Lehrbuch

der

Arithmetik

für das

Unter-Gymnasium.

Von

Dr. Franz Močnik,

k. k. Schulrath und Volksschul-Inspektor für Krain.

Zweite Abtheilung.

Für die III. und IV. Klasse.

Dritte vermehrte Auflage.

Wien.

Verlag von Carl Gerold.

1851.

Druck von Carl Gerold und Sohn.

Erster Abschnitt.

Von den entgegengesetzten Größen.

§. 1.

Es gibt Größen, welche mit einander in Verbindung gebracht sich gegenseitig vermindern oder auch ganz aufheben. Solche Größen sind z. B. Einnahme und Ausgabe; 20 fl. Einnahme und 8 fl. Ausgabe machen 12 fl. wirkliche Einnahme; 8 fl. Einnahme und 20 fl. Ausgabe sind so viel als 12 fl. Ausgabe; 20 fl. Einnahme und 20 fl. Ausgabe bewirken weder Einnahme noch Ausgabe. Im ersten Falle werden also 20 fl. Einnahme durch 8 fl. Ausgabe, im zweiten 20 fl. Ausgabe durch 8 fl. Einnahme vermindert; im dritten Falle heben sich Einnahme und Aufgabe gänzlich auf.

In derselben Beziehung, wie Einnahme und Ausgabe, stehen auch Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Ueberschuß und Mangel, Bewegung nach vorwärts und nach rückwärts, nach aufwärts und nach abwärts, Wärme und Kälte u. s. w.

Solche Größen nun, welche mit einander in Verbindung gebracht, sich gegenseitig vermindern oder auch ganz aufheben, werden entgegengesetzte Größen genannt.

Von je zwei entgegengesetzten Größen kann die eine als etwas Wirkliches, als etwas Vorhandenes betrachtet werden; die andere zeigt dann das Gegentheil, etwas Mangelndes an. Man nennt darum die erstere Größe positiv, die letztere negativ.

Es ist an und für sich gleichgiltig, welche von zwei entgegengesetzten Größen man für die positive annehmen will; man kann z. B. das Vermögen als positiv und die Schulden als negativ ansehen, man kann aber auch die Schulden für die positive Größe wählen, wo dann das Vermögen als negativ betrachtet werden muß. In der Rechnung hängt diese Wahl von der Natur der Aufgabe ab. Will man z. B. das Vermögen einer Person schätzen, so betrachtet man die Vermögensposten als positiv, die Schuldposten als negativ; will man dagegen die Schuldsumme ausmitteln, so werden die Schuldposten als positiv und die Vermögensposten als negativ angesehen.

§. 2.

Den Begriff der entgegengesetzten Größen braucht man nicht, wie wir es in dem Vorhergehenden gethan haben, auf benannte Zahlen, als Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, . . . zu beschränken; er gilt eben so auch von unbenannten Zahlen.

Geht man nämlich in unserem Zahlensysteme von der Null aus, so erhält man durch allmäliges Hinzusetzen der Einheit die Zahlenreihe:

$$0 + 1,\ 0 + 2,\ 0 + 3,\ 0 + 4, 0 + 5,\ 0 + 6, \ldots$$

oder, da die Null weggelassen werden kann:

$$+ 1,\ + 2,\ + 3,\ + 4,\ + 5,\ + 6, \ldots$$

So wie nun durch die Addizion der Einheit die Zahlen nach aufwärts schreiten, so geschieht das Fortschreiten der Zahlen nach abwärts durch die Subtrakzion der Einheit, z. B. 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 Es ist jedoch nicht nöthig, bei der Null stehen zu bleiben, man kann auch unter dieselbe hinabsteigen, wodurch man die Zahlenreihe:

$$0 - 1,\ 0 - 2,\ 0 - 3,\ 0 - 4,\ 0 - 5,\ 0 - 6, \ldots$$

oder nach Weglassung der Null:

$$- 1,\ - 2,\ - 3,\ - 4,\ - 5,\ - 6, \ldots$$

erhält.

Man hat also, wenn man die zwei Zahlenreihen zu beiden Seiten ihres gemeinschaftlichen Ausgangspunktes, der Null, zusammenstellt:

$$\ldots + 4,\ + 3,\ + 2,\ + 1,\ 0,\ - 1,\ - 2,\ - 3,\ - 4, \ldots$$

In der Zahlenseite, welche über 0 hinaufsteigt, ist jede Zahl als zu der Null zu addirend, somit als ein Ueberschuß über 0 zu betrachten; in der Zahlenseite, welche unter Null herabsteigt, erscheint jede Zahl als von der Null zu subtrahirend, und zeigt daher an, wie viele Einheiten noch mangeln, um 0 zu haben. Die Zahlen zu beiden Seiten der Null sind also einander entgegengesetzt.

Da die mit + bezeichneten Zahlen einen Ueberschuß über 0, also etwas Vorhandenes, die mit — bezeichneten dagegen etwas Mangelndes anzeigen, so müssen erstere als positiv, letztere als negativ betrachtet werden.

Man kann daher auch sagen:

Eine Zahl, welche in der Rechnung als hinzuzugebend, als Addend erscheint, heißt positiv; eine Zahl aber, welche in der Rechnung als hinwegzunehmend, als Subtrahend erscheint, heißt negativ.

Diese Erklärung ist auch bei benannten entgegengesetzten Zahlengrößen anwendbar. Fragt man z. B. nach dem Vermögen eines

Menschen, so sind, wie wir oben bemerkt haben, die Vermögensposten als positiv, die Schuldposten als negativ anzusehen; nun wirken die Vermögensposten auf das Vermögen vermehrend, die Schuldposten aber vermindernd ein, es sind also wirklich die positiven Größen als hinzuzugebend, die negativen als hinwegzunehmend zu betrachten. Will man wissen, wie weit ein Mensch, welcher einige Schritte nach vorwärts und einige Schritte nach rückwärts gemacht hat, von seinem ursprünglichen Standpunkte aus nach vorwärts gekommen ist, in welchem Falle also die Bewegung nach vorwärts als positiv, und jene nach rückwärts als negativ anzusehen ist; so ist gewiß, daß auf die in Frage stehende Weite die Schritte nach vorwärts vermehrend, dagegen jene nach rückwärts vermindernd einwirken, daß man also die positiven Größen als additiv, die negativen als subtraktiv betrachten müsse.

Aus der hier begründeten Erklärung der positiven und negativen Größen folgt, daß die positiven das Zeichen $+$, die negativen das Zeichen $-$ erhalten müssen. Das Zeichen $+$ wird am Anfange eines Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben; das Zeichen $-$ darf nie weggelassen werden. Wenn daher vor einer Zahl kein Zeichen steht, so ist sie als positiv anzusehen; z. B. 4 bedeutet so viel als $+4$.

Wenn man die Zahlen an und für sich, **absolut**, betrachtet, so ist jene die größere, welche mehrere Einheiten enthält; anders ist es bei entgegengesetzten Zahlen. Da in der Zahlenreihe:

$$+4,\ +3,\ +2,\ +1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$$

jede rechts folgende Zahl um 1 kleiner ist, so folgt:

$$+4 > +3 > +2 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4;$$

wo das Zeichen $>$ ausdrückt, daß die Zahl in der Oeffnung größer ist, als die Zahl an der Spitze.

Während also bei den positiven Zahlen jene die größere ist, in welcher mehr Einheiten vorkommen, ist bei den negativen Zahlen jene die größere, welche weniger Einheiten enthält.

I. Zusammenziehen entgegengesetzter Zahlen.

§. 3.

Zwei oder mehrere mit den Zeichen $+$ oder $-$ versehene Zahlen lassen sich immer in eine einzige zusammenziehen, und zwar nach folgenden Regeln:

1. **Zahlen, welche alle positiv oder alle negativ sind, werden reduzirt, wenn man ihrer Summe das gemeinschaftliche Zeichen voraussetzt.**

$+3+5=+8$. Wenn man nämlich zuerst 3 und dann 5 hinzugeben soll, so ist dieses eben so viel, als wenn man 8 hinzugeben sollte. Z. B. 3 fl. Vermögen und 5 fl. Vermögen sind 8 fl. Vermögen; 3 Schritte vorwärts und 5 Schritte vorwärts sind 8 Schritte nach vorwärts; 3 Grad Wärme und 5 Grad Wärme geben 8 Grad Wärme.

$$+7+5+3+6=+21$$
$$+312+518+231=?$$
$$+5084+59+31857+21563=?$$

$-4-7=-11$. Denn man hat 4 und 7 hinwegzunehmen, somit zusammen 11 hinwegzunehmen. Z. B. 4 fl. Schulden und 7 fl. Schulden machen 11 Gulden Schulden; wer zuerst 4, dann 7 Sprossen auf einer Leiter heruntersteigt, ist im Ganzen um 11 Sprossen heruntergestiegen.

$$-1-13-7-10=-31$$
$$-73-85-47-91=?$$
$$-2468-3579-8154-37926=?$$

2. **Zwei gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehene Zahlen heben sich ganz auf.**

$+5-5=0$. Wenn man nämlich 5 hinzusetzen und 5 hinwegnehmen soll, so ist dies eben so viel, als wenn man nichts hinzugeben und nichts hinwegnehmen würde. Z. B. 5 fl. Vermögen und 5 fl. Schulden heben sich ganz auf, weil man, um die Schulden zu tilgen, gerade das ganze Vermögen hergeben muß; 5 fl. Gewinn und 5 fl. Verlust heben sich gänzlich auf.

3. **Zwei ungleiche Zahlen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist, werden zusammengezogen, wenn man die kleinere von der größeren subtrahirt und dem Reste das Zeichen der größeren voraussetzt.**

$+10-6=+4$. Man hat nämlich 10 hinzuzugeben und 6 hinwegnehmen; denkt man sich die hinzuzugebenden 10 in 6 und 4 zerlegt, so bleiben, da 6 wieder hinweggenommen werden sollen, nur noch 4 als wirklich hinzuzugebend. Z. B.: Wer 10 fl. gewinnt und 6 fl. verliert, hat im Ganzen einen Gewinn von 4 fl.; wer 10 Schritte vorwärts und 6 Schritte rückwärts macht, befindet sich um 4 Schritte vorwärts von dem Orte, von dem er sich zu bewegen anfing.

$+6-10=-4$. Soll man 6 hinzugeben und 10 hinwegnehmen, so müssen zuerst die hinzugegebenen 6 hinweggenommen werden, wodurch das Hinzugegebene aufgehoben wird, und dann bleiben noch 4 als hinwegzunehmend. Z. B. 6 fl. Einnahme und 10 fl. Ausgabe sind so viel als 4 fl. Ausgabe; wer 6 fl. Vermögen und 10 fl. Schulden hat, muß sein ganzes Vermögen hergeben, um einen Theil seiner Schulden, nämlich 6 fl., zu tilgen, worauf ihm noch 4 fl. Schulden bleiben; wenn ein Körper um 6 Fuß steigt und dann um 10 Fuß fällt, so ist er in Bezug auf seinen ursprünglichen Ort um 4 Fuß gefallen.

$$+85 - 32 = +53$$
$$-66 + 51 = -15$$
$$-1348 + 215 = ?$$
$$+7094 - 9213 = ?$$

4. Hat man mehrere Zahlen, von denen einige positiv, andere negativ sind, zusammenzuziehen, so reduzirt man zuerst die positiven, dann die negativen Zahlen, und endlich die beiden dadurch erhaltenen Resultate.

$$+5 + 8 - 3 = +13 - 3 = +10$$
$$+2 - 5 + 8 - 7 = +10 - 12 = -2$$
$$+4 + 12 - 20 + 8 - 25 = +24 - 45 = -21$$
$$-3 + 9 - 8 - 15 + 48 + 10 = +67 - 26 = +41.$$
$$+15\ 33 - 49 + 16 = ?$$
$$-208 + 749 - 337 + 214 = ?$$
$$+5106 - 2189 - 34 + 186 - 3715 = ?$$
$$+15 - 214 + 3201 - 1578 - 24568 + 30756 = ?$$
$$-77908 + 25792 - 12 + 813 + 21957 = ?$$

II. Die vier Rechnungsarten mit entgegengesetzten Zahlen.

1. Die Addizion.

§. 4.

Beim Addiren sucht man eine Zahl, welche zwei oder mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Um daher entgegengesetzte Zahlen zu addiren, darf man sie nur mit ihren Zeichen neben einander setzen und dann zusummenziehen.

Eine mit dem Zeichen + oder — versehene Zahl, welche zu einer Zahl addirt oder von ihr subtrahirt werden soll, umgibt man mit Klammern; es bedeutet z. B. $+3 + (-4)$ die Summe und $+3 - (-4)$ den Unterschied der Zahlen $+3$ und -4.

Beispiele.

$$+6 + (+2) = +6 + 2 = +8$$
$$+6 + (-2) = +6 - 2 = +4$$
$$-6 + (+2) = -6 + 2 = -4$$
$$-6 + (-2) = -6 - 2 = -8$$

welche Ausdrücke man auch so darstellen könnte:

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} +6 \\ \underline{+2} \\ +6+2=+8 \\ -6 \\ \underline{+2} \\ -6+2=-4 \end{array}
&
\begin{array}{l} +6 \\ \underline{-2} \\ +6-2=+4 \\ -6 \\ \underline{-2} \\ -6-2=-8. \end{array}
\end{array}$$

$$+33+(-12)=?$$
$$-12345+(+13824)=?$$
$$+381345+(-479258)=?$$
$$-908642+(-91378)=?$$

2. Die Subtrakzion.

§. 5.

Dabei können in Beziehung der Zeichen vier Fälle vorkommen,

$$+8-(+3),$$
$$+8-(-3),$$
$$-8-(+3),$$
$$-8-(-3),$$

welche wir der Reihe nach betrachten wollen.

a) $+3$ von $+8$ abziehen heißt eine solche Zahl suchen, welche zu $+3$ addirt, $+8$ gibt; diese Zahl ist offenbar $+5$; somit hat man:

$$+8-(+3)=+5=+8-3.$$

b) -3 von $+8$ subtrahiren heißt eine Zahl suchen, welche zu -3 addirt, $+8$ gibt; nun muß man zu -3 zuerst $+3$ addiren, um 0 zu erhalten, und zu 0 noch $+8$, um $+8$ zu bekommen; man muß also zu -3 die Zahl $+8+3$ addiren, damit $+8$ herauskomme, daher:

$$+8-(-3)=+8+3=+11.$$

c) Um $+3$ von -8 abzuziehen, sucht man eine Zahl, welche zu $+3$ addirt -8 gibt; nun muß zu $+3$ zuerst -3 addirt werden, damit man 0 erhalte, und zu 0 noch -8, damit -8 herauskomme; zu $+3$ muß also im Ganzen $-8-3$ addirt werden, um -8 zu erhalten, daher ist:

$$-8-(+3)=-8-3=-11.$$

d) Hat man endlich -3 von -8 abzuziehen, so ist eine solche Zahl zu finden, welche zu -3 addirt -8 gibt; diese Zahl ist -5; man hat also:

$$-8-(-3)=-5=-8+3.$$

Stellt man diese Ergebnisse zusammen:

$$+8-(+3)=+8-3=+5,$$
$$+8-(-3)=+8+3=+11,$$
$$-8-(+3)=-8-3=-11,$$
$$-8-(-3)=-8+3=-5;$$

oder auch in folgender Form:

$$\begin{array}{rl} \text{Minuend:} & +8 \\ \text{Subtrahend:} & +3 \\ \hline \text{Rest:} & +8-3=+5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} +8 \\ -3 \\ \hline +8+3=+11. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Minuend:} & -8 \\ \text{Subtrahend:} & +3 \\ \hline \text{Rest:} & -8-3=-11 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -8 \\ -3 \\ \hline -8+3=-5 \end{array}$$

so ergibt sich folgende Regel:

Entgegengesetzte Zahlen werden subtrahirt, wenn man den Subtrahend mit dem entgegengesetzten Zeichen zu dem Minuend addirt.

Der positive Subtrahend erscheint also nach der Subtrakzion negativ, der negative positiv. Daß das Subtrahiren einer positiven Zahl ein wirkliches Hinwegnehmen ist, erscheint sich für klar und natürlich; auffallender ist es auf den ersten Blick, daß das Subtrahiren einer negativen Zahl so viel ist, als das Hinzusetzen einer gleichen positiven Zahl. Das Auffallende verschwindet übrigens, wenn man auf den Begriff der entgegengesetzten Größen näher eingeht. Um Jemanden 10 fl. Schulden wegzunehmen, muß man ihm 10 fl. Vermögen geben, damit er jene Schulden tilgt; wenn man Jemanden 10 fl. Ausgabe wegnimmt, ihm also diese Aufgabe erspart, so ist dies eben so viel, als wenn man ihn 10 fl. einnehmen ließe, damit er jene Ausgabe deckt; um 10 fl. Verlust wegzunehmen, muß man 10 fl. Gewinn machen, damit jener Verlust ausgeglichen wird; will Jemand 10 Schritte, die er nach rückwärts gemacht hat, zurücknehmen, so muß er 10 Schritte nach vorwärts gehen. Man sieht aus allen diesen Beispielen, daß das Hinwegnehmen von -10 eben so viel ist, als das Hinzusetzen von $+10$.

Beispiele.

$$-343-(+212)=?$$
$$+1578-(-1374)=?$$
$$+39072-(+18902)=?$$
$$-395107-(-402864)=?$$

3. Die Multiplikazion.

§. 6.

Auch bei der Multiplikazion haben wir in Bezug auf die Zeichen der beiden Faktoren vier Fälle zu unterscheiden:

$$+5 \cdot +3,$$
$$+5 \cdot -3,$$
$$-5 \cdot +3,$$
$$-5 \cdot -3.$$

a) Es sei erstlich $+5$ mit $+3$ zu multipliziren. Dabei hat man aus $+5$ ein Resultat so zu bilden, wie $+3$ aus der Einheit entstanden ist; $+3$ ist aus der Einheit entstanden, indem man die Einheit 3mal als Addend setzte, nämlich $+3 = +1 + 1$; man wird daher auch $+5$ 3mal als Addend setzen; folglich:

$$+5 \,.\, +3 = +5 + 5 + 5 = +15.$$

b) Ist $+5$ mit -3 zu multipliziren, so muß man aus $+5$ auf dieselbe Art eine neue Zahl bilden, wie -3 aus der Einheit gebildet wurde; -3 ist nun aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe 3mal als Subtrahend setzte, denn $-3 = -1 - 1 - 1$; daher wird man auch $+5$ 3mal als Subtrahend setzen; $+5$ als Subtrahend gesetzt gibt nun -5; man hat daher:

$$+5 \,.\, -3 = -5 - 5 - 5 = -15.$$

c) Bei dem Produkte $-5 \,.\, +3$ schließt man: 5 mit $+3$ multipliziren heißt aus -5 ein Resultat so entstehen lassen, wie $+3$ aus der Einheit hervorging; $+3$ ist aus der Einheit entstanden, indem dieselbe 3mal als Addend gesetzt wurde; man wird daher auch -5 3mal als Addend, also mit unverändertem Zeichen nehmen, wodurch man bekommt:

$$-5 \,.\, +3 = -5 - 5 - 5 = -15.$$

d) Ist endlich -5 mit -3 zu multiplizieren, so muß man aus -5 nach dem Vorbilde von -3 eine neue Zahl bilden; -3 ist aber aus der Einheit entstanden, indem man dieselbe 3mal als Subtrahend setzte; man wird also auch -5 3mal als Subtrahend, somit mit geändertem Zeichen nehmen, folglich ist:

$$-5 \,.\, -3 = +5 + 5 + 5 = +15.$$

Es ist also:

$$+5 \,.\, +3 = +15,$$
$$+5 \,.\, -3 = -15,$$
$$-5 \,.\, +3 = -15,$$
$$-5 \,.\, -3 = +15,$$

woraus folgt:

Zwei gleichbezeichnete Faktoren geben ein positives, zwei ungleichbezeichnete ein negatives Produkt.

Zugleich sieht man, daß das Multipliziren mit einem positiven Multiplikator ein wiederholtes Addiren, das Multipliziren mit einem negativen Multiplikator ein wiederholtes Hinwegnehmen des Multiplikands ist.

Als Erläuterung des Vorhergehenden mögen folgende Beispiele dienen:

Wer 5 fl. Gewinn 3mal gemacht hat, gewinnt 15 fl.; wer 5 Schritte nach vorwärts 3mal gemacht hat, ist um 15 Schritte nach vorwärts gekommen; also $+5 \,.\, +3 = +15$.

Wenn man Jemanden 5 fl. Gewinn 3mal hinwegnimmt, so hat man ihm dadurch einen Verlust von 15 fl. zugezogen; wenn man 5 Tritte, die auf den Sprossen einer Leiter nach aufwärts gemacht wurden, 3mal zurücknimmt, so ist man dadurch um 15 Tritte nach abwärts gekommen; es ist somit $+5 . -3 = -15$.

Wer eine Ausgabe von 5 fl. 3mal macht, gibt 15 fl. aus; wer 5 Schritte nach rückwärts 3mal macht, legt dadurch 15 Schritte nach rückwärts zurück; also $-5 . +3 = -15$

Wer Jemanden 5 fl. Verlust 3mal hinwegnimmt, hat ihm einen Gewinn von 15 fl. zugemittelt; nimmt Jemand 5 Schritte nach rückwärts 3mal zurück, so hat er dadurch 15 Schritte nach vorwärts gemacht; mithin ist $-5 . -3 = +15$.

Sind mehr als zwei entgegengesetzte Zahlen mit einander zu multipliziren, so ist Folgendes zu merken:

Wenn alle Faktoren positiv sind, so ist auch das Produkt positiv. Z. B.:

$+2 . +3 . +4 = +6 . +4 = +24$,
$+2 . +3 . +4 . +5 = +24 . +5 = +120$.

Sind alle Faktoren negativ, so ist das Produkt positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Faktoren eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$-2 . -3 . -4 = +6 . -4 = -24$,
$-2 . -3 . -4 . -5 = -24 . -5 = +120$,
$-2 . -3 . -4 . -5 . -6 = +120 . -6 = -720$,
$-2 . -3 . -4 . -5 . -6 . -7 = -720 . -7 =$
$= +5040$.

Sind endlich die Faktoren theils positiv, theils negativ, so richtet sich das Zeichen des Produktes bloß nach der Anzahl der negativen Faktoren; das Produkt wird nämlich positiv oder negativ, je nachdem jene Anzahl eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$+2 . +3 . -4 = +6 . -4 = -24$,
$+2 . +3 . -4 . -5 = -24 . -5 = +720$,
$+2 . +3 . -4 . -5 . +6 = +120 . +6 = +720$,
$+2 . +3 . -4 . -5 . +6 . -7 = +720 . -7 =$
$= -5040$.

Beispiele.

$+315 . -519 = ?$
$-1356 . -248 = ?$
$-428 . -376 . -219 = ?$
$+783 . -570 . -138 - ?$
$-2906 . +2076 . -149 . -89 = ?$
$+137 . -28 . -119 . +83 . -75 . -125 = ?$

4. Die Division.

§. 7.

