt{hk} = \sqrt{168{\cdot}8647734} & = 12{\cdot}9947978; & \log l & = 1{\cdot}113769 \\
m = \sqrt{kl} = \sqrt{169{\cdot}0547342} & = 13{\cdot}0024049; & \log m & = 1{\cdot}113014 \\
n = \sqrt{lm} = \sqrt{168{\cdot}9897241} & = 12{\cdot}9981507; & \log n & = 1{\cdot}114892 \\
o = \sqrt{mn} = \sqrt{169{\cdot}0072194} & = 13{\cdot}0002776; & \log o & = 1{\cdot}113953 \\
p = \sqrt{no} = \sqrt{168{\cdot}9834675} & = 12{\cdot}9993640; & \log p & = 1{\cdot}113922 \\
q = \sqrt{op} = \sqrt{168{\cdot}9953406} & = 12{\cdot}9998207; & \log q & = 1{\cdot}113937 \\
r = \sqrt{oq} = \sqrt{169{\cdot}0012778} & = 13{\cdot}0000491; & \log r & = 1{\cdot}113945 \\
s = \sqrt{qr} = \sqrt{168{\cdot}9983073} & = 12{\cdot}9999348; & \log s & = 1{\cdot}113941.
\end{array}$$

Da nun die Logarithmen von

$$r = 13{\cdot}0000491 \quad \text{und} \quad s = 12{\cdot}9999348$$

in den fünf ersten Dezimalen übereinstimmen, und die Zahl 13 zwischen r und s liegt, so muß auch der Logarithmus von 13 bis auf die sechste Dezimalstelle mit jenen beiden Logarithmen übereinstimmen; daher

$$\log 13 = 1{\cdot}11394.$$

Auf diesem mühsamen Wege sind von Brigg und Blacq die Logarithmen der Primzahlen, und daraus jene der übrigen Zahlen ausgerechnet, und in besondern Tafeln, welche man Logarithmentafeln nennt, zusammengestellt worden. Die Anwendung solcher Tafeln soll aus den hier folgenden Lehren ersichtlich werden.

§. 124.

Eine einfache Betrachtung lehrt, daß die Kennziffer des Logarithmus einer ganzen Zahl immer um 1 kleiner sein muß, als die Anzahl ihrer Ziffern.

Jede einziffrige Zahl liegt zwischen 1 und 10; der Logarithmus von 1 ist 0, der Logarithmus von 10 ist 1; der Logarithmus einer einziffrigen Zahl liegt also zwischen 0 und 1, ist also 0 Ganze mit darauffolgenden Dezimalen; somit ist die Karakteristik 0.

Jede zweiziffrige Zahl liegt zwischen 10 und 100; $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$; folglich liegt der Logarithmus einer zweiziffrigen Zahl zwischen 1 und 2, und hat also 1 zur Karakteristik.

Eben so überzeugt man sich, daß der Logarithmus einer dreiziffrigen Zahl zwischen 2 und 3 liegt, somit 2 zu seiner Kennziffer habe, u. s. f.

§. 125.

Die Logarithmen aller Zahlen, welche aus einer Zahl durch Multiplikazion oder Division mit einer ganzen Potenz von 10 entstanden sind, haben einerlei Mantisse, und sind nur in ihrer Karakteristik verschieden.

Man nehme irgend eine Zahl, z. B. 7124, so ist, da sie vierziffrig, 3 die Kennziffer ihres Logarithmus; als Mantisse davon findet man in den Tafeln 852724; also ist

$$\log 7124 = 3{\cdot}852724.$$

Aendert man nun den Werth dieser Zahl, ohne die Ziffernreihe zu ändern, indem man dieselbe mit 10, 100, 1000, . . . multiplizirt oder dividirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\log 71240 &= \log 7124 + \log 10 = 3{\cdot}852724 + 1 \\
&= 4{\cdot}852724, \\
\log 712400 &= \log 7124 + \log 100 = 3{\cdot}852724 + 2 \\
&= 5{\cdot}852724, \\
\log 7124000 &= \log 7124 + \log 1000 = 3{\cdot}852724 + 3 \\
&= 6{\cdot}852724,
\end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned}
\log 712{\cdot}4 &= \log 7124 - \log 10 = 3{\cdot}852724 - 1 \\
&= 2{\cdot}852724, \\
\log 71{\cdot}24 &= \log 7124 - \log 100 = 3{\cdot}852724 - 2 \\
&= 1{\cdot}852724, \\
\log 7{\cdot}124 &= \log 7124 - \log 1000 = 3{\cdot}852724 - 3 \\
&= 0{\cdot}852724, \\
\log 0{\cdot}7124 &= \log 7124 - \log 10000 = 3{\cdot}852724 - 4 \\
&= 0{\cdot}852724 - 1 \\
\log 0{\cdot}07124 &= \log 7124 - \log 100000 = 3{\cdot}852724 - 5 \\
&= 0{\cdot}852724 - 2 \\
\log 0{\cdot}007124 &= \log 7124 - \log 1000000 = 3{\cdot}852724 - 6 \\
&= 0{\cdot}852724 - 3
\end{aligned}$$

u. s. w.

Man sieht, daß hier die Mantisse stets dieselbe bleibt, und nur die Kennziffer geändert wird, und zwar ist diese jedesmal gleich dem Exponenten derjenigen Potenz von 10, welche den Werth der höchsten Stelle ausdrückt.

Da man dieselben Zerlegungen und Schlüsse auch bei jeder andern Ziffernreihe durchführen kann, so gilt im Allgemeinen Folgendes: Die **Mantisse** des Logarithmus hängt lediglich von der **Ziffernreihe** ohne Rücksicht auf deren Rang ab; die **Kennziffer** des Logarithmus dagegen wird bloß durch den Rang der **Ziffern** bestimmt; sie ist nämlich gleich dem Exponenten derjenigen Potenz von 10, welche den Rang der höchsten Ziffer ausdrückt.

Wenn daher zu einer **gegebenen Zahl der Logarithmus gefunden werden soll, so suche man zuerst aus den Tafeln zu der Ziffernreihe die Mantisse; als Karakteristik setze man den Exponenten jener Potenz von 10, welche den Werth der höchsten Stelle angibt.**

Ist die höchste bedeutende Ziffer eine Dezimale, so ist die Karakteristik negativ; in diesem Falle setzt man der Mantisse die Nulle mit dem Dezimalpunkt voraus, dieser positiven Mantisse wird dann die negative Karakteristik nachgesetzt; z. B.

$$\log 0{\cdot}007124 = 0{\cdot}852724 - 3.$$

§. 126.

In den kleineren Logarithmentafeln *) sind nur die Mantissen von vierziffrigen Zahlen enthalten.

Hat nun die gegebene Zahl weniger Ziffern, so denkt man sich so viele Nullen hinzugesetzt, daß man eine vierziffrige Zahl erhält. Wenn z. B. der Logarithmus von 382 zu suchen wäre, so nimmt man die Mantisse von 3820.

Besteht aber die Zahl, deren Logarithmus gesucht wird, aus mehr als vier Ziffern, so schlägt man in den Tafeln zuerst die Mantisse für die vier höchsten Ziffern nach, sucht die Korrektur für die folgenden Ziffern, und addirt diese zu der früher gefundenen Mantisse. Es wird aber diese Korrektur aus der Differenz zwischen der Mantisse, welche den höchsten Ziffern entspricht, und zwischen der nächstfolgenden Mantisse gefunden; man betrachtet nämlich jene spätern Ziffern als Dezimalen, indem man ihnen eine Nulle mit dem Dezimalpunkte voraussetzt, und multiplizirt diesen Dezimalbruch mit der Mantissendifferenz; die im Produkte enthaltenen Ganzen sind die Korrektur, welche zur Mantisse der höchsten Ziffern addirt werden muß. Die Mantissendifferenz ist meistens in den Tafeln selbst schon angegeben, sonst muß sie erst bestimmt werden. Es sei z. B. der Logarithmus von 23456·78 zu suchen; man findet zu der Zahl 2345 die Mantisse 0.370143, und die Differenz 184; nun ist $0{\cdot}678 \times 184 = 124{\cdot}752$; also hat man

Mantisse zu 2345	0·370143
Korrektur wegen der Ziffern 678 . . .	125
somit Mantisse zu 23456·78	0·370268.

Die Karakteristik ist 4, weil die höchste Stelle Zehntausende bedeutet, und diese die vierte Potenz von 10 sind, also ist

$$\log 23456{\cdot}78 = 4{\cdot}370268.$$

Man bestimme den Logarithmus von folgenden Zahlen:

1) 388467,	2) 315·8034,	3) 0·978157,
4) 90·413,	5) 0·0613092,	6) 12·31085,
7) 777·888,	8) 0·0057126,	9) 3·807056,
10) 1·23456,	11) 35798642,	12) 4015·099.

*) Eine ausführlichere Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen: Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold.

§. 127.

Ist umgekehrt zu einem Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden, so suche man zuerst die zu der Mantisse gehörige Ziffernreihe; aus der Karakteristik bestimmt man den Stellenwerth dieser Ziffern, es hat nämlich die höchste Ziffer denjenigen Rang, welchen die Potenz von 10 mit der Karakteristik als Exponenten ausdrückt.

Ist z. B. zu dem Logarithmus 0·713407 — 2 die zugehörige Zahl zu suchen, so findet man in den Tafeln, daß der Mantisse 0·713407 die Ziffernreihe 5169 entspricht; die Karakteristik — 2 zeigt an, daß die höchste Stelle 5 den Rang von 10^{-2} hat, daß sie also Hundertel bedeutet; somit ist 0·713470 — 2 = log 0·05169.

In den meisten Fällen kommt jedoch die gegebene Mantisse in den Tafeln nicht genau vor; man nimmt dann die nächst kleinere Mantisse, schreibt die zu ihr gehörige Ziffernreihe als die höchsten Ziffern der gesuchten Zahl heraus, und zieht die kleinere Mantisse von der gegebenen ab; aus dem Reste werden dann die folgenden Ziffern der gesuchten Zahl bestimmt, indem man denselben durch die Differenz der Tafelmantissen dividirt; die im Quozienten erhaltenen Dezimalen sind die letztern Ziffern der gesuchten Zahl.

Z. B. gegebener Logarithmus 0·578124
nächst kleinere Mantisse ...066 . . Ziffernreihe 3785
58₀ : 1,1,5 (Tafeldiff.) = 0·504
..5

Die ganze Ziffernreihe ist also 3785504, und zwar bedeutet die höchste Ziffer 3 Einheiten, weil die Karakteristik 0, und $10^0 = 1$ ist; somit 0·578124 = log 3·785504.

Man suche noch zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Zahlen:

1) 2·518 342,	2) 0·190 842,	3) 0·153642 — 1,
4) 4·907 139,	5) 3·008 914,	6) 0·860069 — 2,
7) 0·792 446,	8) 1·520 218,	9) 0·065478 — 3,
10) 3·213 747,	11) 0·911 333,	12) 0·891742 — 2.

c. Rechnungsoperazionen mit Logarithmen.

§. 128.

In Beziehung auf die Rechnungsoperazionen mit Logarithmen sind im Allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Wenn man beim Addiren der Logarithmen zwei Kennziffern, eine positive und eine negative, erhält, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 105892 \\ 2 \cdot 568125 \\ 0 \cdot 213407 - 2 \\ 0 \cdot 081057 - 4 \\ \hline 5 \cdot 968481 - 6 = 0 \cdot 968481 - 1. \end{array}$$

2. Wenn beim Subtrahiren der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so addire man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, daß er größer wird als der Subtrahend, und setze dann auch als Karakteristik des Restes eben so viele negative Einheiten. Z. B.

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 450\,256 \\ 3 \cdot 578\,920 \\ \hline 0 \cdot 871\,336 - 3 \end{array} \quad \text{eigentlich} \quad \begin{array}{l} 4 \cdot 450\,256 - 3 \\ 3 \cdot 578\,920 \\ \hline 0 \cdot 871\,336 - 3. \end{array}$$

3. Wenn ein Logarithmus mit negativer Karakteristik mit einer Zahl multiplizirt wird, so muß im Produkte die neue negative Karakteristik mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$\begin{aligned} (0 \cdot 531147 - 2) \times 5 &= 2 \cdot 655735 - 10 \\ &= 0 \cdot 655735 - 8. \end{aligned}$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Karakteristik durch eine Zahl zu dividiren, so muß die negative Karakteristik, wenn sie durch diese Zahl nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, daß sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Dadurch wird eine gebrochene Karakteristik vermieden. Z. B.

$$\begin{aligned} (0 \cdot 415091 - 7) : 5 &= (3 \cdot 415091 - 10) : 5 \\ &= 0 \cdot 683018 - 2. \end{aligned}$$

d. Anwendung der Briggischen Logarithmen.

§. 129.

Durch die allgemeinen Sätze, die oben hinsichtlich des Logarithmus eines Produktes, Quozienten, einer Potenz- und Wurzelgröße entwickelt wurden, ist man im Stande, die Multiplikazion in eine Addizion, die Division in eine Subtrakzion, das Potenziren in eine Multiplikazion, und das Wurzelausziehen in eine Division zu verwandeln.

1. Hat man zwei oder mehrere Zahlen zu multipliziren, so nimmt man ihre Logarithmen und addirt sie, die Summe ist der Logarithmus des Produktes; sucht man daher zu jener Summe als Logarithmus die entsprechende Zahl, so ist diese das verlangte Produkt.

Dieses Verfahren erweiset sich nur dann vortheilhaft, wenn kleinere Zahlen mit angehängten Dezimalen zu multipliziren sind, wo im Produkte sechs oder sieben Stellen genügen.

Beispiele.

1) Man bestimme das Produkt aus 1·0954, 0·91567, 3·1571 und 1·00782. Es ist

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}0954 &= 0{\cdot}039\ 573 \\ \log 0{\cdot}91567 &= 0{\cdot}961\ 739 - 1 \\ \log 3{\cdot}1571 &= 0{\cdot}499\ 288 \\ \log 1{\cdot}00782 &= 0{\cdot}003\ 383 \\ \hline \log \text{des Produktes} &= 0{\cdot}503\ 983 = \log 3{\cdot}191411, \end{aligned}$$

also

$$1{\cdot}0954 \times 0{\cdot}91567 \times 3{\cdot}1571 \times 1{\cdot}00782 = 3{\cdot}191411.$$

2) $1{\cdot}2345 \times 1{\cdot}3456 \times -2{\cdot}5678 = -4{\cdot}265484.$

3) $1{\cdot}025 \times 1{\cdot}0792 \times 1{\cdot}05625 \times 1{\cdot}0751 = \ldots$

4) $0{\cdot}35679 \times 1{\cdot}076542 \times 1{\cdot}91234 \times 0{\cdot}83258 = \ldots$

5) $2{\cdot}00415 \times 0{\cdot}56 \times 0{\cdot}0741 \times 0{\cdot}09072 \times 1{\cdot}25463 = \ldots$

§. 130.

2. Sollen zwei Zahlen mit Hilfe der Logarithmen dividirt werden, so zieht man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendes ab, der Rest ist der Logarithmus des Quozienten; sucht man zu diesem Logarithmus die zugehörige Zahl, so hat man den verlangten Quozienten.

Beispiele.

1) Es soll der Quozient 528 : 737 oder $\frac{528}{737}$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} & \quad\ 3{\cdot} \qquad\quad -1 \\ \log 528 &= 2{\cdot}722\ 634 \\ \log 737 &= 2{\cdot}867\ 467 \\ \hline \log \tfrac{528}{737} &= 0{\cdot}855\ 167 - 1 = \log 0{\cdot}716\ 418, \\ \text{folglich } \tfrac{528}{737} &= 0{\cdot}716\ 418. \end{aligned}$$

2) Man bestimme den Werth des Bruches $x = \frac{3{\cdot}4156 \times 4{\cdot}023}{1{\cdot}2378 \times 5{\cdot}87091}$.

Es ist

$$\log x = \log 3{\cdot}4156 + \log 4{\cdot}023 - (\log 1{\cdot}2378 + \log 5{\cdot}87091)$$

$$\begin{aligned} \log 3{\cdot}4156 &= 0{\cdot}533\ 467 \\ \log 4{\cdot}023 &= 0{\cdot}604\ 550 \\ \hline & \quad 1{\cdot}138\ 017 \\ \log 1{\cdot}2378 &= 0{\cdot}092\ 651 \\ \log 5{\cdot}87091 &= 0{\cdot}768\ 705 \\ \hline \log x &= 0{\cdot}276\ 661 = \log 1{\cdot}890\ 869, \\ \text{also } x &= 1{\cdot}890\ 869. \end{aligned}$$

3) $\frac{2{\cdot}3456 \times 5{\cdot}2913}{769 \times 0{\cdot}12345} = 0{\cdot}130\ 737.$

4) $\frac{1}{3{\cdot}14159} = \ldots$ 5) $\frac{2483 \times 1926}{521347} = \ldots$

6) $\dfrac{413 \times 5124 \times 21358}{425 \times 4998 \times 76143} = \ldots$

7) $\dfrac{2{\cdot}1457 \times 9{\cdot}1248 \times 1385 \times 31{\cdot}273}{277 \times 10{\cdot}7285 \times 2{\cdot}2812 \times 125{\cdot}092} = \ldots$

§. 131.

3. Wenn eine Zahl zu einer Potenz erhoben werden soll, so suche man den Logarithmus dieser Zahl, und multiplizire ihn mit dem Potenzexponenten, das Produkt stellt den Logarithmus der gesuchten Potenz vor; um diese selbst zu erhalten, suche man zu jenem Logarithmus die entsprechende Zahl.

Dieses Verfahren ist nur dann von Nutzen, wenn in der gesuchten Potenz sechs oder sieben Ziffern hinreichend sind.

Beispiele.

1) Es soll die 20ste Potenz von 1·025 gesucht werden.
Man hat

$$\log 1{\cdot}025 = \underline{0{\cdot}010724} \times 20,$$
$$\log (1{\cdot}025)^{20} = 0{\cdot}214480 = \log 1{\cdot}63862,$$
$$\text{also } (1{\cdot}025)^{20} = 1{\cdot}63862,$$

2) Man bestimme $\left(\frac{329}{67}\right)^{1.065}$

$$\begin{array}{rl} \log 329 = & 2{\cdot}517196 \\ \log\ \ 67 = & \underline{1{\cdot}826075} \\ & 0{\cdot}691121 \times 1{\cdot}065 \\ & \underline{\phantom{0{\cdot}69}5{,}6{,}0{,}1} \\ & \phantom{0{\cdot}}691121 \\ & \phantom{0{\cdot}69}41467 \\ & \underline{\phantom{0{\cdot}691}3456} \end{array}$$

$$\log \left(\frac{329}{67}\right)^{1.065} = 0{\cdot}736044 = \log 5{\cdot}445575,$$
$$\text{somit } \left(\frac{329}{67}\right)^{1.065} = 5{\cdot}445575.$$

3) $(1{\cdot}05)^{12} = 1{\cdot}795856.$

4) $\left(\frac{323}{313}\right)^{17} = 1{\cdot}706828.$

5) $\dfrac{2{\cdot}4563^3 \times 1{\cdot}0085^4}{3{\cdot}2156^3} = 0{\cdot}4610646.$

6) $(1{\cdot}045)^9 = \ldots$ 7) $\left(\dfrac{54{\cdot}139}{53{\cdot}817}\right)^{11} = \ldots$

8) $\dfrac{3{\cdot}14109^3 \times 2{\cdot}0489^2 \times 1{\cdot}07038^4}{4{\cdot}0932^2 \times 0{\cdot}859^5 \times 2{\cdot}10895^3} = \ldots$

§. 132.

4. Um aus einer Zahl eine bestimmte Wurzel auszuziehen, suche man den Logarithmus dieser Zahl, und dividire ihn durch den Wurzelexponenten, der Quozient ist der Logarithmus der verlangten Wurzel; nimmt man die diesem Logarithmus entsprechende Zahl, so hat man die Wurzel selbst.

Beispiele.

1) Man verlangt die 5te Wurzel aus 10.

$$\log 10 = 1\cdot000000 \;:\; 5$$
$$\log \sqrt[5]{10} = 0\cdot200000 = \log 1\cdot58489,$$
also $\sqrt[5]{10} = 1\cdot58489.$

2) Es soll der Werth von $\sqrt[9]{\dfrac{1\cdot052^2\sqrt{23}}{2\sqrt[3]{18}}}$ bestimmt werden.

Setzt man diesen Werth $= x$, so ist

$$\log x = \tfrac{1}{9}\left[2 \log 1\cdot052 + \tfrac{1}{2}\log 23 - (\log 2 + \tfrac{1}{3}\log 18)\right]$$

$$\begin{array}{llr}
\log 1\cdot052 & = 0\cdot022016 & \\
2\log 1\cdot052 & & = 0\cdot044032 \\
\log 23 & = 1\cdot361728 & \\
\tfrac{1}{2}\log 23 & & = 0\cdot680864 \\
\hline
& & 0\cdot724896 \\
\log\ 2 & & = 0\cdot301030 \\
\log 18 & = 1\cdot255273 & \\
\tfrac{1}{3}\log 18 & & = 0\cdot418424 \\
\hline
& & 0\cdot005442 \\
\hline
& & :9
\end{array}$$

$$\log x = 0\cdot000605 = \log 1\cdot001394,$$
also $x = 1\cdot001394.$

3) $\sqrt[7]{314\cdot2789} = 2\cdot273837.$

4) $\sqrt[5]{\dfrac{126}{115}} = 1\cdot018437.$

5) $\sqrt[7]{\dfrac{9}{13}\sqrt[3]{6}} = 1\cdot033333.$

6) $\dfrac{8\sqrt[8]{4\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{5\sqrt{124}}} = \ldots$

7) $\sqrt[7]{340}\,.\,\sqrt[5]{\dfrac{24\cdot105 \times 58\cdot937}{1\cdot47938^3}} = \ldots$

8) $\sqrt[12]{\left(\dfrac{395}{129}\right)^7} = \ldots$ 9) $\dfrac{35^4}{57^8}\,.\,\sqrt[5]{30\cdot9} = \ldots$

10) $\dfrac{\sqrt[3]{37}\,.\,\sqrt[4]{13^3}}{\sqrt[5]{7\cdot13945^3}} = \ldots$ 11) $\sqrt{\dfrac{58\sqrt[3]{10\cdot819}}{2\cdot4037^2}} = \ldots$

12) $\sqrt[5]{\dfrac{4\cdot31957^3\,.\,\sqrt[3]{3\cdot19388}\,.\,\sqrt[5]{17\cdot39}}{15^4\,.\,\sqrt[7]{91\cdot34} - 9^5\sqrt{3\cdot4071}}} = \ldots$

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Gleichungen.

Allgemeine Begriffe.

§. 133.

Die Gleichstellung von zwei Ausdrücken, welche einerlei Werth haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4, \quad x^2 - 8 = 2x.$$

Die Größen, welche einander gleichgestellt werden, heißen Theile der Gleichung, und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist $x^2 - 8$ der erste, $2x$ der zweite Theil; der erste Theil besteht aus zwei Gliedern x^2 und -8.

Es gibt Gleichungen, welche für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen richtig bleiben; sie heißen identische Gleichungen. So hat die Gleichung $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ihre Richtigkeit, man mag für x was immer für einen Werth setzen. Jede Formel für eine arithmetische Operazion bildet eine identische Gleichung.

Andere Gleichungen behalten nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten ihre Richtigkeit. So leisten der Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ nur die zwei Werthe 4 und -2 Genüge. Dieß sind Bestimmungsgleichungen.

Eine Bestimmungsgleichung ist also eine Gleichstellung zwischen bekannten und unbekannten Größen, welcher nur durch bestimmte Werthe dieser letztern Genüge geleistet wird.

Die Werthe für die Unbekannten, welche einer Gleichung entsprechen, nennt man Wurzeln dieser Gleichung. Die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ hat zwei Wurzeln, 4 und -2.

Die Wurzeln einer Gleichung bestimmen, heißt die Gleichung auflösen.

§. 134.

Nach der Anzahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei oder mehrern Unbekannten. So ist

$x^2 - x = 12$ eine Gleichung mit einer Unbekannten,
$3x + 2y = 13$ „ „ „ zwei „
$x^2 + y^2 + z^2 = 14$ „ „ „ drei „
u. s. w.

Gleichungen, aus denen sich die Unbekannten unzweideutig bestimmen lassen, heißen bestimmt; Gleichungen, wo dieses der Fall nicht ist, unbestimmt. Jede Gleichung mit einer einzigen Unbekannten ist eine bestimmte.

Die Gleichungen werden ferner in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, ... Grades eingetheilt. Der Grad einer Gleichung richtet sich nach dem höchsten Potenzexponenten der unbekannten Zahl, und, wenn mehrere Unbekannte vorkommen, nach der höchsten Summe der Potenzexponenten der Unbekannten, welche in einem Gliede vorkommen. So sind

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 4 = 0 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{array}\right\}$$ Gleichungen des ersten Grades.

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 10 \\ xy - x = y + 2 \end{array}\right\}$$ Gleichungen des zweiten Grades.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 5x = 1 \\ 2x^2y - 4xy^2 - y = 3x \end{array}\right\}$$ Gleichungen des dritten Grades.

Die Gleichungen des zweiten Grades werden auch quadratische, jene des dritten Grades kubische genannt.

In dieser Anleitung soll nur von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades die Rede sein.

Damit man den Grad einer Gleichung bestimmen könne, muß dieselbe auf die einfachste Form gebracht, d. i. geordnet werden.

I. Ordnen der Gleichungen.

§. 135.

Eine Gleichung ist als geordnet zu betrachten, wenn darin alle unbekannten Zahlen, und zwar nach den fallenden Potenzen geordnet vor dem Gleichheitszeichen stehen, die bekannte Zahl aber hinter demselben vorkommt; wenn ferner die höchste Potenz der

Unbekannten positiv ist und den Koeffizienten 1 hat. Das Ordnen der Gleichungen beruhet auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Ausdrücken gleiche Veränderungen vornimmt, so müssen wieder gleiche Ausdrücke zum Vorschein kommen.

Dieser Grundsatz läßt sich durch folgende Sätze näher ausdrücken.

1. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen. Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a + c = b + d$ sein.

2. Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt gleiche Reste.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so hat man auch $a - c = b - d$.

Zu Folge dieser Sätze kann jedes Glied auf einer Seite der Gleichung weggelassen, und auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen werden. Hat man z. B. $x + a = b$, so ist $x = b - a$; durch diese Versetzung ist nichts anderes geschehen, als daß von beiden Theilen der Gleichung $+ a$ subtrahirt wurde. Aus $x^2 = q - px$ folgt $x^2 + px = q$; hier wurde auf beiden Seiten px dazu addirt, oder, was gleichviel ist, $- px$ subtrahirt.

3. Gleiches mit Gleichem multiplizirt, gibt gleiche Produkte.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $ac = bd$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Brüche in einer Gleichung wegschaffen; man darf nur beide Theile der Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multipliziren.

Z. B. Aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt, wenn man mit a multiplizirt, $x - ab = ac$. Eben so gibt $\frac{x}{a} - b = \frac{c}{x}$, wenn beide Theile mit ax multiplizirt werden, die Gleichung $x^2 - abx = ac$.

Auch folgt aus diesem Satze, daß man in einer Gleichung alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandeln darf; denn dadurch geschieht nichts anderes, als daß beide Theile der Gleichung mit $- 1$ multiplizirt werden. Es sei z. B. $- x^2 + 3x = - 5$, so ist auch $x^2 - 3x = 5$.

4. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt gleiche Quozienten.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so ist auch $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Wenn daher die beiden Theile einer Gleichung ein gemeinschaftliches Maß haben, so kann man die Gleichung auf eine einfachere Gestalt bringen, wenn man beide Theile durch jenes gemeinschaftliche Maß dividirt. So gibt $2x^2 - 8x = 4$ die einfachere Gleichung $x^2 - 4x = 2$.

5. Gleiche Größen auf dieselbe Potenz erhoben, geben gleiche Resultate.

Wenn $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$.

Durch das Erheben beider Theile einer Gleichung auf dieselbe Potenz kann die Gleichung von Wurzelgrößen befreit werden. Es sei z. B. $\sqrt{x - b^2} = a$; erhebt man beide Theile zur zweiten Potenz, so fällt auf der ersten Seite das Wurzelzeichen weg, und man hat $x - b^2 = a^2$. Bei dieser Umwandlung, welche das Razionalmachen der Gleichung genannt wird, muß die Wurzelgröße, welche man wegschaffen will, allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehen.

6. Wenn man aus gleichen Größen dieselbe Wurzel auszieht, so erhält man gleiche Resultate.

Ist $a = b$, so muß auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ sein.

Dieser Satz dient dazu, um die Gleichung auf niedrigere Potenzen der Unbekannten zurückzuführen. Z. B.

Aus $x^2 = 10$ folgt $x = \sqrt{10}$.

" $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$ " $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

7. Wenn man von gleichen Größen die Logarithmen für dieselbe Basis nimmt, so erhält man gleiche Resultate.

Ist $a = b$, so muß auch $\log a = \log b$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Gleichung von Exponenzialgrößen befreien. Ist z. B. $5^x = 625$, so folgt, wenn man von beiden Theilen die Logarithmen nimmt, $x \log 5 = \log 625$, wodurch die Unbekannte vom Exponenten als Faktor herab kommt.

§. 136.

Um durch Anwendung der vorhergehenden Sätze eine gegebene Gleichung zu ordnen, verfährt man auf folgende Art:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner multiplizirt.

2. Kommt die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor, so wird die Gleichung durch entsprechende Potenzirung beider Theile von jener Wurzelgröße befreit.

3. Es werden alle unbekannten Glieder auf die erste Seite gebracht, zusammengezogen, und nach fallenden Potenzen geordnet; die

bekannten Glieder dagegen werden auf die zweite Seite übertragen und ebenfalls zusammengezogen.

4. Man dividirt beide Theile der Gleichung durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von der Unbekannten.

Beispiele.

1) $6(x - 2) - 2(3x + 1) = 14 - 4(2x + 3)$
$$6x - 12 - 6x - 2 = 14 - 8x - 12$$
$$6x - 6x + 8x = 14 - 12 + 12 + 2$$
$$8x = 16$$
$$x = 2.$$

2) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{2x}{5} + 6$
$$30x + 20x + 20 + 15x - 15 = 24x + 360$$
$$30x + 20x + 15x - 24x = 360 - 20 + 15$$
$$41x = 355$$
$$x = 8\tfrac{27}{41}.$$

3) $a - b - \frac{ab}{x} = 0$
$$(a - b)x - ab = 0$$
$$(a - b)x = ab$$
$$x = \frac{ab}{a-b}.$$

4) $\frac{x}{x+a} - \frac{x}{x-a} = \frac{b}{x+a}$
$$x(x - a) - x(x + a) = b(x - a)$$
$$x^2 - ax - x^2 - ax = bx - ab$$
$$-2ax - bx = -ab$$
$$-(2a + b)x = -ab$$
$$x = \frac{ab}{2a+b}.$$

5) $x - \frac{12 - 3x}{x} = 8$
$$x^2 - 12 + 3x = 8x$$
$$x^2 + 3x - 8x = 12.$$
$$x^2 - 5x = 12.$$

6) $\frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{3x^2}{x - 1} + \frac{1}{x+1} = 0$
$$4x - 3x^2(x + 1) + (x - 1) = 0$$
$$4x - 3x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$$
$$-3x^3 - 3x^2 + 5x = 1$$
$$x^3 + x^2 - \frac{5x}{3} = -\frac{1}{3}$$

7) $3\sqrt{x-1} = 4$
$9(x - 1) = 16$
$9x - 9 = 16$
$9x = 25$
$x = \frac{25}{9}$

8) $2x - \sqrt{2x} = 1$
$-\sqrt{2x} = 1 - 2x$
$2x = 1 - 4x + 4x^2$
$2x + 4x - 4x^2 = 1$
$-4x^2 + 6x = 1$
$x^2 - \frac{3x}{2} = -\frac{1}{4}.$

9) $\frac{5-x}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{3x-4}{12}$ gibt $x = \frac{25}{3}.$

10) $\frac{a}{x+b} = \frac{c}{x+d}$ „ $x = \frac{bc-ad}{a-c}.$

11) $\frac{20}{3x+4} - \frac{3}{5x-3} = 6$ „ $x = \frac{5}{18}.$

12) $\frac{m(a^2+x^2)}{ax} - \frac{mx}{a} = cm$ „ $x = \frac{a}{c}.$

13) $\frac{x+a}{x} + \frac{x}{x+a} = 3$ „ $x^2 + ax = a^2.$

14) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4}$ „ $x^2 - 5x = -\frac{11}{2}.$

15) $5\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+1} = 6$ „ $x^2 - \frac{1102x}{147} = \frac{3649}{441}.$

Man ordne noch folgende Gleichungen:

16) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66}.$

17) $3x = \frac{6x^2 - 3ax + b^2}{2x} - a + 2b.$

18) $(2 - x)(32 - x) = (4 + x)(3 + x).$

19) $\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}.$

20) $\frac{2a+x}{3a+2x} - \frac{3}{2} = \frac{2a-x}{3a+x}.$

21) $\frac{x^2+27}{x-3} - \frac{x^2+22}{x+10} = 7.$

22) $\sqrt{4x^2+8x+13} = 4x + 1.$

23) $\sqrt{33+x} = \sqrt{x-13}.$

24) $\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a.$

II. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

1. Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 137.