Das Divisionsverfahren läßt sich aus dem Satze herleiten, daß der Quozient mit dem Divisor multiplizirt den Dividend geben muß.

a) Ist erstlich $+ 12$ durch $+ 4$ zu dividiren, so muß der Quozient $+ 3$ sein, weil nur eine positive Zahl $+ 3$ mit einer positiven $+ 4$ multiplizirt, ein positives Produkt $+ 12$ geben kann, also:
$$+ 12 : + 4 = + 3.$$

b) Es sei $+ 12$ durch $- 4$ zu dividiren; hier muß man den Quozienten 3 so bezeichnen, daß er mit $- 4$ multiplizirt, $+ 12$ gibt; nun kann nur eine negative Zahl mit einer negativen multiplizirt, ein positives Produkt geben; der Quozient muß also negativ sein und man hat:
$$+ 12 : - 4 = - 3.$$

c) Um $- 12$ durch $+ 4$ zu dividiren, muß man eine Zahl suchen, welche mit $+ 4$ multiplizirt, $- 12$ gibt; diese Zahl kann nur $- 3$ sein; somit:
$$- 12 : + 4 = - 3.$$

d) Durch dieselbe Schlußfolge erhält man auch:
$$- 12 : - 4 = + 3.$$

Der Quozient ist also positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Zeichen haben, und negativ, wenn Dividend und Divisor ungleich bezeichnet sind.

Beispiele.

$$- 42435 : + 345 = ?$$
$$- 861971 : - 3407 = ?$$
$$+ 326393 : - 529 = ?$$
$$- 6709716 : - 729 = ?$$
$$- 123456789 : + 24679 = ?$$

Zweiter Abschnitt.

Von den algebraischen Größen.

§. 8.

Von den Zahlen, die wir bisher angewendet haben, und die mit Ziffern ausgedrückt werden, zeigt jede eine ganz bestimmte Menge von Einheiten an; sie werden besondere Zahlen genannt. So drückt die besondere Zahl 7 eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten aus, indem man sich darunter weder mehr noch weniger als 7 Einheiten vorstellen kann. Wegen dieser Eigenschaft der besondern Zahlen können aber auch die Rechnungen, die man mit ihnen ausführt, nur für einzelne besondere Fälle gelten, und müßten so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch allgemeine Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besondern Werthen der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen zu können, war man auf die Einführung von Zahlen bedacht, welche jede beliebige Menge von Einheiten und deren Theilen bedeuten können, und welche darum allgemeine Zahlen genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellten sich die Buchstaben dar, und zwar die kleinen lateinischen. So bedeutet z. B. a eine allgemeine Zahl, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten oder deren Theilen vorstellen kann; a kann 1, 2, 10, — 20, $\frac{3}{5}$, oder jede andere positive oder negative Zahl anzeigen. Nur ist zu merken, daß jeder Buchstabe den Werth, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muß; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Werth, z. B. 5 an, so muß man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Werth 5 beibehalten.

Wenn in einer Rechnnng verschiedene Buchstaben vorkommen, so werden dadurch im Allgemeinen auch eben so viele verschiedene Zahlen angedeutet; in besonderen Fällen ist es jedoch möglich, daß zwei Buchstaben denselben Werth haben.

Die Wahl der Buchstaben zu allgemeinen Zahlzeichen rührt wahrscheinlich davon her, daß man anfänglich die Wörter seblst in die Rechnung setzte, und später nur die Anfangsbuchstaben beibehielt. Wir haben z. B. in der Prozentrechnung nachgewiesen, daß der Ertrag der Prozente berechnet wird, wenn man die Summe, worauf sich die Prozente beziehen, mit den Prozenten multiplizirt, und das Produkt durch 100 dividirt. Man könnte diesen Satz auf folgende Art allgemein ersichtlich machen:

$$\text{Ertrag} = \frac{\text{Summe} \times \text{Prozent}}{100},$$

oder, wenn man statt der Wörter nur ihre Anfangsbuchstaben setzt, und zwar die kleinen lateinischen,

$$e = \frac{s \times p}{100}.$$

Hier kann s jede willkürliche große oder kleine Summe, p jedes beliebige Prozent vorstellen; e ist dann die Zahl, welche den zu der angenommenen Summe und dem angenommenen Prozent gehörigen Ertrag anzeigt. Der Ausdruck $e = \frac{s \times p}{100}$ stellt daher den oben angeführten Satz ganz allgemein und doch so klar dar, daß ihn jeder sogleich herauslesen kann, wenn er nur die Bedeutung der Buchstaben e, s, p, kennt.

Die Lehre vom Rechnen mit Buchstaben heißt die allgemeine Arithmetik oder Algebra, zum Unterschiede von der besonderen Arithmetik, in welcher nur besondere Zahlen angewendet werden.

§. 9.

Häufig kommt eine und dieselbe allgemeine Zahl öfters als Addend oder Subtrahend vor; in diesem Falle schreibt man die allgemeine Zahl nur einmal an und setzt ihr die Zahl vor, wie oft sie als Addend oder Subtrahend steht, mit dem Zeichen der Addizion oder Subtrakzion. Z. B.:

statt $+a+a+a+a+a$ schreibt man $+5a$ oder bloß $5a$,
" $-b-b-b-b$ " " $-4b$.

Diese vor der allgemeinen Größe stehende Zahl $+5$ oder -4 wird der Koeffizient genannt. Der Koeffizient zeigt also an, wie oft die hinter ihm stehende allgemeine Größe als Addend oder Subtrahend gesetzt werden soll, je nachdem derselbe positiv oder negativ ist.

Steht bei einem Buchstaben kein Koeffizient, so ist darunter der Koeffizient 1, welcher nie angeschrieben wird, zu verstehen; es ist demnach a so viel als 1 a, und $-a$ so viel als $-1a$.

Man kann sehr zweckmäßig den Koeffizienten als Zahl und den Buchstaben als ihren Namen ansehen, so daß in 5a der Koeffizient 5 die Anzahl von Einheiten und a die Art derselben bedeutet, so wie z. B. in 5 Gulden die Ziffer 5 die Zahl und Gulden ihren Namen angibt.

Wenn zwei oder mehrere Buchstaben mit einander zu multipliziren sind, so wird das Multiplikationszeichen gewöhnlich weggelassen. Z. B.:

statt $a \times b$ oder $a \, . \, b$ schreibt man ab,
„ $a \times b \times c$ „ $a \, . \, b$ „ „ abc.

Der Ausdruck abc darf mit jenem $a + b + c$ nicht verwechselt werden, da ersterer ein Produkt, letzterer eine Summe vorstellt. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, so ist:

$$abc = 2 \, . \, 3 \, . \, 4 = 24,$$
$$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Der Koeffizient einer allgemeinen Größe kann immer als Faktor derselben betrachtet werden; denn es ist z. B.:

$$5a = a + a + a + a + a = a \, . \, 5 = 5 \, . \, a;$$
$$-4bc = -bc - bc - bc - bc = bc \, . -4 = -4 \, . \, bc.$$

§. 10.

Eine Größe, welche aus einem Koeffizienten und einem Buchstaben oder auch mehreren ohne Zeichen mit einander verbundenen Buchstaben bestehet, wird ein einfacher algebraischer Ausdruck genannt; z. B. a, $2ab$, $-3aax$, $5bccyy$.

Eine Größe, welche mehrere einfache durch das Zeichen + oder − verbundene Ausdrücke enthält, heißt ein zusammengesetzter Ausdruck; die einzelnen durch das Zeichen + oder − verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Theile oder Glieder. Enthält der Ausdruck zwei Glieder, so heißt er insbesondere ein Binom; eine dreigliedrige Größe wird ein Trinom, eine mehrgliedrige ein Polynom genannt. So sind:

$$a + b, \; 2m - 3n, \; axx - byy$$

Binome,

$$a - b + c, \; 2ax + 3by + 4cz, \; 3aaa - 2aab + abb$$

Trinome, und alle diese Größen zusammengesetzte Ausdrücke.

Wenn mit zusammengesetzten Größen Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, so werden sie in Klammern eingeschlossen. Um z. B. anzuzeigen, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multipliziren ist, schreibt man $(a + b) \, . \, (c + d)$; würde man die Klammern weglassen und $a + b \, . \, c + d$ schreiben, so würde dieser Ausdruck nicht bedeuten, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multiplizire ist, sondern daß man nur b mit c zu multipliziren und zu dem Produkte a und d zu addiren habe. Setzt man z. B.:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, so ist

$$(a + b) \, . \, (c + d) = (2 + 3) \, . \, (4 + 5) = 5 \, . \, 9 = 45,$$
$$a + b \, . \, c + d = 2 + 3 \, . \, 4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$$

§. 11.

Wenn in zwei algebraischen Ausdrücken gleiche Buchstaben, und diese auch in gleicher Anzahl vorkommen, so heißen jene Ausdrücke schi chartig oder homogen; die Koeffizienten können auch verschieden sein. Dagegen heißen zwei algebraische Ausdrücke ungleichartig oder heterogen, wenn sie entweder verschiedene Buchstaben, oder gleiche Buchstaben aber in ungleicher Anzahl enthalten. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} 2a, & 5a \\ ab, & 3ab \\ 5mxx, & 8mxx \end{array}\right\} \text{sind gleichartige,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3a, & 3b \\ 5mn, & -2mp \\ 3ax, & 3aax \end{array}\right\} \text{ungleichartige Größen.}$$

Zwei oder mehrere gleichartige Ausdrücke können immer in einen einfachen Ausdruck zusammengezogen werden, wenn man ihre Koeffizienten nach den Reduktionsregeln für entgegengesetzte Zahlen zusammenzieht, und den Buchstabenausdruck, als bloßen Namen, nur einmal schreibt.

Beispiele.

1) $a + 3a + 3a = (1 + 3 + 3)a = 7a.$
2) $-3bx - 2bx - 8bx = -13bx.$
3) $2abc - 2abc = 0.$
4) $5ab - 3ab = 2ab.$
5) $abx - 4abx = -3abx.$
6) $mp - 2mp + 3mp - 4mp = -2mp.$
7) $8bbyy + 2bbyy - 7bbyy = 3bbyy.$
8) $7ax - 4bx - 3ax + 2by = 4ax - 2cy.$
9) $5b + 3b - 4b + 3x = 4b + 3x.$
10) $aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb.$
11) $5m + 6m - 15m + 3m = ?$
12) $3px - px - 2px + 4px - px = ?$
13) $7am - 4y - 2am + 8y - 2x + 3am = ?$

I. Die vier Rechnungsarten mit einfachen algebraischen Ausdrücken.

1. Die Addition.

§. 12.

Einfache algebraische Ausdrücke werden addirt, wenn man sie mit unveränderten Zeichen neben einander setzt, und, wenn sie gleichartig sind, zusammenzieht.

Beispiele.

1) $+a+(+b)=+a+b.$ 2) $+a+(-b)=+a-b.$
3) $-a+(+b)=-a+b.$ 4) $-a+(-b)=-a-b.$

Diese Addizionen könnte man auch so darstellen:

$$\begin{array}{r}+a\\+b\\\hline a+b\end{array}\qquad\begin{array}{r}+a\\-b\\\hline a-b\end{array}\qquad\begin{array}{r}-a\\+b\\\hline -a+b\end{array}\qquad\begin{array}{r}-a\\-b\\\hline -a-b\end{array}$$

5) $\begin{array}{r}3a\\5a\\\hline 8a\end{array}$ 6) $\begin{array}{r}4a\\-8a\\\hline -4a\end{array}$ 7) $\begin{array}{r}-2a\\+3a\\\hline a\end{array}$

8) $\begin{array}{r}5ab\\-5ac\\\hline 5ab-5ac\end{array}$ 9) $\begin{array}{r}8mx\\-2mx\\\hline 6mx\end{array}$ 10) $\begin{array}{r}-aaxx\\-7aaxx\\\hline -8aaxx\end{array}$

11) $7abc+(-5mx)=?$
12) $120my+(-95my)=?$
13) $-33abb+(-11abb)=?$
14) $-75xy+(+20xxy)=?$

2. Subtrakzion.

§. 13.

Beim Subtrahiren einfacher algebraischer Ausdrücke gilt dieselbe Regel, wie beim Subtrahiren entgegengesetzter Zahlen. Um dieses zu erweisen, wollen wir die Fälle, welche hinsichtlich der Zeichen vorkommen können, nach der Reihe in Betrachtung ziehen.

a) Es soll von $+a$ die Größe $+b$ subtrahirt werden. Der Minuend $+a$ bleibt ungeändert, wenn man ihm $+b$ und $-b$ hinzusetzt; statt $+a$ kann man also $+a+b-b$ setzen. Nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend $+a+b-b$ den Subtrahend $+b$ hinweg, so bleibt $+a-b$ als Rest; man hat also:

Minuend $+a$ } statt $+a$ darf $+a+b-b$ gesetzt werden.
Subtrahend $+b$ } davon $+b$ hinweggenommen,
bleibt $+a\quad -b$ als Rest.

b) Ist von $+a$ die Größe $-b$ zu subtrahiren, so hat man:

Minuend $+a$ } oder $+a+b-b$
Subtrahend $-b$ } davon $-b$ abgezogen
bleibt $+a+b$ als Rest.

c) Von $-a$ soll $+b$ subtrahirt werden. Es ist.

Minuend $-a$ } oder $-a+b-b$
Subtrahend $+b$ } davon $+b$ hinweggenommen
bleibt $-a\quad -b$ als Rest.

d) Ist von $-a$ die Größe $-b$ zu subtrahiren, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Minuend } -a \\ \text{Subtrahend } -b\end{array}\right\}\begin{array}{ll}\text{oder } -a+b-b & \\ \text{davon } \quad\;\; -b & \text{weggenommen} \\ \hline \text{bleibt } -a+b & \text{als Rest.}\end{array}$$

Man hat demnach:

$$+a-(+b)=+a-b$$
$$+a-(-b)=+a+b$$
$$-a-(+b)=-a-b$$
$$-a-(-b)=-a+b$$

d. h. Einfache algebraische Ausdrücke werden subtrahirt, wenn man zu dem ungeänderten Minuend den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Subtrahend hinzugesetzt.

Wenn der Subtrahend unter den Minuend geschrieben wird, so pflegt man im Subtrahend das geänderte Zeichen sogleich unter das gegebene zu setzen. Sind Minuend und Subtrahend gleichartig, so wird die Redukzion vorgenommen.

Beispiele.

1) $5x-(-4x)=5x+4x=9x.$

2) $-3ab-(+5ab)=-3ab-5ab=-8ab.$

3) $\begin{array}{l} \quad 2mx \\ -4mx \\ + \\ \hline \quad 6mx \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} -3cp \\ +3cp \\ - \\ \hline -6cp \end{array}$ 5) $\begin{array}{l} \quad 8ax \\ -3ay \\ + \\ \hline 8ax+3ay \end{array}$

6) $\begin{array}{l} -\;\;abc \\ -2abc \\ + \\ \hline \quad abc \end{array}$ 7) $\begin{array}{l} \quad 3abb \\ +10abb \\ - \\ \hline -\;7abb \end{array}$ 8) $\begin{array}{l} 15mmxx \\ -7mmxx \\ + \\ \hline 22mmxx \end{array}$

9) $-7ay-(-3ay)=?$

10) $-3mp-(+4mq)=?$

11) $5aax-(-3aax)=?$

12) $2abby-(+aby)=?$

3. Die Multiplikazion.

§. 14.

Besondere Zahlen kann man wirklich multipliziren, d. i. man erhält als Produkt eine neue Zahl, in welcher von den Faktoren durchaus keine Spur mehr zu finden ist, z. B. $3\times 6=18$. Bei Buchstaben ist dieses der Fall nicht; ihr Produkt kann nur angezeigt werden, indem man sie ohne Zeichen neben einander setzt, und zwar wegen der leichtern Uebersicht in alphabetischer Ordnung. So wird das Produkt aus a und b durch ab, das Produkt aus ap und bq durch abpq angezeigt.

Es seien nun die einfachen Ausdrücke $5a$ und $-4b$ mit einander zu multipliziren. Da man die Koeffizienten als Faktoren der Buchstaben betrachten kann und die Faktoren in jeder beliebigen Ordnung mit einander multiplizirt dasselbe Produkt geben, so hat man:

$$5a \times -4b = 5 \times -4 \times a \times b = -20 \times ab = -20ab.$$

Einfache algebraische Ausdrücke werden daher multiplizirt, wenn man die Koeffizienten nach den Regeln für entgegengesetzte Zahlen multiplizirt und ihr Produkt dem Produkte der Buchstaben voraussetzt.

Beispiele.

1) $+a \,.\, +b = +ab.$ 2) $+a \,.\, -b = -ab.$
3) $-a \,.\, +b = -ab.$ 4) $-a \,.\, -b = +ab.$
5) $7a \,.\, 5b = 35ab.$ 6) $-3x \,.\, 8m = -24mx.$
7) $3ax \,.\, -4by = -12abxy.$
8) $-8cm \,.\, -dn = 8cdmn.$
9) $6a \,.\, -2a = -12aa.$
10) $-7ab \,.\, 2ac = -14aabc.$
11) $8abb \,.\, 3ac \,.\, -4cc = -96aabbccc.$
12) $3ax \,.\, -2am \,.\, -4mx \,.\, bb = 24aabbmmxx.$
13) $7ab \,.\, -9ms = ?$
14) $318a \,.\, -51b \,.\, -63c = ?$
15) $-97ax \,.\, -53by \,.\, 82cz \,.\, -acy = ?$

4. Die Division.

§. 15.

Buchstaben werden durch einander dividirt, wenn man sie in Form eines Bruches anschreibt; z. B. $a : b = \frac{a}{b}$.

Kommen im Zähler und Nenner gleiche Faktoren vor, so werden sie in gleicher Anzahl weggelassen; z. B.:

$$abc : bc = \frac{abc}{bc} = a, \qquad aabx : aby = \frac{aabx}{aby} = \frac{ax}{y}.$$

Daraus folgt:

Um den Quozienten zweier Buchstabenausdrücke zu finden, läßt man im Dividende diejenigen Buchstaben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl weg; die übrigbleibenden bilden den Buchstabenausdruck des Quozienten. Kommen aber im Divisor auch solche Buchstaben vor, die der Dividend nicht enthält, so zeigt man die Division durch diese Buchstaben nur an, indem man sie in den Nenner des Quozienten setzt.

Sind nun zwei einfache algebraische Ausdrücke durch einander zu dividiren, so dividirt man zuerst die Koeffizienten nach den Regeln für entgegengesetzte Zahlen und setzt ihren Quozienten dem Quozienten der Buchstaben voran.

Beispiele.

1) $+ ab : + a = + b.$ 2) $+ ab : - a = - b.$
3) $- ab : + a = - b.$ 4) $- ab : - a = + b.$
5) $6mx : 2x = 3m.$ 6) $12am : - 3m = - 4a.$
7) $- 20aab : - 5ab = 4a.$
8) $- 35abccd : 5bcd = - 7ac.$
9) $10ab : - 2bc = - \frac{5a}{c}.$
10) $- 8am : - mm = \frac{8a}{m}.$
11) $abx : 5aby = \frac{x}{5y}.$
12) $- 3bmx : 4axx = - \frac{3bm}{4ax}.$
13) $- 51abdxx : 3bdx = ?$
14) $225mmy : 25myy = ?$
15) $31amz : - 32any = ?$

II. Die vier Rechnungsarten mit zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken, oder die Auflösung der Klammern.

1. Die Addizion.

§. 16.

Zusammengesetzte algebraische Ausdrücke sind als addirt zu betrachten, wenn man sie mit ungeänderten Zeichen neben einander stellt.

Kommen in der Summe gleichartige Ausdrücke vor, so werden sie zusammengezogen. In solchen Fällen thut man am besten, wenn man die Addenden unter einander schreibt, und zwar so, daß die gleichartigen Größen gerade unter einander zu stehen kommen.

Beispiele.

1) $a + (b + c) = a + b + c.$
2) $3a - 2b + (3c - 4d) = 3a - 2b + 3c - 4d.$
3) $5a + 2x + (3b - 2y) + (3c - 2d + z) =$
$5a + 2x + 3b - 2y + 3c - 2d + z.$
4) $8x - 5y + (5x + 2y) = 8x - 5y + 5x + 2y = 13x - 3y$

oder

$$\begin{array}{r} 8x - 5y \\ 5x + 2y \\ \hline 13x - 3y. \end{array}$$

5) $$\begin{array}{rrr} aa & + \; ab & \\ & + \; ab & + \; bb \\ \hline aa & + \; 2ab & + \; bb \end{array}$$

6) $$\begin{array}{rrr} aa & + \; ab & \\ & - \; ab & + \; bb \\ \hline aa & & + \; bb. \end{array}$$

7) $$\begin{array}{rrr} 6m & - \; 5n & + \; 2p \\ 5m & + \; 8n & - \; 5p \\ -4m & - \; n & + \; 3p \\ \hline 7m & + \; 2n. & \end{array}$$

8) $$\begin{array}{rrrr} 64mmm & - \; 96mmx & + \; 36mxx & \\ & - \; 48mmx & + \; 72mxx & - \; 27xxx \\ \hline 64mmm & - \; 144mmx & + \; 108mxx & - \; 27xxx \end{array}$$

9) $3ab + (5ab - 4m) + (6m - 2ab) = \ldots$

10) $17xx - 25ax - 10aa + (3xx + 12ax - 5aa) = \ldots$

2. Die Subtrakzion.

§. 17.

Zusammengesetzte algebraische Ausdrücke werden subtrahirt, wenn man die Glieder des Minuends mit ungeänderten, und jene des Subtrahends mit verkehrten Zeichen neben einander stellt. Um sich davon zu überzeugen, nehme man $a + b - c$ als Minuend, und $m - n + p$ als Subtrahend an; anstatt $a + b - c$ kann auch $a + b - c + m - m + n - n + p - p$ gesetzt werden; nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend den Subtrahend $m - n + p$ hinweg, so bleibt $a + b - c - m + n - p$ als Rest; man hat nämlich:

$$\begin{array}{ll} \text{Minuend } a + b - c \text{ oder} & a + b - c + m - m + n - n + p - p \\ \text{davon der Subtrahend} & \qquad\qquad\quad + m \qquad\quad - n + p \\ \hline \text{hinweggenommen, bleibt} & a + b - c \quad - m + n \qquad\quad - p \end{array}$$

als Rest; es ist also:

$$a + b - c - (m - n + p) = a + b - c - m + n - p.$$

Daraus ist auch ersichtlich, daß man, wenn vor einem eingeklammerten Ausdrucke das Zeichen — steht, die Klammern auflösen könne, wenn das Zeichen eines jeden Gliedes innerhalb der Klammern in das entgegengesetzte verwandelt wird.

Wenn im Minuend und Subtrahend gleichartige Ausdrücke vorkommen, so ist es wegen des Reduzirens am zweckmäßigsten, den Subtrahend so unter den Minuend zu schreiben, daß die gleichartigen Größen unter einander zu stehen kommen, und dann im Subtrahend die geänderten Zeichen sogleich unter die gegebenen zu stellen.

Beispiele.

1) $3a - (2b + 4c) = 3a - 2b - 4c.$

2) $9x - 2a - (2y - 3b = 9x - 2a - 2y + 3b.$

3) $5ax + 6by - (3cx - 4ay + 5bz) =$
$$= 5ax + 6by - 3cx + 4ay - 5bz.$$

4) $3a + (4b - 5c) - (6d - 7e) = 3a + 4b - 5c - 6d + 7e.$

5) $8a - 4b + 3c - (6a + 2b - 3c) =$

$8a - 4b + 3c - 6a - 2b + 3c = 2a - 6b + 6c$

oder

$$\begin{array}{rrr} 8a & - 4b & + 3c \\ 6a & + 2b & - 3c \\ - & - & + \\ \hline 2a & - 6b & + 6c \end{array}$$

6) $$\begin{array}{rr} 3ax & - 4by \\ 2ax & - 2by \\ - & + \\ \hline ax & - 2by \end{array}$$

7) $$\begin{array}{rrr} xx & + 6ax & + aa \\ xx & - 4ax & \\ - & + & \\ \hline & 10ax & + aa \end{array}$$

8) $$\begin{array}{rrr} 2aa & - 3a & + 4 \\ 3aa & + a & - 5 \\ - & - & + \\ \hline -aa & - 4a & + 9 \end{array}$$

9) $$\begin{array}{rrr} 5abx & - 3bcy & \\ - abx & + 4bcy & - 3cdz \\ + & - & + \\ \hline 6abx & - 7bcy & + 3cdz \end{array}$$

10) $5xx + 7x - 5 - (3xx - 2x - 6) = \ldots$

11) $2ax - 3b - (5a + 2b) + (4a - b) = \ldots$

12) $8mmm - 7mmy - 3myy - (3mmy - 5myy + 8yy) = \ldots$

3. Die Multiplikazion.

§. 18.