Eine geordnete Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist auch schon aufgelöset; das Auflösen einer Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten besteht demnach im Ordnen derselben.

Beispiele.

1) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{5} = 4$ gibt geordnet und aufgelöset $x = 22$.

Probe: $\frac{22+2}{3} - \frac{22-2}{5} = \frac{24}{3} - \frac{20}{5} = 8 - 4 = 4.$

2) $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 1} = x - 3$ geordnet und aufgelöset $x = 7$.

Probe: $\frac{343 - 98 + 3}{49 + 14 - 1} = \frac{248}{62} = 4$

$7 - 3 = 4.$

3) $\frac{a - bx}{c} = \frac{m - nx}{p}$ geordnet und aufgelöset $x = \frac{ap - cm}{bp - cn}$.

Probe: $\frac{a - \frac{abp - bcm}{bp - cn}}{c} = \frac{abp - acn - abp + bcm}{bcp - c^2n} = \frac{bm - an}{bp - cn}$;

$$\frac{m - \frac{anp - cmn}{bp - cn}}{p} = \frac{bmp - cmn - anp + cmn}{bp^2 - cnp} = \frac{bm - an}{bp - cn}.$$

4) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} + c = \frac{x}{d} - e$ geordnet und aufgelöst

$$x = \frac{abd\,(c + e)}{ab + ad - bd}.$$

Man suche den Werth von x aus folgenden Gleichungen:

5) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + 9 = 2x - 21$;

6) $\frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} = \frac{b}{2x}$;

7) $\frac{3 - 2x}{7} + 1 = 4x + \frac{42 - 4x}{5}$;

8) $4 : \frac{x}{8} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right)$;

9) $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4 + x}$;

10) $\frac{b + \sqrt{ax}}{b - a} = \frac{x + b}{b - \sqrt{ax}}$;

11) $\sqrt{a+x} - \frac{a}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{2a+x}$;

12) $\frac{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}} = 3$.

2. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 138.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist unbestimmt; es gibt nämlich unendlich viele Werthe, welche für die beiden Unbekannten substituirt, der Gleichung Genüge leisten. Hat man z. B. die Gleichung $2x + 5y = 19$, so folgt daraus, wenn einstweilen x als die Unbekannte, y aber als bekannt angesehen wird, $x = \frac{19-5y}{2}$. Jedem Werthe, der in der Auflösung für y gesetzt wird, entspricht auch ein anderer Werth für x; da nun für y unendlich viele verschiedene Werthe angenommen werden können, so ist auch x unendlich vieler Werthe fähig; die Auflösung ist demnach völlig unbestimmt. Sollen nun x und y vollkommen bestimmt sein, so muß noch eine zweite, von der ersten wesentlich verschiedene Gleichung zwischen x und y gegeben werden, welche die Unbestimmtheit der aus der ersten Gleichung sich ergebenden Werthe behebt.

Die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten kann auf eine der folgenden Arten geschehen.

a) Man sucht die Werthe für eine Unbekannte, z. B. für x aus beiden Gleichungen, und setzt diese unbestimmten Werthe, da sie dieselbe Größe vorstellen, einander gleich; dadurch erhält man eine neue Gleichung, in der nur eine Unbekannte y vorkommt, welche daraus wie aus einer Gleichung mit einer Unbekannten bestimmt wird. Substituirt man den gefundenen Werth von y in einem der für x erhaltenen Ausdrücke, so bekommt man auch den Werth für diese Unbekannte. Diese Art der Auflösung heißt die Komparazionsmethode.

b) Man sucht den Werth einer Unbekannten z. B. von x aus der einen Gleichung, und substituirt denselben in die andere Gleichung. Dadurch erhält man eine neue Gleichung, worin bloß y vorkommt, dessen Werth daraus gefunden werden kann. Durch Substituzion dieses Werthes in dem früher für x erhaltenen Ausdrucke ergibt sich auch der Werth für diese Unbekannte. Dieses Verfahren nennt man die Substituzionsmethode.

c) Eine dritte Art der Auflösung besteht darin, daß man durch gehörige Verbindung beider Gleichungen eine Unbekannte aus denselben hinwegschafft, eliminirt. Die hinwegzuschaffende Unbekannte muß in beiden Gleichungen denselben Koeffizienten haben; ist dieses nicht schon der Fall, so multiplizire man die beiden Theile einer jeden Gleichung mit solchen Zahlen, daß jene Eigenschaft herbeigeführt werde. Sodann werden die zwei Gleichungen addirt, wenn die gleichen Koeffizienten der zu eliminirenden Unbekannten verschiedenes Zeichen haben, und subtrahirt, wenn sie dasselbe Zeichen haben. Dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, deren Auflösung den Werth für diese Unbekannte gibt. Den Werth der andern Unbekannten findet man durch die Substituzion des bereits erhaltenen Werthes in einer der gegebenen Gleichungen. Dieses Verfahren wird die Eliminazionsmethode genannt.

Welche von den drei Methoden in jedem einzelnen Falle die vortheilhafteste Auflösung gewährt, hängt von der Beschaffenheit der gegebenen Gleichungen ab.

Beispiele.

1) Es seien allgemein die Gleichungen

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a'x + b'y = c'$$

aufzulösen.

a) Nach der Komparazionsmethode hat man

$$x = \frac{c - by}{a} \quad \text{und} \quad x = \frac{c' - b'y}{a'},$$

$$\text{daher} \quad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'},$$

aus welcher Gleichung $y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$ folgt.

Substituirt man diesen Werth in dem ersten der früher für x erhaltenen Ausdrücke, so hat man

$$x = \frac{c - \frac{abc' - a'bc}{ab' - a'b}}{a} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$$

b) Nach der Substituzionsmethode bekommt man zuerst

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Wird dieser Werth für x in die zweite Gleichung $a'x + b'y = c'$ substituirt, so hat man $\frac{a'c - a'by}{a} + b'y = c'$, woraus

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

folgt. Durch die Substituzion dieses Werthes in dem oben für x erhaltenen Ausdrucke findet man, wie bei der ersten Methode,

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$$

c) Nach der Eliminazionsmethode muß man, um z. B. x zu eliminiren, die erste Gleichung mit a', die zweite mit a multipliziren, wodurch man erhält

$$aa'x + a'by = a'c,$$
$$aa'x + ab'y = ac'.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ist

$$a'by - ab'y = a'c - ac',$$

woraus $y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$ folgt.

Den Werth von x kann man erhalten, wenn man entweder aus den beiden gegebenen Gleichungen y eliminirt, und die daraus sich ergebende Gleichung auflöset, oder wenn man den bereits bekannten Werth von y in einer der gegebenen Gleichungen substituirt. Auf beide Arten erhält man, wie früher,

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$$

2) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 24 \\ 5x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ nach der Komparazionsmethode aufzulösen.

Die erste Gleichung gibt $x = \frac{24 - 4y}{3}$,

„ zweite „ „ $x = \frac{11 + 3y}{5}$,

daher $\frac{24 - 4y}{3} = \frac{11 + 3y}{5}$, woraus $y = 3$ folgt.

Substituirt man diesen Werth von y in dem Ausdrucke $x = \frac{24 - 4y}{3}$, so erhält man $x = \frac{24 - 4 . 3}{3} = 4$.

Daß die Werthe $x = 4$ und $y = 3$ den gegebenen Gleichungen Genüge leisten, ergibt sich sogleich, wenn man diese Werthe in den Gleichungen substituirt; man hat

$$3 . 4 + 4 . 3 = 24,$$
$$5 . 4 - 3 . 3 = 11.$$

3) $\left.\begin{array}{l} 6x - 13y = 48 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ nach der Substituzionsmethode aufzulösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{48 + 13y}{6}$; wird dieser Werth in der zweiten Gleichung substituirt, so hat man

$$2 . \frac{48 + 13y}{6} + 3y = 16, \text{ woraus } y = 0 \text{ folgt.}$$

Substituirt man diesen Werth von y in dem Ausdrucke $x = \frac{48 + 13y}{6}$, so findet man $x = \frac{48 + 13 . 0}{6} = 8$.

Probe: $6 . 8 - 13 . 0 = 48,$
$2 . 8 + 3 . 0 = 16.$

4) $\left.\begin{array}{l} 4x + 19y = 11 \\ 6x - 5y = -17 \end{array}\right\}$ nach der Eliminazionsmethode aufzulösen.

Um bei x gleiche Koeffizienten herbeizuführen, multiplizirt man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2; man bekommt

$$\left.\begin{aligned} 12x + 57y &= 33 \\ 12x - 10y &= -34 \end{aligned}\right\} \text{subtrahirt,}$$
$$\begin{aligned} - \quad + \quad & + \\ \hline 67y = \quad & 67, \end{aligned} \quad \text{also } y = 1.$$

Wird der Werth von y in der ersten Gleichung substituirt, so erhält man $4x + 19 \cdot 1 = 11$, woraus $x = -2$ folgt.

Probe. $4 \cdot -2 + 19 \cdot 1 = 11,$
$6 \cdot -2 - 5 \cdot 1 = -17.$

5) $$x + y = s, \quad x - y = d.$$

Durch Addizion und Subtrakzion dieser Gleichungen erhält man
$$2x = s + d, \quad 2y = s - d,$$
daher
$$x = \frac{s+d}{2}, \quad y = \frac{s-d}{2}.$$

6) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 4 \\ 12x - 6y &= 5 \end{aligned}\right\}$ geben $\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}, \\ y &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$

7) $\left.\begin{aligned} 16x - 25y &= 5 \\ 5y - 24x &= 12 \end{aligned}\right\}$ geben $\begin{aligned} x &= -\tfrac{5}{8}, \\ y &= -\tfrac{3}{5}. \end{aligned}$

8) $\left.\begin{aligned} &5(3x - 2y) = 10 - 3x \\ &\frac{1+2y}{3} - \frac{x-2y}{3} = 8x - 1 \end{aligned}\right\}$ aufgelöset: $\begin{aligned} x &= -\tfrac{5}{84}, \\ y &= -\tfrac{31}{28}. \end{aligned}$

§. 139.

Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander wesentlich verschiedene Gleichungen gegeben sein. Ihre Auflösung geschieht nach denselben Methoden, wie die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, wie dieß aus den folgenden Beispielen erhellet.

Beispiele.

1) $\left.\begin{aligned} 8x + 5y + 2z &= 24 \\ 6x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 9y - 6z &= 4 \end{aligned}\right\}$ nach der Komparazionsmethode aufzulösen.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned}\right\}, \text{ folglich } \left\{\begin{aligned} \frac{24 - 5y - 2z}{8} &= \frac{3 + 3y - z}{6}, \\ \frac{3 + 3y - z}{6} &= \frac{4 - 9y + 6z}{4}. \end{aligned}\right.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt, wenn man sie nach y auflöset,

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{60 - 2z}{27} \\ y = \dfrac{6 + 20z}{33} \end{array}\right\}, \text{ daher } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

aus welcher letztern Gleichung $z = 3$ folgt.

Substituirt man den Werth von z in einem der für y gefundenen Ausdrücke, z. B. in $y = \frac{60 - 2z}{27}$, so hat man

$$y = \frac{60 - 2.3}{27} = 2.$$

Werden endlich die gefundenen Werthe von y und z in einem der für x aufgestellten Ausdrücke, z. B. in $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$ substituirt, so bekommt man

$$x = \frac{3 + 3 \times 2 - 3}{6} = 1.$$

Probe. $8.1 + 5.2 + 2.3 = 24,$
$6.1 - 3.2 + 3 = 3,$
$4.1 + 9.2 - 6.3 = 4.$

2) $\left.\begin{array}{l} 3x + y + z = 18 \\ 2x + 3y + 2z = 28 \\ 5x + 2y + 3z = 38 \end{array}\right\}$ nach der Substituzionsmethode aufzulösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $z = \frac{18 - y - z}{3}$. Substituirt man diesen Werth in der zweiten und dritten Gleichung, so erhält man

$$2 . \frac{18 - y - z}{3} + 3y + 2z = 28, \text{ oder } 7y + 4z = 48,$$

$$5 . \frac{18 - y - z}{3} + 2y + 3z = 38, \text{ oder } y + 4z = 24.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $y = 24 - 4z$. Wird dieser Werth in der vorletzten Gleichung substituirt, so hat man

$$7(24 - 4z) + 4z = 48,$$

woraus $z = 5$ folgt.

Substituirt man den Werth von z in $y = 24 - 4z$, so ist

$$y = 24 - 4.5 = 4.$$

Werden endlich die Werthe von y und z in dem Ausdrucke $x = \frac{18 - y - z}{3}$ eingestellt, so erhält man

$$x = \frac{18 - 4 - 5}{3} = 3.$$

3) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 8 \\ 2x + 5y - 2z &= 18 \\ 4x - y + 2z &= 14 \end{aligned}\right\}$ nach der Eliminazionsmethode aufzulösen.

Um aus den ersten zwei Gleichungen x zu eliminiren, multiplizire man die erste mit 2, die zweite mit 3; es ist

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 4y & + & 10z & = & 16 \\ 6x & + & 15y & - & 6z & = & 54 \\ - & & - & & + & & - \\ \hline & - & 19y & + & 16z & = & -38. \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \text{subtrahirt}$$

Um aus der zweiten und dritten Gleichung x zu eliminiren, braucht man nur die zweite mit 2 zu multipliziren, und die Subtrakzion zu verrichten; man bekommt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 10y & - & 4z & = & 36 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 14 \\ - & & + & & - & & - \\ \hline & & 11y & - & 6z & = & 22. \end{array}$$

Nun hat man zwei Gleichungen, worin noch die Unbekannten y und z vorkommen. Um aus denselben y zu eliminiren, wird man die erste Gleichung mit 11, die zweite mit 19 multipliziren, und die neuen Gleichungen addiren; man erhält

$$\begin{array}{rcrcr} -209y & + & 176z & = & -418 \\ 209y & - & 114z & = & 418 \\ \hline & & 62z & = & 0 \end{array} \text{ ; also } z = 0.$$

Wird der Werth von z in der Gleichung $11y - 6z = 22$ substituirt, so hat man $11y = 22$, daher $y = 2$.

Substituirt man endlich die Werthe von y und z in einer der gegebenen Gleichungen, z. B. in $3x - 2y + 5z = 8$, so erhält man $3x - 2 \cdot 2 = 8$, folglich $x = 4$.

4) $\left.\begin{aligned} 6x + 5z &= 8 \\ 20y - 5z &= 11 \\ 3y - 3x &= 1 \end{aligned}\right\}$ aufgelöset: $\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}, \\ y &= \tfrac{3}{4}, \\ z &= \tfrac{4}{5}. \end{aligned}$

5) $\left.\begin{aligned} 6x - 4y + 3z &= 28 \\ 4x - y - 3z &= 7 \\ 2x - 3y + 6z &= 21 \end{aligned}\right\}$ aufgelöset: $\begin{aligned} x &= 6, \\ y &= 5, \\ z &= 4. \end{aligned}$

6) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{16} &= 18 \\ \frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} &= 19 \\ \frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} &= 23 \end{aligned}\right\}$ aufgelöset: $\begin{aligned} x &= 10, \\ y &= 12, \\ z &= 15. \end{aligned}$

7) $\left.\begin{aligned} 3u - 2x + y - 5z &= 17 \\ 4u + x - 3y + 2z &= -7 \\ 6u - 5x + 2y - z &= 13 \\ u - x + y - z &= 6 \end{aligned}\right\}$ aufgelöset: $\begin{aligned} u &= 1, \\ x &= -1, \\ y &= 2, \\ z &= -2. \end{aligned}$

8) Man löse noch folgende Gleichungen auf:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

und gebe die Gesetzmäßigkeit an, welche in den für x, y und z erhaltenen Ausdrücken vorherrscht.

3. Aufgaben über die bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

a) Aufgaben mit Beifügung des Ansatzes.

§. 140.

1) Das 3fache und 4fache einer Zahl beträgt 196; wie groß ist diese Zahl?

Es sei x die gesuchte Zahl; das 3fache derselben wird $3x$, und das 4fache $4x$ sein. Nach der Bedingung der Aufgabe muß also

$$3x + 4x = 196$$

sein, aus welcher Gleichung sich $x = 28$ ergibt.

Probe. $3 . 28 + 4 . 28 = 84 + 112 = 196.$

2) Man suche eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil 25 betragen.

Heißt diese Zahl x, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$, und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

woraus $x = 30$ folgt.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

3) Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, die Elle zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{3}$ fl. die Elle. Wenn er nun dabei 21 fl. gewonnen hat, wie viel Ellen enthielt das Stück?

Bei dieser Aufgabe wird als bekannt vorausgesetzt, daß der Gewinn gleich ist der ganzen Verkaufssumme weniger der ganzen Einkaufssumme.

Es sei nun x die Anzahl der Ellen, so ist

die Verkaufssumme für x Ellen $= 4\frac{1}{3} . x = \frac{13x}{3}$,

die Einkaufssumme für x Ellen $= 3\frac{3}{4} . x = \frac{15x}{4}$;

daher $$\frac{13x}{3} - \frac{15x}{4} = 21,$$

woraus $x = 36$ folgt.

Probe. 36 Ellen zu $4\frac{1}{3}$ fl. = 156 fl. beim Verkaufe,
36 Ellen zu $3\frac{3}{4}$ fl. = 135 fl. beim Einkaufe,
21 fl. Gewinn.

4) Jemand wurde um sein Alter gefragt, und sagte: Mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre $= x$, so ist
sein Alter nach 10 Jahren $= x + 10$,
sein Alter vor 4 Jahren $= x - 4$.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein muß, als die zweite, so wird, damit man eine Gleichung bekomme, die zweite Zahl mit 2 multiplizirt; daher ist

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

woraus $x = 18$ folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren = 28 Jahre,
Alter vor 4 Jahren = 14 Jahre,
und wirklich $28 = 2 \,.\, 14$.

5) Ein Vater ist 48, sein Sohn 21 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater 10mal so alt als sein Sohn?

Man nehme an: vor x Jahren.

Vor x Jahren war der Vater $48 - x$, der Sohn $21 - x$ Jahre alt, und da nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl 10mal so groß als die zweite ist, so muß man, damit die Gleichheit hergestellt werde, die zweite Zahl mit 10 multipliziren; man hat also die Gleichung

$$48 - x = 10(21 - x),$$

welcher der Werth $x = 18$ Genüge leistet.

Probe. Vor 18 Jahren war der Vater 30 und der Sohn 3 Jahre alt, daher der Vater wirklich 10mal so alt, als der Sohn.

6) Die Orte A und B sind 130 Meilen von einander entfernt. Wenn nun ein Kourier von A nach B abgeht und täglich 14 Meilen zurücklegt, zu gleicher Zeit aber auch von B nach A ein Kourier abgeschickt wird, der täglich 12 Meilen macht; nach wie viel Tagen werden sich die beiden Kouriere begegnen?

Nach x Tagen. In x Tagen legt der erste Kourier $14x$, der zweite $12x$ Meilen zurück; da nun die von beiden Kourieren zurückgelegten Räume, wenn sie sich begegnen, zusammen die ganze Entfernung zwischen A und B betragen müssen, so ist

$$14x + 12x = 130,$$
$$\text{daher } x = 5.$$

Probe. Der erste Kourier legt in 5 Tagen 70 Meilen zurück, und ist somit noch 60 Meilen von B entfernt; der von B kommende Kourier legt in 5 Tagen eben 60 Meilen zurück, und trifft also wirklich in 5 Tagen mit dem ersten Kourier zusammen.

7) Ein Menschenfreund wollte eine Summe, die er eben bei sich hatte, unter 10 Arme vertheilen. Gibt er jedem 20 Kr., so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem 18 Kr. geben will. Wie viel Kreuzer hatte er bei sich?

Es sei x die Anzahl der Kreuzer. Will er jedem Armen 20 Kr. geben, so hat er $200 - x$ Kreuzer zu wenig; will er jedem 18 Kr. geben, so hat er $x - 180$ Kreuzer zu viel. Da nun diese beiden Zahlen gleich sein müssen, so ist

$$200 - x = x - 180,$$

woraus $x = 190$ folgt.

8) Wenn sich die Zeiger einer Uhr zwischen 4 und 5 Uhr decken, wie viel Uhr ist es ganz genau?

Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger auf 4, der Minutenzeiger auf 12; der Stundenzeiger ist also um 20 Minuten voraus, und es entsteht die Frage: in wie viel Minuten wird ihn der Minutenzeiger einholen?

Es sei x die Zahl der Minuten, die der Minutenzeiger fortrücken muß, bis er den Stundenzeiger einholt, so wird der Stundenzeiger während dieser Zeit $\frac{x}{12}$ Minuten durchlaufen, und es muß der Unterschied dieser beiden Räume 20 Minuten betragen, also

$$x - \frac{x}{12} = 20$$

sein, woraus $x = 21\frac{9}{11}$ folgt.

Die Deckung der beiden Zeiger geschieht also um 4 Uhr $21\frac{9}{11}$ Minuten.

§. 141.

9) Man theile die Zahl 58 in zwei Theile, so daß der eine Theil um 16 kleiner ist als der andere.

Es sei der größere Theil x, und der kleinere y, so muß nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = 58, \quad \text{und} \quad x = y + 16$$

sein, aus welchen Gleichungen $x = 37$, $y = 21$ folgt.

Probe. Die Zahlen 37 und 21 betragen zusammen wirklich 58, und zwar ist die zweite um 16 kleiner als die erste.

Diese Aufgabe kann auch mittelst einer Unbekannten aufgelöset werden.

Heißt nämlich x der größere Theil, so ist $58 - x$ der kleinere, und es muß

$$x = 58 - x + 16$$

sein, woraus $x = 37$ hervorgehet, also $58 - x = 21$.

10) Ein Vater ist gegenwärtig 3mal so alt als sein Sohn; vor 12 Jahren war er 9mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Vater sei x, der Sohn y Jahre alt; vor 12 Jahren hatte der Vater $x - 12$, der Sohn $y - 12$ Jahre. Es ist also nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x = 3y, \text{ und } x - 12 = 9\,(y - 12),$$

woraus $x = 48$, $y = 16$ folgt.

Mit einer Unbekannten würde die Auflösung so lauten:

Ist der Vater x Jahre alt, so ist das Alter des Sohnes $\frac{x}{3}$ Jahre; vor 12 Jahren war der Vater $x - 12$, der Sohn $\frac{x}{3} - 12$ Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$x - 12 = 9\left(\frac{x}{3} - 12\right),$$

woraus man $x = 48$, und $\frac{x}{3} = 16$ erhält.

11) Ein Vater verspricht seinem Sohne für jede fehlerfreie Aufgabe ein Geschenk von 10 Groschen; für jede fehlerhafte Aufgabe dagegen muß der Sohn dem Vater 5 Groschen zurückzahlen. Bei 20 Aufgaben ergab sich nun, daß dem Sohne von den erhaltenen Geschenken 80 Groschen übrig blieben. Wie viele Aufgaben hat er ohne Fehler, und wie viele fehlerhaft ausgearbeitet?

Die Zahl der fehlerfreien Aufgaben sei x, jene der fehlerhaften y; der Sohn bekam also für die x fehlerfreien Aufgaben 10x Groschen, und zahlte für die y fehlerhaften 5y Groschen zurück. Man hat demnach

$$x + y = 20, \text{ und } 10x - 5y = 80,$$

woraus $x = 12$, $y = 8$ hervorgehet.

Probe. Der Sohn bekam $10 \times 12 = 120$ Groschen,
und zahlte $5 \times 8 = 40$ Groschen zurück,
also blieben ihm 80 Groschen.

Wie wird diese Aufgabe mit einer Unbekannten aufgelöset?

12) Man suche eine zweizifferige Zahl, welche rückwärts geschrieben um 27 kleiner wird; ihre Ziffernsumme ist 13.

Heißt x die Ziffer der Zehner, und y die Ziffer der Einheiten, so ist $10x + y$ die zu suchende Zahl; rückwärts geschrieben ist dieselbe $10y + x$. Man hat daher

$$x + y = 13, \text{ und } 10x + y = 10y + x + 27,$$

welche Gleichungen $x = 8$, $y = 5$ geben. Die verlangte Zahl ist also 85.

Man löse die Aufgabe auch mit einer einzigen Unbekannten auf.

13) In einer Reichsversammlung, worin 360 Abgeordnete stimmten, wurde ein Antrag mit einer Stimmenmehrheit von 104 angenommen. Wie viele haben dafür, wie viele dagegen gestimmt?

Es sei die Zahl der für den Antrag Stimmenden x, und die Zahl der dagegen Stimmenden y; so hat man

$$x + y = 360, \text{ und } x - y = 104;$$

daher $x = 232$, $y = 128$.

14) Ein Wirth hat zweierlei Weine; von dem ersten kostet der Eimer 30 fl., von dem zweiten 16 fl. Er will durch Mischung 7 Eimer zu 20 fl. bekommen, wie viel Eimer wird er von jeder Gattung zu der Mischung nehmen müssen?

Hier wird vorausgesetzt, daß der Werth des durch die Mischung erzeugten Weines dem Werthe der zur Mischung verwendeten Weine gleich ist.

Es sei x die Anzahl Eimer des bessern, und y die Anzahl Eimer des schlechtern Weines, so ist der Werth des ersteren Bestandtheiles $30x$, jener des zweiten $16y$ fl. Der Werth des durch die Mischung erhaltenen Weines ist $20 \times 7 = 140$ fl. Man hat daher

$$x + y = 7, \text{ und } 30x + 16y = 140,$$

woraus $x = 2$, $y = 5$ folgt.

Probe. 2 Eimer zu 30 fl. = 60 fl.
5 Eimer zu 16 fl. = 80 fl.
7 Eimer zu 20 fl. = 140 fl.

15) Jemand will alöthiges und blöthiges Silber legiren, und dadurch m Mark clöthiges Silber erhalten; wie viel Mark von jedem Silber wird er zu der Legirung verwenden?

Es wird vorausgesetzt, daß die Legirung eben so viel feines Silber enthalte, als die zur Legirung verwendeten Silbermassen.

Es sei die Anzahl Mark alöthiges Silber $= x$,
" " " blöthiges Silber $= y$.
x Mark alöthiges Silber enthalten ax Loth fein Silber
y " blöthiges " " by " " "

Da nun die Legirung m Mark clöthiges Silber, also cm Loth feines Silber enthalten soll, so hat man die Gleichungen

$$x + y = m, \text{ und } ax + by = cm,$$

woraus $x = \frac{c-b}{a-b}.m$ und $y = \frac{a-c}{a-b}.m$ folgt.

Auf der Lösung dieser allgemeinen Aufgabe beruhet die Allegazionsrechnung.

16) Der König Hiero zu Syrakus ließ sich von einem Goldschmied eine Krone machen, und übergab ihm zu diesem Ende 20 Pfund Gold; die von dem Goldschmiede abgelieferte Krone wog auch wirklich 20 Pfund. Archimedes wollte sich nun überzeugen, ob der Goldarbeiter nicht vielleicht einen Theil Gold entwendet, und dafür eben so viel Silber dem Golde beigesetzt habe. Bekanntlich verliert Gold im Wasser den 19ten, Silber dagegen den 10ten Theil seines Gewichtes. Archimedes wog also die Krone im Wasser ab, und fand den Gewichtsverlust $1\frac{1}{4}$ Pfund, während derselbe, wenn in

der Krone reines Gold wäre $\frac{20}{19} = 1\frac{1}{19}$ Pfund betragen müßte, woraus Archimedes den Schluß zog, daß die Krone nicht bloß Gold enthalte. Wie viel Gold und wie viel Silber war nun in der Krone enthalten?

Die Krone enthalte x Pfund Gold und y Pfund Silber; so ist der Gewichtsverlust des Goldes $\frac{x}{19}$, und jener des Silbers $\frac{y}{10}$ Pfd. Da nun der ganze Gewichtsverlust der Krone $1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$ Pfund beträgt, so hat man die Gleichungen

$$x + y = 20, \text{ und } \frac{x}{19} + \frac{y}{10} = \frac{10}{9};$$

welche $x = 18\cdot765$, $y = 1\cdot235$ geben.

Die Krone enthielt also 18 Pfund $24\frac{1}{2}$ Loth Gold, und 1 Pfd. $7\frac{1}{2}$ Loth Silber.

17) Unter die drei besten Schüler einer Klasse war eine bestimmte Summe so zu vertheilen, daß der zweite um 20 fl. weniger als der erste, und der dritte wieder um 20 fl. weniger als der zweite bekommt; die ganze Summe war um 25 fl. größer als das 4fache dessen, was der dritte bekam. Wie viel erhielt ein jeder der drei Schüler?

Es sei x fl. der Antheil des ersten, y fl. des zweiten, z fl. des dritten Schülers; so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x = y + 20, \quad y = z + 20, \quad x + y + z = 4z + 25,$$

aus welchen Gleichungen $x = 75$, $y = 55$, $z = 35$ folgt.

Um diese Aufgabe mit Hilfe einer einzigen Unbekannten aufzulösen, sei wieder

	der Theil des ersten	Schülers	$= x$ fl.,
so ist	„ „ „ zweiten	„	$= x - 20$ fl.,
	„ „ „ dritten	„	$= x - 40$ fl.,
		Summe	$3x - 60$ fl.

Daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$3x - 60 = 4\,(x - 40) + 25,$$

woraus $x = 75$, $x - 20 = 55$, $x - 40 = 35$ folgt.

18) Jemand hat drei Metallstangen,

die erste enthält	4 Loth Gold,	8 Loth Silber,	12 Loth Kupfer,
die zweite „	8 „ „	10 „ „	2 „ „
die dritte „	10 „ „	6 „ „	14 „ „

Er will nun durch Legirung eine Metallstange erhalten, welche 10 Loth Gold, 13 Loth Silber und 11 Loth Kupfer enthält; wie viel Loth muß er von jeder der drei Metallstangen dazu nehmen?