Bei der Multiplikazion zusammengesetzter Ausdrücke müssen wir zwei Fälle in Betrachtung ziehen: entweder ist nur der eine Faktor zusammengesetzt und der andere einfach, oder es sind beide Faktoren zusammengesetzte Ausdrücke.

1. Wenn der eine Faktor ein zusammengesetzter und der andere ein einfacher Ausdruck ist.

Es sei a mit $b + c - d$ zu multipliziren. Hier muß man aus a eine neue Zahl so bilden, wie $b + c - d$ aus der Einheit entstanden ist; $b + c - d$ ist aus der Einheit entstanden, indem man zuerst b, dann c, endlich $-d$ bildete, und die Resultate addirte; man wird daher auch aus a zuerst ein Resultat so bilden, wie b aus der Einheit entstand, d. i. a mit b multipliziren; dann wird man aus a ein Resultat nach dem Vorbilde von c suchen, d. i. a mit c multipliziren; endlich muß man aus a auch ein Resultat so bilden, wie $-d$ aus der Einheit entstanden ist, d. i a mit $-d$ multipliziren, und diese drei Resultate in eine Summe bringen. Es ist also

$$a \,.\, (b + c - d) = a \,.\, b + a \,.\, c + a \,.\, -d = ab + ac - ad.$$

Da es für das Produkt gleichgiltig ist, in welcher Ordnung die Faktoren multiplizirt werden, so ist auch

$$(b + c - d) \,.\, a = ab + ac - ad.$$

Daraus folgt:

Ein zusammengesetzter Ausdruck wird mit einem einfachen multiplizirt, wenn man jeden Theil des zusammengesetzten Ausdruckes mit dem einfachen multiplizirt, und diese Theilprodukte addirt.

Beispiele.

1) $5a \,.\, (3b + 4c - d) = 15ab + 20ac - 5ad$
2) $-3ax \,.\, (by - 2cz + 5) = -3abxy + 6acxz - 15ax$
3) $(6a - 5b) \,.\, 3c = 18ac - 15bc$
4) $(7m - 6n + 5p) \,.\, -3x = -21mx + 18nx - 15px$
5) $(2 + 3a - 4aa - 5aaa) \,.\, 6aa = 12aa + 18aaa - 24aaaa - 30aaaaa$
6) $(3ax - 5by - cz) \,.\, -2mp = -6ampx + 10bmpy + 2cmpz$
7) $(5aa - 3a + 2) \,.\, -6ax = \ldots$
8) $8by \,.\, (1 - 2x + 3xx) = \ldots$
9) $(7am + 6bn - 5cp + 4dq) \,.\, 3fx = \ldots$

§. 19.

2. Wenn beide Faktoren zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Dieser Fall läßt sich auf den frühern zurückführen. Hat man z. B. $a + b + c$ mit $n + p + q$ zu multipliziren, so ist, wenn man den Multiplikand $a + b + c$ vorläufig durch m bezeichnet,

$$m \,.\, (n + p + q) = m \,.\, n + m \,.\, p + m \,.\, q;$$

somit, wenn man statt m wieder seinen Werth setzt,

$$\begin{aligned}(a + b + c) \,.\, (n + p + q) = {} & (a + b + c) \,.\, n \\ & + (a + b + c) \,.\, p \\ & + (a + b + c) \,.\, q,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b + c) \,.\, (n + p + q) = {} & an + bn + cn \\ & + ap + bp + cp \\ & + aq + bq + cq;\end{aligned}$$

d. h. zwei zusammengesetzte algebraische Ausdrücke werden mit einander multiplizirt, wenn man den ganzen Multiplikand mit jedem Theile des Multiplikators multiplizirt, oder, was einerlei ist, wenn man jeden Theil des einen Faktors mit jedem Theil des andern Faktors multiplizirt, und die erhaltenen Theilprodukte addirt.

Man pflegt bei der Ausführung der Multiplikazion die zusammengesetzten Faktoren gewöhnlich unter einander zu schreiben, und in den Theilprodukten die etwa vorkommenden gleichartigen Größen wegen des leichtern Reduzirens ebenfalls gerade unter einander zu stellen.

Beispiele.

1) $(5a - 3b)\,(4c - 2d) = (5a - 3b) \,.\, 4c + (5a - 3b) \,.\, -2d$
$= 20ac - 12bc - 10ad + 6bd$

2) $(m+2n-3p)(2x+3y)=(m+2n-3p).2x+(m+2n-3p).3y$
$=2mx+4nx-6px+3my+6ny-9py$

3) $(5a-6b)(3a-4b)=15aa-18ab-20ab+24bb$
$=15aa-38ab+24bb$

oder

$$\begin{array}{r} 5a-6b \\ \underline{3a-4b} \\ 15aa-18ab \\ \underline{-20ab+24bb} \\ 15aa-38ab+24bb \end{array}$$

4) $(3+2a-b)(5mx-7ny+9pz)=15mx+10amz-5bmx$
$-21ny-14any+7bny+27pz+18apz-9bpz$

5) $(3a+4b)(2c-d)(5m-6n)=(6ac+8bc-3ad-4bd)(5m-6n)$
$=30acm+40bcm-15adm-20bdm-36acn-48bcn+18ad$
$+24bdn$

6)
$$\begin{array}{l} xx-3x+4 \\ \underline{7x-3} \\ 7xxx-21xx+28x \\ \underline{\quad\;\,-3xx+9x-12} \\ 7xxx-24xx+37x-12 \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} 3xx-5xy+2yy \\ \underline{2xx+\;xy-3yy} \\ 6xxxx-10xxxy+4xxyy \\ \quad\;+3xxxy-5xxyy+2xyyy \\ \underline{\qquad\qquad\;\,-9xxyy+15xyyy-6yyyy} \\ 6xxxx-7xxxy-10xxyy+17xyyy-6yyyy \end{array}$$

8) $(x-2y-3z)(3x+2y-z)=3xx-4xy-10xz-4yy-4yz+3zz$

9) $(4ab-3cd+2ef)(4ab+3cd-2ef)$
$=16aabb-9ccdd+12cdef-4eeff$

10) $(a-2b+c+3d)(2a+b-2c+6d)=2aa-3ab$
$+12ad-2bb+5bc-9bd-2cc+18dd.$

11) $(2mx-3ny+4pz)(3mx+2ny-pz)=\ldots$

12) $(3x-7y)(5x+2y)(3ax-4by)=\ldots$

4. Die Division.

§. 20.

Beim Dividiren zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke können drei Fälle vorkommen: entweder ist der Dividend zusammengesetzt und der Divisor einfach, oder ist der Dividend einfach und der Divisor zusammengesetzt, oder es sind Dividend und Divisor zusammengesetzte Ausdrücke.

1. Wenn der Dividend ein zusammengesetzter und der Divisor ein einfacher Ausdruck ist.

Es ist

$$(a + b + c) \cdot p = ap + bp + cp.$$

Wenn man nun das Produkt zweier Faktoren durch den einen Faktor dividirt, so muß der andere Faktor zum Vorschein kommen; es muß also

$$(ap + bp + cp) : p = a + b + c$$

sein; aber a, b, c sind die Quozienten, welche man erhält, wenn man folgeweise ap, bp, cp durch p dividirt; daher gilt der Satz:

Ein zusammengesetzter Ausdruck wird durch einen einfachen dividirt, wenn man jeden Theil desselben durch den einfachen Divisor dividirt.

Beispiele.

1) $(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c$

2) $(15am - 10bm + 20cm) : -5m = -3a + 2b - 4c$

3) $(18amy - 27bny + 36cpy) : -9y = -2am + 3bn - 4cp$

4) $(20abmn - 16acmp + 9adnq) : 4am = 5bn - 4cp + \frac{9dnq}{4m}$

5) $(30mnp - 25mnq - 15mnr + 10mns) : -5mn =$
$= -6p + 5q + 3r - 2s.$

6) $(21ax - 18bx + 15cx) : -3x = \ldots$

7) $(30aazz - 24azzz - 5zzzz) : 6azzz = \ldots$

2. Wenn der Dividend einfach und der Divisor zusammengesetzt ist.

In diesem Falle wird die Division nur angezeigt, indem man den Quozienten in Bruchform ausdrückt.

Beispiele.

1) $a : (a + b) = \frac{a}{a + b}.$

2) $-3x : (5a - 2b = -\frac{3x}{5a - 2b}.$

§. 21.

3. Wenn der Dividend und der Divisor zusammengesetzte algebraische Ausdrücke sind.

Um für diesen Fall das Divisionsverfahren abzuleiten, wird es am zweckmäßigsten sein, zwei zusammengesetzte Ausdrücke $a + b + c$ und $n + p + q$ mit einander zu multiplizieren, und dann zu untersuchen, wie die Theile der beiden Faktoren in ihrem Produkte zusammengestellt erscheinen.

$$
\begin{array}{rrrr}
\text{Divisor} & a & +\,b & +\,c \\
\text{Quozient} & n & +\,p & +\,q \\
\hline
 & an & +\,bn & +\,cn \\
\text{Dividend}\left\{\right. & +\,ap & +\,bp & +\,cp \\
 & +\,aq & +\,bq & +\,cq
\end{array}
$$

Betrachtet man nun das Produkt als den Dividend, den einen Faktor $a+b+c$ als Divisor, so muß der andere Faktor $n+p+q$ den Quozienten vorstellen.

Der erste Theil des Dividends ist an, d. i. das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem ersten Theile n des Quozienten; man findet daher den ersten Theil n des Quozienten, wenn man den ersten Theil an des Dividendes durch den ersten Theil a des Divisors dividirt. — Wenn man nun das Theilprodukt, welches n im Dividende hervorbringt, bildet, indem man nämlich den ganzen Divisor mit n multiplizirt, so ist, wenn dieses Theilprodukt von dem Dividende abgezogen wird, der erste Theil ap des Restes das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem zweiten Theile p des Quozienten; man erhält also diesen zweiten Theil des Quozienten, wenn man den ersten Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt. — Bildet man wieder die Bestandtheile, welche p im Dividende hervorbringt, nämlich das Produkt aus dem ganzen Divisor und aus p, und zieht dieses Produkt von dem frühern Reste ab, so stellt der erste Theil aq des neuen Restes das Produkt aus dem ersten Theile a des Divisors und dem dritten Theile q des Quozienten vor; wird daher dieser erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, so erhält man den dritten Theil q des Quozienten; u. s. f.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich für das Dividiren zweier zusammengesetzten algebraischen Ausdrücke folgendes Verfahren:

1. Man dividire den ersten Theil des Dividends durch den ersten Theil des Divisors, so hat man den ersten Theil des Quozienten. Mit diesem ersten Theile multiplizire man den ganzen Divisor und ziehe das Produkt vom Dividende ab.
2. Zu dem Reste setze man das folgende oder auch mehrere folgende Glieder des Dividends herab, und dividire wieder den ersten Theil dieses neuen Theildividends durch den ersten Theil des Divisors; dadurch bekommt man den zweiten Theil des Quozienten. Mit diesem zweiten Theile wird nun der ganze Divisor multiplizirt, und das Produkt von dem letzten Theildividende abgezogen.
3. Zu dem neuen Reste setzt man wieder eines oder mehrere von den folgenden Theilen des Dividends herab und wiederholt das vorhergehende Verfahren, bis alle Theile des Dividends in Anspruch genommen wurden.

4. Wenn zuletzt ein Rest übrig bleibt, so ist dieser noch durch den Divisor zu dividiren; der Quozient davon wird jedoch nur angezeigt, und in Form eines Bruches zu dem erhaltenen ganzen Quozienten dazu gesetzt.

Beispiele.

1) $(24abc - 15cxy - 48abd + 30dxy) : (3c - 6d) = 8ab - 5xy$

$$\begin{array}{llll}
24abc & & -48abd & \\
- & & + & \\
\hline
& -15cxy & & +30dxy \\
& -15cxy & & +30dxy \\
& + & & - \\
\hline
& & 0 &
\end{array}$$

2) $(10aa - 11ab - 6bb) : (2a - 3b) = 5a + 2b$

$$\begin{array}{lll}
10aa & -15ab & \\
- & + & \\
\hline
& +4ab & -6bb \\
& +4ab & -6bb \\
& - & + \\
\hline
& 0 &
\end{array}$$

3) $(45mm - 4mn - 60nn) : (9m + 10n) = 5m - 6n$

$$\begin{array}{lll}
45mm & +50mn & \\
- & - & \\
\hline
& -54mn & -60nn \\
& -54mn & -60nn \\
& + & + \\
\hline
& 0 &
\end{array}$$

4) $(10aabb - 7abcd - 10ccdd) : (2ab - 3cd) = 5ab + 4cd + \frac{2ccdd}{2ab - 3cd}$

$$\begin{array}{lll}
10aabb & -15abcd & \\
& + & \\
\hline
& +8abcd & -10ccdd \\
& +8abcp & -12ccdd \\
& - & + \\
\hline
& & +2ccdd
\end{array}$$

5) $(9yy - 4xx - 4x - 1) : (3y - 2x - 1) = 3y + 2x + 1$

$$\begin{array}{llllll}
9yy & -6xy & -3y & & & \\
- & + & + & & & \\
\hline
& +6xy & +3y & -4xx & -4x & \\
& +6xy & & -4xx & -2x & \\
& - & & + & + & \\
\hline
& & +3y & & -2x & -1 \\
& & +3y & & -2x & -1 \\
& & - & & + & + \\
\hline
& & & 0 & &
\end{array}$$

6) $(10abcxy - 15defxy + 2abcz - 3defz) : (2abc - 3def)$
$= 5xy + z$

7) $(3aa + 4ab - 8ac - 4bb + 8bc - 3cc) : (3a - 2b + c)$
$= a + 2b - 3c$

8) $(1 + 5m + 6mm - 8n - 19mn + 15nn) : (1 + 3m - 5n)$
$= 1 + 2m - 3n$

9) $(6aa - 13ab + 4ax + 6bb - 11bx - 10xx) : (3a - 2b + 5x)$
$= 2a - 3b - 2x.$

10) $(24xx - 38ax + 15aa) : (4x - 3a) = \ldots$

11) $(8mmm - 1) : (2m - 1) = \ldots$

12) $(27yyy - 135yyz + 225yzz - 125zzz) : (3y - 5z) = \ldots$

III. Das Rechnen mit gebrochenen algebraischen Ausdrücken.

§. 22.

Für die Bruchrechnung mit Buchstaben gelten dieselben Sätze, welche für das Rechnen mit besondern Brüchen entwickelt wurden; es wird hier daher genügen, die Anwendung jener Sätze an Beispielen mit Buchstabengrößen durchzuführen.

Nur eine Bemerkung hinsichtlich der **gemischten Zahlen** muß hier vorausgeschickt werden. Während bei besondern gemischten Zahlen der mit der ganzen Zahl verbundene Bruch immer als zu derselben hinzuzusetzend, somit als positiv zu betrachten ist, so daß z. B. $5\frac{3}{4}$ so viel bedeutet als $5 + \frac{3}{4}$; kann bei einer allgemein gemischten Zahl der angehängte Bruch, so wie die ganze Zahl, positiv oder negativ sein, und es kann eine gemischte algebraische Größe eine der folgenden Formen haben:

$$a + \frac{m}{n},\ a - \frac{m}{n},\ \frac{m}{n} - a,\ -a - \frac{m}{n}.$$

Wenn mit gemischten Zahlen Rechnungsoperazionen vorzunehmen sind, werden sie zuerst in unechte Brüche verwandelt. Bei dieser Verwandlung wird auch, wie bei besondern Zahlen, die ganze Zahl mit dem Nenner des dabei stehenden Bruches multiplizirt, aber dann der Zähler zu diesem Produkte addirt oder davon subtrahirt, je nachdem der Bruch positiv oder negativ ist.

§. 23.

Beispiele über die Verwandlung gemischter Zahlen in Brüche.

1) $a + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}$

2) $a - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$

3) $\frac{m}{n} - a = \frac{m - an}{n}$

4) $2x - \frac{3y}{4z} = \frac{8xz - 3y}{4z}$

5) $1 + \frac{x-y}{x+y} = \frac{x+y+x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y}$

6) $1 - \frac{x-y}{x+y} = \frac{x+y-x+y}{x+y} = \frac{2y}{x+y}$

7) $\frac{1+2xx}{x} - 3x = \frac{1+2xx-3xx}{x} = \frac{1-xx}{x}$

8) $a + b - \frac{aa+bb}{a+b} = \frac{aa+2ab+bb-aa-bb}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$.

9) $2a + \frac{3b}{x} = \ldots$

10) $5a - 2b + \frac{3aa - 4bb}{5a - 6b} = \ldots$

11) $\frac{2 - 3a + 4aa}{5 - 6a} - 7a = \ldots$

§. 24.

Beispiele über die Darstellung mehrerer Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner.

1. Es seien die Brüche $\frac{a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{5}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist $2 . 3 . 5 = 30$; man hat daher

$30 : 2 = 15, \; a \times 15 = 15a,$ also $\frac{2}{a} = \frac{15a}{30}$;

$30 : 3 = 10, \; 2a \times 10 = 20a,$ " $\frac{2a}{3} = \frac{20a}{30}$;

$30 : 5 = 6, \; 3a \times 6 = 18a,$ " $\frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}$;

2. Man bringe die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{bd}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Da b und d als Faktoren in bd erscheinen, so ist bd der kleinste gemeinschaftliche Nenner, und man erhält

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \; \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}, \; \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

3. Man soll die Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{aa}$, $\frac{3}{aaa}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner bringen.

	aaa	
$\frac{1}{a}$	aa	aa daher $\frac{1}{a} = \frac{aa}{aaa}$
$\frac{2}{aa}$	a	2a 〃 $\frac{2}{aa} = \frac{2a}{aaa}$
$\frac{3}{aaa}$	1	3 〃 $\frac{3}{aaa} = \frac{3}{aaa}$

4. Es seien die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{3x}{4cd}$, $\frac{5y}{6dd}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bringen.

	3, b, 4cd, 6dd
2	b, 2cd, 3dd
d	b, 2c, 3d.

Der k. g. Nenner ist also 2 . d . b . 2c . 3d = 12bcdd, und man hat

	12bcdd	
$\frac{1}{3}$	4bcdd	4bcdd, daher $\frac{1}{3} = \frac{4bcdd}{12bcdd}$;
$\frac{a}{b}$	12cdd	12acdd 〃 $\frac{a}{b} = \frac{12acdd}{12bcdd}$;
$\frac{3x}{4cd}$	3bd	9bdx 〃 $\frac{3x}{4cd} = \frac{9bdx}{12bcdd}$;
$\frac{5y}{6dd}$	2bc	10bcy 〃 $\frac{5y}{6dd} = \frac{10bcy}{12bcdd}$;

§. 25.

Beispiele über das Addiren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$

2) $\frac{x+y}{2p} + \frac{x-y}{2p} = \frac{x+y+x-y}{2p} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$

3) $\frac{n+p}{3} + \frac{n-p-q}{3} + \frac{n+q}{3} = \frac{3n}{3} = n$

4) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}$

5) $\frac{2x+3y}{2} + \frac{x-2y}{3} = \frac{6x+9y}{6} + \frac{2x-4y}{6} = \frac{8x+5y}{6}$

6) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{aa+2ab+bb+aa-2ab+bb}{aa-bb} = \frac{2aa+2bb}{aa-bb}$.

7) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{7x}{10} = \ldots$

8) $\frac{3m-2n}{m+2n} + \frac{m+2n}{m-2n} = \ldots$

§. 26.

Beispiele über das Subtrahiren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$

2) $\frac{x + y}{2m} - \frac{x - y}{2m} = \frac{x + y - x + y}{2m} = \frac{2y}{2m} = \frac{y}{m}$

3) $\frac{5m - 3n}{4} - \frac{m + n}{4} = \frac{5m - 3n - m - n}{4} = \frac{4m - 4n}{4} = m - n$

4) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{bx}{ab} - \frac{ay}{ab} = \frac{bx - ay}{ab}$

5) $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4} = \frac{10b}{12} - \frac{9b}{12} = \frac{b}{12}$

6) $\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} = \frac{(x + y)(x + y) - (x - y)(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{4xy}{xx - yy}$.

7) $\frac{5a}{3} - \frac{3a}{4} = \ldots$

8) $\frac{2b - 5x}{3b + 4x} - \frac{4b - 5x}{3b - 2x} = \ldots$

9) $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{5xy} = \ldots$

§. 27.

Beispiele über das Multiplizieren der Brüche.

1) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$

2) $\frac{3}{4ab} \cdot 2b = \frac{3}{2a}$

3) $\frac{2abx}{3m} \cdot -5c = -\frac{10abcx}{3m}$

4) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot 3a = \frac{a + b}{a} \cdot 3a = 3a + 3b$

5) $\left(x - y + \frac{xx + yy}{x + y}\right) \cdot (x + y) = \frac{2xx}{x + y} \cdot (x + y) = 2xx$

6) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$

7) $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{3b}{4n} \cdot -\frac{4c}{5p} = -\frac{2abc}{5mnp}$

8) $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{y + x}{y} \cdot \frac{y - x}{y} = \frac{yy - xx}{yy}$

9) $\left(2a + \frac{b}{3c}\right)\left(\frac{2b}{5c} - a\right) = \frac{6ac + b}{3c} \cdot \frac{2b - 5ac}{5c} =$
$= \frac{2bb + 7abc - 30aacc}{15cc}$

10) $\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m + n} \cdot \frac{n}{n - m} = \frac{m}{n}$.

11) $\frac{5x}{3a} \cdot - \frac{3y}{4b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot - \frac{7z}{8d} = \ldots$

12) $\left(3x - \frac{4ax - 3}{2a}\right) \cdot - 5ab = \ldots$

13) $\left(\frac{a + b}{a - b} + 1\right)\left(\frac{a - b}{a + b} - 1\right) = \ldots$

§. 28.

Beispiele über das Dividiren der Brüche.

1) $\frac{ab}{c} : a = \frac{b}{c}$

2) $\frac{3ab}{c} : 4d = \frac{3ab}{4cd}$

3) $\frac{12mpx}{5nq} : -3x = -\frac{4mp}{5nq}$

4) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) : 2b = \frac{a + b}{a} : 2b = \frac{a + b}{2ab}$

5) $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

6) $2m : \left(1 - \frac{n}{m}\right) = 2m : \frac{m - n}{m} = 2m \cdot \frac{m}{m - n} = \frac{2mm}{m - n}$

7) $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$

8) $\frac{2ax}{3by} : -\frac{5mx}{6ny} = \frac{2ax}{3by} \cdot -\frac{6ny}{5mx} = -\frac{12anxy}{15bmxy} = -\frac{4an}{5bm}$

9) $\left(1 + \frac{m}{x}\right) : \left(1 - \frac{m}{x}\right) = \frac{x + m}{x} : \frac{x - m}{x} = \frac{x + m}{x} \cdot \frac{x}{x - m} =$
$= \frac{x + m}{x - m}$

10) $\frac{aa - bb}{2ab} : \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{a - b}{2b}$

11) $\left(\frac{5a - 2x}{4} + 6a - 3x\right) : -\frac{a}{4} = \ldots$

12) $\frac{2x - 7}{3x + 3} : \frac{5x - 1}{4x - 3} = \ldots$

Dritter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 29.

Wenn eine Zahl mehrere Male als Faktor gesetzt wird, so nennt man das Produkt eine Potenz jener Zahl, und zwar die so vielte Potenz, als wie oft jene Zahl als Faktor gesetzt wurde; die Zahl, welche öfters als Faktor gesetzt wird, heißt eine Wurzel des erhaltenen Produktes, und zwar die so vielte Wurzel, als wie oft sie als Faktor gesetzt werden muß, um jenes Produkt zu geben. Z. B.:

$$3 \times 3 = 9$$
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243.$$

Hier ist 9 die 2te Potenz, 27 die 3te, 81 die 4te, 243 die 5te Potenz von 3; umgekehrt ist 3 die 2te Wurzel von 9, die 3te Wurzel von 27, die 4te von 81, die 5te von 243.

Die zweite Potenz wird gewöhnlich auch das Quadrat, die dritte Potenz der Kubus genannt; eben so heißt die zweite Wurzel die Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Wurzel als Faktor gesetzt werden muß, damit eine andere Zahl als Potenz herauskomme, wird der Exponent genannt. In den früheren Beispielen stellen die Zahlen 2, 3, 4, 5 nach der Reihe die Exponenten vor.

Durch das Zusammentreten der Potenz und der Wurzel ergeben sich zwei wichtige Rechnungsoperazionen, das Potenziren und das Wurzelausziehen.

Eine Zahl zur 2ten, 3ten, . . . mten Potenz erheben, heißt diese Zahl 2mal, 3mal, . . . mmal als Faktor setzen; z. B. 3 zur 4ten Potenz erheben, heißt 3 4mal als Faktor setzen, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, die 4te Potenz von 3 ist also 81. Diese Operazion wird dadurch angezeigt, daß man der Wurzel rechts oben den Exponenten beisetzt; es ist also:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$4^3 = 4 \times 4 \times 4$$
$$a^5 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a.$$

Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, so daß a so viel bedeutet als a^1.

Die Begriffe Koeffizient und Potenzexponent müssen von einander wohl unterschieden werden; es ist:

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; setzt man z. B. $a = 3$, so ist:

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
$$a^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81.$$

Aus einer Zahl die 2te, 3te, ...mte Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 2mal, 3mal, ...m mal als Faktor gesetzt, jene vorgelegte Zahl gibt; z. B. aus 32 die 5te Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 5mal als Faktor gesetzt, 32 gibt; diese Zahl ist 2, den $2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 32$. Für das Wurzelausziehen hat man das Zeichen $\sqrt{\ }$, in dessen Oeffnung der Exponent gesetzt wird; so bezeichnet man die 5te Wurzel aus 32 durch $\sqrt[5]{32}$. Bei der zweiten Wurzel wird der Exponent 2 nicht angeschrieben, so das $\sqrt{5}$ so viel bedeutet als $\sqrt[2]{5}$; es kann hier kein Mißverständniß entstehen, weil die erste Wurzel einer Zahl immer der Zahl selbst gleich ist, und man daher bei der ersten Wurzel gar kein Wurzelzeichen anzuschreiben braucht.

I. Zeichen der Potenzen.

§. 30.

Betrachten wir zuerst die Potenzen einer positiven Wurzel $+a$; es ist:

$$(+a)^2 = +a \,.\, +a = +aa = +a^2,$$
$$(+a)^3 = +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaa = +a^3,$$
$$(+a)^4 = +a \,.\, +a \,.\, +a \,.\, +a = +aaaa = +a^4,$$

u. s. w.

Eine positive Wurzel gibt also, zu einer geraden oder ungeraden Potenz erhoben, stets ein positives Resultat.

Anders ist es bei einer negativen Wurzel $-a$; man hat:

$$(-a)^2 = -a \,.\, -a = +aa = +a^2,$$
$$(-a)^3 = -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaa = -a^3,$$
$$(-a)^4 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a = +aaaa = +a^4,$$
$$(-a)^5 = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \,. = -aaaaa = -a^5,$$

u. s. w.

Daraus ist ersichtlich, daß eine negative Wurzel, zu einer geraden Potenz erhoben, ein positives, zu einer ungeraden Potenz erhoben, ein negatives Resultat gibt.

II. Die vier Rechnungsarten mit Potenzgrößen.

§. 31.

1. Das Addiren und Subtrahiren.

Für das Addiren und Subtrahiren der Potenzgrößen gelten dieselben Sätze, wie für das Addiren und Subtrahiren algebraischer Ausdrücke überhaupt. Eine Zusammenziehung im Resultate kann nur dann Statt finden, wenn die Potenzgrößen **gleichartig** sind, d. i. wenn sie sowohl gleiche Wurzeln als gleiche Exponenten haben.

Beispiele.

1) $3a^4 + (-4b^3) = 3a^4 - 4b^3$.
2) $3a^4 - (-4b^3) = 3a^4 + 4b^3$.
3) $2a^3 + (5a^2) - (3a) = 2a^3 + 5a^2 - 3a$.
4) $3a^2 + (-5a^2) - (4a^2) - (-7a^2) =$
$$3a^2 - 5a^2 - 4a^2 + 7a^2 = a^2$$
5) $7a^2b^3 - 3a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 = 5a^2b^3 + a^3b^2$.

§. 32.

2. Das Multiplizieren.

Bei der Multiplikazion werden die Potenzgrößen ohne Zeichen neben einander gestellt. Z. B.:

$a^3x^2 \times by^2 = a^3bx^2y^2$; $3ab^2m^2 \,.\, -5b^2n^3 = -15ab^2m^2n^3$.

Eine Abkürzung kann nur dann eintreten, wenn die Potenzgrößen entweder gleiche Wurzeln oder gleiche Exponenten haben.

a) Wenn die Wurzeln gleich sind.

$$a^2 \,.\, a = aa \,.\, a = aaa = a^3,$$
$$a^3 \,.\, a^2 = aaa \,.\, aa = aaaaa = a^5,$$
$$a^5 \,.\, a^3 = aaaaa \,.\, aaa = aaaaaaaa = a^8,$$
$$a^3 \,.\, a^2 \,.\, a^4 = aaa \,.\, aa \,.\, aaaa = aaaaaaaaa = a^9.$$

Man sieht, daß der Exponent im Produkte gleich ist den Exponenten der Faktoren zusammengenommen. **Potenzgrößen derselben Wurzel werden also multiplizirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält, und ihr die Summe aus den Exponenten der Faktoren zum Exponenten gibt.**

1) $a^4 \cdot - 3a = - 3a^5$.
2) $5m^2x \cdot 2mx^2 = 10m^3x^3$.
3) $- 3a^3x^2 \cdot - a^2x^4 = 3a^5x^6$.
4) $6ab^2y^3 \cdot - 2b^3y^3 = - 12ab^5y^6$.
5) $2a^2m^3x^4 \cdot - 3am^5x^2 \cdot 4a^3mx^2 = - 24a^6m^9x^8$.
6) $5a^4b^2 \cdot 3ac^3 \cdot - 2b^3d \cdot - 4ac^2d^5 = 120a^6b^5c^5d^6$.
7) $7a^2x \cdot 3ax^2 \cdot - 2ax = \ldots$
8) $8m^3p^5 \cdot - 7m^3n^4p \cdot 3mn^2p^4 \cdot n^5 = \ldots$

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Man hat:

$a^2 \cdot b^2 \quad = aa \cdot bb = ab \cdot ab = (ab)^2$
$a^3 \cdot b^3 \quad = aaa \cdot bbb = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3$
$a^4 \cdot b^4 \quad = aaaa \cdot bbbb = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^4$
$a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = aaa \cdot bbb \cdot ccc = abc \cdot abc \cdot abc = (abc)^3$.

Potenzgrößen desselben Exponenten werden daher miteinander multiplizirt, wenn man die Wurzeln multiplizirt, und ihr Produkt zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Beispiele.

1) $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$.
2) $4^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = (4 \cdot 5 \cdot 5)^4 = 100^4$.
3) $2^5 \cdot a^5 \cdot b^5 = (2ab)^5$.
4) $(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2$.
5) $x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot 3^4 = \ldots$
6) $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4y}{5b}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2ax}{3by}\right)^3 = \ldots$

§. 32.

3. Das Dividiren.

Potenzgrößen werden auf dieselbe Art, wie algebraische Größen überhaupt, dividirt. Z. B.:

$$24a^2b^3c^4 : 6a^2c^4 = 4b^3; \quad 15ab^2x^3 : - 3b^2y^2 = - \frac{5ax^3}{y^2}$$

Eine Abkürzung im Verfahren kann nur dann Statt haben, wenn entweder die Wurzeln oder die Exponenten gleich sind.

a) Wenn die Wurzeln gleich sind.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo der Exponent des Dividends größer ist als jener der Divisors. Man findet:

$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3$,
$a^6 : a^4 = aaaaaa : aaaa = aa = a^2$,
$a^4 : a \;\; = aaaa : a = aaa = a^3$,

so daß der Exponent des Quozienten immer gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger jenem des Divisors.

Ist der Exponent des Dividends kleiner als der Exponent im Divisor, so erscheint der Quozient in Form eines Bruches; man hat z. B.

$$a^2 : a^5 = aa : aaaaa = 1 : aaa = \frac{1}{a^3},$$

$$a^3 : a^5 = aaa : aaaaa = 1 : aa = \frac{1}{a^2},$$

$$a^4 : a^8 = aaaa : aaaaaaaa = 1 : aaaa = \frac{1}{a^4}.$$

Drückt man nun den Bruch $\frac{1}{a^m}$ durch a^{-m} aus, was man eine Potenz mit negativen Exponenten nennt, während a^m eine Potenz mit positiven Exponenten heißt; so ist:

$$a^2 : a^5 = \frac{1}{a^3} = a^{-3},$$

$$a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2} = a^{-2},$$

$$a^4 : a^8 = \frac{1}{a^4} = a^{-4},$$

und man sieht, daß auch in diesem Falle der Potenzexponent im Quozienten erhalten wird, wenn man von dem Exponenten im Dividend jenen des Divisors subtrahirt.

Es seien endlich die Exponenten im Dividend und im Divisor gleich, z. B. beide gleich 3, so ist

$$a^3 : a^3 = 1.$$

In diesem Falle ist also der Quozient keine Potenz von a, sondern die Einheit. Betrachtet man daher 1 auch als eine Potenz von a, und zwar als die 0te, so daß $a^0 = 1$ ist, so hat man

$$a^3 : a^3 = 1 = a^0,$$

und es findet die in den beiden früheren Fällen nachgewiesene Gesetzmäßigkeit auch in diesem Falle Statt.

Man kann daher allgemein sagen:

Potenzgrößen derselben Wurzel werden dividirt, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält, und ihr zum Exponenten eine Zahl gibt, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

Beispiele.

1) $12a^7 : 3a^3 = 4a^4$

2) $-18a^3 : 6a^5 = -3a^{-2} = -\frac{3}{a^2}$

3) $16a^5x^4 : -4a^4x^2 = -4ax^2$

4) $30x^2y^3 : 5x^3y = 6x^{-1}y^2 = \frac{6y^2}{x}$

5) $m^5p^2x^4 : mp^2x^3 = m^4x$

6) $ab^2c^3 : -abc = bc^2$

7) $35x^3y^2z^4 : 7xy^2z^3 = \ldots$

8) $4a^3m^4x^5 : -5a^5m^3x = \ldots$

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Es ist:

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Daraus folgt:

Potenzgrößen desselben Exponenten werden dividirt, wenn man die Wurzeln dividirt, und ihren Quozienten zur gemeinschaftlichn Potenz erhebt.

Beispiele.

1) $36^3 : 4^3 = \left(\frac{36}{4}\right)^3 = 9^3$

2) $(5a^2bc^3)^4 : (5ac)^4 = \left(\frac{5a^2bc^3}{5ac}\right)^4 = (abc^2)^4$

3) $(32m^3x^4)^5 : (8m^2xy)^5 = \left(\frac{32m^3x^4}{8m^2xy}\right)^5 = \left(\frac{4mx^3}{y}\right)^5.$

4) $(48a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2 = \ldots$

5) $(3mn^2p^3)^3 : (4m^2n) = \ldots$

§. 33.

4. Rechnungsoperazionen mit geordneten algebraischen Ausdrücken.

Wenn in einem mehrgliedrigen algebraischen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzerponenten jener Wurzel zu ordnen. Fängt man mit der höchsten Potenz an, und läßt dann immer niedrigere Potenzen folgen, so heißt das Polynom **fallend geordnet**; setzt man dagegen zuerst jenes Glied, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Wurzel enthält, und geht dann zu immer höheren Potenzen über, so nennt man das Polynom **steigend geordnet**. So erhält z. B. der Ausdruck

$$5x^2 + 1 - 3x + x^5 - 4x^3 - 6x^4$$

fallend geordnet folgende Form:

$$x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1,$$

und steigend geordnet:

$$1 - 3x + 5x^2 - 4x^3 - 6x^4 + x^5.$$

Die Rechnungsoperazionen mit geordneten Polynomen werden auf dieselbe Art vorgenommen, wie mit zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken überhaupt. Beim Addiren und Subtrahiren stellt man die gleichartigen Glieder unter einander, und zieht sie zusammen. Dasselbe geschieht beim Multiplizieren in den Theilprodukten. Beim Dividiren muß beim Anschreiben des jedesmaligen Restes dieselbe Anordnung beobachtet werden, welche im Dividende und im Divisor vorherrscht.

Beispiele.

a. Addizion.

1)
$$\begin{array}{rrrr} x^3 & - 5x^2 & + 3x & - 6 \\ 3x^3 & + 2x^2 & + 5x & + 8 \\ \hline 4x^3 & - 3x^2 & + 8x & + 2 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & - 3x^3y & + 5x^2y^2 & + 7xy^3 & \\ & + x^3y & - 3x^2y^2 & - 3xy^3 & - 8y^4 \\ \hline x^4 & - 2x^3y & + 2x^2y^2 & + 4xy^3 & - 8y^4. \end{array}$$

b. Subtrakzion.

1)
$$\begin{array}{rrrrr} 5a^4 & - 4a^3 & + 3a^2 & - 2a & + 1 \\ 3a^4 & - 3a^3 & - 5a^2 & + 5a & + 7 \\ - & + & + & - & - \\ \hline 2a^4 & - a^3 & + 8a^2 & - 7a & - 6 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rrrrr} 9 & + 8m & - 7m^2 & - 6m^3 & + 5m^4 \\ -5 & + 4m & - 3m^2 & + 2m^3 & - m^4 \\ + & - & + & - & + \\ \hline 14 & + 4m & - 4m^2 & - 8m^3 & + 6m^4. \end{array}$$

c. Multiplikazion.

1)
$$\begin{array}{rrrrr} x^3 & - 8x^2 & + 5x & - 7 & \\ 3x & - 2 & & & \\ \hline 3x^4 & - 24x^3 & + 15x^2 & - 21x & \\ & - 2x^3 & + 16x^2 & - 10x & + 14 \\ \hline 3x^4 & - 26x^3 & + 31x^2 & - 31x & + 14 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rrrrrr} 3 & + 4x & + 5x^2 & - 6x^3 & & \\ 4 & - 5x & - 6x^2 & & & \\ \hline 12 & + 16x & + 20x^2 & - 24x^3 & & \\ & - 15x & - 20x^2 & - 25x^3 & + 30x^4 & \\ & & - 18x^2 & - 24x^3 & - 30x^4 & + 36x^5 \\ \hline 12 & + x & - 18x^2 & - 73x^3 & & + 36x^5 \end{array}$$

$$3)\quad x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$
$$x + 1$$
$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$$
$$+ x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$
$$x^6 - 1$$

$$4)\quad (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) = a^5 - 1$$
$$5)\quad (m^2 + 2m - 3)(m^2 - 2m + 3) = m^4 - 4m^2 + 12m - 9$$
$$6)\quad (3a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 4b^3)(2a^2 - 5ab + 3b^2)$$
$$= 6a^5 - 25a^4b + 48a^3b^2 - 58a^2b^3 + 41ab^4 - 12b^5$$
$$7)\quad (2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)(3p^2 + 7p - 9) = \ldots$$
$$8)\quad (x - 1)(x - 2)(x - 3) = \ldots$$
$$9)\quad (2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6) = \ldots$$
$$10)\quad (3a^2 - 4a + 2)(5a^2 + 7a - 6)(a^2 - 2a + 5) = \ldots$$
$$11)\quad (4x^2 - 3xy - y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + 5xy + 3y^2) = \ldots$$

d. Division.

$$1)\quad (6x^3 - 15x^2 + 12x - 3) : (x^2 - 2x + 1) = 6x - 3$$
$$6x^3 - 12x^2 + 6x$$
$$- \quad + \quad -$$
$$- 3x^2 + 6x - 3$$
$$- 3x^2 + 6x - 3$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$0$$

$$2)\quad (9x^4 - 19x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - 2x + 1) = 3x^2 + 2x - 5$$
$$9x^4 - 6x^3 + 3x^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$+ 6x^3 - 19x^2 + 12x$$
$$+ 6x^3 - 4x^2 + 2x$$
$$- \quad + \quad -$$
$$- 15x^2 + 10x - 5$$
$$- 15x^2 + 10x - 5$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$0$$

$$3)\quad (a^4 - 1) : (a + 1) = a^3 - a^2 + a - 1$$
$$a^4 + a^3$$
$$- \quad -$$
$$- a^3 - 1$$
$$- a^3 - a^2$$
$$+ \quad +$$
$$+ a^2 - 1$$
$$+ a^2 + a$$
$$- \quad -$$
$$- a - 1$$
$$- a - 1$$
$$+ \quad +$$
$$0$$

4) $(x^5 - 1) : (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
5) $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4) : (4m^2 + 4mn + n^2) = 4m^2 - 4mn + n^2$
6) $(y^6 - 2y^5 - 7y^4 + 20y^3 - 21y^2 - 18y + 27) : (y^2 - 2y - 3)$
$= y^4 - 4y^2 + 6y - 9$
7) $(7x^{10} - 25x^8y^2 + 48x^6y^4 - 23^4y^6 + 5x^2y^8) : (7x^4 - 4x^2y^2 + y^4)$
$= x^6 - 3x^4y^2 + 5x^2y^4$
8) $(8p^3 + 27) : (4p^2 - 6p + 9) = \ldots$
9) $(m^8 - 1) : (m - 1) = \ldots$
10) $(m^7 - 1) : (m - 1) = \ldots$
11) $(a^4 + 4b^4) : (a^2 - 2ab + 2b^2) = \ldots$
12) $(2x^4 + 7bx^3 + b^2x^2 + 2b^3x + 24b^4) : (2x^2 - 3bx + 4b^2) = \ldots$

III. Das Potenziren mit Rücksicht auf verschiedene Wurzeln.

§. 34.

1. Potenziren einer Summe oder Differenz.

Es wird für den Zweck dieses Lehrbuches genügen, zu zeigen, wie die Summe oder Differenz zweier Zahlen, d. i. ein **Binom** auf die **zweite** und **dritte** Potenz erhoben wird.

Um das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, darf man dasselbe nur mit $a + b$ multipliziren; man findet dadurch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Eben so erhält man:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat eines Binoms ist also gleich dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Produkte beider Theile, und dem Quadrate des zweiten Theiles.

Die beiden Quadrate sind immer positiv, das Zeichen des doppelten Produktes ist $+$ oder $-$, je nachdem die beiden Theile des gegebenen Binoms einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Multiplizirt man das Quadrat einer Zahl mit dieser Zahl selbst, so erhält man ihren Kubus. Es ist also

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und $$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Der Kubus eines Binoms ist also gleich dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multiplizirt mit dem zweiten Theile, dem dreifachen ersten Theile multiplizirt mit dem Quadrate des zweiten Theiles, und dem Kubus des zweiten Theiles.

Wenn der zweite Theil des Binoms negativ ist, so sind auch der zweite und vierte Bestandtheil im Kubus negativ zu nehmen.

Beispiele.

1) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
3) $(5 + a)^2 = 25 + 10a + a^2$
4) $(3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2$
5) $(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$
6) $(3 - b)^3 = 27 - 27b + 9b^2 - b^3$.

2. Potenziren eines Produktes.

Es ist

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = aabb = a^2b^2,$$
$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaabbb = a^3b^3,$$
$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = aaaabbbb = a^4b^4.$$

Ein Produkt wird daher zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Faktor zu jener Potenz erhebt, und diese Potenzen mit einander multiplizirt.

Beispiele.

1) $(xy)^5 = x^5y^5$ 2) $(2x)^3 = 8x^3$
3) $(5ax)^4 = 625(ax)^4 = 625a^4x^4$
4) $(10abc)^5 = 100000a^5b^5c^5$
5) $(abc)^{10} = \ldots$ 6) $(3amxy)^3 = \ldots$

3. Potenziren eines Quozienten (Bruches).

Man hat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

Ein Bruch wird daher zu einer Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner zu derselben Potenz erhebt, und die Potenz des Zählers durch die Potenz des Nenners dividirt.

Beispiele.

1) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}$ 2) $\left(\frac{y}{10}\right)^4 = \frac{y^4}{10000}$

3) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}$

4) $\left(\frac{m+n}{2p}\right)^2 = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4p^2}$

5) $\left(\frac{mx}{ny}\right)^8 = \ldots$ 6) $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^7 = \ldots$

7) $\left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^3 = \ldots$

4. Potenziren einer Potenz.

Es ist

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6 = a^{3 \cdot 2}$$
$$(a^2)^4 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^8 = a^{2 \cdot 4}$$
$$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{2m}$$
$$(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m}$$

Eine Potenz wird also zu einer Potenz erhoben, wenn man die Wurzel zum Produkte der Exponenten erhebt.

Beispiele.

1) $(a^5)^3 = a^{15}$ 2) $(10a^2)^3 = 1000a^6$

3) $(3m^2n^2)^2 = 9m^4n^4$ 4) $\left(\frac{2ax^2}{3by^2}\right)^2 = \left(\frac{4a^2x^4}{9b^2y^4}\right)$

5) $\left(\frac{3a^4m^3x^2}{4b^2n^3y^5}\right)^4 = \ldots$ 6) $(5a^2 - 6y^3)^2 = \ldots$

7) $(2ax^2 + 3by^2)^3 = \ldots$ 8) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^3}{a}\right)^2 = \ldots$

9) $\left(\frac{3a^2x}{5m^3} - \frac{7by^2}{12n^3}\right)^3 = \ldots$

IV. Erheben aufs Quadrat und Ausziehen der Quadratwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 36.

Das Quadrat einer Zahl wird gefunden, wenn man diese Zahl mit sich selbst multiplizirt. Z. B.:

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025,$$
$$(\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}$$
$$(1{\cdot}25)^2 = 1{\cdot}25 \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}5625.$$

Es ist von selbst klar, daß das Quadrat eines Dezimalbruches doppelt so viel Dezimalen enthält, als der gegebene Dizimalbruch, woraus folgt, daß im Quadrate die Dezimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müssen.

Die Quadrate der einzifferigen Zahlen sind:

Quadratwurzel	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Quadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Wegen der späteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Quadratwurzel soll hier noch ein anderes Verfahren, eine Zahl aufs Quadrat zu erheben, entwickelt werden.