Er nehme von der ersten Stange x, von der zweiten y, von der dritten z Loth. Es enthält nun

1 Loth der ersten Stange $\frac{1}{6}$ Loth Gold, $\frac{1}{3}$ Loth Silber, $\frac{1}{2}$ Loth Kupfer,
1 Loth der zweiten Stange $\frac{2}{5}$ „ „ $\frac{1}{2}$ „ „ $\frac{1}{10}$ „ „
1 Loth der dritten Stange $\frac{1}{3}$ „ „ $\frac{1}{5}$ „ „ $\frac{7}{15}$ „ „
daher

x Loth der ersten Stange $\frac{x}{6}$ Loth Gold, $\frac{x}{3}$ Loth Silber, $\frac{x}{2}$ Loth Kupfer
y Loth der zweiten Stange $\frac{2y}{5}$ „ „ $\frac{y}{2}$ „ „ $\frac{y}{10}$ „ „
z Loth der dritten Stange $\frac{z}{3}$ „ „ $\frac{z}{5}$ „ „ $\frac{7z}{15}$ „ „

und die ganze Metallstange 10 Lth. Gold, 13 Lth. Silber, 11 Loth Kupfer, folglich müssen die Gleichungen

$$\frac{x}{6} + \frac{2y}{5} + \frac{z}{3} = 10$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{15} = 13$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{7z}{15} = 11$$

Statt finden, denen die Werthe

$$x = 6,\ y = 10,\ z = 15$$

entsprechen. Man wird demnach von der ersten Stange 6, von der zweiten 10, von der dritten 15 Loth zu nehmen haben.

b) Aufgaben zur Selbstübung im Ansatze.

§. 142.

1) Welche Zahl gibt, wenn man sie mit $\frac{3}{4}$ multiplizirt, und von dem Produkte 5 subtrahirt, 13 zum Resultate? — Die Zahl 24.

2) Ein Vater ist 36, sein Sohn 10 Jahre alt; wie viel Jahre muß der Vater noch leben, damit er gerade doppelt so alt werde als sein Sohn? — 16 Jahre.

3) Ein Regiment bricht von A nach B auf, und macht täglich 4 Meilen; 5 Tage später rückt ihm ein anderes Regiment nach, welches täglich 6 Meilen zurücklegt. Nach wie viel Tagen wird das erste Regiment von dem zweiten eingeholt werden? — Nach 10 Tagen.

4) Ein Wasserbehälter, welcher 20 Eimer hält, kann durch drei Röhren gespeiset werden; die erste Röhre allein füllt das Gefäß in 4 Stunden, wird die zweite Röhre allein geöffnet, so wird dasselbe in 6 Stunden voll, durch die dritte Röhre allein in 12 Stunden. In wie viel Stunden wird der Wasserbehälter gefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich geöffnet werden? — In 2 Stunden.

5) In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wie groß die Zahl sei, antwortete ein Sohn: ich habe so viel Schwestern als Brüder; eine Tochter aber sagte, ich habe zweimal so viel

Brüder als Schwestern. Wie viel Söhne und Töchter waren da? — 4 Söhne und 3 Töchter.

6) Jemand dingt einen Gärtner auf einen Monat (30 Tage); er verspricht ihm während dieser Zeit die Kost, und für jeden Tag, an dem er arbeitet, $\frac{2}{3}$ fl.; für jeden Tag, an dem der Gärtner nicht arbeitet, muß er dem Herrn $\frac{1}{3}$ fl. für die Kost bezahlen. Nach einem Monate erhielt der Gärtner 11 fl. Wie viele Tage hat er gearbeitet, und wie viele nicht? — Der Gärtner hat 21 Tage gearbeitet, und 9 Tage nicht gearbeitet.

7) Jemand wettet bei jedem Spiele 4 fl. gegen 3 fl. Nach 28 Spielen hat er weder gewonnen noch verloren. Wie viele Spiele hat er gewonnen, wie viele verloren? — Der Spieler hat 16 Spiele gewonnen, 12 verloren.

8) Feines und 10löthiges Silber sollen zu 12löthigem Silber eingeschmolzen werden; wie viel von jedem Bestandtheile kommt auf 24 Mark? — 8 Mark feines, und 16 Mark 10löthiges Silber.

9) Zwei Fässer enthalten 351 Maß. Läßt man aus dem ersten den sechsten, und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so bleibt in beiden gleichviel übrig. Wie viel Maß enthält jedes Faß? — Das erste 156, das zweite 195 Maß.

10) In einer Gesellschaft waren doppelt so viel Männer als Frauen; und nachdem 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch 4mal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und Frauen waren in der Gesellschaft? — 24 Männer und 12 Frauen.

11) Ein Knabe sagt: meine Mutter ist 25 Jahre älter als ich, mein Vater ist 5 Jahre älter als die Mutter, und wir alle zusammen haben 91 Altersjahre. Wie alt ist der Knabe, die Mutter, der Vater? — Der Knab hat 12, die Mutter 37, der Vater 42 Jahre.

12) Ein Vater und seine zwei Söhne zählen jetzt zusammen 96 Jahre. Vor 4 Jahren war der ältere Sohn halb so alt als sein Vater, und doppelt so alt als sein Bruder. Wie alt ist jede dieser drei Personen? — Der Vater hat 52, der ältere Sohn 28, der jüngere 16 Jahre.

13) In einer Fabrik arbeiten 26 Arbeiter, theils Meister, theils Gesellen; jeder Meister erhält täglich 40 Groschen, jeder Geselle nur die Hälfte davon. Würde man jedem Meister von seinem Lohne 4 Groschen abziehen, und dafür jedem Gesellen so viel zulegen, so möchte der tägliche Lohn um 56 Groschen mehr betragen. Wie viele Meister, und wie viele Gesellen arbeiten in der Fabrik? — 6 Meister und 20 Gesellen.

14) Drei spielten mit einander. Im ersten Spiele verliert der erste an jeden der andern so viel als jeder von diesen bei sich hatte; im zweiten Spiele verliert der zweite an den ersten und dritten so viel als jeder derselben hat; im dritten Spiele verliert der dritte

an die ersten zwei so viel als jeder hatte; nach geendigtem Spiele hatte jeder 24 fl. Wie viel hatte ein jeder im Anfange des Spieles? — Der erste hatte 39 fl., der zweite 12 fl., der dritte 21 fl.

15) Von drei Metallstücken enthält

das erste	26 Ctr.	Kupfer,	11 Ctr.	Zinn	und	9 Ctr.	Blei,
das zweite	18 „	„	4 „	„	„	5 „	„
das dritte	36 „	„	2 „	„	„	10 „	„

Aus diesen Stücken will man ein viertes zusammensetzen, das 22 Ctr. Kupfer, 7 Ctr. Zinn und 7 Ctr. Blei enthält. Wie viel Pfund von jedem der drei ersten Metallstücke wird man dazu nehmen? — Von dem ersten 23 Ctr., von dem zweiten 9 Ctr., und von dem dritten 4 Ctr.

16) Ein Vater läßt bei seinem Tode die Frau mit 3 Söhnen zurück, und vermacht sein Vermögen auf folgende Art: die Frau soll den dritten Theil des ganzen Vermögens, der erste Sohn den dritten Theil des Restes mehr 600 fl., der zweite Sohn wieder den dritten Theil des neuen Restes mehr 2200 fl., und der dritte Sohn den Rest von 5400 fl. erhalten. Wie groß war das ganze Vermögen, und wie viel kommt auf die Frau und jeden der ersten zwei Söhne? — Das ganze Vermögen beträgt 27000 fl., auf die Frau kommen 9000 fl., auf den ersten Sohn 6600 fl., auf den zweiten 6000 fl.

17) In einem Haufen Erz enthält der Zentner 3 Loth, in einem andern 17 Loth Silber. Man will aus beiden Haufen 80 Zentner mengen, jeden Zentner mit 11 Loth Silbergehalt. Wie viel Zentner sind von jedem Haufen zu nehmen?

18) Vom Orte A aus geht des Morgens 5 Uhr eine Lokomotive ab, welche in $4\frac{1}{4}$ Stunden 17 Meilen zurücklegt. Um $5\frac{1}{2}$ Uhr wird von B aus, welcher Ort 7 Meilen hinter A liegt, der ersten Lokomotive eine zweite nachgesendet, die 13 Meilen in 3 Stunden fährt. Wann wird die zweite Lokomotive die erste einholen?

19) Zu einer Arbeit erbieten sich drei Personen, A, B und C. A und B würden zusammen die verlangte Arbeit in 18 Tagen liefern können, A und C zusammen könnten dieß in 12 Tagen, und B und C zusammen in 9 Tagen. In welcher Zeit kann jede Person für sich allein die Lieferung bewerkstelligen, und in welcher Zeit kann dieselbe durch alle drei Personen zusammen geleistet werden?

III. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. 143.

Wenn man zur Bestimmung von mehreren unbekannten Größen weniger Gleichungen hat, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man doch durch allmäliges Eliminiren der Unbekannten immer zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten erhalten. Wird aus dieser Gleichung die eine Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt, so kann man für diese alle beliebigen ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen setzen, und erhält dann auch für die erste Unbekannte eben so unzählig viele Werthe. Eine solche Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten wird daher eine unbestimmte Gleichung genannt.

So ist z. B. $3x + 4y = 10$ eine unbestimmte Gleichung; es folgt aus ihr $y = \frac{10 - 3x}{4}$, und es ergeben sich

$$\begin{array}{rl} \text{für } x = & -2, -\tfrac{1}{2}, 0, 2, \quad 10, \tfrac{2}{3}, \ldots \\ \text{die Werthe } y = & \;\;4, \;\; 2\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{2}, 1, -\;\; 5, 2, \ldots \end{array}$$

Es gibt also unendlich viele Werthe von x und y, welche alle der Gleichung $3x + 4y = 10$ Genüge leisten. Zu ihrer Ausmittlung bedarf es keiner besondern Anleitung.

Meistens wird jedoch bei solchen Gleichungen verlangt, daß die Unbekannten, welche man bestimmen will, gewissen besondern Bedingungen unterworfen seien. So verlangt man bei den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, daß die Unbekannten ganze, oder positive, oder ganze und positive Zahlen zugleich sein sollen. Wie man für die Unbekannten solche Werthe ausmitteln kann, welche diesen Bedingungen entsprechen, soll in dem Nachfolgenden gezeigt werden.

1. Auflösung in ganzen Zahlen.

§. 144.

Es sei die unbestimmte Gleichung

$$ax + by + cz + \ldots = p,$$

worin a, b, c, ... p ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Wenn diese Zahlen unter einander ein gemeinschaftliches Maß haben, so kann man beide Theile der Gleichung durch dasselbe dividiren, und dadurch bewirken, daß die bekannten Zahlen der Gleichung relative Primzahlen werden.

Wir wollen nun zunächst untersuchen, ob die vorgelegte Gleichung immer eine Auflösung in ganzen Zahlen zulasse. Nehmen wir an, daß die Koeffizienten a, b, c, ... ein gemeinschaftliches Maß m haben, durch welches p nicht theilbar ist; man hat dann auch

$$\frac{a}{m} \cdot x + \frac{b}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot z + \ldots = \frac{p}{m};$$

nun sind $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}, \ldots$ ganze Zahlen, und es können unmöglich x, y, z, ... zugleich ganze Zahlen sein, weil sonst auch

$$\frac{a}{m} \cdot x + \frac{b}{m} \cdot y + \frac{c}{m} \cdot z + \ldots,$$

und folglich auch $\frac{p}{m}$ eine ganze Zahl wäre; was gegen die Voraussetzung ist. Wenn also die Koeffizienten a, b, c, ... ein gemeinschaftliches Maß haben, durch welches p nicht theilbar ist, so läßt sich die Gleichung in ganzen Zahlen nicht auflösen.

Wir werden daher in dem Folgenden stets voraussetzen, daß die Koeffizienten der Unbekannten relative Primzahlen sind.

§. 145.

a) Auflösung einer unbestimmten Gleichung mit zwei Unbekannten.

I. Methode.

Es sei die Gleichung $ax + by = c$, wo a und b relative Primzahlen sind, in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man kann immer annehmen, daß der Koeffizient der einen Unbekannten, z. B. von x, positiv ist, da dieses, wenn es noch nicht der Fall ist, durch Aenderung der Zeichen in sämmtlichen Gliedern der Gleichung leicht bewirkt werden kann. Es sei also a positiv, und man löse die Gleichung nach x auf, wodurch man

$$x = \frac{c - by}{a}$$

erhält; so wird es, wenn man für y nach und nach die a Werthe 0, 1, 2, 3, ... $a - 1$ substituirt, unter den zugehörigen Werthen von x gewiß einen geben, welcher eine ganze Zahl ist, aber auch nur einen einzigen.

Denn dividirt man die a Werthe von $c - by$, welche man durch jene Substituzionen erhält, durch a, so ist leicht zu zeigen, daß die dabei erscheinenden Divisionsreste sämmtlich verschieden ausfallen müssen. Es seien z. B. m und n zwei von den Zahlen 0, 1, 2, ... $a - 1$, und nehmen wir an, daß $c - bm$ und $c - bn$ durch a dividirt denselben Rest r geben, während die in den beiden Quozienten erhaltenen ganzen Zahlen q und q^1 heißen sollen; so hätte man

$$c - bm = aq + r \text{ und } c - bn = aq^1 + r,$$

und wenn man beide Gleichungen subtrahirt,

$$b(m - n) = a(q^1 - q)$$

oder

$$\frac{b(m - n)}{a} = q^1 - q.$$

Es müßte also $b(m - n)$ durch a theilbar sein, was nicht möglich ist, da b und a relative Primzahlen sind, $m - n$ aber kleiner als a ist, und also nicht durch a theilbar sein kann. Die a Reste, welche übrig bleiben, wenn man jene a Werthe von $c - by$ durch a dividirt, müssen daher alle verschieden sein, und da sie zugleich sämmtlich kleiner als a sind, so muß einer unter ihnen gleich Null sein. Es sei nun β der Werth von y, welcher dem Reste 0 entspricht, so wird

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha$$

wo α eine ganze Zahl vorstellt. Der vorgelegten Gleichung genügen also die Werthe

$$x = \alpha,\ y = \beta.$$

Hat man übrigens für die Gleichung $ax + by = c$ eine Auflösung in ganzen Zahlen, nämlich $x = \alpha$ und $y = \beta$, gefunden, so lassen sich daraus unendlich viele andere Auflösungen, gleichfalls in ganzen Zahlen, ableiten. Durch die Substituzion jener Werthe in der gegebenen Gleichung erhält man nämlich die identische Gleichung

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Setzt man darin im ersten Theile abu, wo u irgend eine ganze Zahl bedeutet, als Addend und Subtrahend dazu, so hat man die ebenfalls identische Gleichung

$$a\alpha + abu + b\beta - abu = c$$

oder

$$a(\alpha + bu) + b(\beta - au) = c,$$

woraus ersichtlich ist, daß der vorgelegten Gleichung $ax + by = c$, allgemein die Werthe

$$x = \alpha + bu,\ y = \beta - au,$$

wo man für u jede beliebige positive oder negative ganze Zahl setzen kann, Genüge leisten.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $4x - 7y = 75$.

Man erhält daraus

$$x = \frac{75 + 7y}{4},$$

und ist versichert, daß, wenn man darin für y einen der 4 Werthe 0, 1, 2, 3 setzt, einer der zugehörigen Werthe von x eine ganze Zahl sein wird, so daß man also höchstens 4 Versuche zu machen braucht. Man findet für $y = 3$

$$x = \frac{75 + 21}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

Die vorgelegte Gleichung läßt also die Auflösung $x = 24$, $y = 3$ zu, und alle übrigen Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln

$$x = 24 - 7u,\ y = 3 - 4u,$$

wo u eine unbestimmte ganze Zahl bedeutet.

Man findet daher auch folgende Auflösungen:

für u =	− 2,	− 1,	1,	2,	3, ...
x =	36,	31,	17,	10,	3, ...
y =	11,	7,	− 1,	− 5,	− 9.

2) Für die Gleichung $7x - 13y = 152$ erhält man

$$x = \frac{152 + 13y}{7},$$

und, wenn man darin für y nach und nach die 7 Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 substituirt, für $y = 5$

$$x = \frac{152 + 65}{7} = 31.$$

Man hat daher folgende allgemeine Auflösung

$$x = 31 - 13u,\ y = 5 - 7u,$$

wo für u jede willkürliche ganze Zahl gesetzt werden kann.

Man löse noch folgende Gleichungen in ganzen Zahlen auf:

3) $6x + 5y = 128$; $y = 4,\ x = 18$
4) $8x - 11y = 200$; $y = 0,\ x = 25$
5) $12x + 13y = 319$. $y = 7,\ x = 19$

Das hier entwickelte Verfahren, eine unbestimmte Gleichung in ganzen Zahlen aufzulösen, wird sich offenbar sehr weitläufig gestalten, wenn die Koeffizienten derselben große Zahlen sind. In diesem Falle wird man zu einer der nachstehenden Methoden Zuflucht nehmen.

§. 146.

II. Methode.

Man hat unmittelbar eine Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen, wenn einer der beiden Koeffizienten z. B. a gleich 1 ist; denn es ist unter dieser Voraussetzung $x = c - by$, woraus man für jeden beliebigen ganzen Werth von y auch für x eine ganze Zahl enthält.

Wir wollen nun zeigen, daß sich die Auflösung einer jeden unbestimmten Gleichung mit zwei Unbekannten auf diesen einfachen Fall zurückführen läßt.

Es sei wieder $ax + by = c$ die vorgelegte Gleichung, und $a < b$, so erhalten wir zunächst $x = \frac{c - by}{a}$. Mittelst der Division durch a bekommen wir eine ganze Zahl von der Form $m - ny$, wo m auch Null sein kann, und einen Rest von der Form $c_1 - b_1 y$, wo c_1 ebenfalls Null sein kann; es ist somit

$$x = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a}.$$

Da nun x und y ganze Zahlen sein sollen, so muß auch der Bruch $\frac{c_1 - b_1 y}{a}$ eine ganze Zahl sein; nennen wir ihn u_1, so daß $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ eine ganze Zahl, und $x = m - ny + u_1$ ist.

Bringt man die Gleichung $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ auf die Form $au_1 + b_1 y = c_1$, so findet man darin als Koeffizienten den kleineren

Koeffizienten a der vorgelegten Gleichung, und den Rest b_1 der Division des größeren Koeffizienten b durch den kleineren a.

Wird nun nach demselben Vorgange, wie aus der vorgelegten die Hilfsgleichung $a u_1 + b_1 y = c_1$ entwickelt wurde, auch aus dieser letzteren eine neue Hilfsgleichung abgeleitet, und dasselbe Verfahren weiter fortgesetzt, so wird sich die dabei geführte Rechnung im Ganzen so stellen:

$ax + by = c$ gibt

$$x = \frac{c - by}{a} = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a} = m - ny + u_1 \ldots \quad 1)$$

$\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ oder $a u_1 + b_1 y = c_1$ gibt

$$y = \frac{c_1 - a u_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + \frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + u_2 \ldots \quad 2)$$

$\frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = u_2$ oder $b_1 u_2 + b_2 u_1 = c_2$ gibt

$$u_1 = \frac{c_2 - b_1 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + \frac{c_3 - b_3 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + u_3 \ldots \quad 3)$$

u. s. w.

Aus dem Gange dieser Rechnung folgt, daß

b_1 der Rest der Division $b : a$,
b_2 " " " " $a : b_1$,
b_3 " " " " $b_1 : b_2$,
u. s. w.

ist; die Koeffizienten der auf einander folgenden Hilfsgleichungen sind also gleich den Divisionsresten, welche man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen b und a erhält. Da nun a und b relative Primzahlen sind, so muß unter jenen Resten einer z. B. b_r gleich 1 werden; folglich wird man bei dem oben bezeichneten Vorgange gewiß einmal auf eine Hilfsgleichung von der Form $b_{r-1} u_r + u_{r-1} = c_r$ kommen, welche in Bezug auf u_{r-1} und u_r unmittelbar die Auflösung in ganzen Zahlen liefert, woraus dann auch die gesuchte Auflösung der vorgelegten Gleichung abgeleitet werden kann.

Um dieses an einem bestimmten Falle klarer nachzuweisen, nehmen wir an, daß $b_3 = 1$ ist, wo dann $b_2 u_3 + u_2 = c_3$ die letzte Hilfsgleichung sein wird. Aus dieser folgt $u_2 = c_3 - b_2 u_3$. Man mag nun hier für u_3 was immer für eine ganze Zahl setzen, so erhält man für u_2 eine ganze Zahl, folglich vermöge 3) auch für u_1, vermöge 2) auch für y, und somit vermöge 1) auch für x. Man kann den Werth $u_2 = c_3 - b_2 u_3$ sogleich in 3) substituiren, dann die Werthe von u_1 und u_2 in 2) und endlich die gefundenen Werthe von y und u_1 in 1); dadurch erhält man für x und y zwei Ausdrücke, welche von u_3 abhängen, in welchen man nur für u_3 was immer für eine ganze positive oder negative Zahl zu substituiren braucht, um für x und y alle möglichen ganzen Zahlen zu erhalten.

Wir sind bei dieser Entwicklung von der Annahme ausgegangen, daß $a < b$ ist. Wäre umgekehrt $b < a$, so brauchte man nur aus der gegebenen Gleichung $ax + by = c$ zuerst y zu bestimmen, und weiter, wie vorhin, zu verfahren.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $13x + 19y = 73$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Diese Gleichung gibt

$$x = \frac{73 - 19y}{13} = 5 + \frac{8}{13} - y - \frac{6y}{13} = 5 - y + \frac{8 - 6y}{13}.$$

Da x und y ganze Zahlen sein müssen, so muß auch der Bruch $\frac{8 - 6y}{13}$ eine ganze Zahl vorstellen; nennen wir diese u_1, so haben wir

$$x = 5 - y + u_1 \text{ und } \frac{8 - 6y}{13} = u_1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y = \frac{8 - 13u_1}{6} = 1 - 2u_1 + \frac{2 - u_1}{6}.$$

Da nun y und u_1 ganze Zahlen sein sollen, so muß auch der Bruch $\frac{2 - u_1}{6}$ eine ganze Zahl sein; setzen wir daher $\frac{2 - u_1}{6} = u_2$, wo u_2 eine ganze Zahl ist, so daß dann $y = 1 - 2u_1 + u_2$ wird.

Aus der Gleichung $\frac{2 - u_1}{6} = u_2$ folgt ferner

$$u_1 = 2 - 6u_2.$$

Durch Substituzion in den früher für y und x gefundenen Werthen erhält man nun:

$$y = 1 - 4 + 12u_2 + u_2 = -3 + 13u_2$$
$$x = 5 + 3 - 13u_2 + 2 - 6u_2 = 10 - 19u_2.$$

Setzt man daher $u_2 = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
so wird $x = 48, 29, 10, -9, -28, \ldots$
$y = -29, -16, -3, 10, 23, \ldots$

Jedes zusammengehörige Paar aus diesen Werthen für x und y leistet, wie man sich leicht überzeugen kann, der gegebenen Gleichung Genüge.

Daß die Werthe

$$x = 10 - 19u_2, \quad y = -3 + 13u_2$$

eine allgemeine Auflösung der Gleichung $13x + 19y = 73$ bilden, kann man auch daraus ersehen, daß sie in diese Gleichung substituirt, derselben vollkommen genügen; denn es ist

$$13(10 - 19u_2) + 19(-3 + 13u_2) = 130 - 247u_2 - 57 + 247u_2$$
$$= 73.$$

2) Es sei die Gleichung $7x + 11y = 18$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

$$7x + 11y = 18 \text{ gibt } x = \frac{18-11y}{7} = 2 - y + \frac{4-4y}{7}$$
$$= 2 - y + u_1$$
$$\frac{4-4y}{7} = u_1 \quad ,, \quad y = \frac{4-7u_1}{7} = 1 - u_1 - \frac{3u_1}{4}$$
$$= 1 - u_1 - u_2,$$
$$\frac{3u_1}{4} = u_2 \quad ,, \quad u_1 = \frac{4u_2}{3} = u_2 + \frac{u_2}{3}$$
$$= u_2 + u_3,$$
$$\frac{u_2}{3} = u_3 \quad ,, \quad u_2 = 3u_3.$$

Durch allmälige Substituzion findet man nun

$$u_1 = 3u_3 + u_3 = 4u_3,$$
$$y = 1 - 4u_3 - 3u_3 = 1 - 7u_3,$$
$$x = 2 - 1 + 7u_3 + 4u_3 = 1 + 11u_3.$$

Für $u_3 = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
wird daher $x = -21, -10, 1, 12, 23, \ldots$
$y = 15, 8, 1, -6, -13, \ldots$

3) Um die Gleichung $105x - 43y = 17$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wird man daraus y bestimmen, weil diese Unbekannte den kleinern Koeffizienten hat.

$$105x - 43y = 17 \text{ gibt } y = \frac{105x-17}{43} = 2x + \frac{19x-17}{43}$$
$$= 2x + u_1,$$
$$\frac{19x-17}{43} = u_1 \quad ,, \quad x = \frac{43u_1+17}{19} = 2u_1 + \frac{5u_1+17}{19}$$
$$= 2u_1 + u_2,$$
$$\frac{5u_1+17}{19} = u_2 \quad ,, \quad u_1 = \frac{19u_2-17}{5} = 3u_2 - 3 + \frac{4u_2-2}{5}$$
$$= 3u_2 - 3 + u_3,$$
$$\frac{4u_2-2}{5} = u_3 \quad ,, \quad u_2 = \frac{5u_3+2}{4} = u_3 + \frac{u_3+2}{4} = u_3 + u_4$$
$$\frac{u_3+2}{4} = u_4 \quad ,, \quad u_3 = 4u_4 - 2;$$

daher

$$u_2 = 4u_4 - 2 + u_4 = 5u_4 - 2,$$
$$u_1 = 15u_4 - 6 - 3 + 4u_4 - 2 = 19u_4 - 11,$$
$$x = 38u_4 - 22 + 5u_4 - 2 = 43u_4 - 24,$$
$$y = 86u_4 - 48 + 19u_4 - 11 = 105u_4 - 59.$$

Für $u_4 = -10, -1, 0, 1, 10, \ldots$
erhält man $x = -454, -67, -24, 19, 406, \ldots$
$y = -1109, -164, -59, 46, 991, \ldots$

Man löse noch folgende Gleichungen in ganzen Zahlen auf:

4) $15x + 14y = 225;$ $x = 1-14a,\ y = 15+15a$
5) $37x - 22y = 307;$
6) $115x = 424y - 539.$

§. 147.

III. Methode. der Kettenbrüche.

Für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen gibt es noch eine dritte ganz einfache Methode, welche auf den Eigenschaften der Näherungsbrüche beruhet.

Es sei die Gleichung

$$ax + by = c$$

in ganzen Zahlen aufzulösen.

Verwandelt man $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch, und sucht dessen Näherungsbrüche, so wird der letzte $\frac{b}{a}$ sein; der vorletzte heiße $\frac{m}{n}$. Es muß nun nach den Eigenschaften der Näherungsbrüche $\frac{m}{n} - \frac{b}{a} = \frac{\pm 1}{an}$ oder $am - bn = \pm 1$ sein.

Ist $am - bn = +1$, so wird auch $amc - bnc = c$ sein; somit bilden die Werthe $x = mc$, $y = -nc$ eine Auflösung in ganzen Zahlen für die gegebene Gleichung $ax + by = c$. Allein dieses ist nicht die einzige Auflösung in ganzen Zahlen; man kann in der Gleichung $amc - bnc = c$ im ersten Theile abu als Addend und Subtrahend hinzusetzen, wodurch man bekommt:

$$amc + abu - bnc - abu = c,$$

oder

$$a(mc + bu) - b(nc + au) = c.$$

Es leisten daher allgemein die Werthe

$$x = mc + bu,\ y = -nc - au,$$

wo man für u jede beliebige ganze Zahl setzen kann, der vorgelegten Gleichung Genüge.

Wäre dagegen $am - bn = -1$, so müßte $-am + bn = +1$, also $-amc + bnc = c$ sein, und man hätte als eine Auflösung in ganzen Zahlen die Werthe $x = -mc$, $y = nc$. Es ist aber auch $-amc - abu + bnc + abu = c$, oder

$$-a(mc + bu) + b(nc + au) = c;$$

daher allgemein

$$x = -mc - bu,\ y = nc + au,$$

wo u jede ganze Zahl bedeuten kann.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $25x - 11y = 20$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Verwandelt man $\frac{11}{25}$ in einen Kettenbruch, so erhält man $\frac{4}{9}$ und $\frac{11}{25}$ als die zwei letzten Näherungsbrüche. Es ist nun

$$4 . 25 - 11 . 9 = +1.$$

Setzt man daher $x = 4 . 20 = 80$, $y = 9 . 20 = 180$, und substituirt diese Werthe in die gegebene Gleichung, so wird ihr dadurch

Genüge geleistet. Allein es geschieht der Gleichung auch Genüge, wenn man $x = 80 + 11u$, $y = 180 + 25u$ setzt, wo u jede ganze Zahl vorstellen kann; man findet

$$\begin{array}{llllll} \text{für } u = & -2, & -1, & 1, & 2, \ldots \\ x = & 58, & 69, & 91, & 102, \ldots \\ y = & 130, & 155, & 205, & 230, \ldots \end{array}$$

2) Es soll $29x + 9y = 15$ in ganzen Zahlen aufgelöset werden.

Man verwandle $\frac{9}{29}$ in einen Kettenbruch, so sind die letzten zwei Näherungsbrüche davon $\frac{4}{13}$ und $\frac{9}{29}$, und zwar ist

$$4 . 29 - 9 . 13 = -1;$$

daher bilden $x = -4 . 15 = -60$, $y = 13 . 15 = 195$ eine Auflösung in ganzen Zahlen. Allein man bekommt noch unzählig viele Auflösungen in ganzen Zahlen, wenn man

$$x = -60 - 9u, \quad y = 195 + 29u$$

setzt.

$$\begin{array}{llllll} \text{Für } u = & -10, & -3, & 1, & 10, \ldots \\ \text{erhält man } x = & 30, & -33, & -69, & -150, \ldots \\ y = & -95, & 108, & 224, & 485, \ldots \end{array}$$

Es sollen noch folgende Gleichungen mittelst der Näherungsbrüche aufgelöset werden:

3) $36x - 115y = 643$;
4) $181x + 29y = 570$;
5) $420x - 919y = 1000$.

§. 148.

b. Auflösung einer unbestimmten Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten.

Um eine unbestimmte Gleichung mit drei oder mehreren Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, wendet man dasselbe Verfahren an, welches in §. 146 für zwei Unbekannte abgeleitet wurde; man kommt auch hier zuletzt immer auf eine Gleichung, in welcher die eine Unbekannte 1 zum Koeffizienten hat, und bekommt dann durch gehörige Substituzion die allgemeinen Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung, in denen jedoch nicht, wie vorhin, eine einzige willkürliche Größe erscheint; die Anzahl solcher willkürlichen Größen ist vielmehr immer um 1 kleiner als die Zahl der Unbekannten.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $4x + 6y + 11z = 106$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man erhält

$$x = \frac{106 - 6y - 11z}{4} = 26 - y - 2z + \frac{2 - 2y - 3z}{4}$$
$$= 26 - y - 2z + u_1.$$

Die Gleichung $\frac{2-2y-3z}{4}=u_1$ gibt

$$y=\frac{2-3z-4u_1}{2}=1-z-2u_1-\frac{z}{2}=1-z-2u_1-u_2;$$

$$\frac{z}{2}=u_2 \text{ gibt } z=2u_2.$$

Man hat daher

$$z = 2u_2$$
$$y = 1-2u_1-3u_2$$
$$x = 25+3u_1-u_2.$$

Setzt man nun für u_1 und u_2 beliebige ganze Zahlen, so erhält man für x, y, z ganze Zahlen.

Für $u_1 =$	1,	2,	3, ...
und $u_2 =$	-1,	0,	1, ...
wird $x =$	29,	31,	33, ...
$y =$	2,	-3,	-8, ...
$z =$	-2,	0,	2, ...