Um z. B. 47 aufs Quadrat zu erheben, zerlege man diese Zahl in zwei Theile $40 + 7$, und bilde das Quadrat nach der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man erhält:

$$47^2 = (40+7)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2.$$

Um eine dreizifferige Zahl 368 zum Quadrate zu erheben, zerlege man sie ebenfalls in zwei Theile $360 + 8$, und man hat

$$368^2 = (360+8)^2 = 360^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2;$$

aber nach der früher angeführten Formel ist

$$360^2 = (300+60)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2$$

daher, wenn oben statt 360^2 dieser Werth gesetzt wird,

$$368^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2,$$

oder wenn man diese Bestandtheile unter einander schreibt,

$$\begin{array}{lrr}
368^2 = & 300^2 \ . \ . \ . & 90000 \\
& +\ 2 \times 300 \times 60 \ . \ . \ . & 36000 \\
& +\ 60^2 \ . \ . \ . & 3600 \\
& +\ 2 \times 360 \times 8 \ . \ . \ . & 5760 \\
& +\ 8^2 \ . \ . \ . & 64 \\
\hline
& & 135424.
\end{array}$$

Auf dieselbe Art erhält man auch

$$\begin{array}{lrr}
2438^2 = & 2000^2 \ . \ . \ . & 4000000 \\
& +\ 2 \times 2000 \times 400 \ . \ . \ . & 1600000 \\
& +\ 400^2 \ . \ . \ . & 160000 \\
& +\ 2 \times 2400 \times 30 \ . \ . \ . & 144000 \\
& +\ 30^2 \ . \ . \ . & 900 \\
& +\ 2 \times 2430 \times 8 \ . \ . \ . & 38880 \\
& +\ 8^2 \ . \ . \ . & 64 \\
\hline
& & 5943844.
\end{array}$$

Wenn man die Stellung der Ziffern in den einzelnen Bestandtheilen gehörig berücksichtiget, so können die Nullen beim Anschreiben ganz weggelassen werden; man braucht nur zu bedenken, daß jeder folgende Bestandtheil um eine Null weniger enthält, daher um eine Stelle rechts hinausgerückt werden müsse. Mit Hinweglassung der Nullen würden die früheren Beispiele so aussehen:

$$\begin{array}{rr}
\multicolumn{2}{l}{368^2} \\
\hline
3^2 \ . \ . & 9\ . \\
2 \times 3 \times 6 \ . \ . & 36\ . \\
6^2 \ . \ . & 36\ . \\
2 \times 36 \times 8 \ . \ . & 576\ . \\
8^2 \ . \ . & 64 \\
\hline
& 135424
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\multicolumn{2}{l}{2438^2} \\
\hline
2^2 \ . \ . & 4\ . \\
2 \times 2 \times 4 \ . \ . & 16\ . \\
4^2 \ . \ . & 16\ . \\
2 \times 24 \times 3 \ . \ . & 144\ . \\
3^2 \ . \ . & 9\ . \\
2 \times 243 \times 8 \ . \ . & 3888\ . \\
8^2 \ . \ . & 64\ . \\
\hline
& 5943844.
\end{array}$$

Aus diesen und anderen auf ähnliche Weise durchgeführten Beispielen ergibt sich für das Quadrat einer mehrzifferigen Zahl folgendes Bildungsgesetz:

1. Die erste oder höchste Ziffer der Wurzel gibt ihr eigenes Quadrat.

2. Jede folgende Ziffer gibt im Quadrate zwei Bestandtheile: das Doppelte der ihr vorangehenden Zahl multiplizirt mit dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.

3. Werden alle diese Bestandtheile so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addirt, so ist die Summe das Quadrat der vorgelegten Wurzel.

Beispiele.

1) 1234^2

	1^2	. .	1 .
$2 \times 1 \times 2$		. .	4 .
	2^2	. .	4 .
$2 \times 12 \times 3$		. .	72 .
	3^2	. .	9 .
$2 \times 123 \times 4$		. .	984 .
	4^2	. .	16
			1522756

2) 94.907^2

	9^2	. .	81 .
$2 \times 9 \times 4$		. .	72 .
	4^2	. .	16 .
$2 \times 94 \times 9$		. .	1692 .
	9^2	. .	81 . .
$2 \times 9490 \times 7$		. .	132860 .
	7^2	. .	49
			9007·338649

3) $724^2 = ?$ 4) $109{\cdot}2^2 = ?$ 5) $0{\cdot}34081^2 = ?$

6) Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen jede Seite 3′ 5″ ist? (Man erhebe die Länge einer Seite aufs Quadrat.)

7) Was kostet ein quadratförmiger Bauplatz, dessen Seite 9^0 3′ ist, wenn jede Quadratklafter mit 35 fl. 20 kr. bezahlt wird?

§. 37.

Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die Quadratwurzel ausgezogen wird, läßt sich aus dem Gesetze ableiten, nach welchem die Ziffern der Quadratwurzel in dem Quadrate zusammengestellt erscheinen.

Erhebt man z. B. 7342 zum Quadrate, so hat man:

$$\begin{array}{rrcl}
 & 7342^2 & & \\
 & 7^2 & \ldots & 49 \\
2 \times 7 \times & 3 & \ldots & 42 \\
 & 3^2 & \ldots & 9 \\
2 \times 73 \times & 4 & \ldots & 584 \\
 & 4^2 & \ldots & 16 \\
2 \times 734 \times & 2 & \ldots & 2936 \\
 & 2^2 & \ldots & 4 \\
\hline
 & & & 53|90|49|64
\end{array}$$

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu zwei Ziffern, wo sodann die erste Klasse links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Klassen, als die Quadratwurzel Ziffern enthält.

Die einzelnen Ziffern der Quadratwurzel werden nun durch folgende Betrachtungen ausgemittelt.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer kommt in der ersten Klasse vor; man findet daher die erste Ziffer der Quadratwurzel, wenn man die höchste Ziffer nimmt, deren Quadrat in der ersten Klasse enthalten ist; diese ist 7.

Erhebt man die erste Wurzelziffer 7 zum Quadrate, zieht dieses von der ersten Klasse ab, und setzt zu dem Reste 4 die zweite Klasse 90 hinzu, so kommen in der so entstehenden Zahl 490 die Bestandtheile vor, welche die zweite Wurzelziffer hervorbringt, nämlich das Produkt aus ihr und der doppelten ersten Ziffer, und ihr Quadrat, und zwar erstreckt sich das Produkt aus der zweiten und doppelten ersten Wurzelziffer nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Klasse, ist also in 49 enthalten Dividirt man daher die Zahl, welche aus dem früheren Reste und der zweiten Klasse entsteht, mit Ausschluß der letzten Ziffer, nämlich 49, durch das Doppelte der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 14, so erhält man die zweite Wurzelziffer 3. — Wenn dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Ziffer der Wurzel hervorgehen, zu bilden sind, so kann man, anstatt zuerst die doppelte erste Wurzelziffer mit der zweiten, dann diese zweite Wurzelziffer mit sich selbst zu multipliziren, das zweite Produkt um eine Stelle weiter rechts unter das erste zu stellen, und hierauf die Addizion zu verrichten, kürzer verfahren, wenn man sogleich zu der doppelten ersten Wurzelziffer, d. i. zu dem Divisor 14 die zweite Ziffer anhängt, und die so gebildete Zahl 143 mit der zweiten Wurzelziffer 3 multiplizirt. Man kann nämlich

$$\begin{array}{lrl}
\text{anstatt } 2 \,.\, 7 \,.\, 3 = & 14 \,.\, 3 = & 42 \,.\; \text{kürzer } 143 \,.\, 3 = 429 \\
3^2 = & 3 \,.\, 3 = & \underline{9} \\
 & & 429
\end{array}$$

machen.

Wird das Ergebniß 429 aus der zweiten Wurzelziffer von dem Reste der ersten zwei Klassen subtrahirt, und zu dem Reste 61 die dritte Klasse hinzugesetzt, so enthält die dadurch entstehende Zahl 6149 die Bestandtheile, welche die dritte Wurzelziffer im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Produkt aus dieser Wurzelziffer und dem Doppelten der ihr vorangehenden bereits bekannten Zahl in der Zahl 6149 mit Ausschluß der letzten Ziffer, also in 614 vor. Dividirt man daher 614 durch das Doppelte 146 der bereits gefundenen Wurzel, so ist der Quozient die dritte Ziffer der Wurzel. Die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser neuen Ziffer hervorgehen, werden gebildet, wenn man zu dem Doppelten der früheren Wurzelziffern, nämlich zum Divisor 146, die neu gefundene Ziffer anhängt, und diese Zahl 1464 mit der neuen Wurzelziffer 4 multiplizirt.

Zieht man dieses Produkt 5856 von dem früheren Dividende mit Einschluß der letzten Ziffer ab, setzt zu dem Reste 293 die nächstfolgende Klasse hinzu, und dividirt die dadurch entstehende Zahl mit Hinweglassung der letzten Ziffer, also 2936, durch das Doppelte der bereits entwickelten Wurzel, nämlich durch $2 \times 734 = 1468$, so erhält man die vierte Wurzelziffer 2.

Die ganze Rechnung wird demnach so stehen:

```
√53|9 0|4 9|6 4 = 7342
 49                          2 × 7 = 14
 ----
  49 0    : 143 × 3
  42 9                       2 × 73 = 146
  -----
   6 14 9 : 1464 × 4
   5 85 6                    2 × 734 = 1468
  -------
   2 93 6 4 : 14682 × 2
   2 93 6 4
  ---------
       =
```

Man kann das Produkt aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neu gefundene Ziffer anhängt, und aus dieser neuen Ziffer sogleich während des Multiplizirens von dem Dividende abziehen. Die Rechnung steht dann:

```
√53|9 0|4 9|6 4 = 7342
      4 9 0     : 143 × 3
      6 1 4 9   : 1464 × 4
    2 9 3 6 4   : 14682 × 2.
```

Aus diesen und anderen Beispielen, an denen man die hier gemachten Folgerungen durchführt, ergibt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel folgendes Verfahren:

1. Man theile die Zahl, von den Einheiten angefangen, in Klassen zu zwei Ziffern; die erste Klasse zur Linken kann auch nur eine Ziffer enthalten. Bei einem Dezimalbruche geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Dezimalpunkte gegen die Linke, und die Eintheilung

der Dezimulen vom Dezimalpunkte gegen die Rechte; wenn in den Dezimalen die letzte Klasse rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird, damit die Anzahl der Dezimalen eine gerade werde, eine Null angehängt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Quadrat in der ersten Klasse zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Quadrat erhoben, und dasselbe von der ersten Klasse subtrahirt.

3. Die folgenden Ziffern der Quadratwurzel werden durch die Division gefunden. Man setze nämlich zu dem Reste die nächstfolgende Klasse hinzu; diese Zahl, mit Hinweglassung der letzten Ziffer, ist der Dividend. Den Divisor findet man, wenn man den bereits gefundenen Theil der Wurzel mit 2 multiplizirt. Nun wird dividirt, und der Quozient als eine neue Ziffer in die Wurzel, und zugleich zu dem Divisor geschrieben.

4. Der so veränderte Divisor wird dann mit der neu gefundenen Ziffer der Wurzel multiplizirt, und das Produkt von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während der Multiplikazion selbst abgezogen. Läßt sich dieses Produkt nicht abziehen, so ist die neue Ziffer der Wurzel zu groß; man muß sie daher nach und nach kleiner nehmen, bis man subtrahiren kann.

5. Zu dem Reste setze man wieder die nächste Klasse hinzu, und wiederhole dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferklassen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man, ohne zu multipliziren und abzuziehen, sogleich die nächste Klasse herabsetzen, nur muß diese Null sowohl in die Wurzel als zu dem Divisor geschrieben werden.

6. Enthält das Quadrat Dezimalklassen, so setzt man in der Wurzel den Dezimalpunkt, bevor man die erste Klasse von Dezimalen in Rechnung zieht.

7. Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man die Quadratwurzel vollständig gefunden, und die vorgelegte Zahl ist ein vollkommenes Quadrat. Bleibt aber am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit in Dezimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Klasse von zwei Nullen anhängt, und übrigens so wie vorhin vorfährt.

Beispiele.

1) $\sqrt{3|76|36} = 194$

$276 : 29 \times 9$

$1536 : 384 \times 4$

= = = =

2) $\sqrt{34|86|78|44|01} = 59049$

$986 : 109 \times 9$

$57844 : 11804 \times 4$

$1062801 : 118089 \times 9$

= = = = = = =

$$\begin{array}{lll}
3)\ \sqrt{3|1\,5} = 17{\cdot}7482\ \ldots & & \\
\quad 2\,1\,5 & : & 27 \times 7 \\
\quad\ 2\,60\,0 & : & 347 \times 7 \\
\qquad 1\,710\,0 & : & 3544 \times 4 \\
\qquad\ 292\,40\,0 & : & 35488 \times 8 \\
\qquad\quad 8\,49\,60\,0 & : & 354962 \times 2 \\
\qquad\quad 1\,39\,676 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
4)\ \sqrt{17|76{\cdot}6\,2|2\,5} = 42{\cdot}15 & & \\
\quad 17\,6 & : & 82 \\
\quad\ 1\,2\,6\,2 & : & 841 \\
\qquad 4\,2\,1\,2\,5 & : & 8425 \\
\qquad = = = = & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
5)\ \sqrt{5|74{\cdot}3\,1|7\,8|1_0} = 23{\cdot}9857\ \ldots & & \\
\quad 17\,4 & : & 43 \\
\quad\ 4\,53\,1 & : & 469 \\
\qquad 41\,07\,8 & : & 4788 \\
\qquad\ 2\,77\,41\,0 & : & 47965 \\
\qquad\quad 37\,58\,50\,0 & : & 479707 \\
\qquad\quad\ 4\,00\,55\,1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
6)\ \sqrt{\tfrac{7}{8}} = \sqrt{0{\cdot}87|5_0} = 0{\cdot}935\,14\ \ldots & & \\
\qquad\qquad 6\,5\,0 & : & 183 \\
\qquad\qquad 1\,0\,10\,0 & : & 1865 \\
\qquad\qquad\quad 77\,50\,0 & : & 18704 \\
\qquad\qquad\quad 2\,68\,40\,0 & : & 187081 \\
\qquad\qquad\qquad 8\,13\,19\,0\,0 & : & 1870824 \\
\qquad\qquad\qquad 6\,48\,7\,04 & &
\end{array}$$

Soll die Quadratwurzel sehr viele Dezimalstellen enthalten, so kann die Arbeit bedeutend abgekürzt werden. Nachdem man nämlich um eine Ziffer mehr als die halbe Anzahl der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läßt man, anstatt zu dem Reste eine neue Klasse anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg, und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division. Z. B.

7) Um die Quadratwurzel aus 7·3891 in 7 Dezimalen zu erhalten, so hat man

vollständig

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{7{\cdot}3\,8|9\,1} = 2{\cdot}7182899\ \ldots & & \\
\quad 3\,3\,8 & : & 47 \\
\qquad 99\,1 & : & 541 \\
\qquad 45\,00\,0 & : & 5428 \\
\qquad\ 1\,57\,60\,0 & : & 54362 \\
\qquad 48\,87\,6\,0\,0 & : & 543648 \\
\qquad\quad 5\,38\,4\,1\,60\,0 & : & 5436569 \\
\qquad\qquad 49\,1\,2\,47\,90\,0 & : & 54365789 \\
\qquad\qquad\quad 1\,9\,55\,79\,9 & &
\end{array}$$

abgekürzt

$$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\;.\;.$$

3 38	:	47
991	:	541
45000	:	5428
157600	:	54362
48876	:	54,3,6,4
5385		
492		
3		

8) $\sqrt{1{\cdot}5\,7|82|35|2_0} = 1{\cdot}2562783\;.\;.\;.$

5,7	:	22
1 38,2	:	245
15 73,5	:	2506
69 92,0	:	25122
19 67,6	:	15,1,2,4
2 08 9		
7 9		
4		

9) $\sqrt{582169} = ?$ 10) $\sqrt{6849{\cdot}2176} = ?$

11) $\sqrt{0{\cdot}000256} = ?$ 12) $\sqrt{0{\cdot}0144144036} = ?$

13) $\sqrt{321} = ?$ 14) $\sqrt{235689} = ?$

15) $\sqrt{3{\cdot}52} = ?$ 16) $\sqrt{0{\cdot}35821} = ?$

17) $\sqrt{1\frac{11}{25}} = ?$ 18) $\sqrt{\frac{27}{56}} = ?$

19) Eine quadratförmige Wiese hat einen Flächenraum von $1201^{\square 0}$ $28^{\square\prime}$; wie groß ist die Länge einer Seite?

Um aus dem Flächeninhalte eines Quadrates die Länge einer Seite zu finden, muß man aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen.

$2201^{\square 0}\ 28^{\square\prime} = 43264^{\square\prime}$ $\sqrt{43264} = 208' = 34^0 4'$.

20) Die Fläche eines Quadrates ist $2^{\square 0}$ $15^{\square\prime}$ $16^{\square\prime\prime}$; wie groß ist eine Seite? — 1^0 $3'$ $4''$.

21) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als drei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten $1'$ $4''$, $2'$ $1''$, $2'$ $3''$ sind?

22) Ein Haus, dessen Grundfläche die Form eines Rechteckes hat, ist 12^0 $5'$ lang und 8^0 $4'$ breit; wie groß ist die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken des Hauses? — Die Länge und die Breite des Hauses kann man als Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes betrachten, dessen Hypothenuse dann die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken ist. Wenn aber in einem rechtwinkeligen Dreiecke die beiden Katheten gegeben sind, so findet man die Hypothenuse, wenn man jede Kathete zum Quadrate erhebt, diese Quadrate addirt, und aus der Summe die Quadratwurzel auszieht.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Länge} = 12^0\ 5' = 77' \\ \text{Breite} = \ \ 8^0\ 4' = 52'\end{array}\right\}\ \text{Katheten}\ \begin{array}{l}77^2 = 5929 \\ 25^2 = 2704\end{array}$$

$$\text{Hypoth.} = \sqrt{8633} = 92{\cdot}91' = \\ = 15^0\ 2'\ 11''.$$

23) Wie lang muß eine Leiter sein, damit sie bei einem Gebäude $2^0\ 2'$ hoch hinauf reiche, wenn sie unten $1^0\ 2'$ weit vom Gebäude aufgestellt werden soll?

24) Eine Thür, welche $7{\cdot}2'$ hoch und $4{\cdot}5'$ breit ist, soll mit Kreuzbug versehen werden; wie lang muß ein Kreuzbug werden?

25) Der Boden eines Zimmers ist $5^0\ 8'\ 4''$ lang und $4^0\ 1'\ 8''$ breit; der Boden eines anderen Zimmers hat den gleichen Flächeninhalt, aber die Form eines Quadrates; wie groß ist eine Seite desselben?

26) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Fläche $3^{\square'}\ 52^{\square''}$ enthält? — $1'\ 10''$.

Hier muß man den Flächeninhalt durch 3·1416 dividiren, und aus dem Quozienten die Quadratwurzel ausziehen.

27) Jemand will eine Scheibe machen, welche $2^{\square'}\ 39^{\square''}$ enthalten soll; wie groß wird er den Halbmesser dazu nehmen?

V. Erheben auf den Kubus und Ausziehen der Kubikwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 38.

Um eine Zahl zum Kubus zu erheben, darf man dieselbe nur dreimal als Faktor setzen. Z. B.:

$$738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272$$
$$\left(\tfrac{9}{16}\right)^3 = \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} = \tfrac{729}{4096}$$
$$7{\cdot}02^3 = 7.02 \times 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408.$$

Aus dem dritten Beispiele ist ersichtlich, daß der Kubus eines Dezimalbruches dreimal so viel Dezimalen enthalten müsse, als der gegebene Dezimalbruch, daß somit in einem vollständigen Kubus die Anzahl der Dezimalen immer ein Vielfaches von 3 ist.

Die dritten Potenzen der einzifferigen Zahlen sind:

Kubikwurzel:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Kubus:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Um später die Lehre vom Ausziehen der Kubikwurzel begründen zu können, soll hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Kubus zu erheben, abgeleitet, und dabei die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

zu Grunde gelegt werden.

Um z. B. 57 nach dieser Formel auf den Kubus zu erheben, hat man

$$57^3 = (50 + 7)^3 = 50^3 + 3 \times 50^2 \times 7 + 3 \times 50 \times 7^2 + 7^3.$$

Ist eine dreizifferige Zahl 429 zum Kubus zu zerlegen, so zerlege man sie zuerst in zwei Theile, 420 und 9, und man hat nach der obigen Formel

$$429^3 = (420 + 9)^3 = 420^3 + 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3;$$

aber nach derselben Formel ist

$$420^3 = (400 + 20)^3 = 400^3 + 3 \times 400^2 \times 20 + 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3;$$

daher, wenn oben statt 420^3 dieser Werth gesetzt wird,

$$\begin{aligned} 429^3 = 400^3 &+ 3 \times 400^2 \times 20 + 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3 \\ &+ 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3; \end{aligned}$$

oder wenn man die einzelnen Bestandtheile unter einander schreibt und wirklich entwickelt,

$$\begin{array}{lllr} 429^3 = & & 400^3 \;.\;.\;. & 64000000 \\ & + 3 \times 400^2 \times & 20 \;.\;.\;. & 9600000 \\ & + 3 \times 400 \times & 20^2 \;.\;.\;. & 480000 \\ & + & 20^3 \;.\;.\;. & 8000 \\ & + 3 \times 420^2 \times & 9 \;.\;.\;. & 4762800 \\ & + 3 \times 420 \times & 9^2 \;.\;.\;. & 102060 \\ & + & 9^3 \;.\;.\;. & 729 \\ \hline & & & 78953589. \end{array}$$

Eben so erhält man auch

$$\begin{array}{lllr} 1284^3 = & & 1000^3 \;.\;.\;. & 1000000000 \\ & + 3 \times 1000^2 \times & 200 \;.\;.\;. & 600000000 \\ & + 3 \times 1000 \times & 200^2 \;.\;.\;. & 120000000 \\ & + & 200^3 \;.\;.\;. & 8000000 \\ & + 3 \times 1200^2 \times & 80 \;.\;.\;. & 345600000 \\ & + 3 \times 1200 \times & 80^2 \;.\;.\;. & 23040000 \\ & + & 80^3 \;.\;.\;. & 512000 \\ & + 3 \times 1280^2 \times & 4 \;.\;.\;. & 19660800 \\ & + 3 \times 1280 \times & 4^2 \;.\;.\;. & 61440 \\ & + & 4^3 \;.\;.\;. & 64 \\ \hline & & & 2116874304. \end{array}$$

Die Nullen kann man beim Anschreiben der einzelnen Bestandtheile auch ganz weglassen, nur muß jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts hinaus gerückt werden. Mit Uebergehung der Nullen stellen sich die zwei letzten Beispiele so heraus:

429^3

4^3 . . .	64.
$3 \times 4^2 \times 2$ . . .	96.
$3 \times 4 \times 2^2$ . . .	48.
2^3 . . .	8.
$3 \times 42^2 \times 9$ . . .	47628.
$3 \times 42 \times 9^2$ . . .	10206.
9^3 . . .	729
	78953589

1284^3

1^3 . . .	1.
$3 \times 1^2 \times 2$ . . .	6.
$3 \times 1 \times 2^2$ . . .	12.
2^3 . . .	8.
$3 \times 12^2 \times 8$ . . .	3456.
$3 \times 12 \times 8^2$ . . .	2304.
8^3 . . .	512.
$3 \times 128^2 \times 4$ . . .	196608.
$3 \times 128 \times 4^2$ . . .	6144.
4^3 . . .	64
	2116874304.

Aus diesen Beispielen ergibt sich für die **Bildung des Kubus einer mehrzifferigen Zahl folgendes Verfahren:**

1. Man nehme den Kubus der ersten Ziffer der Wurzel.
2. Von jeder folgenden Wurzelziffer bilde man drei Bestandtheile, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl, multiplizirt mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multiplizirt mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Kubus.
3. Diese Bestandtheile werden in der Ordnung so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint und dann addirt.