2) Man suche eben so die Auflösung in ganzen Zahlen für die Gleichung $4x-18y+27z=100$.

2. Auflösung in positiven Zahlen.

§. 149.

Es ist von selbst klar, daß eine Gleichung

$$ax+by+cz+\ldots=p,$$

in welcher die Unbekannten lauter positive Koeffizienten a, b, c, ... haben, während p negativ ist, eine Auflösung in positiven Zahlen nicht zulasse.

Um nun eine anders gebaute unbestimmte Gleichung in positiven Zahlen aufzulösen, suche man den Werth von einer Unbekannten aus der Gleichung. Soll dieser Werth positiv sein, so müssen die positiven Glieder, aus welchen er besteht, zusammen größer sein als die negativen; man darf daher für die übrigen Unbekannten nur solche positive Zahlen annehmen, für welche jener Bedingung Genüge geleistet wird.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $3x+5y=18$ in positiven Zahlen aufzulösen.

Man hat $x=\frac{18-5y}{3}$. Damit x positiv sei, muß $18>5y$, also $y<\frac{18}{5}$ sein; man darf also für y alle positive Zahlen setzen, welche kleiner als $\frac{18}{5}$ sind, um auch für x einen positiven Werth zu erhalten.

Für $y =$	$\frac{1}{5}$,	1,	2,	$\frac{17}{5}$,	4,	5, ...
erhält man $x =$	$\frac{17}{3}$,	$\frac{13}{3}$,	$\frac{8}{3}$,	$\frac{1}{3}$,	$-\frac{2}{3}$,	$-\frac{7}{3}$, ...

Man sieht also, daß x positiv wird, so lange $y < \frac{18}{5}$ bleibt, und negativ, sobald y die Größe $\frac{18}{5}$ übersteigt.

2) Man löse die Gleichung $7x = 5y - 11$ in positiven Zahlen auf.

Die Gleichung gibt $x = \frac{5y - 11}{7}$, worin $5y > 11$ oder $y > \frac{11}{5}$ sein muß, damit x positiv sein könne. Setzt man daher für y Werthe, welche $\frac{11}{5}$ übersteigen, so erhält man lauter positive Auflösungen.

3) Man löse die Gleichung $5x + 7y + 11z = 37$ in positiven Zahlen auf.

Aus der Gleichung folgt $x = \frac{37 - 7y - 11z}{5}$; es muß daher $37 > 7y + 11z$ sein, und daher auch $7y < 37$ und $11z < 37$, oder $y < \frac{37}{7}$ und $z < \frac{37}{11}$. Man darf also für y keinen größern Werth als $\frac{37}{7}$, und für z keinen größern Werth als $\frac{37}{11}$ annehmen. Nimmt man für y einen bestimmten zwischen 0 und $\frac{37}{7}$ liegenden Werth, so läßt sich die Grenze, welche z nicht übersteigen darf, noch genauer bestimmen; setzt man z. B. $y = 5$, so hat man die Bedingung

$$37 > 35 + 11z,$$

woraus $z < \frac{2}{11}$ folgt. Für $y = 5$ darf man also in diesem Falle für z nur Werthe zwischen 0 und $\frac{2}{11}$ annehmen.

3. Auflösung in ganzen und positiven Zahlen.

§. 150.

Man löse die Gleichung zuerst in ganzen Zahlen auf, und beschränke dann die dadurch erhaltenen noch unbestimmten Werthe für die Unbekannten so, daß sie den Bedingungen entsprechen, an welche die Auflösung in positiven Zahlen gebunden ist.

Beispiele.

1) Es soll die Gleichung $13x + 19y = 356$ in ganzen positiven Zahlen aufgelöset werden.

$$13x + 19y = 356 \text{ gibt } x = \frac{356 - 19y}{13} = 27 - y + \frac{5 - 6y}{13}$$
$$= 27 - y + u_1,$$
$$\frac{5 - 6y}{13} = u_1 \quad \text{„} \quad y = \frac{5 - 13u_1}{6} = -2u_1 + \frac{5 - u_1}{6}$$
$$= -2u_1 + u_2,$$
$$\frac{5 - u_1}{6} = u_2 \quad \text{„} \quad u_1 = 5 - 6u_2.$$

Die Gleichung, in ganzen Zahlen aufgelöst, gibt also

$$y = -10 + 13u_2, \quad x = 42 - 19u_2.$$

Damit nun y positiv sei, muß, wenn u_2 positiv angenommen wird, $13u_2 > 10$, also $u_2 > \frac{10}{13}$ sein; damit x positiv sei, muß $42 > 19u_2$, mithin $u_2 < \frac{42}{19}$ sein; diesen beiden Bedingungen aber entsprechen nur die zwei Werthe $u_2 = 1$ und $u_2 = 2$. Für jeden negativen Werth von u_2 wird auch y negativ. Die Gleichung läßt also nur zwei Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen zu;

für $u_2 = 1$ wird $x = 23$, $y = 3$,
„ $u_2 = 2$ „ $x = 4$, $y = 16$.

2) Man löse die Gleichung $13x + 17y = 77$ in ganzen und positiven Zahlen auf.

Man hat

aus $13x + 17y = 77$ den Werth $x = \frac{77 - 17y}{13} = 5 - y + \frac{12 - 4y}{13}$
$= 5 - y + u_1$,

„ $\frac{12 - 4y}{13} = u_2$ „ „ $y = \frac{12 - 13u_1}{4} = 3 - 3u_1 - \frac{u_1}{4}$
$= 3 - 3u_1 - u_2$,

„ $\frac{u_1}{4} = u_2$ „ „ $u_1 = 4u_2$;

daher $y = 3 - 13u_2$, $x = 2 + 17u_2$,

welche Ausdrücke alle Auflösungen in ganzen Zahlen enthalten. Da x für jeden positiven Werth von u_2 positiv ausfällt, so braucht man u_2 nur mit Rücksicht auf y zu beschränken; damit aber y positiv sei, muß $3 > 13u_2$, also $u_2 < \frac{3}{13}$ sein. Für negative Werthe von u_2 wird y stets, x aber nur dann positiv, wenn $2 > 17u_2$ oder $u_2 < \frac{2}{17}$ ist. u_2 kann also nur zwischen $-\frac{2}{17}$ und $\frac{3}{13}$ gewählt werden; und da man für u_2 nur ganze Zahlen setzen darf, so kann die einzige Substituzion $u_2 = 0$ für x und y ganze und positive Werthe geben; man erhält dafür $x = 2$ und $y = 3$.

3) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll als die Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7 und 11 sind.

Heißen x und y die Zähler der gesuchten Brüche, so hat man

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77} \text{ oder } 11x + 7y = 230.$$

Diese Gleichung, in ganzen Zahlen aufgelöst, gibt

$$x = 5 - 7u_3, \quad y = 25 + 11u_3.$$

Damit x und y positiv seien, muß für positive Werthe von u_3 $5 > 7u_3$ oder $u_3 < \frac{5}{7}$, für negative Werthe von u_3 aber $25 > 11u_3$ oder $u_3 < \frac{25}{11}$ sein; die Werthe von u_3 müssen also zwischen $-\frac{25}{11}$ und $\frac{5}{7}$ liegen, und können nur sein -2, -1, 0. Man hat daher

für $u_3 = -2 \ldots x = 19$, $y = 3$;
„ $u_3 = -1 \ldots x = 12$, $y = 14$;
„ $u_3 = 0 \ldots x = 5$, $y = 25$;

und die gesuchten Brüche sind $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$.

4) Man suche eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist, aber durch 29 dividirt 13 zum Reste gibt.

Es sei a die verlangte Zahl. Wegen der Bedingungen der Aufgabe ist $\frac{a}{7} = x$ und $\frac{a}{29} = y + \frac{13}{29}$, wo x und y zwei ganze positive Zahlen bedeuten; daraus folgt $a = 7x$, $a = 29y + 13$, und daher $7x = 29y + 13$, welche Gleichung in ganzen positiven Zahlen aufzulösen ist.

Die Auflösung in ganzen Zahlen liefert

$$x = 29u_1 - 23, \quad y = 7u_1 - 6.$$

Man sieht sogleich, daß x und y nur für positive Werthe von u_1 positiv sein können, und zwar für alle Werthe, welche größer als $\frac{23}{29}$ und größer als $\frac{6}{7}$ sind, somit für alle positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . .; die Aufgabe läßt also unendlich viele Auflösungen zu. So erhält man

$$\begin{array}{llll} \text{für } u_1 = 1 \ldots & x = 6, & y = 1, & a = 42; \\ \text{„ } u_1 = 2 \ldots & x = 35, & y = 8, & a = 245; \\ \text{„ } u_1 = 3 \ldots & x = 64, & y = 15, & a = 448; \end{array}$$

u. s. w.

5) Man soll 50 in zwei ganze positive Zahlen so zerlegen, daß die eine durch 7, die andere durch 13 theilbar ist.

Nach der Bedingung der Aufgabe muß der eine Theil die Form $7x$, der andere die Form $13y$ haben, und die Gleichung $7x + 13y = 50$ Statt finden, wo x und y ganze positive Zahlen bedeuten.

Die Auflösung in ganzen Zahlen gibt

$$x = 9 - 13u_2, \quad y = -1 + 7u_2.$$

Für positive u_2 muß $u_2 < \frac{9}{13}$ und $u_2 > \frac{1}{7}$ sein, welcher Bedingung keine ganze Zahl entspricht; für negative u_2 müßte y negativ sein. Die vorgelegte Aufgabe läßt also gar keine Auflösung zu.

6) Man soll die Gleichung $7x + 22y + 30z = 103$ in ganzen und positiven Zahlen auflösen.

Die Auflösung in ganzen Zahlen ist:

$$x = -1 + 2z + 22u_1, \quad y = 5 - 2z - 7u_1.$$

Für positive Werthe von u_1 muß, damit x positiv sei, $2z + 22u_1 > 1$, und damit y positiv sei, $5 > 2z + 7u_1$ sein, woraus $z > \frac{1 - 22u_1}{2}$ und $z < \frac{5 - 7u_1}{2}$ folgt. Da z positiv sein soll, so muß $5 > 7u_1$ oder $u_1 < \frac{5}{7}$. Man darf also für u_1 keinen positiven Werth setzen, der $\frac{5}{7}$ überschreitet.

Für negative Werthe von u_1 muß, damit x und y positiv seien, $2z > 1 + 22u_1$ und $5 + 7u_1 > 2z$, oder $z > \frac{1 + 22u_1}{2}$ und $z < \frac{5 + 7u_1}{2}$ sein. Aus diesen beiden Relazionen folgt offenbar, daß $\frac{5 + 7u_1}{2} > \frac{1 + 22u_1}{2}$, mithin $u_1 < \frac{4}{15}$ sein müsse. Man darf also für u_1 keinen negativen Werth setzen, der numerisch größer als $\frac{4}{15}$ wäre.

Die Größe u_1 muß demnach zwischen $-\frac{4}{15}$ und $\frac{5}{7}$ liegen; und da sie eine ganze Zahl sein muß, so kann man nur $u_1 = 0$ wählen. Für diese Annahme gehen die obigen Bedingungen über in $z > \frac{1}{2}$ und $z < \frac{5}{2}$; man kann also $z = 1$ und $z = 2$ setzen, wodurch sich für die vorgelegte Gleichung zwei Auflösungen in ganzen positiven Zahlen ergeben:

für $u_1 = 0$ und $z = 1$ wird $x = 1$, $y = 3$;
„ $u_1 = 0$ „ $z = 2$ „ $x = 3$, $y = 1$.

Man löse noch folgende Gleichungen in ganzen und positiven Zahlen auf:

7) $29x + 17y = 250$.
8) $25x = 36y - 7$.
9) $5x + 6y = 500$.
10) $5x + 6y + 20z = 187$.
11) $9x + 5y + 3z = 105$.
12) Es soll die Zahl 200 in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine durch 14, der andere durch 23 theilbar ist.
13) Man suche zwei um 10 verschiedene Zahlen, deren größere durch 21, und die kleinere durch 34 theilbar ist.
14) Welche Zahlen geben durch 13 dividirt 1, durch 24 dividirt 8 zum Reste?
15) Man zerlege den Bruch $\frac{101}{110}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 5 und 22 sind; welches sind die Zähler?
16) Ein Schüler erhielt 10 Groschen, wenn er seine Aufgabe fehlerfrei löste, hatte aber 7 Groschen zu bezahlen, wenn er darin Fehler machte. Am Ende hatte er 5 Groschen. Wie viel Aufgaben hat er gemacht?
17) Die Zahl 50 ist in drei Theile zu zerlegen, die nach der Ordnung durch 5, 8, 7 theilbar sind.
18) Welche Zahlen geben durch 11, 19, 29 dividirt folgeweise die Reste 5, 12, 4?
19) Man zerlege $\frac{121201}{4400}$ in drei Brüche, deren Nenner 11, 16, 25 sind?
20) 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder haben gemeinschaftlich 30 fl. ausgegeben. Wenn nun die Ausgabe eines Mannes 5 fl., einer Frau 1 fl., und eines Kindes $\frac{1}{4}$ fl. beträgt; wie viel waren Männer, wie viel Frauen, und wie viel Kinder?

IV. Quadratische Gleichungen.

1. Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 151.

Die quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten werden in reine und unreine unterschieden. Eine reine quadratische Gleichung ist diejenige, in welcher bloß die zweite Potenz der Unbekannten vorkommt; eine unreine oder vermischte hingegen diejenige, welche nebst dem Quadrate der Unbekannten auch die erste Potenz derselben enthält. So sind

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ 3y^2 + 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{reine,} \qquad \left.\begin{aligned} x^2 + 4x &= 7 \\ 2x^2 &= 5x - 9 \end{aligned}\right\} \text{unreine}$$

quadratische Gleichungen.

§. 152.

Die allgemeine Form einer geordneten reinen quadratischen Gleichung ist

$$x^2 = a.$$

Da man in einer solchen Gleichung das Quadrat der Unbekannten kennt, so braucht man, um die Unbekannte selbst zu erhalten, nur aus beiden Theilen die Quadratwurzel zu ziehen, und dabei zu bedenken, daß diese Wurzel positiv oder negativ sein könne.

Man hat demnach

$$x = \pm \sqrt{a}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat also zwei entgegengesetzte Wurzeln; ist a positiv, so sind dieselben reell; ist a negativ, so sind beide Wurzeln imaginär. Welcher von den zwei Werthen in besondern Aufgaben zu nehmen sei, muß man aus den Umständen der Aufgabe ersehen.

Beispiele.

1) $x^2 = 9$, Auflösung: $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$.

2) $x^2 + 5 = 0$, „ $x = \pm \sqrt{-5}$.

3) $2x^2 - 1 = 2 - 4x^2$, „ $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}$, „ $x = \pm 3$.

5) $\sqrt{33 + 2x - x^2} = x + 1$, „ $x = \pm 4$.

6) $\frac{ax^2 + b^2}{\sqrt{bx^2 + a^2}} = \sqrt{bx^2 + a^2}$, „ $x = \pm \sqrt{a + b}$.

Man löse noch folgende Gleichungen auf:

7) $3x^2 - 4093 = x^2 + 139$;

8) $(x + 7)(x - 7) = 51$;

9) $\frac{a}{1 + 2x} + \frac{a}{1 - 2x} = 2b$;

10) $2\sqrt{x + 2} = 1 + \sqrt{3x + 1}$.

Aus der stetigen Proporzion $a : x = x : b$ folgt $x^2 = ab$, daher $x = \sqrt{ab}$; d. h. die mittlere Proporzionale zwischen zwei Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte derselben.

§. 153.

Die allgemeine Form einer geordneten unreinen quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + ax = b.$$

Da der erste Theil der Gleichung zwei Glieder enthält, so ist er sicher nicht das Quadrat eines einfachen algebraischen Ausdruckes. Allein er kann auch nicht das Quadrat eines Binoms sein, da dasselbe aus drei Gliedern bestehen muß, nämlich aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkte beider Glieder, und aus dem Quadrate des zweiten Gliedes. Um also aus dem ersten Theile die Quadratwurzel ausziehen, und dadurch den Werth für die Unbekannte bestimmen zu können, handelt es sich zunächst darum, zu beiden Theilen der Gleichung eine solche Größe zu addiren, daß der erste Theil das vollständige Quadrat eines Binoms werde. Betrachtet man nun x^2 als das Quadrat des ersten Gliedes, somit x als das erste Glied des Binoms, ferner ax als doppeltes Produkt beider Glieder, also $\frac{a}{2} . x$ als das einfache Produkt beider Glieder, so muß, da x das erste Glied ist, $\frac{a}{2}$ das zweite Glied vorstellen; es fehlt also, damit der erste Theil der Gleichung das vollständige Quadrat des Binoms $x + \frac{a}{2}$ werde, nur noch das Quadrat des zweiten Gliedes, nämlich $\frac{a^2}{4}$. Addirt man daher zu beiden Theilen der gegebenen Gleichung $\frac{a^2}{4}$ dazu, so hat man

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b,$$

$$\text{oder } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b;$$

und, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

$$\text{folglich } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

In einer geordneten unreinen quadratischen Gleichung ist demnach die Unbekannte gleich dem halben Koeffizienten der ersten Potenz mit entgegengesetztem Zeichen, mehr oder weniger der Quadratwurzel aus dem Quadrate dieses halben Koeffizienten und aus der bekannten Größe.

Man sieht, daß auch jeder unreinen quadratischen Gleichung durch zwei Werthe der Unbekannten Genüge geleistet wird. Ist b positiv, so sind, da $\frac{a^2}{4}$ stets positiv sein muß, die beiden Wurzeln reell. Ist b negativ, so sind die zwei Wurzeln auch reell, so lange $\frac{a^2}{4} > b$ ist; für $\frac{a^2}{4} = b$ ist die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null, und die beiden Wurzeln sind einander gleich; für $\frac{a^2}{4} < b$ endlich fallen beide Wurzeln imaginär aus.

Beispiele.

1) $x^2 - 6x = 16.$
$x = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5;$
daher $x = 3 + 5 = 8$, oder $x = 3 - 5 = -2$.
Probe. $8^2 - 6 . 8 = 16,$
$(-2)^2 - 6 . -2 = 16.$

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$; geordnet $x^2 + 7x = 12$.
$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}}$$
$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$
$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3,$
$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$
Probe. $(-3)^2 + 7 . -3 + 12 = 0,$
$(-4)^2 + 7 . -4 + 12 = 0.$

3) $6x^2 + x = 2$; geordnet $x^2 + \frac{x}{6} = \frac{1}{3}$.
$$x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1+48}{144}}$$
$$= -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144}} = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12};$$
$$x = -\frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$
$$x = -\frac{1}{12} - \frac{7}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

4) $x^2 - 7x = 7.$
$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 7} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49+28}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2};$$
$$x = \frac{7+\sqrt{77}}{2}, \quad x = \frac{7-\sqrt{77}}{2}.$$

Probe. $\left(\frac{7+\sqrt{77}}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7+\sqrt{77}}{2} = 7,$

$\left(\frac{7-\sqrt{77}}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7-\sqrt{77}}{2} = 7.$

5) $x^2 - 2x + 2 = 0$; geordnet $x^2 - 2x = -2$.
$x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$;
$x = 1 + \sqrt{-1}$, $x = 1 - \sqrt{-1}$.

6) $(a-b)x^2 - bx = a$; geordnet $x^2 - \frac{bx}{a-b} = \frac{a}{a-b}$.

$$x = \frac{b}{2(a-b)} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4(a-b)^2} + \frac{a}{a-b}}$$

$$= \frac{b}{2(a+b)} \pm \sqrt{\frac{b^2 + 4a(a-b)}{4(a-b)^2}}$$

$$= \frac{b}{2(a-b)} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4ab + b^2}{4(a-b)^2}} = \frac{b}{2(a-b)} \pm \frac{2a-b}{2(a-b)};$$

$$x = \frac{b+2a-b}{2(a-b)} = \frac{a}{a-b}, \quad x = \frac{b-2a+b}{2(a-b)} = \frac{-2(a-b)}{2(a-b)} = -1.$$

7) $x^2 - 4x + 4 = 0$ gibt $x = 2$, $x = 2$.

8) $x^2 + 2x + 4 = 0$ „ $x = -1 + \sqrt{-3}$, $x = -1 - \sqrt{-3}$.

9) $x + \frac{1}{x-2} = 3$ „ $x = \frac{5+\sqrt{-3}}{2}$, $x = \frac{5-\sqrt{-3}}{2}$.

10) $\frac{6x+5}{2x-3} = 4x - 15$ „ $x = 5$, $x = 1$.

11) $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-4} = 5$ „ $x = \frac{-3+\sqrt{156}}{7}$, $x = \frac{-3-\sqrt{156}}{7}$.

12) $2x - 3\sqrt{x-1} = 4$ „ $x = 5$, $x = \frac{5}{4}$.

Es sollen noch folgende Gleichungen aufgelöset werden:

13) $15x^2 - 16x = 15$,

14) $\frac{5x^2}{6} + \frac{x}{2} = 9$,

15) $\frac{3x}{3x-22} - \frac{30}{x+1} = \frac{x}{x+11}$,

16) $\frac{5x+4}{2x+1} + \frac{3x-1}{3x+3} + 3 = 0$,

17) $\frac{2x-a}{4x+5a} = \frac{x+6a}{2x} + 7$,

18) $\frac{x^2}{ab} + 1 - \frac{2b}{a} = \frac{5x}{b} + \frac{x}{a} - \frac{6a}{b}$,

19) $x - 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 10$,

20) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$.

§. 154.

Es seien in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ die bekannten Zahlen a und b irrazional, z. B. $a = \sqrt{m}$ und $b = \sqrt{n}$, so daß die Gleichung die Form

$$x^2 + \sqrt{m} \cdot x = \sqrt{n}$$

annimmt, so bekommt man

$$x = -\frac{\sqrt{m}}{2} \pm \sqrt{\frac{m}{4} + \sqrt{n}}.$$

Z. B. die Gleichung $x^2 - 4x\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$ gibt

$$x = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}.$$

Bei allen derlei Gleichungen kommt man also auf einen Ausdruck von der Form $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$, so daß es nothwendig erscheint, denselben hier einer nähern Betrachtung zu unterziehen.

Um $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$ zu bestimmen, d. i. um aus dem irrazionalen Binom $p \pm \sqrt{q}$ die Quadratwurzel auszuziehen, nehmen wir an, daß $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ die gesuchte Quadratwurzel sei; die Aufgabe wird gelöst sein, sobald wir für x und y solche Werthe aufzufinden im Stande sind, welche der Gleichung

$$\sqrt{p \pm \sqrt{q}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

Genüge leisten. Zur Ausmittlung dieser Werthe von x und y erheben wir diese letzte Gleichung auf's Quadrat; wir bekommen

$$p \pm \sqrt{q} = x + y \pm 2\sqrt{xy}.$$

Soll diese Gleichung bestehen können, so müssen darin nothwendig die razionalen Glieder für sich gleich sein, und eben so die irrazionalen; es muß also

$$x + y = p,$$
$$2\sqrt{xy} = \sqrt{q}$$

sein.

Erhebt man diese beiden Gleichungen zum Quadrat, so erhält man:

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2,$$
$$4xy = q;$$

und wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt,

$$x^2 - 2xy + y^2 = p^2 - q,$$

oder

$$(x - y)^2 = p^2 - q,$$

daher

$$x - y = \sqrt{p^2 - q}.$$

Man hat also $x + y = p$ und $x - y = \sqrt{p^2 - q}$. Durch Addizion und Subtrakzion dieser beiden Gleichungen findet man

$$2x = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad 2y = p - \sqrt{p^2 - q},$$

daher

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2}, \quad y = \frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2},$$

und somit

$$\sqrt{p \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2}}.$$

Ist nun $p^2 - q$ ein vollständiges Quadrat, z. B. $p^2 - q = r^2$, also $\sqrt{p^2 - q} = r$, so hat man

$$\sqrt{p \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-r}{2}},$$

und es läßt sich in diesem Falle aus $p \pm \sqrt{q}$ die Quadratwurzel ausziehen; erscheint aber $p^2 - q$ nicht als ein vollständiges Quadrat, so ist es zweckmäßiger, den einfachern ursprünglichen Ausdruck $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$ beizubehalten.

Aus der Entwicklung der Formel

$$\sqrt{p \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-r}{2}}$$

folgt, daß sie nur dann anwendbar sei, wenn p positiv und größer als $\sqrt{q}$ ist. Denn sind u und v irgend zwei Zahlen, so muß $(u - v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv$ stets positiv, daher $u^2 + v^2 > 2uv$ sein, d. h. die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist immer größer als ihr doppeltes Produkt. Nun ist nach der obigen Entwicklung $p = x + y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2$, $\sqrt{q} = 2\sqrt{xy}$; es muß somit p als die Summe der Quadrate zweier Zahlen gewiß positiv und zugleich größer als deren doppeltes Produkt $\sqrt{q}$ sein.

Beispiele.

$$1)\ \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9-8}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9-8}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}}.$$

$$2)\ \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4-3}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$3)\ \sqrt{6 - \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36-11}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36-11}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$4)\ \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Wenn in dem Binom $p \pm \sqrt{q}$ beide Glieder einen gemeinschaftlichen irrazionalen Faktor haben, so wird derselbe vor dem Gebrauche der Formel herausgehoben.

$$5)\ \sqrt{3\sqrt{2} - \sqrt{10}} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left[\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5} - 1).$$

Ist $p < \sqrt{q}$, so fällt $\sqrt{p - \sqrt{q}}$ imaginär aus; allein die Formel

$$\sqrt{p + \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2}} + \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2}}$$

gibt unter dieser Voraussetzung auch für $\sqrt{p + \sqrt{q}}$ ein imaginäres Resultat, das doch reell sein muß; durch eine einfache Transformazion kann übrigens die Formel auch in diesem Falle anwendbar gemacht werden, man darf nur $\sqrt{q}$ als Faktor herausheben; es ist nämlich

$$\sqrt{p+\sqrt{q}} = \sqrt[4]{q}\sqrt{1+\sqrt{\frac{p^2}{q}}},$$

wo $\frac{p^2}{q} < 1$, also $1 > \sqrt{\frac{p^2}{q}}$ ist, und somit die allgemeine Auflösungsformel in Anwendung gebracht werden kann.

$$6)\ \sqrt{12+8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{192}\,.\,\sqrt{1+\sqrt{\tfrac{144}{192}}} = \sqrt[4]{192}\,.\,\sqrt{1+\sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$
$$= \sqrt[4]{48}\,.\,\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$= 2\sqrt[4]{3}\,.\left[\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}\right]$$
$$= 2\sqrt[4]{3}\,.\,(\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Auf dieselbe Art behandelt man auch den Ausdruck $p+\sqrt{q}$, wenn p negativ und kleiner als $\sqrt{q}$ ist, wo also $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ reell sein muß.

$$7)\ \sqrt{-5+3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{45}\,.\,\sqrt{1-\sqrt{\tfrac{25}{45}}} = \sqrt[4]{45}\,.\,\sqrt{1-\sqrt{\tfrac{5}{9}}}$$
$$= \sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}\,.\,(\sqrt{\tfrac{5}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Die für $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$ aufgestellte Formel ist also nur dann brauchbar, wenn das Binom $p \pm \sqrt{q}$ auf eine solche Form gebracht wurde, daß p positiv und größer als $\sqrt{q}$ ist, und selbst in diesem Falle ist sie nur dann mit Vortheil anwendbar, wenn $p^2 - q$ ein vollständiges Quadrat ist.

8) $\sqrt{37+20\sqrt{3}} = \ldots$ 9) $\sqrt{99-54\sqrt{2}} = \ldots$

10) $\sqrt{18+8\sqrt{2}} = \ldots$ 11) $\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \ldots$

12) $\sqrt{10a^4 + a^2b^2 + 6a^3\sqrt{a^2+b^2}} = \ldots$

Beziehungen zwischen den bekannten Größen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

§. 155.

Jede quadratische Gleichung kann unter die Form

$$x^2 + Ax + B = 0$$

gebracht werden; wir wollen eine auf diese Art dargestellte Gleichung eine **auf Null reduzirte** quadratische Gleichung, und den ersten Theil $x^2 + Ax + B$ das **Gleichungstrinom** der quadratischen Gleichung nennen.

Ist m eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, so heißt $x - m$ ein **Wurzelfaktor** derselben.

Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist durch ihren Wurzelfaktor theilbar.

Es ist nämlich

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m) \\
\quad x^2 - mx \\
- \quad + \\
\hline
\qquad (A + m)\,x + B \\
\qquad (A + m)\,x - Am - m^2 \\
\qquad - \qquad\quad + \qquad + \\
\hline
\qquad \text{Rest} = m^2 + Am + B.
\end{array}
$$

Da aber m eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, also anstatt x in das Polynom $x^2 + Ax + B$ substituirt, dieses auf Null reduzirt, so ist $m^2 + Am + B = 0$, und daher

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m),$$

was zu beweisen war.

Setzt man $A + m = - n$, folglich

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x - n,$$

so folgt

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n).$$

Daraus ergibt sich, daß der Ausdruck $x^2 + Ax + B$ nicht nur für $x = m$, sondern auch für $x = n$ in die Null übergehet; es ist daher nicht nur m, sondern auch n eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$.

Jede quadratische Gleichung hat also zwei Wurzeln, aber auch nur zwei Wurzeln; denn hätte $x^2 + Ax + B = 0$ noch eine dritte von m und n verschiedene Wurzel p, so müßte $(p - m)(p - n) = 0$ sein, was nicht möglich ist, da in diesem Produkte kein Faktor Null ist, ein Produkt aber, dessen Faktoren von Null verschieden sind nicht verschwinden kann.

Aus der Gleichung

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)\,x + mn$$

folgt:

1. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist gleich dem Produkte ihrer Wurzelfaktoren.
2. Der Koeffizient des zweiten Gliedes ist immer die Summe und das dritte oder bekannte Glied das Produkt aus den Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen.

Soll nun eine quadratische Gleichung gebildet werden, welche zwei gegebene Wurzeln, z. B. 3 und -4 hat, so nehme man diese entgegengesetzt, nämlich -3 und 4, bilde

ihre Summe $= - 3 + 4 = 1$,

und ihr Produkt $= - 3 \,.\, + 4 = - 12$;

so ist

$$x^2 + x - 12 = 0$$

die verlangte Gleichung.

Mittelst der hier entwickelten Relazionen läßt sich nun leicht aus den Zeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auf die Zeichen ihrer Glieder, und umgekehrt aus den Zeichen der letztern auf jene der erstern schließen.

a. Sind beide Wurzeln positiv, so hat man

$$x^2 + Ax + B = (x-m)(x-n) = x^2 - (m+n)x + mn,$$

sind beide Wurzeln negativ, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn.$$

Wenn also beide Wurzeln gleichbezeichnet sind, so ist das dritte Glied immer positiv, das zweite Glied aber negativ oder positiv, je nachdem die Wurzeln beide positiv oder beide negativ sind. Haben die Wurzeln entgegengesetzte Zeichen, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x-m)(x+n) = x^2 - (m-n)x - mn.$$

In diesem Falle ist also das dritte Glied immer negativ, das zweite dagegen negativ, wenn die positive Wurzel größer ist als die negative, im entgegengesetzten Falle positiv.

b. Wenn das dritte Glied positiv ist, so hat die Gleichung zwei gleichbezeichnete Wurzeln; das Zeichen des zweiten Gliedes gibt zu erkennen, ob sie positiv oder negativ sind, die Wurzeln haben nämlich mit dem zweiten Gliede das entgegengesetzte Zeichen. Ist das dritte Glied negativ, so haben die Wurzeln verschiedene Zeichen, und zwar ist die positive die größere oder die kleinere, je nachdem das zweite Glied negativ oder positiv ist.

2. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 156.

Zur Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten wendet man dieselben Methoden an, welche beim Auflösen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten aufgestellt wurden. Dabei geschieht es häufig, daß die Endgleichung, in welcher nur noch eine Unbekannte vorkommt, von einem höhern als dem zweiten Grade ist; die Auflösung liegt in diesem Falle außer dem Bereiche der vorliegenden Anleitung. Es sollen daher nur einige der einfacheren Beispiele hier durchgeführt werden.

Beispiele.

1) $\left.\begin{aligned} xy &= 50 \\ x + y &= 15 \end{aligned}\right\}$ nach der Komparazionsmethode.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{50}{y} \\ x &= 15 - y \end{aligned}\right\}, \text{ daher } \frac{50}{y} = 15 - y,$$

welche letztere Gleichung geordnet und aufgelöset

$$y = 10, \text{ oder } y = 5$$

gibt, daher

$$x = 15 - 10 = 5, \text{ oder } x = 15 - 5 = 10$$

ist.

2) $\left.\begin{array}{l} x - y = 7 \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{array}\right\}$ nach der Substituzionsmethode.

Wird der Ausdruck $x = y + 7$, welcher aus der ersten Gleichung folgt, in der zweiten substituirt, so hat man

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ oder geordnet } y^2 + \frac{14y}{3} = 23,$$

welcher Gleichung die Wurzeln $y = 3$ und $y = -\frac{23}{3}$ entsprechen.

Werden diese Werthe von y in dem Ausdrucke $x = y + 7$ substituirt, so erhält man $x = 10$ oder $x = -\frac{2}{3}$.

3) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 89 \\ x^2 - y^2 = 39 \end{array}\right\}$ nach der Eliminazionsmethode.

Durch Addizion und Subtrakzion dieser Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 = 128 \\ 2y^2 = 50 \end{array}\right\}, \text{ daher } \left.\begin{array}{l} x^2 = 64 \\ y^2 = 25 \end{array}\right\} \text{ und } \begin{array}{l} x = \pm 8, \\ y = \pm 5. \end{array}$$

4) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ \frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4 \end{array}\right|$, aufgelöset $\begin{array}{l} x = 1, \; x = 8; \\ y = 3, \; y = -4. \end{array}$

Man löse noch folgende Gleichungen auf:

5) $3x + 4y = 4, \; 4x^2 - 3y^2 = 52;$

6) $x + y = 2a, \; x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2;$

7) $x^2 + y^2 = 13, \; xy = 6;$

8) $x^2 - y^2 = 48, \; xy = 143.$

3. Aufgaben über die quadratischen Gleichungen.

a) Aufgaben mit Beifügung des Ansatzes.

§. 157.

1) Das Produkt aus dem dritten und vierten Theil einer Zahl beträgt 108; welches ist diese Zahl?

Es sei x die verlangte Zahl, so ist ihr dritter Theil $\frac{x}{3}$, und der vierte Theil $\frac{x}{4}$; man hat daher

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = 108, \text{ oder } \frac{x^2}{12} = 108,$$

woraus $x = \pm 36$ folgt.

Probe. $\frac{36}{3} \cdot \frac{36}{4} = 12 \cdot 9 = 108$,

$$\frac{-36}{3} \cdot \frac{-36}{4} = -12 \cdot -9 = 108.$$

2) Jemand kauft eine Waare um 130 fl., und zwar kostet ihn jeder Zentner um 3 fl. mehr als Zentner waren. Wie viel Zentner hat er gekauft?

Es sei die Anzahl der Zentner $= x$, so ist der Preis eines Zentners $x + 3$ Gulden, daher der ganze Waarenbetrag $x(x+3)$ Gulden, und es ist

$$x(x+3) = 130,$$

welche quadratische Gleichung $x = 10$ und $x = -13$ gibt.

Daß hier nur der erste Werth angenommen werden darf, ergibt sich aus der Natur der Aufgabe, indem die Zahl der gekauften Zentner positiv sein muß.

Probe. 10 Ztr. zu 13 fl. = 130 fl.

3) Im Jahre 1845 feierte Jemand seinen Geburtstag, und als er von seinen Freunden gefragt wurde, wie viele Jahre er an jenem Tage zurückgelegt habe, gab er zur Antwort: wenn man mein Alter vor 15 Jahren mit meinem Alter nach 15 Jahren multiplizirt, so erhält man mein Geburtsjahr. Wie alt war jener Herr?

Man setze das Alter $= x$ Jahren; vor 15 Jahren war jener Herr $x - 15$ Jahre alt, nach 15 Jahren wird er $x + 15$ Jahre alt sein; sein Geburtsjahr ist $1845 - x$. Man hat also

$$(x-15)(x+15) = 1845 - x,$$

woraus $x = 45$ und $x = -46$ folgt.

Da hier nur der positive Werth von x angenommen werden kann, so ist das gesuchte Alter 45 Jahre, und 1800 das Geburtsjahr.

Probe. $(45-15)(45+15) = 30 \cdot 60 = 1800$.

4) Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. Bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt in Folge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viele Kinder hinterließ jener Vater?

Es sei x die Anzahl der Kinder bei dem Absterben des Vaters, da kämen auf jedes Kind $\frac{14400}{x}$ fl.; nach dem Tode zweier Kinder blieben ihrer noch $x - 2$, und es war der Antheil eines jeden $\frac{14400}{x-2}$ fl.; man hat demnach die Gleichung

$$\frac{14400}{x-2} = \frac{14400}{x} + 1200,$$

aus welcher sich $x = 6$ und $x = -4$ ergibt, von welchen Werthen hier nur der erstere der Natur der Aufgabe entspricht.

5) Jemand kauft um 400 fl. Tuch; hätte er die Elle um 1 fl. billiger bekommen, so würde er für jenes Geld 20 Ellen mehr erhalten haben. Wie viel Ellen hat er gekauft?

Die Anzahl der Ellen sei x, folglich ist der Werth einer Elle $\frac{400}{x}$ fl.; im zweiten Falle wären $x + 20$ Ellen, somit der Werth einer Elle $\frac{400}{x+20}$ fl., aber dieser Werth wäre auch gleich $\left(\frac{400}{x} - 1\right)$ fl.; daher ist

$$\frac{400}{x+20} = \frac{400}{x} - 1,$$

woraus $x = -80$ und $x = +100$ folgt, von welchen Werthen der Natur der Aufgabe gemäß nur der positive angenommen werden kann.

§. 158.

6) Man suche zwei Zahlen, deren Quadrate 45 zur Summe und 27 zur Differenz geben.

Heißt x die erste, y die zweite Zahl, so hat man

$$x^2 + y^2 = 45 \text{ und } x^2 - y^2 = 27,$$

aus welchen Gleichungen $x = \pm 6$, $y = \pm 3$ folgt.

7) Ein Mittagessen, bei dem doppelt so viel Herren als Damen speisten, kostete 396 Groschen. Jeder Herr zahlte doppelt so viel Groschen, als Herren waren, und jede Dame dreimal so viel als Damen waren. Wie viel waren Herren, und wie viel Damen?

Es seien x Herren und y Damen; jeder Herr zahlte 2x, daher x Herren $2x^2$ Groschen; jede Dame zahlte 3y, daher y Damen $3y^2$ Groschen. Man hat also nach den Bedingungen der Aufgabe.

$$x = 2y \text{ und } 2x^2 + 3y^2 = 396,$$

woraus $x = \pm 12$ und $y = \pm 6$ folgt.

Es waren also 12 Herren und 6 Damen beim Mittagsmahle.

8) Man läßt einen Stein in einen Brunnen fallen, und zählt 3 Sekunden, bis man das Aufschlagen des Steines auf dem Grunde hört. Wie tief ist der Brunnen, wenn man annimmt, daß der Fallraum 15mal so viel Fuß beträgt, als das Quadrat der Zeitsekunden, durch welche das Fallen andauert, es anzeigt, und daß der Schall in jeder Sekunde 1050 Fuß zurücklegt?

Nimmt man an, daß der Stein in x Sekunden auf dem Grunde des Brunnens anlange, und daß der Schall y Sekunden brauche, um von dem Grunde zu unserem Ohre zu gelangen, so ist

der von dem Steine zurückgelegte Raum $15x^2$ Fuß,
und der von dem Schalle zurückgelegte Raum $1050y$ Fuß.

Da nun die Zeit des Falles und die Zeit der Schallbewegung zusammen 3 Sekunden betragen, da ferner der Stein denselben Raum zurücklegt, wie der Schall, so hat man die Gleichungen:

$$x + y = 3 \text{ und } 15x^2 = 1050y,$$

aus denen

$$x = 2{\cdot}8823 \text{ und } y = 0{\cdot}1177,$$

oder

$$x = -72{\cdot}8823 \text{ und } y = 75{\cdot}8823$$

folgt, von welchen Werthen nur die ersteren der Natur der Aufgabe entsprechen.

Der Schall braucht also, um von dem Grunde des Brunnens zu unserem Ohre zu gelangen, 0·1177 Sekunden, der Brunnen ist somit $1050 \times 0{\cdot}1177 = 123{\cdot}58$ Fuß tief.

b) Aufgaben zur Selbstübung im Ansatze.

§. 159.

1) Welche Zahl gibt mit ihrer Hälfte multiplizirt 162? — Die Zahl 18, oder — 18.

2) Wenn man zu einer Zahl 40 addirt, und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividirt, so ist der Quozient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl; wie heißt diese Zahl? — Die Zahl ist 8, oder — 5.

3) Man suche zwei Zahlen, deren Summe 30, und deren Produkt 189 ist. — Die Zahlen sind 21 und 9.

4) Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen. Eine Reihe nach der Länge enthält 8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viel Bäume stehen in jeder Reihe? — Eine Reihe nach der Länge hat 28, eine Reihe nach der Breite 20 Bäume.

5) Eine Summe von 240 fl. soll unter eine bestimmte Anzahl Personen vertheilt werden. Nun wurden 4 Personen ihres Antheils verlustig, und da kamen dann auf jede der übrigen Personen 3 fl. mehr. Für wie viel Personen war die Theilung ursprünglich bestimmt? — Für 20 Personen.

6) A und B verkauften zusammen 100 Ellen, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein. Hätte A so viele Ellen gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viele Ellen als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viel Ellen hat jeder verkauft? — A 40 Ellen, B 60 Ellen.

7) Die Zahl 18 soll in zwei Faktoren zerlegt werden, deren Quadrate 27 zur Differenz geben.

8) Man suche zwei Zahlen, bei denen die Summe der Quadrate um 84 größer ist als ihr Produkt, und die Differenz der Quadrate um 44 kleiner als ihr Produkt.

9) Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternommen, betragen 432 Gulden. Weil aber zwei Personen frei gehalten wurden, mußte jede der übrigen Personen um 3 Gulden mehr bezahlen. Wie viel Personen waren?

10) Man suche zwei Zahlen, deren Summe, Produkt und die Differenz der Quadrate gleich sind.

$x+y=xy=x^2-y^2=xy$

V. Auflösung einiger höhern Gleichungen.

1. Reine höhere Gleichungen.

§. 160.

Eine reine höhere Gleichung ist diejenige, in welcher die Unbekannte nur in einer einzigen Potenz, die aber höher als die zweite ist, vorkommt. Die allgemeine Form einer geordneten reinen höhern Gleichung ist

$$x^m = a.$$

Um eine solche Gleichung, welche auch eine zweigliedrige genannt wird, aufzulösen, darf man nur aus beiden Theilen derselben die mte Wurzel ausziehen; es ist nämlich

$$x = \sqrt[m]{a}.$$

Ist m eine gerade Zahl, so hat die Gleichung, wenn a positiv ist, zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln; ist aber a negativ, so erhält man keine reelle Wurzel.

Wenn dagegen der Exponent eine ungerade Zahl ist, so wird die Gleichung immer eine reelle Wurzel haben, welche mit a dasselbe Vorzeichen besitzt.

Beispiele.

1) $x^3 = 27$ gibt $x = \sqrt[3]{27} = 3.$

2) $x^3 = -27$ „ $x = \sqrt[3]{-27} = -3.$

3) $x^4 = 16$ „ $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2.$

4) $x^4 = -16$ „ $x = \pm\sqrt[4]{-16}.$

2. Höhere Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§. 161.

Höhere Gleichungen, welche nur zwei Potenzen der Unbekannten enthalten, und zwar so, daß der eine Potenzexponent das Doppelte des andern ist, lassen sich immer auf quadratische zurückführen; man darf nur für die niedrigere Potenz eine neue Unbekannte einführen.

Die allgemeine Form solcher Gleichungen ist

$$x^{2m} + ax^m = b.$$

Setzt man hier $x^m = y$, folglich $x^{2m} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daher

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Wird nun statt y wieder der Werth x^m restituirt, so ist

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

somit

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{4} + b}\right)}.$$

Ist m ungerade, so gibt jeder reelle Werth von y oder x^m auch einen reellen Werth von x. Ist dagegen m gerade, so geben nur die positiven Werthe von y reelle Werthe von x, und zwar jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte; die negativen Werthe von y geben imaginäre Wurzeln.

Beispiele.

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

Setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 - 13y + 36 = 0$, welche Gleichung

$$y = \tfrac{13}{2} \pm \sqrt{\tfrac{169}{4} - 36} = \tfrac{13}{2} \pm \tfrac{5}{2},$$

also $y = 9$ oder $y = 4$ gibt. Man hat daher

aus $x^2 = 9$ die Werthe $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$,

„ $x^2 = 4$ „ „ $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind also $3, -3, 2, -2$.

2) $3x^6 - 7x^3 = 6.$

Für $x^3 = y$ erhält man $3y^2 - 7y = 6$, und daraus

$$y = x^3 = 3 \text{ und } y = x^3 = -\tfrac{2}{3},$$

daher

$$x = \sqrt[3]{3} \text{ und } x = -\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}.$$

3) Man löse die nachstehende Gleichung auf:

$$(^{*}\frac{x^3 + 3}{17 - x^2} = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

*es soll wahrscheinlich heissen x^2 und nicht x^3

§. 162.

Auf dieselbe Art verfährt man auch mit Gleichungen von der Form

$$\sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} = b.$$

Setzt man nämlich $\sqrt[2m]{x} = y$, daher $\sqrt[m]{x} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daraus

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

daher, wenn man beide Theile zur 2mten Potenz erhebt,

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2m}.$$

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} = 2.$

Setzt man $\sqrt[6]{x} = y$, so hat man $y^2 - y = 2$, daher

$$y = \sqrt[6]{x} = 2 \text{ und } y = \sqrt[6]{x} = -1,$$

und somit

$$x = 64 \text{ und } x = 1.$$

2) $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

Setzt man $\sqrt[4]{x} = y$, so ist $y^2 - 8y = 9$, welche Gleichung

$$y = 9 \text{ und } y = -1$$

gibt; daher ist

$$x = y^4 = 6561 \text{ und } x = y^4 = 1.$$

Man suche die Werthe von x aus folgenden Gleichungen:

3) $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54$; $y = 9,\ y = -6,\ x = 27,\ x =$

4) $(x^2 - 6x) + \sqrt{x^2 - 6x} = 12.$

5) [illegible]

6) [illegible]

VI. Exponenzialgleichungen.

§. 163.

Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte als Potenz- oder Wurzelexponent vorkommt, wird eine Exponenzialgleichung genannt. Sie läßt sich nur mit Hilfe der Logarithmen auflösen.

1. Gleichungen von der Form $a^x = b$.

Da gleichen Größen auch gleiche Logarithmen entsprechen, so folgt aus $a^x = b$ auch $\log (a^x) = \log b$, oder $x \log a = \log b$, daher ist

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Um z. B. die Gleichung $5^x = 37$ aufzulösen, hat man $x \log 5 = \log 37$, und somit

$$x = \frac{\log 37}{\log 5} = \frac{1 \cdot 568201}{0 \cdot 698970} = 2 \cdot 272203.$$

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} = b$.

Nimmt man hier beiderseits die Logarithmen, so erhält man $\frac{1}{x} \log a = \log b$, $\log a = x \log b$, daher

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

So gibt die Gleichung $\sqrt[x]{2} = 10$ den Werth

$$x = \frac{\log 2}{\log 10} = 0 \cdot 30103.$$

3. Gleichungen von der Form $a^{2x} + pa^x = q$.

Setzt man $a^x = y$, so erhält man $y^2 + py = q$, also

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

Z. B. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ gibt für $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, woraus $y = 4^x = 4$ und $y = 4^x = -9$; somit

$$x = \frac{\log 4}{\log 4} = 1.$$

Der andere Werth $x = \frac{\log(-9)}{\log 4}$ ist imaginär, da der Logarithmus einer negativen Zahl imaginär ist.

4. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} + p\sqrt[2x]{a} = q$.

Für $\sqrt[2x]{a} = y$ wird $y^2 + py = q$, folglich

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log a}{2 \log \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

Z. B. aus $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ erhält man für $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, daher $y = 2$ oder $y = -\frac{4}{5}$, und

$$x = \frac{\log 64}{2 \log 2} = \frac{6 \log 2}{2 \log 2} = 3.$$

Der zweite Werth von x ist imaginär.

Es sollen noch folgende Exponenzial-Gleichungen aufgelöset werden:

1) $47^x = 255$; 2) $\sqrt[x]{10} = 2$;

3) $6.7^{2x} + 7^x = 301$; 4) $\sqrt[x+a]{b^{ax-1}} = c$;

5) $3.4^{2x^2-2x+4} - 5 \cdot 4^{x^2-x+2} = 28$;

6) $a^{(x-m)(x-n)} = 1$;

7) $x^{\log x} = 578$; $x = 45{\cdot}90971$

8) $a^x + b^y = m$ und $a^x - b^y = n$.

18/12. 1865 [illegible]

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Progressionen.

Allgemeine Begriffe.

§. 164.

Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe, auch Progression. Jede dieser Zahlen wird ein Glied der Reihe genannt. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle in der Reihe ein Glied einnimmt, heißt der Zeiger dieses Gliedes.

Am wichtigsten sind die arithmetischen und die geometrischen Progressionen.

Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, in welcher jedes Glied von dem nächstfolgenden abgezogen, denselben Unterschied gibt; dieser heißt die Differenz der Progression. So sind

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ \ldots$$

und $50,\ 47,\ 44,\ 41,\ 38,\ 35,\ 32,\ 29,\ \ldots$

arithmetische Progressionen; in der ersteren ist 3, in der zweiten — 3 die Differenz.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe, in welcher jedes Glied durch das nächstvorhergehende dividirt denselben Quozienten gibt, welcher darum der Quozient der Progression genannt wird. Die Reihen

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ 2187,\ \ldots$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{243},\ \tfrac{1}{729},\ \tfrac{1}{2187},\ \ldots$$

sind geometrische Progressionen; die erste hat 3, die zweite $\frac{1}{3}$ zum Quozienten.

Eine Progression heißt steigend oder fallend, je nachdem die nachfolgenden Glieder immer größer oder kleiner werden.

I. Arithmetische Progressionen.

§. 165.

1. Wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied a und die Differenz d gegeben sind, so lassen sich daraus beliebig viele Glieder der Progression bestimmen; man braucht nur zu jedem vorhergehenden Gliede die Differenz d zu addiren. Es ist nämlich

das 1. Glied $= a$,
„ 2. „ $= a + d$,
„ 3. „ $= a + 2d$,
„ 4. „ $= a + 3d$,
„ 5. „ $= a + 4d$,
u. s. w.

Man sieht, daß jedes Glied gleich ist dem ersten Gliede a mehr der Differenz d multiplizirt mit dem um 1 verkleinerten Zeiger des Gliedes. Heißt daher z das nte Glied der Progression, so ist

$$z = a + (n - 1)\, d.$$

Diese Formel heißt das allgemeine Glied der Progression, weil daraus, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, 4, ... setzt, alle Glieder der Progression abgeleitet werden können.

2. Man kann, wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied a und die Differenz d bekannt sind, auch die Summe jeder beliebigen Anzahl von Anfangsgliedern bestimmen, ohne daß man dieselben wirklich zu addiren brauchte.

Ist z das nte Glied der Reihe, so ist $z - d$ das nächstvorhergehende, $z - 2d$ das diesem vorangehende Glied u. s. f.

Drückt man nun die Summe der ersten n Glieder durch s aus, so ist

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (z - 2d) + (z - d) + z.$$

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist auch

$$s = z + (z - d) + (z - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a.$$

Durch Addizion dieser beiden Ausdrücke erhält man, da je zwei unter einander stehende Glieder a + z zur Summe geben:

$$2s = (a + z) + (a + z) + (a + z) + \ldots + (a + z) + (a + z) + (a + z).$$

Hier kommt a + z so oftmal vor, als Glieder angenommen wurden, also nmal; daher

$$2s = n\,(a + z)$$

und

$$s = \frac{n}{2}\,(a + z).$$

Diese Formel heißt das **summatorische Glied** der arithmetischen Progression, und gibt mit Worten ausgedrückt den Satz:

In einer arithmetischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Anfangsgliedern gleich der halben Anzahl dieser Glieder multiplizirt mit der Summe aus dem ersten und letzten Gliede.

Beispiele.

1) Man suche das allgemeine und summatorische Glied der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Hier ist $a = 1$, $d = 1$, daher

$$z = 1 + (n-1) \,.\, 1 = n,$$

und $s = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n^2 + n}{2}$.

Setzt man z. B. $n = 20$, so ist

$$z = 20 \text{ und } s = \frac{20^2 + 20}{2} = 210.$$

2) Es sei die Reihe der ungeraden Zahlen

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Wegen $a = 1$, $d = 2$ hat man

$$z = 1 + (n-1) \,.\, 2 = 2n - 1,$$

$$s = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

So ist z. B. das 15te Glied $= 2 \,.\, 15 - 1 = 29$, und die Summe von den ersten 15 Gliedern $= 15^2 = 225$.

3) Die Reihe der geraden Zahlen ist

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

dabei ist $a = 2$, $d = 2$; daher

$$z = 2 + (n-1) \,.\, 2 = 2n,$$

$$s = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n^2 + n.$$

4) Für die Reihe

$$100, 97, 94, 91, 88, 85, \ldots$$

ist $a = 100$, $d = -3$, somit

$$z = 100 + (n-1) \,.\, -3 = 103 - 3n,$$

$$s = \frac{n}{2}(100 + 103 - 3n) = \frac{203n - 3n^2}{2}.$$

5) Mit welcher Zahl fängt eine Progression an, deren Differenz 5, und das 27ste Glied 139 ist?

Hier ist $d = 5$, $n = 27$, $z = 139$; man hat daher

$$139 = a + 26 \,.\, 5, \text{ also } a = 9.$$

6) Wie groß ist die Differenz einer Progression, deren erstes Glied 109, und das 34ste Glied 10 ist?

Da $a = 109$, $n = 34$, $z = 10$ ist, so hat man

$$10 = 109 + 33 \, . \, d, \text{ woraus } d = -3 \text{ folgt.}$$

7) Eine Progression fängt mit 1 an, und steigt nach der Differenz 6; das wievielte Glied ist 115?

Man hat hier $a = 1$, $d = 6$, $z = 115$, daher

$$115 = 1 + (n - 1) \, . \, 6, \text{ und } n = 20.$$

8) Wie viele Glieder einer Progression muß man addiren, um 2808 zur Summe zu erhalten, wenn das erste Glied 2, und die Differenz 10 ist?

Es ist $a = 2$, $d = 10$, $s = 2808$; somit

$$z = 2 + (n - 1) \, . \, 10 = 10n - 8, \text{ und daher}$$

$$2808 = \frac{n}{2}(2 + 10n - 8), \text{ woraus } n = 24 \text{ folgt.}$$

9) Eine Summe Geldes wird unter mehrere Personen so vertheilt, daß der erste 80 fl., und jeder folgende um 4 fl. weniger bekommt; der letzte erhält 28 fl. Wie viel Personen sind betheilt worden, und wie groß ist die ganze Geldsumme?

Gegeben ist $a = 80$, $d = -4$, $z = 28$; zu suchen ist die Anzahl der Personen n, und die Geldsumme s. Man hat

$$28 = 80 + (n - 1) \, . \, -4, \text{ daher } n = 14;$$
$$s = \tfrac{14}{2}(80 + 28) = 756.$$

10) Ein frei fallender Körper durchläuft in der ersten Sekunde 15 Fuß, und in jeder folgenden Sekunde um 30 Fuß mehr; wie tief fällt der Körper in 25 Sekunden, und wie groß ist der Fallraum der letzten Sekunde?

Hier ist $a = 15$, $d = 30$, $n = 25$; daher

$$z = 15 + 24 \, . \, 30 = 735' \text{ Fallraum der letzten Sekunde,}$$
$$s = \tfrac{25}{2}(15 + 735) = 9375' \text{ ganzer Fallraum.}$$

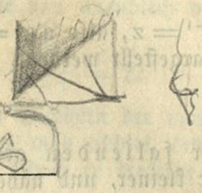
11) Wenn ein nach dem eben angeführten Gesetze von der Spitze eines Thurmes auf dessen Basis herabfallender Körper in der letzten Sekunde 165 Fuß zurückgelegt hat; wie hoch ist der Thurm? $n = 6''$ $s = 540'$

12) Eine unverzinsliche Schuld wird in 6 Jahreszahlungen getilgt. Im ersten Jahre bezahlt man 600 fl., in jedem folgenden Jahre aber um eine bestimmte Summe mehr; für das sechste Jahr beträgt die Zahlung 850 fl. Wie groß ist die ganze Schuld? $s = 4350$

Man bestimme im Allgemeinen

13) a und d, wenn n, z, s;
14) a und n, wenn d, z, s;
15) a und z, wenn d, n, s;
16) a und s, wenn d, n, z;
17) d und n, wenn a, z, s;
18) d und z, wenn a, n, s;
19) d und s, wenn a, n, z;

20) n und z, wenn a, d, s;
21) n und s, wenn a, d, z;
22) z und s, wenn a, d, n



gegeben sind.

II. Geometrische Progressionen.

§. 166.

1. Wenn das erste Glied a und der Quozient q einer geometrischen Progression gegeben sind, so braucht man nur das erste und jedes folgende Glied mit q zu multipliziren, um nach und nach beliebig viele Glieder der Progression zu erhalten. Es ist nämlich

das 1. Glied $= a$,
„ 2. „ $= aq$,
„ 3. „ $= aq^2$,
„ 4. „ $= aq^3$,
„ 5. „ $= aq^4$,
u. s. w.

Es fällt sogleich in die Augen, daß jedes Glied der geometrischen Progression gleich ist dem ersten Gliede a multiplizirt mit dem Quozienten q erhoben zu einer Potenz, deren Exponent um 1 kleiner ist als der Zeiger des Gliedes. Nennt man daher das nte Glied z, so ist

$$z = aq^{n-1}.$$

Aus diesem allgemeinen Gliede läßt sich jedes beliebige Glied der geometrischen Progression ganz unabhängig von den vorhergehenden Gliedern entwickeln.

2. Aus dem ersten Gliede a und dem Quozienten q kann man auch die Summe jeder beliebigen Anzahl von Anfangsgliedern der geometrischen Progression bestimmen, ohne daß man dieselben wirklich addiren müßte.

Heißt s die Summe der n ersten Glieder, so hat man

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Multiplizirt man beide Theile dieser Gleichung mit q, so erhält man

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Wird nun von dieser Gleichung die frühere abgezogen, so folgt

$$qs - s = aq^n - a,$$

daher

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

als Summenformel für die geometrische Progression.

Da $aq^{n-1} = z$, also $aq^n = qz$ ist, so kann die frühere Formel auch so dargestellt werden:

$$s = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

In einer fallenden geometrischen Progression werden die Glieder immer kleiner, und nähern sich immer mehr der Null, ohne jedoch je zu verschwinden; je größer übrigens der Zeiger des Gliedes wird, desto kleiner ist der Fehler, den man begeht, wenn jenes Glied $= 0$ gesetzt wird. Die Summe der Glieder einer solchen Progression nähert sich ebenfalls um so mehr einer bestimmten Größe, je mehrere Glieder man nimmt; diese Größe wird die Summe von unendlich vielen Gliedern der Reihe, oder die Summe der Progression selbst genannt. Nimmt man n unendlich groß an, so kann $z = 0$ gesetzt werden, und es folgt zur Bestimmung der Summe von unendlich vielen Gliedern aus dem letzten für s entwickelten Ausdrucke die Formel

$$s = \frac{-a}{q-1}, \text{ oder } s = \frac{a}{1-q}.$$

Beispiele.

1) Man bestimme das allgemeine und das summatorische Glied der Progression

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$$

Hier ist $a = 1$ und $q = 3$, daher

$$z = 1 \,.\, 3^{n-1} = 3^{n-1},$$

$$s = \frac{1 \,.\, 3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

So ist z. B. das zehnte Glied $= 3^9 = 19683$, und die Summe von den ersten zehn Gliedern $= \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$. $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

2) Für die Reihe $2 - \frac{2}{2^n}$

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, \ldots$$

ist $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$; somit

$$z = 1 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$s = \frac{1 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

So ist z. B. das zwanzigste Glied dieser Reihe $= \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288}$, und die Summe von den ersten zwanzig Gliedern

$$= 2 - \frac{1}{524288} = 1{\cdot}999\,998 \ldots$$

Zur Bestimmung der Summe von unendlich vielen Gliedern hat man

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2 - 1} = 2.$$

Die Summe von unendlich vielen Gliedern der vorgelegten Reihe ist also 2, d. h. je mehrere Glieder man addirt, desto mehr nähert sich die Summe der Zahl 2, ohne jedoch je dieselbe zu erreichen.

3) Man verwandle den periodischen Dezimalbruch $0\cdot\dot{3}$ in einen gemeinen Bruch.

Es ist $0\cdot\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$

Wegen $a = \frac{3}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$ ist also die Summe von unendlich vielen Gliedern

$$s = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

also $0\cdot\dot{3} = \frac{1}{3}$.

4) Es soll der periodische Dezimalbruch $0\cdot57\dot{1}0\dot{2}$ in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Man hat

$$0\cdot57\dot{1}0\dot{2} = \frac{57}{10^2} + \frac{102}{10^5} + \frac{102}{10^8} + \frac{102}{10^{11}} + \cdots$$

daher $a = \frac{102}{10^5}$, $q = \frac{1}{10^3}$, und somit

$$s = \frac{\frac{102}{10^5}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{102}{10^5 - 10^2} = \frac{102}{99900},$$

und $0\cdot57\dot{1}0\dot{2} = \frac{57}{100} + \frac{102}{99900} = \frac{57045}{99900}$.

5) Wie groß ist der Quozient einer Progression, deren erstes Glied 2, und das 12te Glied 4096 ist.

Setzt man in der Formel $z = aq^{n-1}$ für z, a, n die Werthe 4096, 2, 12, so hat man

$$4096 = 2 . q^{11},$$

woraus $q^{11} = 2048$ und $q = \sqrt[11]{2048}$ folgt.

Wendet man für die Ausziehung der 11ten Wurzel die Logarithmen an, so folgt

$$\log q = \frac{\log 2048}{11} = \frac{3\cdot301133}{11} = 0\cdot30103 = \log 2,$$

daher $q = 2$.

6) Wie viele Glieder der geometrischen Progression

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$$

muß man addiren, um 3280 zur Summe zu erhalten?

Hier ist $a = 1$, $q = 3$, $s = 3280$, man hat also

$$3280 = \frac{1 . 3^n - 1}{3 - 1},$$

woraus $3^n = 6561$ folgt.