Beispiele.

1) 3915^3

3^3 . . .	27.
$3 \times 3^2 \times 9$ . . .	243.
$3 \times 3 \times 9^2$ . . .	729.
9^3 . . .	729
$3 \times 39^2 \times 1$ . . .	4536.
$3 \times 39 \times 1^2$ . . .	117
1^3 . . .	1
$3 \times 391^2 \times 5$ . . .	2293215.
$3 \times 391 \times 5^2$ . . .	29325.
5^3 . . .	125
	60006085875

2) $2{\cdot}1806^3$

2^3 . . .	8.
$3 \times 2^2 \times 1$ . . .	12.
$3 \times 2 \times 1^2$ . . .	6.
1^3 . . .	1.
$3 \times 21^2 \times 8$ . . .	10584.
$3 \times 21 \times 8^2$ . . .	4032.
8^3 . . .	512...
$3 \times 2180^2 \times 6$ . . .	85543200.
$3 \times 2180 \times 6^2$ . . .	235440.
6^3 . . .	216
	10368788674616

3) $237^3 = ?$ 4) $17{\cdot}83^3 = ?$ 5) $0{\cdot}081052^3 = ?$

6) Wie groß ist der Körperinhalt eines Würfels, dessen Seite 2′ 8″ beträgt? (Man erhebe die Länge der Seite zum Kubus)

7) Die Seite eines Quadersteines ist 1·74′; wie groß ist der Kubikinhalt?

§. 39.

Bei der Entwickelung des Verfahrens für das Ausziehen der Kubikwurzel wird es am zweckmäßigsten sein, in Betrachtung zu ziehen, wie im Kubus die Bestandtheile der Kubikwurzel zusammengestellt erscheinen, um sie beim Wurzelausziehen wieder gehörig aus einander nehmen zu können.

Erhebt man zu diesem Ende z. B. 4567 zum Kubus, so hat man

4567^3

4^3 . . .	64			
$3 \times 4^2 \times 5$ . . .	24	0.		
$3 \times 4 \times 5^2$ . . .	3	00.		
5^3 . . .		125		
$3 \times 45^2 \times 6$ . . .	3	645	0.	
$3 \times 45 \times 6^2$ . . .		48	60.	
6^3 . . .			216	.
$3 \times 456^2 \times 7$ . . .		436	665	6.
$3 \times 456 \times 7^2$ . . .			670	32.
7^3 . . .				343
	95	256	152	263

Indem die erste Wurzelziffer im Kubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, und wegen jeder folgenden Wurzelziffer im Kubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Kubus einer Zahl immer entweder dreimal so viel Ziffern als deren die Kubikwurzel hat, oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Kubus, von der Rechten angefangen, in Klassen zu drei Ziffern, wo die erste Klasse zur Linken auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten kann, so hat man so viele Klassen, als die Kubikwurzel Ziffern enthält.

Um die einzelnen Ziffern der Kubikwurzel auszumitteln, werden folgende Betrachtungen verhilflich sein.

Der Kubus der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Klasse enthalten; die erste Ziffer der Kubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die höchste Ziffer nimmt, deren Kubus in der ersten Klasse vorkommt; in 95 ist der Kubus von 4, nämlich 64 enthalten; die erste Wurzelziffer ist demnach 4.

Wird der Kubus der ersten Wurzelziffer von der ersten Klasse abgezogen, und zu dem Reste 31 die zweite Klasse herabgesetzt, so enthält diese Zahl 31256 die drei Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer hervorgehen, nämlich das dreifache Quadrat der ersten Ziffer multiplizirt mit der zweiten, die dreifache erste Ziffer multiplizirt mit dem Quadrate der zweiten, und den Kubus der zweiten Ziffer, jeden Bestandtheil um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt, und zwar erstreckt sich das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer multiplizirt mit der zweiten nur auf die erste Ziffer in der zweiten Klasse. Wird daher 31256 mit Hinweglassung der zwei letzten Ziffern durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 48, dividirt, so erhält man die zweite Wurzelziffer 5.

Entwickelt man die drei Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Kubus hervorbringt, und rückt jeden derselben um eine Stelle weiter gegen die Rechte, subtrahirt dann diese drei Zahlen von dem Reste der ersten zwei Klassen, und setzt zu dem neuen Reste 4131 die dritte Klasse hinzu, so muß die so gebildete Zahl 4131152 die drei Bestandtheile enthalten, welche die dritte Wurzelziffer im Kubus hervorbringt, und zwar kommt das dreifache Quadrat der ersten zwei Ziffern, als Zahl betrachtet, multiplizirt mit der dritten Wurzelziffer, in jener Zahl, mit Ausschluß der letzten zwei Ziffern, also in 41311, vor. Dividirt man dahr 41311 durch das dreifache Quadrat der Zahl, welche die ersten zwei Wurzelziffern bilden, nämlich durch 6075, so erhält man 6 als die dritte Wurzelziffer.

Bildet man nun die drei Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer hervorbringt, indem man jeden derselben um eine Stelle weiter rechts rückt, subtrahirt dieselben von dem Reste der ersten drei Klassen, und setzt zu dem neuen Reste 437336 die vierte Klasse herab, so ist in dieser Zahl 437336263, mit Hinweglassung der beiden letzten Ziffern, also in 4373362 das dreifache Quadrat aus den ersten drei Ziffern der Wurzel, als Zahl betrachtet, multiplizirt mit der vierten Wurzelziffer enthalten. Wird daher 4373362 durch das dreifache Quadrat der ersten drei Ziffern, nämlich durch 623808, dividirt, so erhält man die vierte Wurzelziffer 7.

Die ganze Rechnung steht:

$$\sqrt[3]{95|256|152|263} = 4567$$

		64	
		31256	: 48 . . 3×4^2
$3 \times 4^2 \times 5$	. .	240 .	
$3 \times 4 \times 5^2$	. .	300 .	
5^3	. .	125	
		4131152	: 6075 . . 3×45^2
$3 \times 45^2 \times 6$	. .	36450 .	
$3 \times 45 \times 6^2$	. .	4860 .	
6^3	. .	216	
		437336263	: 623808 3×456^2
$3 \times 456^2 \times 7$	. .	4366656 .	
$3 \times 456 \times 7^2$	. .	67032 .	
7^3	. .	343	
		= = = = = = = = = =	

Beim Ausziehen der Kubikwurzel ist dem Vorhergehenden gemäß folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theile die Zahl, von den Einheiten angefangen, gegen die Linke in Klassen zu drei Ziffern; die erste Klasse zur Linken kann auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten. Kommen in der gegebenen Zahl auch Dezimalen vor, so werden diese, vom Dezimalpunkte angefangen, gegen die Rechte hin in Klassen eingetheilt; hat die letzte Dezimalklasse zur Rechten weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ergänzt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Kubus in der ersten Klasse zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als die erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Kubus erhoben, und derselbe von der ersten Klasse abgezogen.

3. Die folgenden Ziffern der Kubikwurzel werden durch die Division gefunden: Setzt man zu dem letzten Reste die nächstfolgende Klasse hinzu, so bildet diese Zahl nach Ausschluß der zwei letzten Ziffern rechts den Dividend; der Divisor ist das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Kubikwurzel. Der Quozient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

4. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Kubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multiplizirt mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multiplizirt mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren eigenen Kubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter, und subtrahirt die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern. Läßt sich diese Summe nicht abziehen, so ist die neue Ziffer der Wurzel zu groß; man muß sie daher nach und nach kleiner nehmen, bis man subtrahiren kann.

5. Zu dem Reste setzt man wieder die nächste Klasse hinzu, und wiederhole dasselbe Verfahren, wie früher, bis man alle Zifferklassen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man, ohne die drei Bestandtheile zu entwickeln und abzuziehen, sogleich die nächste Klasse herabsetzen, nur muß man in die Wurzel eine und zu dem Divisor zwei Nullen schreiben.

6. Kommen in der vorgelegten Zahl Dezimalklassen vor, so setzt man in die Wurzel den Dezimalpunkt, bevor man die erste Klasse von Dezimalen in Rechnung zieht.

7. Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man die Kubikwurzel vollständig gefunden, und die gegebene Zahl ist ein vollkommener Kubus. Bleibt aber am Ende ein Rest, so ist die Kubikwurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit in Dezimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Klasse von drei Nullen anhängt, und übrigens wie vorhin verfährt.

Beispiele.

```
1) ∛140|608 = 52
   125
   ------
   15 6 08  :  75
   15 0
      6 0
        8
   ------
   = = = = =
```

```
2) ∛30|5 17|5 78|1 25 = 3125
   27                :  27
   --
    3 5 17
    2 7
      9
        1
   -----------
   7 26 5 78         :  2883
   5 76 6
     3 7 2
         8
   -----------
   1 46 2 50 1 25    :  292032
   1 46 0 16 0
       2 34 0 0
           1 25
   -----------
         =
```

3) $\sqrt[3]{7|824} = 19{\cdot}852\ \ldots$

1

6 8,24 : 3

2 7

2 4 3

7 29

9 650,00 : 1083

8 664

364 8

5 12

616 080,00 : 117612

588 060

1 485 0

1 25

26 533 750,00 : 11820675

23 641 350

2 382 0

8

2 890 017 92

4) $\sqrt[3]{242|970|624} = 6{\cdot}24$

216

26 9,70 :

21 6

7 2

8

4 6 42 6,24 : 11532

4 6 12 8

29 7 6

64

5) $\sqrt[3]{5\tfrac{3}{16}} = \sqrt[3]{5{\cdot}187|5\ 00} = 1{\cdot}731\ .\ .\ .$

1

4 1,87 : 3

2 1

1 4 7

3 43

2 74 5,00 : 867

2 60 1

4 5 9

27

9 7 830,00 : 89787

8 9 787

51 9

1

7991 09

6) $\sqrt[3]{0.000|07_0} = 0{\cdot}0412\ \ldots$

$$\begin{array}{l}
64 \\
\hline
60{,}00 \quad : \quad 48 \\
48 \\
12 \\
1 \\
\hline
10\,790{,}00 \quad : \quad 5043 \\
10\,086 \\
49\,2 \\
8 \\
\hline
654\,72
\end{array}$$

7) $\sqrt[3]{40353607} = ?$ 8) $\sqrt[3]{8108486729} = ?$

9) $\sqrt[3]{0{\cdot}017173512} = ?$ 10) $\sqrt[3]{1{\cdot}191016} = ?$

11) $\sqrt[3]{29} = ?$ 12) $\sqrt[3]{123456789} = ?$

13) $\sqrt[3]{13{\cdot}0835} = ?$ 14) $\sqrt[3]{0{\cdot}0000297} = ?$

15) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = ?$ 16) $\sqrt[3]{2\frac{7}{12}} = ?$

17) Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Inhalt 438976 Kubikzoll beträgt? — 76''.

Um aus dem Körperinhalte eines Würfels die Länge einer Seite zu finden, zieht man aus dem Körperinhalte die Kubikwurzel.

18) Der Inhalt eines Würfels beträgt 4 Kub.' 237 Kub.''; wie lang ist eine Seite desselben? — 1' 7'' 3'''.

19) Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum enthält, als zwei Würfel zusammen, deren Seiten 2' 5'' und 1' 8'' sind?

20) Ein Kupferschmied hat einen würfelförmigen Kessel zu verfertigen, der 5 Eimer 18 Maß fassen soll, wie lang muß eine Seite desselben werden, wenn 1 Eimer 1·792 Kubikfuß enthält?

21) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Kubikinhalt 25 Kub.' 1402 Kub.'' beträgt?

Man multiplizire den Körperinhalt mit 1·9099, und ziehe aus dem Produkte die Kubikwurzel aus.

22) Eine messingene Kugel wiegt 4 Pfund; wie groß ist der Durchmesser derselben, wenn ein Kubikzoll Messing $8\frac{1}{2}$ Loth wiegt?

Vierter Abschnitt.

Die Kombinazionslehre.

§. 40.

Die **Kombinazionslehre** beschäftigt sich im Allgemeinen mit der verschiedenen Anordnung und Zusammenstellung gegebener Größen. Jede solche gegebene Größe heißt ein **Element**, und jede Verbindung mehrerer Elemente eine **Gruppe** oder **Komplexion**.

Bei der Kombinazionslehre kommen **zwei Hauptaufgaben** in Betrachtung.

Es kann verlangt werden, daß man alle verschiedenen Stellungen angibt, in die eine bestimmte Anzahl Elemente gebracht werden kann, wobei jede Komplexion alle gegebenen Elemente enthalten soll. So geben die drei Buchstaben a, b, c sechs verschiedene Stellungen, **abc, acb, bac, bca, cab, cba**. Man nennt diese Versetzung der Elemente das **Permutiren**.

Es kann ferner verlangt werden, daß man aus einer gegebenen Anzahl von Elementen alle Verbindungen zu zwei, zu drei, zu vier, ... Elementen bilde, wobei übrigens auf die Stellung der Elemente keine Rücksicht genommen wird. Ein solches Verbinden von gegebenen Elementen nennt man das **Kombiniren**. Die Verbindungen zu zwei Elementen heißen **Amben** oder **Kombinazionen der zweiten Klasse**, jene zu drei Elementen **Ternen** oder **Kombinazionen der dritten Klasse**, zu vier Elementen **Quaternen** oder **Kombinazionen der vierten Klasse** u. s. w. Die vier Buchstabea a, b, c, d geben sechs Amben ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Ternen **abc, abd, acd, bcd**; und eine Quaterne **abcd**.

Sowohl bei den Versetzungen als bei den Verbindungen kommt es auf **zwei Sachen** an, auf die **wirkliche Bildung** der verlangten Gruppen, und auf die **Bestimmung ihrer Anzahl**.

Die einzelnen Elemente pflegt man entweder mit den in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche **Zeiger** heißen, oder mit Buchstaben zu bezeichnen.

Eine Gruppe von Elementen heißt **gut geordnet**, wenn der niederste Zeiger die erste Stelle einnimmt, hierauf ein immer höherer Zeiger folgt, und der höchste am letzten Platze vorkommt, z. B. 123, 134; dagegen ist 132 nicht gut geordnet. Von zwei Komplexionen, welche eine gleiche Anzahl Zeiger enthalten, heißt jene die **höhere**, welche als Zahl ausgesprochen einen höheren Werth hat; z B. die Gruppe 132 ist höher als 123, eben so 234 höher als 124.

Bei Buchstaben sieht man diejenigen als mit einem höheren Zeiger behaftet an, welche im Alphabete später vorkommen; es ist demnach die Komplexion abcd gut geordnet, acbd dagegen nicht; ferner stellt acbd eine höhere Komplexion vor als abcd.

I. Permutazionen.

§. 41.

1. **Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutazionen zu bilden**, schreibe man die Elemente zuerst gut geordnet hin; von dieser niedrigsten Komplexion übergehe man zu der nächst höheren, indem man nur die zwei letzten Elemente ihre Plätze wechseln läßt; da in der Stellung der letzten zwei Elemente keine weitere Aenderung mehr vorgenommen werden kann, so wird an die Stelle des dritten Elementes von rückwärts das nächst höhere Element gesetzt, dem man die andern zwei Elemente wieder gut geordnet folgen läßt; sodann verwechselt man von Neuem die zwei letzten Elemente. Auf diese Weise geht man von der jedesmaligen Komplexion zu der nächsthöheren über, bis man zur höchsten kommt, welche daran erkannt wird, daß darin die Elemente in Vergleich gegen die erste Gruppe gerade in umgekehrter Ordnung vorkommen. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3.			Elemente a, b, c.		
123	213	312	abc	bac	cab
132	231	321	acb	bca	cba

Elemente a, b, c, d.

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba.

Das nämliche Verfahren gilt auch, wenn unter den Elementen, die man zu permutiren hat, mehrere einander gleich sind. Z. B.:

Elemente a, b, b, b, c, c.

abbbcc	babbcc	bbabcc	bcabbc	cabbbc	cbabbc	ccabbb
abbcbc	babcbc	bbacbc	bcabcb	cabbcb	cbabcb	ccbabb
abbccb	babccb	bbaccb	bcacbb	cabcbb	cbacbb	ccbbab
abcbbc	bacbbc	bbbacc	bcbabc	cacbbb	cbbabc	ccbbba
abcbcb	bacbcb	bbbcac	bcbacb		cbbacb	
abccbb	baccbb	bbbcca	bcbbac		cbbbac	
acbbbc		bbcabc	bcbbca		cbbbca	
acbbcb		bbcacb	bcbcab		cbbcab	
acbcbb		bbcbac	bcbcba		cbbcba	
accbbb		bbcbca	bccabb		cbcabb	
		bbccab	bccbab		cbcbab	
		bbccba	bccbba		cbcbba.	

§. 42.

2. Aus der Art, wie die Permutazionen gebildet werden, läßt sich leicht auch ihre Anzahl bestimmen.

Es soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo die gegebenen Elemente unter einander verschieden sind.

Bei einem Elemente a ist nur eine Stellung möglich.

Zwei Elemente a und b lassen zwei Stellungen zu, nämlich ab und ba.

Von drei Elementen a, b, c kann jedes 2mal am ersten Platze stehen, während die anderen zwei permutirt nachfolgen; daher es $2 \times 3 = 6$ verschiedene Stellungen gibt.

Bei vier Elementen a, b, c, d kann jedes so oft am ersten Platze stehen, als wie oft sich die anderen drei nachfolgenden Elemente versetzen lassen, somit 6mal; man hat daher 6 Permutazionen, wo a die erste Stelle einnimmt, eben so viele, wo b, wo c, wo d am ersten Platze stehet; also zusammen $6 \times 4 = 24$ verschiedene Stellungen.

Eben so überzeugt man sich, daß 5 Elemente $24 . 5 = 120$ Permutazionen geben.

Drückt man die Anzahl aller Permutazionen von n verschiedenen Elementen durch P_n (Permutazionszahl von n) aus, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= 2 = 1 . 2 \\ P_3 &= P_2 . 3 = 1 . 2 . 3 \\ P_4 &= P_3 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4 \\ P_5 &= P_4 . 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \end{aligned}$$

daher allgemein

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-1) . n.$$

Die Permutazionszahl einer gegebenen Anzahl von verschiedenen Elementen ist also gleich dem Produkte aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente angibt.

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ pflegt man durch das Symbol $n!$ auszudrücken; daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!,\ P_4 = 4!,\ \ldots\ P_n = n!$$

§. 43.

Kleiner fällt die Anzahl der möglichen Permutazionen aus, wenn mehrere gleiche Elemente vorkommen.

Es seien z. B. die Permutazionszahl der Elemente a, b, b, b, c zu bestimmen. Versieht man die drei gleichen Elemente b mit Zeigern und betrachtet a, b_1, b_2, b_3, c als ganz verschiedene Elemente, so wäre die Anzahl der Permutazionen $5! = 120$. Denkt man sich diese Permutazionen wirklich gebildet, so wird man sehen, daß es immer mehrere Komplexionen gibt, in denen a und c dieselbe Stelle einnehmen, und die sich nur durch die verschiedene Stellung von $b_1\, b_2\, b_3$ unterscheiden, und zwar gibt es, da $b_1\, b_2\, b_3$ nach dem Vorhergehenden $3! = 6$ verschiedene Stellungen zulassen, für jede Stellung von a und c immer 6 Permutazionen, welche sich durch die bloße Versetzung der mit Zeigern versehenen Elemente unterscheiden; so hat man z. B. folgende Permutazionen, wo a am ersten und c am dritten Platze vorkommt.

$$ab_1\,cb_2\,b_3,\ ab_1\,cb_3\,b_2,\ ab_2\,cb_1\,b_3,\ ab_2\,cb_3\,b_1,\ ab_3\,cb_1\,b_2,\ ab_3\,cb_2\,b_1.$$

Läßt man hier die Zeiger weg, d. h. betrachtet man die drei b wieder als gleiche Elemente, so werden alle diese 6 Permutazionen in eine einzige abcbb übergehen. Auf dieselbe Art werden von den 120 Permutazionen, sobald man die Zeiger beseitiget, je 6 gleich werden und somit auf eine einzige zurückgeführt. Man muß also die Permutazionszahl aller Elemente durch die Permutazionszahl der gleichen Elemente dividiren; die Anzahl aller verschiedenen Permutazionen der Elemente abbbc ist demnach $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Auf gleiche Weise überzeugt man sich, daß die Elemente abbbbc $\frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 30$ verschiedene Permutazionen geben.

Würden unter 10 gleichen Elementen nebst 4 gleichen auch noch andere 3 gleiche Elemente vorkommen, so müßte man aus ähnlichen Gründen die Permutazionszahl $\frac{10!}{4!}$ wegen der 3 gleichen Elemente noch durch $3!$ dividiren; die Anzahl aller verschiedenen Permutazionen wäre daher $\frac{10!}{4!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 25200$.

§. 44.

Beispiele.

1) Wie oft können 6 Gäste ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen möglichen Ordnungen gesessen sind?

$$6! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720\text{mal}.$$

2) Wie vielmal können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

$$24! = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000\text{mal}.$$

3) Wie viel verschiedene Stellungen geben eine weiße, zwei blaue und drei rothe Kugeln?

$$\frac{6!}{2!\,3!} = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 . 1 . 2 . 3} = 60.$$

4) Auf wie viele Arten lassen sich fünf Fächer mit drei verschiedenen Kugeln, deren eine weiß, die andere gelb, die dritte roth ist, besetzen?

Es werden immer drei Fächer mit Kugeln besetzt, während zwei Fächer leer bleiben; denkt man sich die zwei leeren Fächer mit 0 besetzt, so hat man 5 Elemente, unter denen 0 zweimal vorkommt; daher gibt es

$$\frac{5!}{2!} = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5}{1 . 2} = 60 \text{ Arten der Besetzung.}$$

5) Wie oft lassen sich die Faktoren der Produkte $abcdef$, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^3y^2z^4$, $a^{m-n}b^o$ permutiren?

II. Kombinazionen.

§. 45.

Man unterscheidet Kombinazionen ohne und mit Wiederholungen, je nachdem dasselbe Element in einer Komplexion nur einmal oder auch mehrmal vorkommen darf.

I. Bei der Bildung der Kombinazionen geht man, wie beim Permutiren, stets von niedrigeren Komplexionen zu höheren über.

Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, verbindet man jedes Element mit allen nachfolgenden. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3, 4			Elemente a, b, c, d, e			
12,	13,	14;	ab,	ac,	ad,	ae;
	23,	24;		bc,	bd,	be;
		34;			cd,	ce;
						de.

Um die Ternen ohne Wiederholungen zu erhalten, verbindet man jede Ambe mit allen nachfolgenden Elementen. Z. B.:

123, 124; 134; abc, abd, abe; acd, ace: ade;
234. bcd, bce; bde;
cde.

Auf gleiche Weise geschieht die Bildung der Quaternen, Quinternen, . . . ohne Wiederholungen.

Will man aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen bilden, so verbinde man jedes Element mit sich selbst, und mit allen nachfolgenden Elementen. Z. B.

Elemente 1, 2, 3, 4 Elemente a, b, c, d, e
11, 12, 13, 14 aa, ab, ac, ad, ae;
22, 23, 24; bb, bc, bd, be;
33, 34; cc, cd, ce;
44. dd, de;
ee.

Die Ternen mit Wiederholungen erhält man, wenn man jede Ambe mit Wiederholungen zuerst mit dem höchsten darin vorkommenden Elemente, und dann mit allen nachfolgenden Elementen verbindet. Z. B.:

111, 112, 113, 114; 122, 123, 124; 133, 134; 134;
222, 223, 224; 233, 234; 244;
333, 334; 344;
444.