Nimmt man in der letzten Gleichung beiderseits die Logarithmen, so ist

$$n \log 3 = \log 6561, \text{ also } n = \frac{\log 6561}{\log 3} = \frac{3 \cdot 816970}{0 \cdot 477121} = 8.$$

7) Man bestimme die Summe von der Reihe

$$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^{n-1}} + \frac{1}{(1+p)^n}.$$

Hier ist $a = \frac{1}{1+p}$ und $q = \frac{1}{1+p}$, daher

$$s = \frac{\frac{1}{1+p}\left(\frac{1}{1+p}\right)^n - \frac{1}{1+p}}{\frac{1}{1+p} - 1} = \frac{1-(1+p)^n}{(1+p)^n - (1+p)^{n+1}}$$

$$= \frac{1-(1+p)^n}{[1-(1+p)]\,(1+p)^n} = \frac{1-(1+p)^n}{-p\,(1+p)^n} = \frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^n}.$$

8) Jemand setzt 6mal in die Lotterie; das erste Mal 4 Kreuzer, und jedes folgende Mal doppelt so viel, als für die frühere Ziehung. Das 6te Mal gewinnt er, und es wird ihm der letzte Einsatz 4800mal zurückgezahlt. Wie viel beträgt dieser Gewinn, und wie viel hat er zusammen eingesetzt?

Da $a = 4$, $q = 2$ und $n = 6$ ist, so folgt

$$z = 4 \,.\, 2^5 = 128.$$

Der letzte Einsatz ist daher 128 kr., und somit der Gewinn

$$128 \times 4800 = 61440 \text{ kr.} = 10240 \text{ fl.}$$

Für die Summe aller Einsätze hat man ferner

$$s = \frac{4\ \ 2^6 - 4}{2-1} = 252 \text{ kr.} = 4 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

9) Es legt Jemand im Monate Jänner einen Kreuzer zurück, in jedem folgenden Monate 3mal so viel als im vorhergehenden; wie viel hat er im ganzen Jahre zurückgelegt?

10) Eine Schuld von 13000 fl. soll in 4 Raten, deren jede 3mal so groß ist als die vorhergehende, zurückgezahlt werden; wie groß ist jede Terminzahlung?

11) In einem Fasse sind 100 Maß Wein. Man nimmt daraus 1 Maß, und gießt dafür 1 Maß Wasser hinein; aus diesem Gemische nimmt man wieder 1 Maß, und gießt eben so viel Wasser hinein. Wie oft kann man so verfahren, bis in dem Gemische nur noch 50 Maß Wein sind?

Man bestimme im Allgemeinen

12) a und q, wenn n, z, s;
13) a und n, wenn q, z, s;
14) a und z, wenn q, n, s;
15) a und s, wenn q, n, z;
16) q und n, wenn a, z, s;
17) q und z, wenn a, n, s;
18) q und s, wenn a, n, z;

19) n und z, wenn a, q, s;
20) n und s, wenn a, q, z;
21) z und s, wenn a, q, n
gegeben sind.

III. Anwendung der geometrischen Progressionen auf die Zinseszinsrechnungen.

§. 167.

Wenn man das Interesse eines Kapitals am Ende eines bestimmten Zeitraumes zum Kapitale schlägt, und dasselbe, wie das Kapital, wieder verzinset, so nennt man das aus dem Interesse selbst wieder hervorgehende Interesse **Zinseszins**. Wir wollen die hierauf bezüglichen Rechnungen auf folgende Aufgaben zurückführen.

1. Es sei ein Kapital von A fl. zu P Prozent angelegt, wie hoch wird das Kapital in n Jahren anwachsen, wenn man die Interessen am Ende eines jeden Jahres zum Kapitale schlägt und mit diesem verzinset?

100 fl. am Anfange des Jahres geben $100 + P$ fl. am Ende des Jahres
1 „ „ „ „ „ gibt $\frac{100 + P}{100}$
A „ „ „ „ „ geben $A\left(1 + \frac{P}{100}\right)$ „ „ „ „

Setzt man $\frac{P}{100} = p$, also $1 + \frac{P}{100} = 1 + p$, so folgt, daß man das Kapital am Anfange des Jahres nur mit $1 + p$ zu multipliziren braucht, um den Werth desselben am Ende des Jahres zu erhalten. Diesem gemäß hat man

A fl. am Anfange des 1. Jahres =
$= A(1 + p)$ fl. am Ende des 1. Jahres,
$A(1 + p)$ fl. am Anfange des 2. Jahres =
$= A(1 + p)(1 + p) = A(1 + p)^2$ fl. am Ende des 2. Jahres,
$A(1 + p)^2$ fl. am Anfange des 3. Jahres =
$= A(1 + p)^2(1 + p) = A(1 + p)^3$ fl. am Ende des 3. Jahres,
$A(1 + p)^3$ fl. am Anfange des 4. Jahres =
$= A(1 + p)^3(1 + p) = A(1 + p)^4$ fl. am Ende des 4. Jahres,
u. s. w.

Man sieht, daß die Werthe, zu denen das ursprüngliche Kapital A nach 1, 2, 3, 4, . . . Jahren anwächst, eine geometrische Progression bilden, deren erstes Glied $A(1 + p)$, und der Quozient $1 + p$ ist. Drückt man das nte Glied, d. i. den Werth des Kapitals nach n Jahren durch B aus, so ist

$$B = A\,(1 + p)^n,$$

woraus umgekehrt auch

$$A = \frac{B}{(1 + p)^n} \text{ folgt.}$$

Würde die Kapitalisirung halbjährig geschehen, so müßte man in dieser Formel Halbjahre statt der Jahre, und statt der Prozente die halben Prozente nehmen, also $2n$ statt n, und $\frac{p}{2}$ statt p setzen.

Man hätte dann

$$B = A\left(1 + \frac{p}{2}\right)^{2n}.$$

Nimmt man in der Gleichung $B = A\,(1 + p)^n$ beiderseits die Logarithmen, so erhält man

$$\log B = \log A + n \log (1 + p),$$

woraus sofort

$$\log A = \log B - n \log (1 + p),$$

$$\log (1 + p) = \frac{\log B - \log A}{n},$$

$$n = \frac{\log B - \log A}{\log (1 + p)} \text{ folgt.}$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist man im Stande, wenn von den Größen A, P, n, B drei gegeben sind, daraus die vierte zu bestimmen.

Beispiele.

1) Wie hoch wird ein Kapital von 2518 fl. in 12 Jahren zu 5 Proz. Zinseszins bei ganzjähriger Kapitalisirung anwachsen?

Hier ist $A = 2518$, $p = \frac{5}{100} = 0{\cdot}05$, $n = 12$; daher

$$\log B = \log 2518 + 12 \log 1{\cdot}05$$
$$\log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}021189$$
$$\left.\begin{array}{r} 12 \log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}254268 \\ \log 2518 = 3{\cdot}401056 \end{array}\right\}$$
$$\log B = 3{\cdot}655324 = \log 4521{\cdot}96,$$

also $B = 4521$ fl. 58 kr.

2) Wie viel werden 7324 fl. 12 kr. zu $4\frac{1}{2}$ Proz. Zinseszins bei ganzjähriger Kapitalisazion nach 20 Jahren werth sein?

Es ist $A = 7324{\cdot}2$, $p = 0{\cdot}045$, $n = 20$, somit

$$\log B = \log 7324{\cdot}2 + 20 \log 1{\cdot}045$$
$$\log 1{\cdot}045 = 0{\cdot}019116$$
$$\left.\begin{array}{r} 20 \log 1{\cdot}045 = 0{\cdot}382320 \\ \log 7324{\cdot}2 = 3{\cdot}864760 \end{array}\right\}$$
$$\log B = 4{\cdot}247080 = \log 17663{\cdot}6$$
$$B = 17663 \text{ fl. } 36 \text{ kr.}$$

3) Jemand legt am 1. Jänner 2000 fl. in die Wiener Sparkasse, welche zu 4 Prozent, und zwar halbjährig verzinset, ein. Nach 15 Jahren behebt er das Kapital sammt Zins und Zinseszins; wie groß ist diese Summe?

Da $A = 2000$, $\frac{p}{2} = 0{\cdot}02$, $2n = 30$ ist, so hat man

$$\log B = \log 2000 + 30 \log 1{\cdot}02$$

$$\log 1{\cdot}02 = 0{\cdot}008600$$

$$\left.\begin{aligned} 30 \log 1{\cdot}02 &= 0{\cdot}258000 \\ \log 2000 &= 3{\cdot}301030 \end{aligned}\right\}$$

$$\log B = 3{\cdot}559030 = \log 3622{\cdot}68$$

$$B = 3622 \text{ fl. } 41 \text{ kr.}$$

4) Für ein durch 9 Jahre zu $4\frac{1}{2}$ Proz. Zins von Zins angelegtes Kapital erhielt man 5234 fl.; wie groß war das ursprüngliche Kapital, wenn die Interessen ganzjährig zum Kapitale geschlagen wurden?

Hier ist $B = 5234$, $p = 0{\cdot}045$, $n = 9$; daher

$$\log A = \log 5234 - 9 \log 1{\cdot}045$$

$$\log 5234 = 3{\cdot}718834$$

$$\log 1{\cdot}045 = 0{\cdot}019116$$

$$9 \log 1{\cdot}045 = 0{\cdot}172044$$

$$\log A = 3{\cdot}546790 = \log 3522$$

$$A = 3522 \text{ fl.}$$

5) Ein Herr will bei einer Versorgungsanstalt seinem Diener nach 11 Jahren einen Bezug von 1000 fl. versichern. Welche Einlage muß er machen, wenn die Anstalt zu 4 Prozent ganzjährig verzinset?

Man hat $B = 1000$, $p = 0{\cdot}04$, $n = 11$; daher

$$\log A = \log 1000 - 11 \log 1{\cdot}04$$

$$\log 1000 = 3{\cdot}000000$$

$$\log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}017033$$

$$11 \log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}187363$$

$$\log A = 2{\cdot}812637 = \log 649{\cdot}58$$

$$A = 649 \text{ fl. } 35 \text{ kr.}$$

6) Ein Kapital von 7537 fl. 38 kr. wächst in 20 Jahren mittelst Zinseszinsen auf 20000 fl. an; zu wie viel Prozent Zins von Zins war dasselbe angelegt?

Da hier $A = 7537{\cdot}8$, $n = 20$, $B = 20000$ ist, so hat man

$$\log(1 + p) = \frac{\log 20000 - \log 7537{\cdot}8}{20} = \frac{4{\cdot}301030 - 3{\cdot}877245}{20}$$

$$= \frac{0{\cdot}423785}{20} = 0{\cdot}021189 = \log 1{\cdot}05;$$

$$\text{also } 1 + p = 1{\cdot}05.$$

Es ist daher $p = 0{\cdot}05$, und $P = 100p = 5$ Prozent.

7) In wie viel Jahren wird ein Kapital von A fl. bei ganzjähriger Kapitalisazion zu P Proz. Zinseszins mmal so groß, als es ursprünglich war?

Hier muß man $B = mA$ setzen, daher ist

$$n = \frac{\log mA - \log A}{\log(1+p)} = \frac{\log m}{\log(1+p)}.$$

8) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital zu 5 Proz. Zinseszins bei ganzjähriger Kapitalisazion?

Da $m = 2$ und $1 + p = 1{\cdot}05$ ist, so hat man

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}301030}{0{\cdot}021189} = 14{\cdot}21$$

Das Kapital verdoppelt sich also in 14·21 Jahren.

9) In wie viel Zeit wird ein Kapital zu 4% Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Kapitalisirung, auf das Doppelte, in welcher Zeit auf das Dreifache anwachsen?

10) Es sind vor 80 Jahren 3200 fl. angelegt worden, und während dieser Zeit sammt Zinsen auf 34050 fl. 50 kr. gestiegen. Zu wie viel % waren sie angelegt?

11) In wie viel Jahren wird die Bevölkerung einer Stadt doppelt so groß als sie gegenwärtig ist, wenn die Zunahme im Durchschnitte jährlich 2 Köpfe auf 100 beträgt?

12) Ein Sterbender setzt zum Neubau der Kirche seines Ortes ein Legat von 18000 fl. aus. Nach der Veranschlagung des Baues kostet derselbe 24738 fl.; man will daher, da das Kapital bei einer Bank Zins auf Zins zu 4% untergebracht werden kann, den Bau so lange verschieben, bis jenes auf die erforderliche Höhe gestiegen ist. Nach wie viel Jahren wird dieses der Fall sein?

13) An einer Schuld von 10000 fl. werden nach 3 Jahren 2500 fl., nach 6 Jahren 1000 fl. abbezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach 10 Jahren, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

§. 168.

2. Jemand legt durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres a fl. zu P Proz. Zinseszins an; wie hoch wird die Summe nach n Jahren anwachsen?

a fl. am Anf. des 1. Jahres	$= a(1+p)^n$	fl. am Ende des nten Jahres
a „ „ „ „ 2. „	$= a(1+p)^{n-1}$	„ „ „ „ „ „
a „ „ „ „ 3. „	$= a(1+p)^{n-2}$	„ „ „ „ „ „
. . . . . .	. . . .	. . . . . .
a „ „ „ „ (n—1)ten	$= a(1+p)^2$	„ „ „ „ „ „
a „ „ „ „ nten „	$= a(1+p)$	„ „ „ „ „ „

daher Endsumme $b = a(1+p) + a(1+p)^2 + \ldots$
$$+ a(1+p)^{n-2} + a(1+p)^{n-1} + a(1+p)^n,$$

oder

$$b = a[(1+p) + (1+p)^2 + \ldots (1+p)^{n-2} + (1+p)^{n-1} + (1+p)^n].$$

Der in den Klammern befindliche Ausdruck ist die Summe von n Gliedern einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $1+p$, und der Quozient ebenfalls $1+p$ ist; man hat daher

$$b = a \cdot \frac{(1+p)\,(1+p)^n - (1+p)}{p} = a \cdot \frac{1+p}{p}[(1+p)^n - 1].$$

Aus dieser Gleichung folgt auch umgekehrt

$$a = b \cdot \frac{p}{(1+p)\,[(1+p)^n - 1]}$$

welche Formel dazu dient, um aus der gegebenen Endsumme die Größe des am Anfange eines jeden Jahres anzulegenden Kapitals zu bestimmen.

Beispiele.

1) Jemand legt durch 10 Jahre zu Anfange eines jeden derselben 230 fl. zu 5 Proz. Zinseszins an, wie hoch wird das Kapital in jener Zeit anwachsen?

Hier ist $a = 230$, $n = 10$, $p = 0{\cdot}05$; es ist daher

$$(1+p)^n = (1{\cdot}05)^{10},$$

und

$$\log (1+p)^n = 10 \log 1{\cdot}05 = 10 \times 0{\cdot}021189 = 0{\cdot}211890$$
$$= \log 1{\cdot}62888,$$

also $(1+p)^n = 1{\cdot}62888$, somit

$$b = 230 \cdot \frac{1{\cdot}05}{0{\cdot}05} \cdot 0{\cdot}62888 = 3037{\cdot}49.$$

Das Endkapital ist demnach 3037 fl. 29 kr.

2) Ein Vater will seinem Sohne, wenn dieser das 24ste Jahr erreicht hat, eine Summe versichern. Er zahlt zu diesem Zwecke, von der Geburt des Sohnes angefangen bis zu jener Zeit, an eine Versorgungsanstalt am Anfange jedes Jahres 100 fl. Welchen Betrag wird die Anstalt an den Sohn auszuzahlen haben, wenn eine ganzjährige Kapitalisazion zu 4 Proz. Zinseszins angenommen wird?

Da $a = 100$, $n = 24$, $p = 0{\cdot}04$ ist, so findet man mittelst der Logarithmen $(1+p)^n = (1{\cdot}04)^{24} = 2{\cdot}56325$, daher

$$b = 100 \cdot \frac{1{\cdot}04}{0{\cdot}04} \cdot 1{\cdot}56325 = 4064{\cdot}44.$$

Der Sohn wird also 4064 fl. 26 kr. erhalten.

3) Jemand, der durch 12 Jahre am Anfange eines jeden Jahres dieselbe Geldsumme zu $4\frac{1}{2}$ Proz. Zinseszins angelegt hat, bezieht nach dieser Zeit 1939 fl. 11 kr. Wie groß war die jährlich angelegte Geldsumme?

Man hat $b = 1939{\cdot}183$, $n = 12$, $p = 0.045$, daher

$$(1+p)^n = (1{\cdot}045)^{12} = 1{\cdot}69587,$$

und

$$a = 1939{\cdot}183 \cdot \frac{0{\cdot}045}{1{\cdot}045 \cdot 0{\cdot}69587}.$$

Mit Hilfe der Logarithmen findet man

$$a = 120 \text{ fl.}$$

4) Jemand will einer Person nach 15 Jahren bei einer Versorgungsanstalt eine Summe von 3000 fl. versichern. Welche jährliche Einlage muß er bis zu jener Zeit an die Anstalt machen, die Kapitalisirung ganzjährig zu 4 Proz. gerechnet?

Hier ist $b = 3000$, $n = 15$, $p = 0{\cdot}04$, folglich

$$(1 + p)^n = (1.04)^{15} = 1{\cdot}80092,$$

und

$$a = 3000 \times \frac{0{\cdot}04}{1{\cdot}04 \,.\, 0{\cdot}80092} = 144{\cdot}06.$$

Die jährliche Einlage beträgt also 144 fl. 4 kr.

5) Es werden durch 20 Jahre am Anfange eines jeden Jahres 200 fl. angelegt; wie groß wird die Summe nach 20 Jahren bei 4% Zinseszins?

6) Ein zu $4\frac{1}{2}$% ausstehendes Kapital von 5000 fl. wird jährlich um 500 fl. vermehrt; wie hoch wird es in 8 Jahren anwachsen?

7) Es muß Jemand, sechs Jahre nach einander, jedes Jahr 285 fl. bezahlen; er bleibt sie aber bis zu Anfang des sechsten Jahres schuldig; wie viel beträgt nun zu dieser Zeit seine Schuld, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

§. 169.

3. **Durch n Jahre ist am Ende eines jeden Jahres ein Betrag von r fl. zu bezahlen oder zu empfangen; wie groß ist der Werth aller dieser Beträge beim Beginne jener Zeit, wenn man P Prozent Zinseszinsen anrechnet, und eine ganzjährige Kapitalisazion annimmt?**

Wird $\frac{P}{100} = p$, und der anfängliche Werth aller Beträge $= s$ gesetzt, so hat man

r fl. am Ende des 1. Jahres $= \frac{r}{1 + p}$ fl. am Anfange des 1. Jahres

r „ „ „ „ 2. „ $= \frac{r}{(1+p)^2}$ „ „ „ „ „ „

r „ „ „ „ 3. „ $= \frac{r}{(1+p)^3}$ „ „ „ „ „ „

. . . .

r „ „ „ „ (n — 1)ten $= \frac{r}{(1+p)^{n-1}}$ „ „ „ „ „ „

r „ „ „ „ nten $= \frac{r}{(1+p)^n}$ „ „ „ „ „ „

somit anfänglicher Werth

$$s = \frac{r}{1+p} + \frac{r}{(1+p)^2} + \frac{r}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{r}{(1+p)^{n-1}} + \frac{r}{(1+p)^n},$$

oder

$$s = r\left[\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^{n-1}} + \frac{1}{(1+p)^n}\right].$$

Die in den Klammern befindlichen Größen sind Glieder einer geometrischen Progression, und geben $\frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^n}$ zur Summe; daher ist

$$s = r\,.\,\frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^n},$$

woraus auch umgekehrt

$$r = s\,.\,\frac{p\,(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

folgt, welche letztere Formel dazu dient, um aus dem anfänglichen Werthe aller Jahresbeträge die Größe einer Jahreszahlung zu bestimmen.

Beispiele.

1) Jemand hat durch 8 Jahre am Schlusse jedes Jahres 380 fl. zu bezahlen, wie viel muß er, um sich dieser ganzen Verpflichtung zu entledigen, sogleich zahlen, wenn die Zinseszinsen bei ganzjähriger Kapitalisazion zu $4\frac{1}{2}$ Proz. gerechnet werden?

Es ist $r = 380$, $n = 8$, $p = 0{\cdot}045$; daher

$$(1+p)^n = (1{\cdot}045)^8 = 1{\cdot}42209, \text{ und somit ist}$$

$$s = 380\,.\,\frac{0{\cdot}42209}{0{\cdot}045 \times 1{\cdot}42209} = 2506{\cdot}39.$$

Die Gesammtzahlung beträgt demnach 2506 fl. 23 kr.

2) Jemand will durch 22 Jahre eine Jahresrente von 500 fl. beziehen; welches Antrittsgeld muß er an eine Versorgungsanstalt bezahlen, wenn man eine ganzjährige Kapitalisazion zu 5 Proz. annimmt?

Hier ist $r = 500$, $n = 22$, $p = 0{\cdot}05$; daher

$$(1+p)^n = (1{\cdot}05)^{22} = 2{\cdot}92522, \text{ und}$$

$$s = 500\,.\,\frac{1{\cdot}92522}{0{\cdot}05 \times 2{\cdot}92522} = 6581{\cdot}4$$

Das Antrittsgeld ist also 6581 fl. 24 kr.

3) Jemand will eine Schuld von 10000 fl., die zu 5 Proz. zu verzinsen ist, in 10 gleichen Jahresraten abtragen, wie groß wird eine Ratenzahlung sein?

Hier ist $s = 10000$, $n = 10$, $p = 0{\cdot}05$, somit

$$(1+p)^n = (1{\cdot}05)^{10} = 1{\cdot}62888, \text{ und}$$

$$r = 10000\,.\,\frac{0{\cdot}05 \times 1{\cdot}62888}{0{\cdot}62888} = 1295{\cdot}05.$$

Eine Jahreszahlung beträgt also 1295 fl. 3 kr.

4) Eine Person will sich durch eine Einlage von 8000 fl. in einer Versorgungsanstalt durch 13 Jahre eine jährliche Rente ver-

sichern; wie groß wird diese bei 4 Proz. ganzjähriger Kapitalisazion ausfallen?

Man hat $s = 8000$, $n = 13$, $p = 0{\cdot}04$; daher
$(1 + p)^n = (1{\cdot}04)^{13} = 1{\cdot}66506$, und

$$r = 8000 \times \frac{0{\cdot}04 \times 1{\cdot}66506}{0{\cdot}66506} = 801{\cdot}12$$

Die Jahresrente ist somit 801 fl. 7 kr.

5) Eine Schuld von 2 Millionen fl. soll bei $4\frac{1}{2}$ % Zinseszins in 20 Jahren abgetragen werden. Wie groß ist die jährliche Tilgungssumme?

6) Eine Stadt will in einer Bank ein Darlehen aufnehmen, mit der Verpflichtung, dasselbe durch eine am Ende jedes Jahres zahlbare Summe von 800 fl. binnen 25 Jahren zu decken. Welche Summe kann die Bank der Stadt bei 4 % Zinseszins vorstrecken?

7) Dem Vormunde eines Kindes von 5 Jahren wird eine Summe von 4000 fl. überwiesen, mit der Verpflichtung, das Kind bis zum 24sten Jahre zu erziehen. Welches ist der Betrag des nachschußweise zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn 5 % Zinsen berechnet werden?

8) Jemand erlegt 12000 fl. zu 4 %, und will dafür durch 24 Jahre eine jährliche Rente beziehen; wie groß wird dieselbe sein?

9) Es verkauft Jemand eine Jahresrente von 620 fl., die er noch durch 10 Jahre zu genießen hat; wie viel wird er dafür erhalten, wenn 4 % gerechnet werden?

10) Jemand hat eine Jahresrente von 800 fl. auf 30 Jahre zu beziehen; er möchte aber statt deren eine größere auf 20 Jahre haben; wie groß wird diese bei $4\frac{1}{2}$ % sein?

Vierter Abschnitt.

Die Kombinazionslehre.

Allgemeine Begriffe.

§. 170.

Gegebene Größen nach einem bestimmten Gesetze in Gruppen zusammenstellen, heißt dieselben kombiniren. Die einzelnen Größen werden Elemente, und die aus ihnen gebildeten Gruppen Komplexionen genannt.

Zur schriftlichen Darstellung der Kombinazionen ist es am zweckmäßigsten, die Elemente durch die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche Zeiger oder Indices heißen, zu bezeichnen. Diese Zeiger bestimmen die Rangordnung der Elemente, so daß jenes Element das höhere ist, welches einen größeren Zeiger hat. Von zwei Komplexionen heißt jene die höhere, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Komplexion 1342 ist höher als jene 1324. Die niedrigste Komplexion ist offenbar diejenige, worin kein höheres Element vor einem niedrigeren steht; und jene die höchste, worin das Gegentheil Statt findet. Um überhaupt von einer bestimmten Komplexion zu der nächst höhern überzugehen, muß man in ihr, von der Rechten gegen die Linke fortschreitend, das erste Element aufsuchen, anstatt dessen aus den folgenden Elementen ein höheres gesetzt werden kann; schreibt dann die vorangehenden Elemente in ungeänderter Ordnung hin, anstatt des bezeichneten Elementes das nächsthöhere aus den nachfolgenden, und läßt die übrigen Elemente nach ihrer Rangordnung folgen.

Werden die Elemente anstatt durch Zeiger, durch Buchstaben bezeichnet, so ist dasjenige Element als ein höheres zu betrachten, welches im Alphabete später vorkommt.

Die Kombinazionen scheiden sich ihrer Natur nach in zwei Arten: Versetzungen und Verbindungen.

Bei den Versetzungen kommen in jeder Komplexion alle gegebenen Elemente vor, aber immer in einer andern Ordnung.

Man nennt sie auch **Permutazionen**, und unterscheidet wieder Permutazionen **ohne** und **mit Wiederholungen**, je nachdem die gegebenen Elemente unter einander alle verschieden sind, oder darunter auch gleiche vorkommen.

Bei den **Verbindungen** faßt man die Verschiedenheit der Elemente ins Auge, welche in eine Komplexion aufgenommen werden; es wird nämlich verlangt, daß man aus gegebenen Elementen alle Verbindungen zu zwei, zu drei, zu vier, ... Elementen bilde, wobei übrigens auf die Stellung der Elemente keine Rücksicht genommen wird. Solche Verbindungen nennt man **Kombinazionen im engern Sinne des Wortes**, und zwar die Verbindungen zu zwei Elementen **Kombinazionen der zweiten Klasse** oder **Amben**, die Verbindungen zu drei Elementen **Kombinazionen der dritten Klasse** oder **Ternen**, jene zu vier Elementen **Kombinazionen der vierten Klasse** oder **Quaternen** u. s. w. Auch die Kombinazionen scheidet man in die **ohne** und die **mit Wiederholungen**, je nachdem in einer Komplexion ein Element nur einmal, oder auch öfters vorkommen darf.

Nimmt man bei den Verbindungen zu zwei, drei, vier, ... Elementen auch auf die Stellung derselben Rücksicht, so daß z. B. ab und ba als zwei verschiedene Verbindungen zu zwei anzusehen sind, d. h. verbindet man das Kombiniren mit dem Permutiren, so, heißt dieses Geschäft das **Variiren**. Wie die Kombinazionen, werden auch die Variazionen in **Variazionen der zweiten, dritten, ... Klasse**, ferner in solche **ohne** und **mit Wiederholungen** eingetheilt.

Bei jeder der drei angeführten Kombinazionsarten kommt einerseits die wirkliche **Bildung** der Komplexionen, andererseits die **Zahl** derselben in Betracht.

I. Permutazionen.

§. 171.

Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutazionen zu **bilden**, schreibe man zuerst die niedrigste Komplexion hin, gehe von dieser zu der nächst höhern über, von dieser wieder zur nächst höhern u. s. f., bis man zur höchsten kommt. Z. B.:

123	abcd	bacd	cabd	dabc
132	abdc	badc	cadb	dacb
213	acbd	bcad	cbad	dbac
231	acdb	bcda	cbda	dbca
312	adbc	bdac	cdab	dcab
321	adcb	bdca	cdba	dcba

abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
abbcb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
abcbb	bacbb	bbbac	bcbba	cbbab
acbbb		bbbca		cbbba
		bbcab		
		bbcba		

§. 172.

2. **Zahl aller möglichen Permutazionen ohne Wiederholungen.**

Ein Element a läßt auch nur eine einzige Stellung zu.

Bei zwei Elementen a und b sind schon zwei verschiedene Stellungen ab und ba möglich.

Von drei Elementen a, b, c kann jedes 2mal am ersten Platze stehen, während die beiden andern permutirt nachfolgen; 3 Elemente lassen daher $2 \times 3 = 6$ verschiedene Stellungen zu.

Heißt allgemein P_n die Anzahl aller möglichen Permutazionen von n verschiedenen Elementen, und es kommt noch ein Element dazu, so kann dasselbe in jeder der frühern Permutazionen den ersten, oder zweiten, bis zum $(n+1)$ten Platz einnehmen; man erhält also aus jeder frühern Permutazion $n+1$ neue Permutazionen. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen von $n+1$ Elementen ist demnach $(n+1)$mal so groß als P_n; also

$$P_{n+1} = P_n \times (n+1).$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$P_1 = 1,$$
$$P_2 = 1 \,.\, 2,$$
$$P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3,$$

daher

$$P_4 = P_3 \,.\, 4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$$
$$P_5 = P_4 \,.\, 5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$$

u. s. w., allgemein

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots (n-1) \,.\, n,$$

d. h. **die Permutazionszahl von mehreren verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkte aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente ausdrückt.**

Das Produkt $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (n-1) \,.\, n$ pflegt man durch das Symbol $n!$ auszudrücken; daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!,\ \ldots\ P_n = n!$$

§. 173.

3. **Zahl aller möglichen Permutazionen mit Wiederholungen.**

Wenn unter den gegebenen n Elementen p gleiche vorkommen, so behandle man diese einstweilen als verschiedene Elemente, wo dann die Anzahl der Permutazionen $n!$ ist. Denkt man sich nun diese Permutazionen so in Parthien gebracht, daß sich die Permutazionen einer Parthie bloß durch die gegenseitige Stellung der einstweilen als verschieden betrachteten p Elemente von einander unterscheiden, während die übrigen Elemente genau dieselbe Stelle in derselben Ordnung einnehmen; so enthält jede dieser Parthien offenbar so viele Permutazionen, als man ihrer aus p Elementen bilden kann, also $p!$ Permutazionen. Wenn man nun die einstweilen als verschieden betrachteten Elemente wieder als einander gleich annimmt, so gelten alle $p!$ Komplexionen einer Parthie nur für eine Permutazion; je $p!$ von den $n!$ Permutazionen gehen in eine einzige über, und man hat somit nur $\frac{n!}{p!}$ verschiedene Permutazionen.

Wenn sich unter den gegebenen n Elementen außer den p gleichen Elementen noch q andere gleiche Elemente befinden, so betrachte man diese q gleichen Elemente einstweilen als verschieden, wo sodann die Anzahl aller Permutazionen aus n Elementen, worunter p gleiche vorkommen, $\frac{n!}{p!}$ ist. Diese Permutazionen denke man sich nun in Parthien abgetheilt, wovon jede nur solche Komplexionen enthält, worin die einstweilen als verschieden betrachteten q Elemente eine andere gegenseitige Stellung einnehmen; so kommen in jeder dieser Parthien $q!$ Permutazionen vor. Betrachtet man nun die q Elemente wieder als gleich, so erhält man statt jeder Parthie nur eine Komplexion, von den $\frac{n!}{p!}$ Komplexionen reduziren sich also je $q!$ auf eine einzige; mithin ist $\frac{n!}{p!\,q!}$ die Anzahl der verschiedenen Permutazionen aus n Elementen, worunter p gleiche und q andere gleiche Elemente vorkommen.

Schließt man so fort, so ergibt sich leicht, daß die Anzahl der Permutazionen aus n Elementen, worunter p gleiche, q andere gleiche, r wieder andere gleiche . . . . Elemente vorkommen, durch $\frac{n!}{p!\,q!\,r!\,\ldots}$ ausgedrückt wird.

Beispiele.

1) Wie oft können 5 Tischgenossen ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen möglichen Ordnungen gesessen sind?

$$5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120\text{mal.}$$

2) Wie viel verschiedene Stellungen geben 3 weiße, eine blaue und 2 rothe Kugeln?

$$\frac{6!}{3!\,2!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2} = 60.$$

3) Wie viele verschiedene neunziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden?

4) Wie viele verschiedene fünfziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Zahl 59165 bilden?

II. Kombinazionen.

§. 174.

1. Um alle Amben ohne Wiederholungen, welche aus mehreren gegebenen Elementen gebildet werden können, zu erhalten, verbindet man jedes Element mit allen nachfolgenden Elementen. Sind einmal die Kombinazionen einer bestimmten Klasse gebildet so erhält man daraus die Kombinazionen der nächst höhern Klasse, wenn man jede frühere Komplexion mit allen Elementen verbindet, welche höher sind als die darin vorkommenden.

So erhält man aus den fünf Elementen a, b, c, d, e nachfolgende

Amben ohne Wiederh.	Ternen ohne Wiederh.
ab, ac, ad, ae;	abc, abd, abe; acd, ace; ade;
bc, bd, be;	bcd, bce; bde;
cd, ce;	cde.
de.	

Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen zu bilden, verbinde man jedes Element mit sich selbst, und mit allen nachfolgenden Elementen. Hat man einmal die Kombinazionen irgend einer Klasse mit Wiederholungen gebildet, so erhält man daraus alle Kombinazionen der nächst höhern Klasse, wenn man jede frühere Kombinazion zuerst mit dem höchsten darin vorkommenden Elemente, und dann noch mit allen übrigen höhern Elementen verbindet.

So geben die vier Elemente 1, 2, 3, 4 folgende

Amben mit Wiederh.	11, 12, 13, 14;
	22, 23, 24;
	33, 34;
	44;

Ternen mit Wiederh.	111, 112, 113, 114;	122, 123, 124;	133, 134;	144;
	222, 223, 224;	233, 234;	244;	
	333, 334;	344;		
	444.			

§. 175.

2. Zahl der Kombinazionen ohne Wiederholungen.

Hat man n Elemente, so wird man sicher alle Amben ohne Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit allen übrigen verbindet, nur mit sich selbst nicht; dadurch entstehen aus jedem der n Elemente n — 1 Amben, also im Ganzen n (n — 1) Amben. Allein unter diesen kommt jede Ambe 2mal vor; daher geben n Elemente nur $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Amben.

Denkt man sich überhaupt alle Kombinazionen der rten Klasse ohne Wiederholungen von n Elementen wirklich gebildet, und nennt C_n^r ihre Anzahl; so wird man gewiß alle Kombinazionen der (r+1)ten Klasse erhalten, wenn man jede frühere Kombinazion mit allen Elementen verbindet, nur mit denjenigen r nicht, welche darin schon vorkommen; jede der frühern C_n^r Kombinazionen wird auf diese Art mit n — r Elementen verbunden, und gibt somit n — r Kombinazionen der (r + 1)ten Klasse, so daß man ihrer im Ganzen $C_n^r \cdot (n-r)$ bekommt. Allein jede neue Kombinazion wird (r + 1)mal vorkommen, weil man immer je r andere Elemente davon mit dem (r + 1)ten verbinden kann; es wird somit nur $C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}$ verschiedene Kombinazionen der (r + 1)ten Klasse geben, oder man hat

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Nun haben wir bewiesen, daß

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

ist; daher

$$C_n^3 = C_n^2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$

$$C_n^4 = C_n^3 \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},$$

u. s. w. allgemein

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\ \ \ldots\ \ (r-1).r}$$

Den letzten Bruch, dessen arithmetischer Bau leicht zu überblicken ist, pflegen die Mathematiker durch das Symbol $\binom{n}{r}$, welches gelesen wird: n über r, auszudrücken. Es ist daher

$$C_n^2 = \binom{n}{2},\quad C_n^3 = \binom{n}{3},\ \ldots\ C_n^r = \binom{n}{r}.$$

§. 176.

3. Zahl der Kombinazionen mit Wiederholungen.

Sind n Elemente gegeben, so wird man gewiß alle Amben mit Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit sich selbst, und noch mit allen n Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, verbindet; jedes der n Elemente gibt auf diese Weise verbunden $n + 1$ Amben, alle n Elemente also $n(n + 1)$ Amben. Weil nun darunter jede Ambe 2mal vorkommt, so ist $\frac{n(n+1)}{2}$ die Anzahl aller verschiedenen Amben mit Wiederholungen.

Drückt man allgemein die Zahl aller Kombinazionen der rten Klasse mit Wiederholungen von n Elementen durch $C_n^{w,r}$ aus, und denkt sich diese Kombinazionen wirklich gebildet, so wird man daraus ganz sicher alle Kombinazionen der $(r + 1)$ten Klasse erhalten, wenn man jede frühere Kombinazion zuerst mit den r Elementen, welche darin vorkommen, und dann noch mit allen n Elementen verbindet; jede der $C_n^{w,r}$ frühern Kombinazionen gibt dadurch $n + r$ neue Kombinazionen, und man wird somit zusammen $C_n^{w,r}.(n + r)$ Kombinazionen der $(r + 1)$ten Klasse erhalten. Aber jede solche Kombinazion kommt $(r + 1)$mal vor, weil man immer je r andere Elemente davon mit dem $(r + 1)$ten verbinden kann; um daher die Anzahl aller verschiedenen Kombinazionen der $(r + 1)$ten Klasse zu finden, muß man die frühere Zahl $C_n^{w,r}.(n + r)$ noch durch $r + 1$ dividiren; es ist daher

$$C_n^{w,r+1} = C_n^{w,r} \cdot \frac{n+r}{r+1}.$$

Nun ist, wie wir früher gezeigt haben,

$$C_n^{w,2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

daher

$$C_n^{w,3} = C_n^{w,2} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$C_n^{w,4} = C_n^{w,3} \cdot \frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w., allgemein

$$C_n^{w,r} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-2)(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r}.$$

Wenn man in diesem Bruche die Faktoren des Zählers in umgekehrter Ordnung schreibt, wodurch der Bruch die Form

$$\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\,\ldots\,(n+2)\,(n+1)\,.\,n}{1\quad.\quad2\quad\ldots\,(r-2)\,(r-1)\,.\,r}$$

annimmt, so kann man denselben nach der oben angeführten Bezeichnungsweise durch $\binom{n+r-1}{r}$ ausdrücken. Es ist daher

$$C_n^{w,2} = \binom{n+1}{2},\ C_n^{w,3} = \binom{n+2}{3},\ \ldots\ C_n^{w,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Beispiele.

1) Wie viel Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \binom{90}{2} = \frac{90.89}{1.2} = 4005,$

„ „ Ternen $= \binom{90}{3} = \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480,$

„ „ Quaternen $= \binom{90}{4} = \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190,$

„ „ Quinternen $= \binom{90}{5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268.$

2) Wie viel verschiedene Würfe sind mit zwei Würfeln möglich?

$$C_6^{w,2} = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21.$$

III. Variazionen.

§. 177.

1. Um die Variazionen der zweiten Klasse ohne Wiederholungen zu erhalten, verbindet man jedes Element mit allen übrigen Elementen, und zwar so, daß jenes Element in jeder Verbindung den ersten Platz einnimmt.

Sind überhaupt die Variazionen irgend einer Klasse ohne Wiederholungen gebildet, so erhält man die Variazionen der nächst höhern Klasse, wenn man jede frühere Variazion mit allen Elementen verbindet, welche darin nicht vorkommen, und dabei diese Variazion dem neu hinzukommenden Elemente immer voraussetzt.

So geben die Elemente 1, 2, 3, 4 folgende

Variazionen der 2. Klasse ohne Wiederh.

12, 13, 14;
21, 23, 24;
31, 32, 34;
41, 42, 43;

Variazionen der 3. Klasse ohne Wiederh.

123, 124; 132, 134; 142, 143;
213, 214; 231, 234; 241, 243;
312, 314; 321, 324; 341, 342;
412, 413; 421, 423; 431, 432.

6 6

Um die Variazionen der zweiten Klasse mit Wiederholungen zu erhalten, verbindet man jedes Element mit allen Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, und schreibt dabei jenes Element stets voran.

Hat man bereits die Variazionen irgend einer Klasse mit Wiederholungen dargestellt, so bildet man daraus die Variazionen der nächst höhern Klasse, wenn man jede frühere Variazion mit allen Elementen verbindet, und das neue Element stets an den letzten Platz setzt.

Aus den drei Elementen a, b, c, erhält man daher folgende

Variazionen der 2. Klasse mit Wiederh.

aa, ab, ac;
ba, bb, bc;
ca, cb, cc;

Variazionen der 3. Klasse mit Wiederh.

aaa, aab, aac; aba, abb, abc; aca, acb, acc;
baa, bab, bac; bba, bbb, bbc; bca, bcb, bcc;
caa, cab, cac; cba, cbb, cbc; cca, ccb, ccc.

§. 178.

2. Zahl der Variazionen ohne Wiederholungen.

Die Anzahl der Amben ohne Wiederholungen von n Elementen ist $\frac{n(n-1)}{2}$; aus jeder solchen Ambe entstehen durch Versetzung der beiden Elemente zwei Variazionen der zweiten Klasse, mithin ist die Anzahl aller Variazionen der zweiten Klasse ohne Wiederholungen

$$\frac{n(n-1)}{2} . 2 = n(n-1).$$

Allgemein geben n Elemente $\binom{n}{r}$ Kombinazionen der rten Klasse ohne Wiederholungen; aus jeder solchen Kombinazion lassen sich durch Permutazion der r Elemente r! Variazionen der rten Klasse ohne Wiederholungen bilden. Bezeichnet daher V_n^r die Zahl aller dieser Variazionen, so ist

$$V_n^r = \binom{n}{r} . r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1).$$

§. 179.

3. Zahl der Variazionen mit Wiederholungen.

Sind wieder n Elemente gegeben, so gibt jedes derselben n Variazionen der zweiten Klasse mit Wiederholungen, somit ist n^2 die Anzahl aller solchen Variazionen.

Heißt überhaupt $V_n^{w,r}$ die Anzahl aller Variazionen der rten Klasse mit Wiederholungen von n Elementen, so ist, da jede solche Variazion durch Verbindung mit allen n Elementen n Variazionen der $(r+1)$ten Klasse giebt,

$$V_n^{w,r+1} = V_n^{w,r} \,.\, n.$$

Da nun, wie früher gezeigt wurde,

$$V_n^{w,2} = n^2$$

ist, so hat man

$$V_n^{w,3} = V_n^{w,2} \,.\, n = n^3,$$

$$V_n^{w,4} = V_n^{w,3} \,.\, n = n^4,$$

u. s. w.

allgemein

$$V_n^{w,r} = n^r.$$

Beispiele.

1) Es sind 4 Fächer mit 7 verschiedenfarbigen Kugeln zu besetzen, so daß in jedes Fach eine Kugel zu stehen kommt; auf wie vielfache Art kann dieses geschehen?

Betrachtet man die 4 Fächer nach der Ordnung als die vier Plätze, an denen die 7 Kugeln als Elemente zu variren sind, so hat man hier die Anzahl der Variazionen der 4. Klasse ohne Wiederholungen von 7 Elementen zu bestimmen. Es ist demnach

$$V_7^4 = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 840$$

die Anzahl der verschiedenen Besetzungen.

2) Wie viele Würfe sind mit drei Würfeln möglich, von denen der eine weiß, der zweite gelb, der dritte roth ist, wenn man annimmt, daß Würfe von gleich viel Augen aber in verschiedenen Farben als verschieden zu betrachten sind?

$$V_6^{w,3} = 6^3 = 216 \text{ verschiedene Würfe.}$$

3) Wie viele verschiedene vierziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden?

IV. Anwendung der Kombinazionslehre zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes.

§. 180.

Erhebt man das Binom $x + a$ nach und nach zur zweiten dritten, vierten, . . . Potenz, so bekommt man

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$

u. s. w.

Daß in diesen und den höhern Potenzen von $x + a$ eine gewisse Gesetzmäßigkeit vorherrscht, ersieht man auf den ersten Blick. Um aber in dieselbe genauere Einsicht zu erhalten, wird es am zweckmäßigsten sein, das Produkt mehrerer Binome zu entwickeln, welche ein Glied x gemeinschaftlich haben, und sich nur in dem zweiten Gliede von einander unterscheiden; der gesetzmäßige Bau eines solchen Produktes wird von selbst in die Augen springen, und man darf dann nur in jenen Binomen auch die zweiten verschiedenen Theile gleich setzen, um aus der Gesetzmäßigkeit des Produktes auf das Gesetz zu schließen, welches sich in irgend einer Potenz eines Binoms kund gibt.

Wir wollen also das Produkt

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) \ . \ . \ .$$

untersuchen, indem wir zuerst die zwei ersten Faktoren mit einander multipliziren, ihr Produkt mit dem dritten Faktor u. s. f. Wir erhalten

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) =$$

$$= x^4 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ acd \\ bcd \end{matrix}\right\} x + abcd,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e) =$$

$$= x^5 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right\} x + abcde,$$

u. s. w.

Das in diesen Produkten herrschende Gesetz ist leicht zu ersehen. Zuerst erscheint das allen Binomen gemeinschaftliche Glied x in der sovielten Potenz, als Faktoren da sind; in jedem folgenden Gliede kommt die nächst niedrigere Potenz von x vor. Der Koeffizient des ersten Gliedes ist 1, jener des zweiten die Summe der zweiten Theile a, b, c, . . . in den Binomen, der Koeffizient des dritten Gliedes ist die Summe aller Amben dieser zweiten Theile, der Koeffizient des vierten Gliedes die Summe aller Ternen, u. s. w. Das letzte Glied ist das Produkt aller zweiten Theile der Binome.

Daß die hier angegebene Gesetzmäßigkeit auch bei einer größern Anzahl von Faktoren noch immer Statt finden werde, ergibt sich aus dem Verfahren des Multiplizirens.

Es seien nun n solche Binomialfaktoren, so wird man haben

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,....\,(x+p)\,(x+q) =$$
$$= x^n + S_1\,x^{n-1} + S_2\,x^{n-2} + S_3\,x^{n-3} + \ldots + S_{n-1}\,x + S_n,$$

wo S_1 die Summe aller zweiten Theile a, b, c, ... p, q vorstellt, S_2 die Summe aller Amben jener Größen, S_3 die Summe aller Ternen, . . . S_{n-1} die Summe aller Kombinazionen der (n—1) ten Klasse, und S_n das Produkt aller jener Größen bedeutet.

Nimmt man nun in diesen Binomialfaktoren auch die zweiten Theile einander gleich an, indem man $a = b = c = \ldots = p = q$ setzt, so wird dann

$$\begin{aligned}
S_1 &= a + a + a + a + \ldots\\
S_2 &= aa + aa + aa + \ldots\\
S_3 &= aaa + aaa + aaa + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{n-1} &= aaa\ldots(n-1)\text{mal} + aaa\ldots(n-1)\text{ mal} + \ldots\\
S_n &= aaa\ldots n\text{mal}.
\end{aligned}$$

Es enthält hier S_1 die Größe a so vielmal, als früher verschiedene zweite Theile a, b, c, ... p, q da waren, also nmal, mithin ist $S_1 = na = \binom{n}{1}\,a$.

S_2 enthält aa oder a^2 so oft, als früher Amben von den n Elementen a, b, c, ... p, q vorkamen, also $\frac{n(n-1)}{2}$ mal; somit

$$S_2 = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^2 = \binom{n}{2}\,a^2.$$

In S_3 kommt aaa oder a^3 so oft vor, als n Elemente Ternen geben, mithin $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ mal; also ist

$$S_3 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3 = \binom{n}{3}\,a^3$$

u. s. w.

S_{n-1} enthält a^{n-1} so vielmal, als Kombinazionen der $(n-1)$ ten Klasse von n Elementen möglich sind; man hat somit

$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \;.\; 2}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots(n-2)(n-1)}\,a^{n-1} = \binom{n}{n-1}a^{n-1}.$$

Das letzte Glied S_n stellt a^n vor.

Bedenkt man nun noch, daß unter der obigen Voraussetzung das aus n gleichen Faktoren bestehende Produkt

$$(x+a)\,(x+a)\,(x+a)\ldots(x+a)\,(x+a)$$

die nte Potenz von $x+a$ vorstellt, so erhält man durch Substituzion aus dem obigen Ausdrucke die Formel

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \binom{n}{3}a^3x^{n-3} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}a^{n-1}x + a^n.$$

Mittelst dieser Formel, welche unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes oder der Binomialformel bekannt ist, kann man jedes Binom unmittelbar zu jeder beliebigen Potenz erheben.

Das darin herrschende Gesetz bestehet in Folgendem:

1. Die Potenzen des ersten Theiles x erscheinen fallend, jene des zweites Theiles a steigend geordnet. Der Exponent von x im ersten Gliede ist gleich dem Potenzexponenten des Binoms, in jedem folgenden Gliede ist er um 1 kleiner, bis er im letzten Gliede 0 wird, da man sich nämlich zu a^n den Faktor $x^0 = 1$ hinzudenken kann. Die Exponenten von a nehmen umgekehrt von 0 bis n zu. Die Summe der Exponenten von x und a ist in jedem Gliede gleich n. Zugleich folgt aus dem Gesagten, daß die ganze Entwicklung ein Glied mehr habe, als der Potenzexponent n Einheiten enthält.

2. Der Koeffizient des ersten Gliedes ist 1; der Koeffizient des zweiten Gliedes ist gleich dem gegebenen Potenzexponenten n, jener des dritten ist die Anzahl aller Amben von n Elementen, des vierten die Anzahl der Ternen, ... überhaupt der Koeffizient des rten Gliedes die Anzahl aller Kombinazionen der $(r-1)$ ten Klasse von n Elementen.

3. Je zwei Glieder, deren eines vom Anfange so weit entfernt ist, als das andere vom Ende, haben gleiche Koeffizienten.

Heißt nämlich K_r der Koeffizient des rten Gliedes vom Anfange, so hat man

$$K_r = \binom{n}{r-1} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+3)\,(n-r+2)}{1\,.\,2\,.\,3\;\;\ldots\;\;(r-2)\,(r-1)}.$$

Nun ist

	das 1. Glied vom Ende das	$(n+1)$te	vom Anfange,
	„ 2. „ „ „ „	nte	„ „
	„ 3. „ „ „ „	$(n-1)$te	„ „
also	„ rte „ „ „ „	$(n-r+2)$	„ „

Heißt daher k_r das rte Glied vom Ende, so hat man

$$k_r = \binom{n}{n-r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(r+1)\,.\,r}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-r)(n-r+1)}.$$

Um nun die beiden Brüche K_r und k_r mit einander vergleichen zu können, bringt man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner, indem man Zähler und Nenner des erstern mit

$$r\,(r+1)\ldots(n-r)\,(n-r+1)$$

multiplizirt; dadurch erhält man

$$K_r = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+2)\,(n-r+1)\,(n-r)\ldots(r+1)\,.\,r}{1\,.\,2\ldots(r-1)\,.\,r\,.\,(r+1)\ldots(n-r)(n-r+1)}.$$

Es ist also wirklich

$$K_r = k_r.$$

Bei der Anwendung der Binomialformel braucht man also die Koeffizienten nur bis zum mittlern Gliede zu entwickeln, da sich dann die nämlichen Koeffizienten in umgekehrter Ordnung wiederholen. Man könnte darum die Binomialformel auch in folgender Form schreiben:

$$(x+a)^n = x^n + n a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} a^{n-2} x^2 + n a^{n-1} x + a^n.$$

4. Ist a negativ, so werden diejenigen Glieder, worin ungerade Potenzen von a vorkommen, negativ; im Uebrigen wird der Ausdruck nicht geändert. Es ist nämlich

$$(x-a)^n = x^n - n a x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} a^2 x^{n-2}$$
$$- \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^3 x^{n-3} + \ldots \pm a^n,$$

wo a^n das Zeichen + oder — hat, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Beispiele.

1) $(a+b)^6 =$
$= a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + b^6$
$= a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6.$

2) $(a-b)^5 =$
$= a^5 - \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 - \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 - b^5$
$= a^5 - 5a^4 b + 10 a^3 b^2 - 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 - b^5.$

3) $(3x-2y)^4 =$
$= (3x)^4 - \binom{4}{1}.(3x)^3.2y + \binom{4}{2}.(3x)^2.(2y)^2 - \binom{4}{3}.3x.(2y)^3 + (2y)^4$
$= 81 x^4 - 4.27x^3.2y + 6.9x^2.4y^2 - 4.3x.8y^3 + 16y^4$
$= 81 x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.$

4) $(x^2+2y)^4 = x^8 + 8x^6y + 24x^4y^2 + 32x^2y^3 + 16y^4.$

5) $(3m^2-2n^3)^5 = 243m^{10} - 810m^8n^3 + 1080m^6n^6$
$- 720m^4n^9 + 240m^2n^{12} - 32n^{15}.$

6) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{a^3b^2}{6} + \frac{a^2b^4}{6} - \frac{2ab^6}{27} + \frac{b^8}{81}.$

7) $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3c}{4d}\right)^3 = \frac{8a^3}{27b^3} + \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{9ac^2}{8bd^2} + \frac{27c^3}{64d^3}.$

8) $$\left[\frac{ax^2}{2by^2} - \frac{4b^2y}{a^2x}\right]^5 = \frac{a^5x^{10}}{32b^5y^{10}} - \frac{5a^2x^7}{4b^2y^7} + \frac{20bx^4}{ay^4} - \frac{160bx^4}{a^4y} + \frac{640b^7y^2}{a^7x^2} - \frac{1024b^{10}y^5}{a^{10}x^5}.$$

Man entwickle noch:

9) $(x-y)^{10}$; 10) $(5a+6b)^4$;

11) $(3a+4b)^7$; 12) $(2x^2-3y^2)^5$;

13) $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^5$; 14) $\left(\frac{4m}{3n}+\frac{9n}{4m}\right)^4$;

15) $\left(\frac{7a^2x}{3b^2}-\frac{2by^2}{ax}\right)^6$; 16) $\left(\frac{3ab^2}{4c^3y^2}-\frac{2c^3y}{3a^2b}\right)^5$.

§. 181.

Die Binomialformel ist bisher nur für ganze positive Exponenten erwiesen worden; es wurde nämlich vorausgesetzt, daß n die Anzahl der gleichen Faktoren bedeutet, unter welcher Annahme n nothwendig eine ganze positive Zahl sein muß.

Es läßt sich nun zeigen, daß der binomische Lehrsatz auch für negative und gebrochene Exponenten giltig ist.

Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots.$$

Untersuchen wir nun die Bedeutung dieser Reihe, die wir der Kürze halber durch R_n (Reihe n) ausdrücken wollen, auch für den Fall, wenn n keine ganze positive Zahl ist. Wir setzen also, was auch immer n bedeuten möge,

$$R_n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^2 + \ldots.$$

Denken wir uns eben so eine zweite Reihe, welche auf dieselbe Art von p abhängt, wie die frühere von n, wo p was immer für eine Zahl bedeutet; diese Reihe wird der frühern Bezeichnung zu Folge R_p heißen, und man hat

$$R_p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \ldots.$$

Multipliziren wir die beiden Reihen R_n und R_p mit einander, so wird auch das Produkt als ein nach x steigend geordnetes Polynom erscheinen. Dieses Produkt wird nach den Gesetzen der Multiplikazion auf einerlei Art gebildet, was immer für Werthe n und p haben mögen; man braucht also nur die Beschaffenheit des Produktes für den Fall zu kennen, wenn n und p ganze positive Zahlen bedeuten, weil dasselbe Bildungsgesetz auch in den übrigen Fällen Statt finden muß. Sind n und p ganze positive Zahlen, so kann man das Produkt der beiden Reihen auch ohne wirkliche Multiplikazion derselben finden; es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\begin{array}{l} R_n = (1+x)^n \\ R_p = (1+x)^p \\ \hline \text{daher } R_n \cdot R_p = (1+x)^{n+p}. \end{array}$$

Weil aber $n+p$ eine ganze Zahl vorstellt, so ist

$$(1+x)^{n+p} =$$

$$= 1 + \binom{n+p}{1} x + \binom{n+p}{2} x^2 + \binom{n+p}{3} x^3 + \ldots = R_{n+p},$$

somit

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}.$$

Dieser Ausdruck ist für ganze positive Werthe von n und p abgeleitet worden; nach dem oben Gesagten muß er aber auch gelten, wenn n und p was immer für andere Werthe haben, folglich muß er allgemein giltig sein.

Es seien nun R_q, R_r, R_s, ... ähnliche Reihen wie R_n und R_p, so hat man

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q = R_{n+p} \cdot R_q = R_{n+p+q},$$
$$R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r = R_{n+p+q} \cdot R_r = R_{n+p+q+r} \ldots;$$

allgemein

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r \cdot R_s \ldots = R_{n+p+q+r+s} + \ldots$$

Setzen wir nun $n = p = q = r = s \ldots$, so ist

$$R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \ldots = R_{n+n+n+n+n+\ldots},$$

oder, wenn die Anzahl solcher Faktoren k ist, wo k dann offenbar eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$(R_n)^k = R_{kn}.$$

Da n was immer für eine Zahl bedeuten kann, so setzen wir $n = \frac{h}{k}$, wo h irgend eine ganze positive Zahl vorstellt; wir erhalten.

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = R_h.$$

Nun wissen wir, daß für den Fall, wo h eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$R_h = (1+x)^h$$

ist, daher ist auch

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = (1+x)^h,$$

oder, wenn man beide Theile zur Potenz $\frac{1}{k}$ erhebt,

$$R_{\frac{h}{k}} = (1+x)^{\frac{h}{k}},$$

Nun ist vermöge der eingeführten Bezeichnung

$$R_{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots,$$

also auch

$$(1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots,$$

wo $\frac{h}{k}$ jeden positiven Bruch bedeuten kann.

Daraus folgt, daß die durch R_n ausgedrückte Reihe auch dann, wenn n einen positiven Bruch $\frac{h}{k}$ bedeutet, die Potenz $(1+x)^n$ vorstellt.

Um die Giltigkeit der binomischen Reihe für negative Exponenten zu zeigen, setzen wir in dem Ausdrucke

$$R_n \,.\, R_p = R_{n+p}$$

$p = -n$, so ist

$$R_n \,.\, R_{-n} = R_{n-n} = R_0 \,.$$

Aber

$$R_0 = 1 + \binom{0}{1} x + \binom{0}{2} x^2 + \ldots = 1,$$

daher

$$R_n \,.\, R_{-n} = 1 \text{ und } R_{-n} = \frac{1}{R_n}.$$

Bedeutet nun n eine positive ganze oder gebrochene Zahl, so ist bereits erwiesen worden, daß

$$R_n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots = (1+x)^n$$

ist, daher hat man

$$R_{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}.$$

Aber nach der obigen Bezeichnung ist

$$R_{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots,$$

daher

$$(1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots,$$

wo $-n$ jede beliebige negative ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann.

Es ist also für jeden Werth von n

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Da hier x jeden beliebigen Werth annehmen kann, so wollen wir $x = \frac{b}{a}$ setzen, wodurch wir erhalten

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots,$$

oder, weil $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \frac{(a+b)^n}{a^n}$, auch

$$\frac{(a+b)^n}{a^n} = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot + \ldots;$$

und, wenn man beiderseits mit a^n multiplizirt,

$$(a+b)^n =$$
$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots,$$

welche Gleichung für jeden Werth von n giltig ist.

Die Binomialformel gilt also nicht nur für ganze positive, sondern auch für gebrochene und negative Exponenten.

Ist der Exponent n eine ganze positive Zahl, so muß die Entwicklungsreihe mit dem $(n+1)$ten Gliede abbrechen, welches $\binom{n}{n} b^n$ ist, da der Koeffizient des nächstfolgenden Gliedes $\binom{n}{n+1}$, und die aller folgenden Glieder gleich Null werden.

Ist dagegen n eine gebrochene oder negative Zahl, so wird kein Glied kommen, dessen Koeffizient gleich Null wäre; die Binomialreihe besteht daher aus unendlich vielen Gliedern.

Beispiele.

1) $$(a+b)^{-3} = a^{-3} + \binom{-3}{1} a^{-4} b + \binom{-3}{2} a^{-5} b^2 + \binom{-3}{3} a^{-6} b^3 + \binom{-3}{4} a^{-7} b^4 + \ldots$$
$$= a^{-3} - 3a^{-4} b + 6a^{-5} b^2 - 10a^{-6} b^3 + 15a^{-7} b^4 - \ldots$$
$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \ldots$$

2) $$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-2} = \frac{x^{-2}}{a^{-2}} + \binom{-2}{1} \cdot \frac{x^{-3}}{a^{-3}} \cdot \frac{y}{b} + \binom{-2}{2} \cdot \frac{x^{-4}}{a^{-4}} \cdot \frac{y^2}{b^2} + \binom{-2}{3} \cdot \frac{x^{-5}}{a^{-5}} \cdot \frac{y^3}{b^3} + \ldots$$
$$= \frac{x^{-2}}{a^{-2}} - 2 \cdot \frac{x^{-3}}{a^{-3}} \cdot \frac{y}{b} + 3 \cdot \frac{x^{-4}}{a^{-4}} \cdot \frac{y^2}{b^2} - 6 \cdot \frac{x^{-5}}{a^{-5}} \cdot \frac{y^3}{b^3} + \ldots$$
$$= \frac{a^2}{x^2} - \frac{2a^3 y}{bx^3} + \frac{3a^4 y^2}{b^2 x^4} - \frac{6a^5 y^3}{b^3 x^5} + \ldots$$

3) $$(a+b)^{-m} = a^{-m} + \binom{-m}{1} a^{-m-1} b + \binom{-m}{2} a^{-m-2} b^2 + \binom{-m}{3} a^{-m-3} b^3 + \ldots$$
$$= a^{-m} - \frac{m}{1} \cdot a^{-m-1} b + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} a^{-m-2} b^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-m-3} b^3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^{m+3}} + \ldots$$
$$= \frac{1}{a^m} \left[1 - \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots \right].$$

4) $(x-y)^{\frac{1}{3}} = \left[x\left(1-\frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= x^{\frac{1}{3}}\left[1-\binom{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{y}{x}+\binom{\frac{1}{3}}{2}\cdot\frac{y^2}{x^2}-\binom{\frac{1}{3}}{3}\cdot\frac{y^3}{x^3}+\binom{\frac{1}{3}}{4}\cdot\frac{y^4}{x^4}-\ldots\right]$

$= x^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{x}-\frac{1}{9}\cdot\frac{y^2}{x^2}-\frac{5}{81}\cdot\frac{y^3}{x^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{y^4}{x^4}-\ldots\right].$

5) $(a+b)^{\frac{1}{m}} = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$

$= a^{\frac{1}{m}}\left[1+\binom{\frac{1}{m}}{1}\cdot\frac{b}{a}+\binom{\frac{1}{m}}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\binom{\frac{1}{m}}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots\right]$

$= a^{\frac{1}{m}}\left[1+\frac{1}{m}\cdot\frac{b}{a}-\frac{m-1}{2\cdot m^2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{2\cdot 3\cdot m^3}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3-\ldots\right].$

6) $\sqrt[n]{x-a} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{1-\frac{a}{x}} = \sqrt[n]{x}\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{n}} = \ldots$

7) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots$

8) $\sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a}\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \ldots$

9) $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 7\cdot(1+\frac{1}{49})^{\frac{1}{2}} = \ldots$

10) $\sqrt{79} = \sqrt{81-2} = 9\cdot(1-\frac{2}{81})^{\frac{1}{2}} = \ldots$

11) $(x+a)^{-\frac{m}{n}} = \ldots$

12) $(x-a)^{-\frac{m}{n}} = \ldots$

V. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

§. 182.