Nach denselben Grundsätzen werden auch die Quaternen, Quinternen, . . . mit Wiederholungen gebildet.

§. 46.

2. Die Anzahl der verschiedenen Kombinazionen aus mehreren gegebenen Elementen ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Sind z. B. fünf Elemente a, b, c, d, e gegeben, so erhält man sicher alle Amben ohne Wiederholungen, wenn man zuerst das Element a mit allen übrigen Elementen verbindet, dann eben so mit b und den noch folgenden Elementen verfährt. Man erhält, wenn man die aus jedem Elemente hervorgehenden Amben in eine Reihe schreibt:

a gibt ab, ac, ad, ae;
b " ab, bc, bd, be;
c " ac, bc, cd, ce;
d " ad, bd, cd, de;
e " ae, be, ce, de.

Offenbar hat man hier so viele Reihen, als Elemente da sind, nämlich 5; und in jeder Reihe eine Ambe weniger, als man Elemente zu verbinden hat, somit 4; die Anzahl aller Amben ist also 5×4. Allein jede Ambe kommt zweimal vor; z. B. die Ambe bc, indem man b mit c, und indem man c mit b verbindet; daher gibt es nur $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ verschiedene Amben. Wären n Elemente gegeben, so hätte man n Reihen, und in jeder Reihe $n - 1$ Amben, zusammen $n(n-1)$; da aber darunter immer zwei gleiche vorkommen, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Es ist ferner gewiß, daß man alle Ternen ohne Wiederholungen erhalten wird, wenn man jede Ambe mit allen Elementen verbindet, nur mit den zwei Elementen nicht, welche in der Ambe vorkommen. Man hat somit:

Ambe	ab	gibt abc, abd, abe;	Ambe	bd	gibt abd, bcd, bde;
"	ac	" abc, acd, ace;	"	be	" abe, bce, bde;
"	ad	" abd, acd, ade;	"	cd	" acd, bcd, cde;
"	ae	" abe, ace, ade;	"	ce	" ace, bce, cde;
"	bc	" abc, bcd, bce;	"	de	" ade, bde, cde.

Hier sind so viele Reihen, als früher Amben da waren, also $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, und in jeder Reihe zwei Ternen weniger, als Elemente zu kombiniren sind, nämlich 3; zusammen also $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \cdot 2}$ Ternen. Allein jede Terne kommt dreimal vor; folglich ist die letzte Zahl noch durch 3 zu dividiren, und man hat $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ verschiedene Ternen. Für n Elemente hätte man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Ternen.

Eben so überzeugt man sich, daß bei n Elementen

die Anzahl aller Quaternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

" " " Quinternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w. ist.

Das Gesetz, welches in diesen Zahlen herrscht, ist leicht zu überblicken. Die Anzahl der Kombinazionen irgend einer Klasse ohne Wiederholungen läßt sich nämlich durch einen Bruch darstellen, worin sowohl der Zähler als der Nenner so viele Faktoren enthält, als Elemente in einer Kombinazion vorkommen; der erste Faktor im Zähler ist gleich der Anzahl aller Elemente, jeder folgende um 1 kleiner; der Nenner ist die natürliche Reihe der Faktoren von 1 bis zu der Zahl welche die Anzahl Elemente in einer Kombinazion ausdrückt.

§. 47.

Auf ähnlichen Betrachtungen beruhet auch die Bestimmung der Zahl der Kombinazionen mit Wiederholungen.

Hat man wieder z. B. fünf Elemente a, b, c, d, e, so wird man gewiß alle Amben mit Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit sich selbst, und dann noch mit allen Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, verbindet.

Schreibt man die Amben, die aus einer solchen Verbindung eines jeden Elementes hervorgehen, in eine Reihe, so hat man:

a gibt aa, aa, ab, ac, ad, ae;
b „ bb, ab, bb, bc, bd, be;
c „ cc, ac, bc, cc, cd, ce;
d „ dd, ad, bd, cd, dd, de;
e „ ee, ae, be, ce, de, ee.

Man erhält also so viele Reihen als Elemente da sind, und in jeder Reihe um eine Ambe mehr, somit 5 Reihen, deren jede 6 Amben enthält, zusammen 5 . 6 Amben. Weil nun darunter jede Ambe 2mal vorkommt, so ist $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ die Anzahl aller verschiedenen Amben. Für n Elemente erhielte man n Reihen, und in jeder Reihe $n + 1$ Amben, zusammen $n(n + 1)$; die Anzahl aller verschiedenen Amben wäre somit $\frac{n(n + 1)}{1 \cdot 2}$.

Um sicher alle Ternen mit Wiederholungen zu erhalten, darf man nur jede Ambe zuerst mit den zwei Elementen, die darin vorkommen, und dann noch mit allen Elementen verbinden. Dadurch gibt

die Ambe aa . . . aaa, aaa, aaa, aab, aac, aad, aae;
„ „ ab . . . aab, abb, aab, abb, abc, abd, abe;
„ „ ac . . . aac, acc, aac, abc, acc, acd, ace;
„ „ ad . . . aad, add, aad, abd, acd, add, ade;
„ „ ae . . . aae, aee, aae, abe, ace, ade, aee;
„ „ bb . . . bbb, bbb, abb, bbb, bbc, bbd, bbe;
„ „ bc . . . bbc, bcc, abc, bbc, bcc, bcd, bce;

u. s. f.

Hier kommen so viele Reihen vor, als Amben mit Wiederholungen da waren, also $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$, und in jeder Reihe 2 Ternen mehr, als Elemente gegeben sind, hier 7 Ternen; zusammen also $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2}$. Allein jede Terne kommt 3mal vor, folglich ist die Anzahl aller verschiedenen Ternen $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Wären n Elemente gegeben, so hätte man $\frac{n(n + 1)}{1 \cdot 2}$ Reihen, und in jeder $n + 2$ Ternen, also im Ganzen $\frac{n(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2}$ Ternen, worunter aber je 3 gleich sind; die Anzahl der verschiedenen Ternen mit Wiederholungen wäre also

$$\frac{n(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so findet man als die Anzahl

der Quaternen mit Wiederholungen $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$,

" Quinternen " " $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$

u. s. w.

Man sieht sogleich, daß sich die Zahl der Kombinazionen irgend einer Klasse mit Wiederholungen von der Zahl der Kombinazionen derselben Klasse ohne Wiederholungen nur dadurch unterscheidet, daß bei der erstern die Faktoren des Zählers um 1 wachsen, während sie bei der letztern um 1 abnehmen.

§. 48.

Beispiele.

1) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{90 \,.\, 89}{1 \,.\, 2} = 4005$,

" " Ternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 117480$

" " Quaternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 2555190$

" " Quinternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 43949268$.

2) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die in einer Ziehung erscheinenden 5 Nummern der Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} = 10$,

" " Ternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10$,

" " Quaternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 5$,

" " Quinternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 1$.

3) Wie viel verschiedene Würfe sind mit zwei Würfeln möglich?

Die Anzahl verschiedener Würfe ist offenbar gleich der Anzahl Amben mit Wiederholungen von 6 Elementen, also

$$\frac{6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} = 21.$$

4) Wie viele Kombinazionen der ersten, zweiten, dritten, . . . Klasse mit oder ohne Wiederholung geben 7 Elemente?

4) Wie viele ein-, zwei-, drei-, vierzifferige Zahlen können mit den Ziffern 3, 4, 5, 6 geschrieben werden? (Hier ist mit dem Kombiniren auch das Permutiren zu verbinden.)

Fünfter Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnißrechnungen.

I. Von den zusammengesetzten Verhältnissen und Proporzionen.

§. 49.

Wenn man in mehreren gegebenen Verhältnissen alle Vorderglieder mit einander, und eben so alle Hinterglieder mit einander multiplizirt, so bilden die Produkte ein neues Verhältniß, welches in Hinsicht der gegebenen einfachen Verhältnisse ein zusammengesetztes genannt wird; z. B.:

$$\text{einfache Verhältnisse} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & 2 \\ 3 & : & 4 \\ 5 & : & 7 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} a : b \\ c : d \\ e : f \end{array}$$

$$\text{zusammengesetztes Verhältniß} \quad 15 : 56 \qquad ace : bdf.$$

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der Anwendung überall vor, wo Größen mit einander zu vergleichen sind, die von mehreren anderen Größen abhängen. So hängt z. B. die Fläche eines Rechteckes von der Länge und Breite desselben ab. Ist nun das Verhältniß der Flächen zweier Rechtecke zu bestimmen, deren erstes 5^0 lang und 3^0 breit, das zweite 7^0 lang und 4^0 breit ist, so hat man erstlich:

Verhältniß der Längen 5 : 7,
" " Breiten 3 : 4.

Die Fläche des ersten Rechteckes wird offenbar dieselbe bleiben, wenn man dasselbe statt 3^0 nur 1^0 breit, dafür aber 3mal länger, also 15^0 lang annimmt, eben so kann man das zweite Rechteck ohne seine Fläche zu ändern, statt 4^0 nur 1^0 breit, und dagegen 4mal länger, somit 28^0 lang annehmen. Die beiden Flächen und ihr gegenseitiges Verhältniß bleiben also ungeändert, wenn man bei beiden Rechtecken dieselbe Breite 1^0, und die Längen 15^0 und 28^0 annimmt; in diesem Falle aber hängen die Flächen, weil die Breite gleich ist, nur von den Längen 15^0 und 28^0 ab, und es ist somit das Verhältniß der beiden Flächen gleich $15 : 28$ oder $5 \times 3 : 7 \times 4$. Das Verhältniß der Flächen der zwei Rechtecke ist also ein zusammengesetztes Verhältniß aus den einfachen Verhältnissen der Längen und der Breiten. Man pflegt sich kürzer so auszudrücken: die Fläche eines Rechteckes steht im zusammengesetzten Verhältnisse der Länge und der Breite.

Auf dieselbe Art stehen im zusammengesetzten Verhältnisse: die Länge des zurückgelegten Weges mit der darauf verwendeten Zeit und Geschwindigkeit, die Größe des Lohnes mit der Zahl der Arbeiter, Tage und Arbeitsstunden; der Fuhrlohn mit der Länge des Weges, und dem Gewichte der Waare; der Zins mit dem Kapitale, dem Prozente und der Zeit; der Gewinn mit der Einlage und der Zeit.

§. 50.

Wenn man in zwei oder mehreren Proporzionen die gleichvielten Glieder mit einander multiplizirt, so geben die Produkte in derselben Ordnung wieder eine Proporzion.

Ist
$$\begin{aligned} a : b &= c : d \\ m : n &= p : q \\ w : x &= y : z \end{aligned}$$
so muß auch $amw : bnx = cpy : dqz$ sein.

Die Richtigkeit davon ist leicht einzusehen.

Die Verhältnisse $a : b$, $m : n$, $w : x$ sind folgeweise gleich den Verhältnissen $c : d$, $p : q$, $y : z$; daher müssen auch die aus ihnen gebildeten zusammengesetzten Verhältnisse $amw : bnx$ und $cpy : dqz$ einander gleich sein, oder es muß die Proporzion $amw : bnx = cpy : dqz$ bestehen.

Diese letzte Proporzion heißt in Bezug auf die gegebenen einfachen Proporzionen eine zusammengesetzte.

So folgt

aus den einfachen Proporzionen	$3 : 4 = 6 : 8$	$x : y = 7 : 8$
	$1 : 2 = 3 : 6$	$y : z = 10 : 3$
	$5 : 3 = 15 : 9$	$z : 2 = 5 : 11$
die zusammenges. Prop.	$15 : 24 = 270 : 432$;	$xyz : 2yz = 350 : 264$
		oder $x : 2 = 350 : 264$

II. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 51.

Wenn eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren anderen Arten einzeln genommen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse steht, und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer andern Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt und zu suchen, so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die zusammengesetzte Regeldetri.

Z. B. 18 Zentner werden 20 Meilen weit um 24 Gulden verführt, wie viel Gulden wird die Fracht betragen, damit 16 Zentner 30 Meilen weit geführt werden? Antwort: 32 Gulden. Hier kommen drei Arten von Zahlen vor, die Anzahl Zentner, die Anzahl Meilen, und die Anzahl Gulden; die Fracht steht in geradem Verhältnisse mit dem Gewichte der Waare und mit der Länge des Weges; von diesen drei Arten ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen bekannt, nämlich: 18 Zentner werden 20 Meilen weit um 24 Gulden verführt; von einer andern Reihe zusammengehöriger Zahlen, nämlich: 16 Zentner werden 30 Meilen weit um 32 Gulden geführt, sind nur zwei Zahlen bekannt, eine (32 Gulden) aber unbekannt und zu suchen. Dieß ist also eine Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri.

§. 52.

Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann in mehrere Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt, und auf diese Art aufgelöset werden, wie dieses aus dem folgenden Beispiele erhellet.

Aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug, jedes 40 Ellen lang und 6 Viertel breit; wie viel Stück bekommt man aus 175 Pfund Garn, wenn jedes Stück 36 Ellen lang und 5 Viertel breit sein soll?

Diese Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann, indem man jedesmal nur eine Art von Zahlen sich ändern läßt, in folgende drei Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt werden.

a. Aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug, jedes 40 Ellen lang und 6 Viertel breit; wie viel Stück werden aus 175 Pfund gemacht, wenn jedes Stück 40 Ellen lang und 6 Viertel breit ist? — Oder: aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug; wie viel Stück werden aus 175 Pfund gemacht, wenn die übrigen Bedingungen gleich sind? — Zur Auflösung hat man

20 Pfd.	3 Stück	$y : 3 = 175 : 20$
175 „	y „	daher $y = 26\frac{1}{4}$ Stück.

b. Aus 175 Pfund Garn werden $26\frac{1}{4}$ Stück Zeug von 40 Ellen Länge und 6 Viertel Breite gemacht; wie viel Stück bekommt man aus 175 Pfund, wenn die Länge eines Stückes 36 Ellen und die Breite 6 Viertel betragen soll? — Oder: wenn ein Stück 40 Ellen lang ist, bekommt man $26\frac{1}{4}$ Stück; wie viel Stück wird man unter übrigens gleichen Umständen bekommen, wenn die Länge eines Stückes nur 36 Ellen beträgt? — Die Rechnung steht:

40 Ellen Länge	$26\frac{1}{4}$ Stück	$z : 26\frac{1}{4} = 40 : 36$
36 „	z „	woraus $z = 29\frac{1}{6}$ Stück.

c. Aus 175 Pfund Garn werden $29\frac{1}{6}$ Stück Zeug, jedes 36 Ellen lang und 6 Viertel breit gemacht; wie viel Stück bekommt man aus 175 Pfund, wenn ein Stück 36 Ellen lang und 5 Viertel breit sein soll? — Oder kürzer: wenn ein Stück 6 Viertel breit ist, so bekommt man aus einer bestimmten Menge Garn $29\frac{1}{6}$ Stück; wie viel Stück wird man bekommen, wenn die Breite nur 5 Viertel beträgt und die übrigen Umstände gleich bleiben? — Zur Auflösung hat man:

6 Viertel Breite	$29\frac{1}{6}$ Stück		$x : 29\frac{1}{6} = 6 : 5$
5 "	x "		also $x = 35$ Stück.

Aus allen drei Aufgaben folgt:

Wenn aus 20 Pfund Garn 3 Stück Zeug, jedes 40 Ellen lang und 6 Viertel breit, gemacht werden, so bekommt man aus 175 Pfd. Garn 35 Stück Zeug, jedes 36 Ellen lang und 5 Viertel breit.

Die hier vorgenommene Methode, eine Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen, ist wegen ihrer Weitläufigkeit nicht geeignet, um allgemein angewendet zu werden; allein sie führt durch sehr einfache Schlüsse auf ein kürzeres Verfahren, die Auflösung vorzunehmen. Man stelle nämlich die erhaltenen Proporzionen zusammen, behalte aber dabei statt der gefundenen Zahlen $26\frac{1}{4}$ und $29\frac{1}{6}$ die Buchstaben y und z bei; man hat

$$\left.\begin{array}{l} y : 3 = 175 : 20 \\ z : y = 40 : 36 \\ x : z = 6 : 5 \\ \hline yzx : 3yz = 175 \,.\, 40 \,.\, 6 : 20 \,.\, 36 \,.\, 5 \end{array}\right\}$$

Durch Multiplikazion der gleichnam. Glieder erhält man wieder eine Proporzion.

Kürzt man hier das erste Verhältniß durch y und z ab, so bleibt

$$x : 3 = 175 \,.\, 40 \,.\, 6 : 20 \,.\, 36 \,.\, 5,$$

was man der leichteren Uebersicht wegen auch so schreiben kann

$$\begin{array}{rl} x : 3 = & 175 : 20 \\ & 40 : 36 \\ & 6 : 5 \end{array}$$

wo man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multipliziren sind.

Das Verhältniß x : 3 ist demnach gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus 175 : 20, 40 : 36 und 6 : 5.

Vergleicht man die Ordnung der Zahlen in diesen Verhältnissen mit der Stellung der Zahlen in der Aufgabe, nämlich

x Stück	175 Pfd.	36 Ellen Länge	5 Viertel Breite
3 "	20 "	40 " "	6 " "

so findet man, daß die zu x Stück und 3 Stück gehörigen Zahlen der Pfunde, welche mit der Anzahl Stück gerade proporzionirt sind, in der nämlichen, die zugehörigen Zahlen der Länge und Breite aber, welche mit der Anzahl Stück verkehrt proporzionirt sind, in umgekehrter Ordnung zu einem Verhältnisse verbunden erscheinen.

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren anderen Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade theils verkehrt proporzionirt ist, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proporzionirt sind.

§. 53.

Auf diesem Satze beruhet nun eine ganz einfache Methode, um die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen. Man verfahre dabei nach folgenden Regeln:

1. Man setze die unbekannte und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältniß.

2. Das zweite Verhältniß der Proporzion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse man findet, wenn man die Art von x mit jeder andern Art vergleicht, um zu sehen, ob die beiden Arten gerade oder verkehrt proporzionirt sind, und dann die beiden zu x und der mit ihr gleichnamigen Zahl dazu gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben oder in umgekehrter Ordnung nimmt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proporzionirt ist. Diese Verhältnisse werden unter einander geschrieben.

3. Die Proporzion wird aufgelöset, indem man das Produkt aller in den innern Gliedern vorkommenden Faktoren durch das Produkt aller in den äußeren Gliedern befindlichen Faktoren dividirt. Dabei wird die Strichmethode mit Vortheil angewendet.

Beispiele.

1) Wenn $12\frac{1}{2}$ Ztr. um $28\frac{3}{4}$ fl. 32 Meilen geführt werden, wie viel Ztr. werden um $43\frac{3}{4}$ fl. 28 Meilen verführt?

$12\frac{1}{2}$ Ztr. $28\frac{3}{4}$ fl. 32 Meilen
x „ $43\frac{3}{4}$ „ 28 „

$x : 12\frac{1}{2} = 43\frac{3}{4} : 28\frac{3}{4}$
$\qquad\qquad\quad 32 : 28$

$28\frac{3}{4}$	$\cancel{12}\frac{1}{2}$	
$\cancel{7}$ $\cancel{28}$	$\cancel{43}\frac{3}{4}$	
23 $\cancel{115}$	$\cancel{32}$ $\cancel{16}$ 4	
$\cancel{2}$	$\cancel{4}$	
$\cancel{4}$	$\cancel{25}$ 5	
	$\cancel{175}$ 25	
23	500	$21\frac{17}{23}$ Ztr.
	40	
	17	

Man vergleicht hier zuerst Ztr. und fl.; für 2=, 3=, 4mal so viel Ztr. müssen auch 2=, 3=, 4mal so viel fl. Fracht gezahlt werden; diese beiden Arten von Zahlen sind also gerade proporzionirt, darum setzt man die zu x Ztr. und $12\frac{1}{2}$ Ztr. gehörigen Zahlen der Gulden in derselben Ordnung in ein Verhältniß, nämlich $43\frac{3}{4} : 28\frac{3}{4}$. Dann vergleicht man die Ztr. und Meilen, indem man sagt: 2=, 3=, 4mal so viel Ztr. werden um dasselbe Geld nur die Hälfte, den dritten, vierten Theil von so viel Meilen geführt werden; die beiden Arten von Zahlen sind also verkehrt proporzionirt, und man setzt die zu x Ztr. und $12\frac{1}{2}$ Ztr. gehörigen Zahlen der Meilen in umgekehrter Ordnung ins Verhältniß, nämlich 32 : 28. Die Auflösung der Proporzion geschieht nach der Strichmethode.

2) 12 Arbeiter bekommen für 3 Arbeitstage 28 fl.; wie viel werden 15 Arbeiter für 5 Tage bekommen?

12 Arbeiter 3 Tage 28 fl. $\quad x : 28 = 15 : 12$
15 „ 5 „ x „ $\quad\quad 5 : 3$
woraus $x = 58\frac{1}{3}$ fl.

3) Ein Kapital von 3600 fl. bringt in $4\frac{1}{2}$ Jahren 972 fl. Zins; wie viel Zins bekommt man von 5650 fl. Kap. in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

3600 fl. Kap. $4\frac{1}{2}$ Jahr 972 fl. Zins $\quad x : 972 = 5650 : 3600$
5650 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ x „ „ $\quad\quad 2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}$
daher $x = 847\frac{1}{2}$ fl. Zins.

4) 100 fl. Kapital geben in 1 Jahre $5\frac{1}{2}$ fl. Zins; wie viel fl. Kapital muß man anlegen, um in $2\frac{1}{4}$ Jahren 300 fl. Interesse zu erhalten?

100 fl. Kap. 1 Jahr $5\frac{1}{2}$ fl. Zins $\quad x : 100 = 1 : 2\frac{1}{4}$
x „ „ $2\frac{1}{4}$ „ 300 „ „ $\quad\quad 300 : 5\frac{1}{2}$
folglich $x = 2424\frac{8}{33}$ fl. Kapital.

5) Zu einem Stücke Zeug, welches $54\frac{1}{2}$ Ellen lang und $1\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, braucht man 36 Pfund Garn; wie viel Garn wird zu einem Stücke von 30 Ellen Länge und $1\frac{1}{2}$ Ellen Breite erforderlich sein?

$54\frac{1}{2}$ Ellen lang $1\frac{3}{4}$ Ellen breit 36 Pfd. $\quad x : 36 = 30 : 54\frac{1}{2}$
30 „ „ $1\frac{1}{2}$ „ „ x „ $\quad\quad 1\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$
woraus $x = 16\frac{752}{763}$ Pfd. folgt.

6) Ein Fuhrmann verspricht 28 Ztr. 25 Meilen weit um 46 fl. zu führen. Nachdem er 8 Meilen weit gefahren, kommt ihm der Auftrag zu, eine andere Straße einzuschlagen, 10 Ztr. mehr aufzuladen und 12 Meilen weiter zu fahren, als anfänglich bedungen war. Wie viel Frachtlohn wird ihm gebühren?

Hier muß man zuerst die Fracht für 28 Ztr., welche 8 Meilen weit, dann für $28 + 10 = 38$ Ztr., welche $25 - 8 + 12 = 29$ Meilen weit geführt werden, berechnen, und beide Beträge addiren.

25 Meilen 46 fl.
8 „ x „
$x : 46 = 8 : 25$
also x = fl. 14 „ 43
72 „ 25
ganze Fracht fl. 87 „ 8.

28 Ztr. 25 Meilen 46 fl.
38 „ 29 „ y „
$y : 46 = 38 : 28$
$\quad 29 : 25$
also y = fl. 72 „ 25

7) Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Kanal von 375′ Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Kanal von 600 Fuß Länge vollenden?