Im gewöhnlichen Leben heißt ein Ereigniß wahrscheinlich, wenn für das Stattfinden desselben mehr Gründe vorhanden sind, als für das Nichtstattfinden. So unbestimmt auch nach dieser Erklärung der Begriff des Wahrscheinlichen ist, so ist er doch nichtsdestoweniger einer streng wissenschaftlichen Auffassung fähig.

Bei jeder Erscheinung müssen wir bestimmte Ursachen voraussetzen, welche sie hervorbringen, wenn wir auch diese Ursachen und ihren Zusammenhang nicht immer kennen. Häufig sind die Ursachen und unsere Kenntnisse von ihrer Wirkungsweise von der Art, daß wir nicht nur alle möglichen Fälle, unter denen die hervorgebrachte Erscheinung auftreten kann, anzugeben im Stande sind, sondern auch die Ueberzeugung gewinnen, daß alle diese Fälle gleich möglich sind, d. i., daß für das Eintreten des einen Falles nicht mehr Grund vorhanden ist, als für das Eintreten jedes anderen Falles. Von diesen gleich möglichen Fällen können einige das Eintreffen eines gewissen Ereignisses begünstigen, andere demselben ungünstig sein.

Wenn nun alle gleich möglichen Fälle bekannt sind, welche dem Stattfinden eines Ereignisses günstig, und eben so auch jene, welche demselben ungünstig sind, so kann der Grad der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses der Rechnung unterzogen werden. Man nennt nämlich das Verhältniß der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle, welche auf das Ereigniß einwirken können, die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Heißt a die Zahl der einem Ereignisse günstigen, und b die Zahl der ihm ungünstigen Fälle, so ist, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses durch w ausgedrückt wird,

$$w = \frac{a}{a + b}.$$

Je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, oder je größer a ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses; sind alle Fälle günstig, so ist das Stattfinden gewiß, und man hat, da $b = 0$ ist, als das mathematische Symbol der Gewißheit

$$w = \frac{a}{a} = 1.$$

Je weniger günstige Fälle vorkommen, desto kleiner wird auch die Wahrscheinlichkeit; ist gar kein Fall günstig, so ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, und man hat, da $a = 0$ ist, für das mathematische Symbol der **Unmöglichkeit**

$$w = \frac{0}{b} = 0.$$

Der Begriff des Wahrscheinlichen im gewöhnlichen Leben ist, wie aus dieser Darstellung hervorgehet, ein beschränkter, und bezieht sich nur auf den Fall, wo die Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$ ist; wogegen man ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, unwahrscheinlich zu nennen pflegt.

Will man die **entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses, d. i. die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen desselben, mathematisch ausdrücken, so darf man nur bedenken, daß jene Fälle, welche für das Eintreffen des Ereignisses ungünstig waren, für das Nichteintreffen desselben günstig sind; es wird demnach die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler die Anzahl aller ungünstigen, und der Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Heißt diese Wahrscheinlichkeit w', so ist

$$w' = \frac{b}{a + b},$$

und man hat

$$w + w' = \frac{a + b}{a + b} = 1,$$

d. h. **die Summe der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses und jener für das Nichteintreffen gibt die Einheit**, somit die Gewißheit; was auch ganz natürlich erscheint, da es gewiß ist, daß jenes Ereigniß entweder eintreffen oder nicht eintreffen muß.

Aus $w + w' = 1$ folgt $w' = 1 - w$. Hat man daher die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses gefunden, so wird die Wahrscheinlichkeit für das Gegentheil erhalten, wenn man die erstere Wahrscheinlichkeit von der Einheit abzieht.

Beispiele.

1) Wirft man zwei Spielwürfel A und B, deren sechs Seiten nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkten oder Augen bezeichnet sind, aufs Gerathewohl auf den Tisch, so sind in Bezug auf die Zahlen, welche auf der obersten Seite der beiden Würfel stehen, folgende Fälle gleich möglich:

A B	A B	A B	A B	A B	A B
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Es sind also 36 Fälle gleich möglich, und es lassen sich leicht folgende Aufgaben lösen:

a. Um die Summe 5 zu werfen, sind 4 Fälle günstig, nämlich 14, 23, 32, 41. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln 5 Augen zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Dieser Ausdruck, welcher anzeigt, daß in 9 Würfen die Summe 5 einmal geworfen werde, ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn man in den ersten neun Würfen die Summe 5 gerade einmal werfen müßte; man kann diese Summe vielleicht gar nicht, oder gerade einmal, oder auch mehr als einmal werfen; aber wenn man sehr viele Würfe macht, so wird sich das Verhältniß der Anzahl Würfe, wo man 5 wirft, zu der gesammten Anzahl der Würfe um so mehr dem Verhältnisse 1 : 9 nähern, je länger das Spiel fortgesetzt wird. Der wirkliche Erfolg wird der durch Zahlen ausgedrückten Wahrscheinlichkeit um so näher kommen, je größer die Anzahl der Versuche ist; und in diesem Sinne ist die mathematische Wahrscheinlichkeit stets aufzufassen.

Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 5 nicht zu werfen, ist $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

b. Die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 3 und 5 zu werfen, ist, da nur zwei Fälle 35 und 53 günstig sind, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

c. Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch, d. i. zwei gleiche Zahlen zu werfen, ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2) In einer Urne befinden sich 10 weiße und 6 rothe Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen?

$$w = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Eben so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich die, eine rothe Kugel zu ziehen, $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

3) In einer Urne sind 5 Kugeln, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl von Kugeln herauszuziehen, und wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Anzahl?

Es sind im Ganzen 16 ungerade Zusammenstellungen möglich, nämlich 5 Kugeln, jede einzeln gezogen, 10 Ternen und 1 Quinterne; und 15 gerade Zusammenstellungen, nämlich 10 Amben und 5 Quaternen; also zusammen 31 Zusammenstellungen. Die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Anzahl ist also $\frac{16}{31}$, und die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Anzahl $\frac{15}{31}$.

4) Betrachtet man die 32 Blätter der sogenannten deutschen Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit,

eine rothe Farbe zu ziehen . . . . $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$
eine Coeur zu ziehen . . . . $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
einen König zu ziehen . . . . $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
eine Figur zu ziehen . . . . $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$
ein bestimmtes Blatt, z. B. Coeur-Aß zu ziehen $\frac{1}{32}$.

5) Die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie geben, wie bei der Kombinazionslehre nachgewiesen wurde, 90 Unionen, 4005 Amben, 117480 Ternen, während die 5 gezogenen Nummern nur 5 Unionen, 10 Amben und 10 Ternen zulassen.

Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmt genannte Nummer (Nominate) zu treffen, ist, da jede der 90 Nummern gerade die so vielte gerufen werden kann, als vorher bestimmt wurde, $\frac{1}{90}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine bestimmte Nummer unter den gezogenen vorkomme (Extrate), ist $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{1}{400 \cdot 5}$; und jene mit drei genannten Nummern einen Terno zu machen, $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$.

Die bisher betrachtete Wahrscheinlichkeit, wobei nur ein Ereigniß an und für sich betrachtet wird, heißt die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

2. Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. 183.

Von der absoluten Wahrscheinlichkeit ist die relative, welche sich auf die Vergleichung zweier bestimmter Ereignisse bezieht, wohl zu unterscheiden. Gesetzt, es spielen zwei Spieler mit zwei Würfeln so, daß A gewinnt, wenn er 10 Augen wirft, und B, so oft er 7 Augen wirft, während alle andern Würfe weder Gewinn noch Verlust bringen. Man will nun die Wahrscheinlichkeit wissen, welche vorhanden ist, mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 10 als 7, oder umgekehrt, eher 7 als 10 zu werfen. Offenbar braucht man hier nicht so, wie bei der Bestimmung der absoluten Wahrscheinlichkeit, alle möglichen Fälle in Betrachtung zu ziehen, sondern nur diejenigen, welche den beiden Ereignissen günstig sind. Der Summe 10 sind 3, der Summe 7 dagegen 6 Fälle günstig; zählt man daher diejenigen Fälle gar nicht, wo weder 10 noch 7 fällt, so sind nur 9 Fälle möglich; und es ist die relative Wahrscheinlichkeit, eher die Summe 10 als jene 7 zu werfen, $\frac{3}{9}$; und die relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 10 zu werfen, $\frac{6}{9}$. Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten gibt die Einheit, wie es auch sein muß, da es gewiß ist, daß man entweder eher 10 als 7, oder eher 7 als 10 werfen muß.

Sind überhaupt s gleich mögliche Fälle, welche verschiedene Ereignisse herbeiführen können, und vergleicht man nur die Ereignisse A und B, deren einem m, und dem andern n Fälle günstig sind, so ist die relative Wahrscheinlichkeit W für das Ereigniß A $\frac{m}{m+n}$, und die relative Wahrscheinlichkeit W' für das Ereigniß B $\frac{n}{m+n}$.

Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten auch aus den absoluten herleiten. Es ist nämlich, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B beziehungsweise durch w und w' bezeichnet,

$$W = \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w}{w+w'},$$

$$W' = \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w'}{w+w'}.$$

Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird demnach erhalten, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse dividirt.

Beispiele.

1) Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Summe 5 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, und die absolute Wahrscheinlichkeit, 7 zu werfen, $\frac{6}{36}$. Es ist daher die relative Wahrscheinlichkeit, eher 5 als 7 zu werfen,

$$W = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{4}{4+6} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

und die relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 5 zu werfen,

$$W' = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{6}{4+6} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

2) In einer Urne sind 4 weiße, 6 blaue und 8 rothe Kugeln. Die absolute Wahrscheinlichkeit,

eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{4}{18}$,
„ rothe „ „ „ „ $\frac{8}{18}$;

daher die relative Wahrscheinlichkeit,

eher eine weiße als eine rothe Kugel zu ziehen $\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

eher eine rothe als eine weiße Kugel zu ziehen $\frac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

3) Die absolute Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten eine rothe Figur zu ziehen, ist $\frac{6}{32}$; und jene, eine schwarze Figur zu ziehen, ebenfalls $\frac{6}{32}$; es ergibt sich daraus die relative Wahrscheinlichkeit, eher eine rothe als eine schwarze Figur zu ziehen $= \frac{\frac{6}{32}}{\frac{6}{32}+\frac{6}{32}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, und denselben Ausdruck erhält man auch für die relative Wahrscheinlichkeit, eher eine schwarze als eine rothe Figur zu ziehen, was auch so sein muß, weil beide Ereignisse gleich wahrscheinlich sind.

3. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. 184.

Wenn die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Berechnung mehrerer einfacher Wahrscheinlichkeiten beruhet, so heißt eine solche Wahrscheinlichkeit eine zusammengesetzte. Sie ist zweifacher Art; entweder schließt sich das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gegenseitig aus, und es kann unter mehreren fraglichen Ereignissen nur eines Statt finden; oder es sollen zwei oder mehrere Ereignisse in Verbindung mit einander, gleichzeitig oder nach einander eintreffen. Wir wollen jede dieser zwei Arten durch Beispiele beleuchten, und die Regeln für ihre Berechnung entwickeln.

a) Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen.

§. 185.

Wenn in einer Urne 3 weiße, 4 rothe, 5 gelbe und 6 blaue Kugeln sich befinden, so ist
die absolute Wahrscheinlichkeit, daraus eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{3}{18}$;
" " " " " rothe " " " $\frac{4}{18}$;
" " " " " gelbe " " " $\frac{5}{18}$.

Will man nun die Wahrscheinlichkeit wissen, daß entweder eine weiße oder eine rothe oder eine gelbe Kugel gezogen werde, so sind dem Eintreffen dieses Ereignisses $3 + 4 + 5 = 12$ Fälle günstig; die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, rothe oder gelbe Kugel zu ziehen, ist daher $\frac{12}{18} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + \frac{5}{18}$.

Ist allgemein s die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, von denen m dem Ereignisse A, n dem Ereignisse B, p dem Ereignisse C, ... also $m + n + p + \ldots$ für das Eintreffen irgend eines unter den Ereignissen A, B, C, ... günstig sind, so ist, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch w', w'', w''', ..., und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse durch W bezeichnet,

$$w' = \frac{m}{s},\ w'' = \frac{n}{s},\ w''' = \frac{p}{s},\ \ldots$$

und

$$W = \frac{m + n + p + \ldots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{p}{s} + \ldots$$

oder

$$W = w' + w'' + w''' + \ldots$$

d. i. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln mehr als 8 Augen zu werfen?

Die absolute Wahrscheinlichkeit,	9 Augen zu werfen, ist	$\frac{4}{36}$,
" " "	10 " " " "	$\frac{3}{36}$,
" " "	11 " " " "	$\frac{2}{36}$,
" " "	12 " " " "	$\frac{1}{36}$;

daher die Wahrscheinlichkeit, entweder 9 oder 10 oder 11 oder 12 Augen zu werfen,

$$\frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

2) Die absolute Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten

eine Coeur Figur zu ziehen, ist . . . . . $\frac{3}{32}$,
eine Coeur, die keine Figur ist, zu ziehen, $\frac{5}{32}$,
eine Careau Figur zu ziehen, ... $\frac{3}{32}$,
eine Careau, die keine Figur ist, zu ziehen, $\frac{5}{32}$.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit,

eine Coeur überhaupt zu ziehen, $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$,
eine rothe Figur zu ziehen, . . $\frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$,
eine blaßrothe Karte zu ziehen, . $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$,
ein rothes Blatt zu ziehen . . $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} + \frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{2}$.

b) Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse.

§. 186.

In einer Urne A befinden sich 4 weiße und 6 rothe Kugeln, in einer zweiten B 6 weiße und 8 rothe Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man, wenn man aus beiden Urnen zugleich zieht, aus jeder eine weiße Kugel herausziehe?

Beim Ziehen aus der Urne A sind 10 Fälle, aus der Urne B 14 Fälle möglich; also gibt es, da man bei jedem der 10 möglichen Züge aus A jeden der 14 möglichen Züge aus B machen kann, beim gleichzeitigen Ziehen aus beiden Urnen 10 . 14 = 140 gleich mögliche Fälle. Für das Ziehen einer weißen Kugel aus A sind 4, aus B 6 Fälle günstig; man hat daher, da jeder der 4 erstern Fälle mit jedem der 6 letztern zusammentreffen kann, für das gleichzeitige Ziehen einer weißen Kugel aus beiden Urnen 4.6 = 24 günstige Fälle. Es ist somit die Wahrscheinlichkeit aus beiden Urnen zugleich eine weiße Kugel zu ziehen

$$\tfrac{24}{140} = \frac{4\ .\ 6}{10\ .\ 14} = \tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{6}{14}.$$

Es sei nun allgemein W die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B, deren ersterem m' Fälle günstig und n' Fälle ungünstig, dem letztern m'' Fälle günstig und n'' Fälle ungünstig sind. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind

$$w' = \frac{m'}{m' + n'},\quad w'' = \frac{m''}{m'' + n''}.$$

Da nun jeder der m' dem Ereignisse A günstigen Fälle mit jedem der m'' dem Ereignisse B günstigen Fälle zusammen eintreffen kann, so gibt es für das Zusammentreffen beider Ereignisse m' m'' günstige Fälle. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist

$$(m' + n')\ (m'' + n''),$$

weil jeder der m' + n' bei A möglichen Fälle mit jedem der m'' + n'' bei B möglichen Fälle zusammentreffen kann. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Ereignisse A und B zusammen eintreffen,

$$W = \frac{m' m''}{(m' + n')\ (m'' + n'')} = \frac{m'}{m' + n'} \cdot \frac{m''}{m'' + n''} = w'\ w''.$$

Heißen eben so w', w'', w''', ... die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse A, B, C, ...; so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse

$$W = w'\ w''\ w''' \ldots$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Produkte aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse.

Beispiele.

1) Es seien die 32 Karten nach den Farben in 4 Pakete eingetheilt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Coeur König zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, die Hand auf das Paket der Coeurs zu legen, ist $\frac{1}{4}$; die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Paket den König zu ziehen $\frac{1}{8}$; daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Spielern, deren jeder ein Blatt von 32 Karten in Händen hat, und die beide zugleich jeder eine Karte ziehen, A ein blaßrothes Blatt und B eine schwarze Figur ziehe?

Die Wahrscheinlichkeit, daß A ein blaßrothes Blatt ziehe, ist $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$; die Wahrscheinlichkeit, daß B eine schwarze Figur ziehe, ist $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$; daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse $= \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{16} = \frac{15}{256}$.

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten in den ersten zwei Zügen König und Dame derselben Farbe, jedoch in beliebiger Ordnung zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Zug einen König oder eine Dame zu ziehen, ist $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; die Wahrscheinlichkeit, dann aus den noch übrigen 31 Karten die zweite dieser Figuren von derselben Farbe zu ziehen, ist $\frac{1}{31}$; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{31} = \frac{1}{124}$.

4) Die Urne A hat 5 weiße und 7 rothe Kugeln, die Urne B 6 weiße und 3 rothe; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf's Gerathewohl aus einer dieser Urnen eine rothe Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, in die Urne A zu greifen, ist $\frac{1}{2}$; jene, daraus eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{7}{12}$; folglich die Wahrscheinlichkeit, aus A eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}$. Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne B eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, aus der ersten oder zweite Urne eine rothe Kugel zu ziehen, ist daher $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7}{24} + \frac{2}{7} = \frac{97}{168}$.

5) In der Urne A befinden sich 4 Treffer und 20 Nieten, in der Urne B 6 Treffer und 24 Nieten, in der Urne C 8 Treffer und 28 Nieten; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen zufälligen Griff in eine dieser Urnen einen Treffer zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, in die Urne A zu greifen und daraus einen Treffer zu ziehen, ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$; jene, aus B einen Treffer zu ziehen, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$; und jene, aus C einen Treffer zu ziehen, $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}$; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \quad \frac{2}{9} = \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{2}{27} = \frac{53}{270}.$$

§. 187.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten Wurfe einen Pasch zu werfen, ist $\frac{1}{6}$; jene, im zweiten Wurfe wieder einen Pasch zu werfen, auch $\frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß man zweimal nach einander Pasch werfe, ist daher $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^2$.

Eben so wird die Wahrscheinlichkeit, dreimal nach einander einen Pasch zu werfen, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^3$ sein.

Ist überhaupt w die absolute Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Ereigniß eintreffe, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß jenes Ereigniß 2, 3, 4, ... rmal nach einander eintreffe,

$$w_2 = w \cdot w = w^2,$$
$$w_3 = w \cdot w \cdot w = w^3,$$
$$w_4 = w \cdot w \cdot w \cdot w = w^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_r = w \cdot w \cdot w \ldots \text{ rmal} = w^r.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß mehrer Male nach einander Statt finde, ist also gleich de^e^ Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreffen, erhoben zur so vielten Potenz, als Wiederholungen Statt finden sollen.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander die Summe 7 zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 einmal zu werfen, ist $\frac{1}{6}$; also die Wahrscheinlichkeit, diese Summe 3mal nach einander zu werfen, $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus 32 Karten 4mal nach einander eine Coeur zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit für das einmalige Ziehen einer Coeur ist $\frac{1}{4}$, daher jene für das 4mal nach einander folgende Ziehen der Coeur $(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$.

4. Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Kombinazionen mehrerer Ereignisse.

§. 188.

Nach den bisher vorgetragenen Sätzen sind wir nun im Stande, für jede Kombinazion, welche zwischen dem wechselseitigen Stattfinden oder Nichtstattfinden zweier oder mehrerer Ereignisse möglich ist, den Grad der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Es seien s gleich mögliche Fälle, von denen m' dem Ereignisse A, und m'' dem Ereignisse B günstig sind; so ist, wenn die absolute Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden von A durch w', und jene für das Stattfinden von B durch w'' bezeichnet wird,

$$w' = \frac{m'}{s},\ w'' = \frac{m''}{s}.$$

Es ist nun die absolute Wahrscheinlichkeit,

daß A eintrifft, ... „ . w'
„ A nicht eintrifft, ... $1 - w'$
„ B eintrifft, ... w''
„ B nicht eintrifft, ... $1 - w''$
„ A eintrifft, B nicht . . . $w'(1 - w'')$
„ A nicht eintrifft, aber B . . $(1 - w')\, w''$
„ A und B eintreffen . . . $w'\, w''$
„ A und B nicht beide eintreffen $1 - w'\, w''$
„ weder A noch B eintrifft, . . $(1 - w')\,(1 - w'')$
„ entweder A oder B eintrifft . $1 - (1 - w')\,(1 - w'')$.

Auf gleiche Weise läßt sich, wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten w', w'', w''' für das Stattfinden dreier Ereignisse A, B, C bekannt sind, daraus die Wahrscheinlichkeit für jede Kombinazion finden, die in Bezug auf das wechselseitige Eintreffen und Nichteintreffen jener drei Ereignisse möglich ist. So erhält man z. B. für die Wahrscheinlichkeit, daß unter diesen drei Ereignissen wenigstens eines eintreffe, den Ausdruck

$$1 - (1 - w')\,(1 - w'')\,(1 - w''').$$

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln, wenn nicht auf den ersten, so doch im zweiten Wurf 9 Augen zu werfen?

Hier ist $w' = \frac{1}{9}$ und $w'' = \frac{1}{9}$, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - (1 - w')\,(1 - w'') = 1 - \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{8}{9} = \tfrac{17}{81}.$$

2) Ein Mann ist 28 Jahre alt und seine Frau 21 Jahre. Man soll den Grad der Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß nach 20 Jahren noch der Mann, oder daß die Frau, oder daß beide noch am Leben seien; oder daß der Mann schon todt sei, oder daß die Frau, oder daß schon beide todt seien; oder daß die Frau den Mann überlebe, oder der Mann die Frau; oder daß wenigstens eines von beiden lebe, oder daß wenigstens eines von ihnen schon todt sei.

Nach der Süßmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstabelle leben von 1000 zugleich gebornen Menschen

nach 21 Jahren noch 486,
„ 28 „ „ 451,
„ 41 „ „ 367,
„ 48 „ „ 316.

Da also von 451 Personen, welche 28 Jahre alt sind, nur 316 das 48ste Lebensjahr erreichen, somit für das Erreichen des 48sten Jahres bei 28jährigen Menschen unter 451 Fällen nur 316 günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des Mannes, noch 20 Jahre zu leben,

$$w' = \frac{316}{451} = 0{\cdot}7007.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Frau noch 20 Jahre lebe,

$$w'' = \frac{367}{486} = 0\cdot7551;$$

daher die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren beide noch leben,

$$w'\,w'' = \frac{316}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0\cdot5291.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren der Mann schon todt sei, ist

$$1 - w' = 1 - \frac{316}{451} = \frac{135}{451} = 0\cdot2993,$$

jene, daß die Frau schon todt sei,

$$1 - w'' = 1 - \frac{367}{486} = \frac{119}{486} = 0\cdot2449,$$

und daß schon beide todt seien

$$(1 - w')\,(1 - w'') = \frac{135}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0\cdot0733.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren der Mann schon todt sei, und die Frau noch lebe, ist

$$(1 - w')\,w'' = \frac{135}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0\cdot2260,$$

und jene, daß der Mann die Frau überlebe,

$$w'\,(1 - w'') = \frac{316}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0\cdot1716.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren wenigstens eines von beiden schon todt sei, ist

$$1 - w'\,w'' = 1 - \frac{316}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0\cdot4709,$$

und jene, daß wenigstens eines von ihnen noch lebe,

$$1 - (1 - w')\,(1 - w'') = 1 - \frac{135}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0\cdot9267.$$

5. Mathematische Erwartung und rechtmäßiger Einsatz bei Wetten und Glücksspielen.

§. 189.

Wenn mit dem Eintreffen eines Ereignisses der Besitz eines physischen Gutes oder ein Gewinn erworben werden kann, so hat derselbe vor dem Eintreffen jenes Ereignisses einen Werth, welcher von dem Grade der Wahrscheinlichkeit abhängt, die für das Stattfinden des Ereignisses vorhanden ist; man nennt diesen Werth die **mathematische Erwartung**. Trifft das Ereigniß gewiß ein, so wird auch der Gewinn mit Gewißheit erworben, und der zu erwartende Gewinn hat auch vor dem Eintreffen des Ereignisses seinen vollen Werth. Sind aber unter den Ursachen, wovon das Stattfinden des Ereignisses abhängt, a günstige und b ungünstige, so wird das Ereigniß nicht mit Gewißheit, sondern unter $a + b$ Fällen nur in a Fällen eintreffen; und es wird daher auch der zu erwartende Gewinn nicht mit dem vollen Werthe in Aussicht gestellt werden können, sondern nur mit dem so vielten Theile, als die Wahrscheinlichkeit w, ihn zu erhalten, anzeigt. Heißt daher e die mathematische Erwartung, und g der zu erwartende Gewinn, so ist

$$e = \frac{a}{a+b} \cdot g = w g.$$

Die mathematische Erwartung eines Gewinnes ist also gleich dem Gewinne multiplizirt mit der Wahrscheinlichkeit, ihn zu erhalten.

Beispiele.

1) Jemand kann, wenn er mit zwei Würfeln die Summe 5 wirft, 2 fl. gewinnen; wie groß ist seine mathematische Erwartung?

Die Wahrscheinlichkeit, 5 Augen zu werfen, ist $\frac{1}{9}$; daher

$$e = \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{9} \text{ fl.}$$

2) Jemand setzt auf zwei Nummern 1 fl., und hat, wenn seine beiden Nummern gezogen werden, 240 fl. zu gewinnen; welches ist seine mathematische Erwartung?

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, daher

$$e = \frac{2}{801} \cdot 240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267} \text{ fl.}$$

3) Jemand besitzt ein Loos einer aus 10000 Losen bestehenden Lotterie, worin ein Treffer von 20000 fl., einer von 10000 fl., 10 Treffer von 1000 fl., 50 von 100 fl., und 1000 von 5 fl. enthalten sind; wie groß ist seine mathematische Erwartung?

Die mathematische Erwartung

des Treffers von 20000 fl. ist $\frac{1}{10000} \cdot 20000 = 2$ fl.,

des Treffers von 10000 fl. ist $\frac{1}{10000} \cdot 10000 = 1$ fl.,

eines Treffers von 1000 fl. ist $\frac{10}{10000} \cdot 1000 = 1$ fl.,

eines Treffers von 100 fl. ist $\frac{50}{10000} \cdot 100 = \frac{1}{2}$ fl.,

eines Treffers von 5 fl. ist $\frac{1000}{10000} \cdot 5 = \frac{1}{2}$ fl.

daher seine ganze mathematische Erwartung

$$e = 2 + 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 5 \text{ fl.}$$

§. 190.

Bei Wetten, Lotterien und anderen Glücksspielen wird eine bestimmte Summe eingesetzt, und dafür im glücklichen Falle eine bestimmte Summe gewonnen. Soll nun der Einsatz dem zu erwartenden Gewinne gegenüber auf richtiger Grundlage beruhen, so muß die mathematische Erwartung des Einsetzers denselben Werth haben, wie sein Einsatz. Der Grundsatz, auf welchem jede rechtmäßige Wette und jedes rechtmäßige Spiel beruhet, ist also:

Der Einsatz muß der mathematischen Erwartung gleich sein.

Man hat daher für den Einsatz e dieselbe Formel, wie für die mathematische Erwartung, nämlich

$$e = wg.$$

Aus dieser Formel folgt

$$g = \frac{e}{w},$$

d. h. der Gewinn ist gleich dem Einsatze, dividirt durch die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens.

Heißen e' und e'' die Einsätze zweier Spieler, welche beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit w' und w'' haben, einen Gewinn g zu erhalten; so ist

$$e' = w'g \text{ und } e'' = w''g,$$

daher

$$e' : e'' = w' : w'',$$

d. h. die Einsätze müssen den Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, proporzionirt sein.

Beispiele.

1) A wettet gegen B, daß er mit zwei Würfeln einen Pasch wirft.

Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für A $\frac{1}{6}$, für B $\frac{5}{6}$; es müssen sich also auch die Einsätze der beiden Spieler, wenn die Wette rechtmäßig sein soll, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder wie $1 : 5$ verhalten, d. h. B muß 5mal so viel einsetzen als A.

2) In unserer Zahlenlotterie ist die Wahrscheinlichkeit,

eine Extrate zu treffen . . . . $\frac{1}{18}$,

eine Nominate zu machen . . . . $\frac{1}{90}$,

mit zwei Nummern einen Ambo zu machen . . $\frac{1}{400 \cdot 5}$,

mit drei Nummern einen Terno zu machen . . $\frac{1}{11748}$.

Nimmt man nun z. B. 1 fl. als Einsatz an, so müßte, wenn die Gewinne mit dem Einsatze in einem richtigen Verhältniß stehen würden, als Gewinn gezahlt werden

für die Extrate 1 : $\frac{1}{18} = 18$ fl.,

für die Nominate 1 : $\frac{1}{90} = 90$ fl.,

für den Ambo . 1 : $\frac{1}{400 \cdot 5} = 400 \cdot 5$ fl.,

für den Terno . 1 : $\frac{1}{11748} = 11748$ fl.

Da nun nach den Lotto-Gesetzen für die Extrate nur der 14fache, für die Nominate der 67fache, für den Ambo der 240fache, für den Terno der 4800fache Einsatz bezahlt wird, so ist leicht zu ersehen, daß sich das Lotto dem spielenden Publikum gegenüber im Vortheile befindet.

Hausaufgabe über Weihnachten von P. Scholz

$701^2 \cdot \left(\frac{207}{518}\right)^3 \quad 0.135^3 \quad \sqrt{0.5625}$

$\sqrt[3]{1728} \quad \sqrt{9x^4 - 3ax^3 + 6bx^3 + a^2x^2 - abx^2 + b^2x^2}$

$$\sqrt[3]{\frac{8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3}{125x^3 - 3x^2z + 240xz^2 - 64z^3}}$$

$\frac{23}{\frac{30}{690}}$

$700 : 30 = 23$
$\frac{7}{10}$

$700 \quad \frac{700}{\frac{10}{10}} : 3 = \frac{233}{\frac{11\,6}{= 8}} : 12 = 19^1$

$\frac{236}{17} : 24 = 9\,10$

$z = a + (n-1)d$

$s = \frac{n}{2}(a + z)$

$x = 0.432953$
$x = 7.765454$
$x = 1.920977$

$z = aq^{n-1}$

$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$

$\frac{(1+p)^n (1+p) - 1}{1+p} - 1$

$(1+p) - B \quad A(1+p)^n \quad \log B = \log A$

$A = \frac{B}{(1+p)^n}$

$\sqrt{-4} - 2\sqrt{-16} + 5\sqrt{-36}$

$\sqrt{4}.\sqrt{-1} - 2\sqrt{16}.\sqrt{-1} + 5\sqrt{36}.\sqrt{-1}$

$2.\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} + 30\sqrt{-1}$

$24.\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})$

$(\sqrt{a}.\sqrt{-1} + \sqrt{b}.\sqrt{-1})(\sqrt{a}\sqrt{-1} - \sqrt{b}.\sqrt{-1})$

$a(\sqrt{-1})^2 = -a$

Ernst Sarvat

$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^2 = -1 = \cancel{e}a$

$\lg A = \lg B - n\lg(1+p)$

$\lg 1+p = \frac{\lg B - \lg A}{n}$

$n = \frac{\lg B - \lg A}{\lg 1+p}$

$s = r.\frac{(1+p)^n - 1}{p(1+p)^n}$

$r = s\frac{p(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$

$b = a.\frac{(1+p)[(1+p)^n - 1]}{p}$

$a = b.\frac{p}{(1+p)[(1+p)^n - 1]}$