20 Arbeiter	12 St. täglich	5 Wochen	375′ Länge	
12 "	10 " "	x "	600′ "	

$$\left.\begin{aligned} x : 5 = 20 &: 12 \\ 12 &: 10 \\ 600 &: 375 \end{aligned}\right\} \text{woraus } x = 16 \text{ Wochen.}$$

8) Wenn 12 Weber in 3 Monaten 28 Stück Leinwand, jedes 30 Ellen lang und 5 Viertel breit, verfertigen, da sie monatlich 25 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten; in wie viel Monaten verfertigen 22 Weber, welche monatlich 24 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten, 66 Stück Leinwand, das Stück 35 Ellen lang und 6 Viertel breit? — In $6\frac{3}{4}$ Monaten.

9) Wenn 6 Mann in 5 Tagen $28\frac{1}{2}$ fl. verdienen, in wie viel Tagen werden unter übrigens gleichen Umständen 16 Mann 532 fl. verdienen? — In 35 Tagen.

10) 16 Pfund Flachs geben 10 Ellen Leinwand, wenn dieselbe 1 Elle breit ist; wie viel Ellen geben 36 Pfund Flachs, wenn die Leinwand 6 Viertel breit ist? — 150 Ellen.

11) Ein Fuhrmann erhält, um $28\frac{3}{4}$ Ztr. $46\frac{1}{2}$ Meilen weit zu führen, $68\frac{1}{3}$ fl. als Bezahlung; wie viel muß man ihm zahlen, damit er $35\frac{1}{2}$ Ztr. 40 Meilen weit führe?

12) Zu einem Fußboden braucht man 28 Breter, deren jedes 10′ 8″ lang und 9″ breit ist; wie viele Breter werden zu demselben Fußboden erforderlich sein, wenn jedes 9′ 4″ lang und 1′ breit ist?

13) 20 Arbeiter vollenden einen 30° langen Graben in 15 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viel Stunden müssen 18 Arbeiter täglich arbeiten, um einen 24° langen Graben in 16 Tagen zu Stande zu bringen?

14) Um 35 Laternen 108 Stunden lang brennen zu lassen, braucht man $4\frac{1}{2}$ Ztr. Oel; wie viel Oel ist erforderlich, wenn 50 solche Laternen 245 Stunden lang brennen sollen?

15) Von einer Wiese, welche 256 Klafter lang und 36 Klafter breit ist, werden 10 Wagen Heu gewonnen, von welchen jeder $27\frac{1}{2}$ Ztr. Ladung hat; wie viel Wagen Heu, jeden zu 30 Ztr., wird man verhältnißmäßig von einer Wiese gewinnen, die 192 Klafter lang und 96 Klafter breit ist?

16) 100 fl. Kapital geben in 1 Jahre 5 fl. Interesse; a) wie viel Interesse geben 3748 fl. in $2\frac{3}{4}$ Jahren; b) in welcher Zeit geben $7835\frac{1}{2}$ fl. Kapital $633\frac{1}{4}$ fl. Zins; c) welches Kapital gibt in $2\frac{5}{6}$ Jahren 720 fl. 13 kr. Zins?

17) Wenn aus 72 Pfund Garn 4 Stück Leinwand von 42 Ellen Länge und $\frac{5}{4}$ Ellen Breite gewebt werden, so ist die Frage: a) wie

viel Stück von 48 Ellen Länge $\frac{6}{4}$ Ellen Breite wird man aus $123\frac{1}{2}$ Pfund Garn weben; b) wie viel Ellen wird das Stück halten, wenn man aus 155 Pfund Garn 7 Stück 1 Elle breite Leinwand webt; c) wie breit wird die Leinwand sein, wenn man aus $8\frac{1}{2}$ Pfund Garn 4 Stück zu 45 Ellen weben will; d) wie viel Pfund Garn sind erforderlich, um 10 Stück zu weben, deren jedes 48 Ellen lang und $\frac{9}{8}$ Ellen breit ist?

Einfache Interessenrechnung.

§. 54.

Jedes Gut, welches entweder in einer Unternehmung nutzbringend verwendet, oder einem Andern in der Absicht überlassen wird, um dadurch eine Vergrößerung jenes Gütervorrathes zu erzielen, wird ein Kapital im weitern Sinne genannt.

Im engern Sinne versteht man unter Kapital eine Geldsumme, welche man Jemanden unter der Bedingung leiht, daß er für die Benützung einen bestimmten Geldbetrag entrichtet, endlich aber doch die ganze Geldsumme zurückzuzahlen verpflichtet ist.

Das Geld, welches für die Benützung des Kapitals entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse; es wird nach Prozenten bestimmt, welche sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, auf ein Jahr beziehen; z. B. ein Kapital ist zu 5% angelegt, heißt: von je 100 fl. Kapital erhält man in einem Jahre 5 fl. Interesse.

Die Interessenrechnung ist demnach auch eine Prozentrechnung, nur muß dabei auch auf die Zeit, während welcher ein Kapital angelegt bleibt, Rücksicht genommen werden. Es wird dabei gewöhnlich jeder Monat zu 30 Tagen, und daher das Jahr zu 360 Tagen angenommen.

Bei der Interessenrechnung kommen vier Bestimmungen vor: das Kapital, die Zeit, das Prozent und das Interesse. Jede dieser vier Bestimmungen hängt von den drei übrigen ab, und kann aus denselben berechnet werden.

Alle Aufgaben der Interessenrechnung können durch die zusammengesetzte Regeldetri aufgelöset werden, nur muß man die Bestimmung der Prozente gehörig zerlegen. Z. B. anstatt: zu 5%, stellt man den Satz auf:

100 fl. Kapital geben in 1 Jahre 5 fl. Interesse.

Eben so wird die Frage: zu x%, so ausgedrückt:

x fl. Interesse geben 100 fl. Kapital in 1 Jahre?

Um übrigens nicht bei jeder Aufgabe der Interessenrechnung eine zusammengesetzte Regeldetri ansetzen müssen, soll hier für jeden Fall nur ein Beispiel nach der Regeldetri aufgestellt, und aus dem Resultate eine allgemeine Regel für die Berechnung aller zu jenem Falle gehörigen Aufgaben abgeleitet werden.

1. Berechnung der Interessen.

§. 55.

Es sei ein Kapital von 3000 fl. zu 5% angelegt; wie viel Interesse gibt es in 4 Jahren? Man hat zur Bestimmung der Interessen folgende Regeldetri:

x fl. Int.	3000 fl. Kap.	4 Jahr		$x : 5 = 3000 : 100$
5 „ „	100 „ „	1 „		$4 : 1$

$$\text{also } x = \frac{3000 \times 5 \times 4}{100} = 600 \text{ fl.}$$

Daraus folgt:

Das Interesse wird gefunden, wenn man das Produkt aus dem Kapitale mit den Prozenten und Jahren durch 100 dividirt.

Bei der Ausrechnung bedient man sich meistens mit Vortheil der Strichmethode.

Beispiele.

1) Wie viel Zins geben 2350 fl. zu 4% in 2 Jahren?

$$\frac{2350 \times 4 \times 2}{100} = 188 \text{ fl. Interesse.}$$

2) Wie viel Interesse geben fl. 785 „ 45 zu $4\frac{1}{2}$% in $3\frac{1}{4}$ Jahren?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 785\frac{3}{4} \\ & 4\frac{1}{2} \\ & 3\frac{1}{4} \end{array}$$ Antwort: fl. 114 „ 55

3) Wie viel Zins bekommt man von fl. 3215 „ 18 zu $5\frac{3}{4}$% in 2 Jahren 7 Monaten?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3215\frac{3}{10} \\ & 5\frac{3}{4} \\ & 2\frac{7}{12} \end{array}$$ Antwort: fl. 485 „ 56.

4) Ein Kapital von 5844 fl. ist durch $3\frac{1}{2}$ Jahre zu $4\frac{1}{3}$% angelegt; was trägt es in dieser Zeit an Zins? — fl. 886 „ 20.

5) Wie viel Interesse geben 3105 fl. 54 kr. zu 5% in 2 Jahren und 1 Monate?

6) Man berechne das Interesse von 2777 fl. zu $4\frac{3}{4}$% in $1\frac{5}{6}$ Jahren.

7) A hat zwei Kapitalien angelegt: 3580 fl. zu $5\frac{1}{4}$% durch 1 Jahr 9 Monate, und $2895\frac{1}{2}$ fl. zu 6% durch 2 Jahre 4 Monate; welches Kapital bringt mehr Zinsen, und um wie viel mehr als das andere?

§. 56.

Noch einfacher als nach der Strichrechnung geschieht die Bestimmung der Interessen nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst erhellet:

1. Das Interesse für ein Jahr findet man nach der Prozentrechnung, wenn man das Kapital mit dem Prozent multiplizirt, und das Produkt durch 100 dividirt.

2. Das Interesse für mehrere Jahre wird gefunden, wenn man das Interesse für ein Jahr mit der Anzahl der Jahre multiplizirt.

3. Kommen auch Monate und Tage vor, so bedient man sich der wälschen Praktik; man zerlegt nämlich die Monate in aliquote Theile eines Jahres, und nimmt aus dem jährlichen Interesse eben solche Theile; die Tage aber zerlegt man in aliquote Theile eines Monates, und nimmt eben solche Theile aus dem monatlichen Interesse. Alle diese Beträge werden dann zu dem Interesse auf Jahre addirt.

Beispiele.

1) Man berechne das einjährige Interesse

von 31 24 fl. zu 5%
156·20 = fl. 156 „ 22
von fl. 35 78 „ 15 zu 6%
35 78·25
214·69 50 = fl. 214 „ 42

von 3800 fl. zu 4%
152 fl.
von fl. 9 57 zu $4\frac{1}{3}$%
38 28
3 19
41·47 = fl. 41 „ 28.

2) Wie viel Interessen geben

21 83 fl. zu 4% in 3 Jahren
87·32 fl. für 1 Jahr
261·96 fl. für 3 Jahre
Antwort: fl. 261 „ 58.

147 88 fl. zu $5\frac{1}{4}$% in 4 Jahren
739·40
36·97
776·37 fl. in 1 Jahre
3105·48 fl. in 4 Jahren.
Antwort: fl. 3105 „ 29.

3) Wie viel Interesse geben 2848 fl. zu 5% in 3 Jahren und 4 Monaten?

28 48 fl. zu 5% in 3 Jahren 4 Mon.
142·40 für 1 Jahr
427·2 für 3 Jahre
47·467 „ 4 Monate = $\frac{1}{3}$ Jahr
474·667 = fl. 474 „ 40.

4) Wie groß ist das Interesse von fl. 5241 „ 33 zu $5\frac{1}{4}$% in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen?

52 44·55	zu $5\frac{1}{4}$ % in 3 J. 5 M. 20 T.	
262 22·75		
13 11·14		
275·33 89	in 1 Jahre	
826 01 67	„ 3 Jahren	
91·77 96	„ 4 Monaten	$= \frac{1}{3}$ Jahr
22·94 49	„ 1 Monate	$= \frac{1}{4}$ v. 4 Mon.
7·64 83	„ 10 Tagen	$= \frac{1}{3}$ Monat
7·64 83	„ 10 Tagen	
956·03 78	= fl. 956 „ 2.	

5) Ein Kapital von fl. 8425 „ 18 liegt durch 4 Jahre 11 Monate zu $4\frac{1}{2}$ % an; wie viel Interessen bringt es? — fl. 1864 „ 5.

6) Wie viel Interesse geben fl. 2514 „ 57 zu 5 % in 5 Jahren 8 Monaten 26 Tagen? — fl. 721 „ 39.

7) Wie groß ist das Interesse von 3457 fl. zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 7 Monaten 18 Tagen? — fl. 409 „ 39.

8) Wie viel Zins geben 724 fl. zu $4\frac{3}{4}$ % in 4 Jahren 11 Monaten 27 Tagen? — fl. 171 „ 40.

Man berechne noch das Interesse:

9) Von 9007 fl. 40 kr. zu 5 % in 10 Monaten.

10) Von 1133 fl. 20 kr. zu $4\frac{5}{8}$ % in 3 Jahren 1 Monat.

11) Von 950·235 fl. zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 11 Monaten 17 Tagen.

12) Von 7185 fl. 49 kr. zu $4\frac{3}{4}$ % in 3 Jahren 7 Monaten 12 Tagen.

13) Von 1019·38 fl. zu $5\frac{1}{8}$ % in 9 Monaten 21 Tagen.

14) Von 3407 fl. 5 kr. zu 6 % in 1 Jahr 2 Monaten 7 Tagen.

§. 57.

Wenn das Interesse, wie dies häufig der Fall ist ist, *bloß für eine bestimmte Anzahl Tage* berechnet werden soll, so pflegt man zuerst das Interesse zu 6 % zu bestimmen, und daraus das Interesse für jedes andere Prozent mittelst der wälschen Praktik abzuleiten.

Um das Verfahren zur Berechnung der 6 % Interessen zu entwickeln, sei folgendes Beispiel: ein Kapital von 2345 fl. ist zu 6 % angelegt, wie viel Interesse gibt es in 137 Tagen? Nach der zusammengesetzten Regeldetri hat man

x fl. Int. 2345 fl. Kap. 137 Tag.		x : 6 = 2345 : 100
6 „ „ 100 „ „ 360 „		137 : 360

$$\text{also } x = \frac{2345 \times 137 \times 6}{36000} = \frac{2345 \times 137}{6000}$$

Das Interesse zu 6 % auf Tage wird also gefunden, wenn man das Kapital mit der Anzahl Tage mul-

tiplizirt, und das Produkt durch 6000 dividirt, indem man zuerst durch 1000 und dann durch 6 dividirt.

Die Kreuzer des Kapitals pflegt man während der Rechnung meistens unberücksichtiget zu lassen, vergrößert jedoch, wenn 30 oder mehr als 30 kr. vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer in Dezimalen von Gulden verwandelt.

Beispiele.

1) Wie viel Interesse geben 2790 fl. zu 6% in 85 Tagen?

```
 27 90 × 85
 223 20
 237·150 : 6000
         : 6
 39·525 = fl. 39 " 32.
```

2) Wie groß ist das Interesse von fl. 2349 „ 15 zu 6% in 182 Tagen?

mit Weglassung der Kreuzer	genau
234 9 × 182	234 9·25 × 182
187 92	187 9400
427.518	427·5 5350
71·253 = fl. 71 „ 15	71·2 589 = fl. 71 „ 16.

3) Wie viel Interesse geben 758 fl. zu 6% vom 13. April bis lezten Dezember?

vom 13. Apr. bis 13. Dez. sind 8 Mon. = 240 Tage
„ 13. Dez. „ 30. „ „ 17 „
zusammen 257 Tage.

```
 75 8 × 257
 151 6
 37 90
 194·806
 32·468 = fl. 32 „ 28.
```

4) Wie groß ist das Interesse von 3572 fl. Kapital zu 6% in 217 Tagen? — fl. 129 „ 11.

5) Wie viel Interesse geben fl. 2350 „ 47 zu 6% in 17 Tagen? — fl. 6 „ 40.

6) Man berechne das Interesse von 1265 fl. zu 4% in 231 Tagen.

```
    1 265 × 231
    37 95
    292·215
    48·702 zu 6%
ab  16·234 zu 2% = 1/3 von 6%
    32·468 zu 4%
```

Antwort: fl. 32 „ 28.

7) Wie groß ist das Interesse von fl. 3402 „ 9 zu $7\frac{1}{4}$ % in 125 Tagen?

$$\begin{array}{rl} 3402 & \times\ 125 \\ \hline 425{\cdot}250 & \\ \hline 70{\cdot}875 & \text{zu } 6\,\% \\ 11{\cdot}812 & \text{„ } 1\,\% \\ 2{\cdot}953 & \text{„ } \tfrac{1}{4}\,\% \\ \hline 85{\cdot}640 & = \text{fl. } 85 \text{ „ } 38. \end{array}$$

8) Wie viel Interesse geben 9110 fl. zu 5 % vom 2. Mai bis 15. Oktober?

vom 2. Mai bis 2. Okt. 150 Tage
„ 2. Okt. „ 15. Okt. 13 „
163 Tage

$$\begin{array}{rl} 911\,0 & \times\ 163 \\ 546\,60 & \\ \hline 1484{\cdot}930 & \\ \hline 247{\cdot}488 & \text{zu } 6\,\% \\ -\ 41{\cdot}248 & \text{„ } 1\,\% \\ \hline 206{\cdot}240 & = \text{fl. } 206 \text{ „ } 14. \end{array}$$

9) Wie viel Zins bekommt man von 9217 fl. zu 3 % in 174 Tagen? — fl. 133 „ 39.

10) Wie viel Zins geben 8635 „ 25 zu $4\frac{1}{2}$ % in 223 Tagen? — fl. 240 „ 43.

11) Wie viel Interesse geben fl. 12425 „ 18 zu 4% vom 1. August bis 5. April? — fl. 336 „ 52.

12) Wie groß ist das Interesse von fl. 4286 „ 42 zu 5 % vom 18. Dezember bis 15. April.

13) Jemand hat zu beziehen:

das Interesse von 3045 fl. zu 6 % für 233 Tage,
„ „ „ 2813 „ „ 5 % vom 17. April bis 22. September,
„ „ „ 4008 „ „ $4\frac{3}{4}$ % „ 24. Mai „ 7. August;
wie viel beträgt das ganze Interesse?

14) A hatte an B zu zahlen:

am 13. April 387 fl. 17 kr.
„ 25. Mai 1245 „ 38 „
„ 2. Juni 2008 „ 48 „

Dagegen hatte B an A zu bezahlen:

am 20. April 1533 fl. 33 kr.
„ 15. Mai 2112 „ 8 „
„ 20. „ 972 „ 15 „

Am 30. Juni wird die Abrechnung gemacht; wie viel bleibt da B an A schuldig, wenn die Interessen zu 5 % gerechnet werden?

2. Berechnung des Kapitals.

§. 58.

Es sei z. B. die Größe eines Kapitals zu finden, welches zu 5 % in 3 Jahren 519 fl. Interessen trägt. Man hat zur Berechnung folgende zusammengesetzte Regeldetri:

x fl. Kap.	3 Jahr.	519 fl. Int.		$x : 100 = 1 : 3$
100 " "	1 "	5 " "		$519 : 5$

$$\text{also } x = \frac{519 \times 100}{5 \times 3} = 3460 \text{ fl.}$$

Das Kapital wird also gefunden, wenn man das 100fache Interesse durch das Produkt aus den Prozenten und Jahren dividirt.

Beispiele.

1) Welches Kapital gibt zu 4 % in 4 Jahren 448 fl. Interessen?

$$\frac{448 \times 100}{4 \times 4} = 2800 \text{ fl.}$$

2) Jemand bezieht in $5\frac{1}{4}$ Jahren 948 fl. Interesse; wie groß ist das Kapital bei 6 %?

$$\begin{array}{r|l} 6 & 948 \\ 5\frac{1}{4} & 100 \end{array} \quad \text{Antwort: fl. } 3009 \text{ " } 31.$$

3) Wie groß ist das Kapital, welches zu $5\frac{1}{2}$ % jährlich fl. 202 " 24 Zins abwirft?

$$\begin{array}{r|l} 5\frac{1}{2} & 202\frac{2}{5} \\ & 100 \end{array} \quad \text{Antwort: fl. } 3680.$$

4) Ein Haus gibt im Durchschnitte jährlich 586 fl. reinen Ertrag; welchen Kaufpreis wird man dafür ansetzen, wenn man es zu 5 % verkaufen, d. i. für jede 5 fl. Reinertrag 100 fl. Kaufschilling oder Kapital haben will? — 11720 fl.

5) Welches Kapital gibt zu $4\frac{1}{2}$ % in 1 Jahre 4 Monaten 324 fl. Interesse? — 5400 fl.

6) Wie groß muß das Kapital sein, damit es zu $5\frac{1}{4}$ % in $2\frac{3}{5}$ Jahren $738\frac{3}{4}$ fl. Interesse bringt?

7) Welches Kapital gibt zu $5\frac{1}{2}$ % in 1 Jahre 9 Monaten 248 fl. 35 kr. Interesse?

3. Berechnung der Zeit.

§. 59.

Es soll die Zeit bestimmt werden, durch welche ein Kapital von 1925 fl. zu 5 % anliegen muß, um 385 fl. Zins zu tragen. Nach der Regeldetri hat man

x Jahre 1925 fl. Kap. 385 fl. Int. $x : 1 = 100 : 1925$
1 " 100 " " 5 " " $385 : 5$

daher $x = \frac{385 \times 100}{1925 \times 5} = 4$ Jahre.

Die Anzahl Jahre wird also gefunden, wenn man das 100fache Interesse durch das Produkt aus dem Kapital und Prozent dividirt.

Beispiele.

1) Wie lange muß ein Kapital von 2480 fl. zu 6 % angelegt bleiben, damit es 744 fl. Interessen einbringt?

$$\frac{744 \times 100}{2480 \times 6} = 5 \text{ Jahre.}$$

2) In wie viel Zeit geben fl. 5737 „ 33 Kapital zu $5\frac{1}{2}$ % ein Interesse von fl. 1814 „ 30?

$5737\frac{11}{20} \,|\, 1814\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} \,|\, 100$ Antwort: In 5·75 = $5\frac{3}{4}$ Jahren.

3) Wie lange muß ein Kapital von $9824\frac{1}{3}$ fl. zu $5\frac{1}{8}$ % ausstehen, damit es fl. 1132 „ 49 Interessen einträgt?

$9824\frac{1}{3} \,|\, 1132\frac{49}{60}$
$5\frac{1}{8} \,|\, 100$ 2·2499 Jahre = 2 Jahre 2 Mon. 29 Tage.

4) Wie lange muß ein Kapital von fl. 5212 „ 40 anliegen, um zu $5\frac{1}{4}$ % fl. 712 „ 48 Interesse einzutragen? — 2 Jahre 7 Monate 8 Tage.

5) In welcher Zeit erhält man von fl. 9421 „ 17 zu $4\frac{1}{2}$ % fl. 269 „ 45 Zins? — In 7 Monaten 19 Tagen.

6) In wie viel Zeit geben fl. 3855 „ 40 zu $5\frac{1}{2}$ % 721 fl. Interesse?

7) In wie viel Zeit geben 1237 fl. 30 kr. Kapital bei 6 % 84 fl. 9 kr. Zins?

4. Berechnung der Prozente.

§. 60.

Ist z. B. zu finden, zu wie viel % ein Kapital von 8000 fl. angelegt werden muß, damit es in 3 Jahren 960 fl. Interessen einbringt, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

x fl. Int. 100 fl. Kap. 1 Jahr $x : 960 = 100 : 8000$
960 " " 8000 " " 3 " $1 : 3$

also $x = \frac{960 \times 100}{8000 \times 3} = 4.$

Das Prozent wird demnach gefunden, wenn man das 100fache Interesse durch das Produkt aus dem Kapitale und den Jahren dividirt.

Beispiele.

1) Zu wie viel % muß ein Kapital von 3445 fl. angelegt werden, um in 4 Jahren 689 fl. Interesse zu geben?

$$\text{Zu } \frac{689 \times 100}{3445 \times 4} = 5\,\%.$$

2) Ein Kapital von 5500 fl. gibt jährlich 330 fl. Interessen; zu wie viel % verzinset es sich?

$$\text{Zu } \frac{330 \times 100}{5500} = 6\%.$$

3) Zu wie viel % verzinset sich ein Kapital von fl. 4755 „ 15, welches in 3 Jahren 3 Monaten 850 fl. Interessen gibt?

$$\begin{array}{r|l} 4755\frac{1}{4} & 850 \\ 3\frac{1}{4} & 100 \end{array} \qquad \text{Antwort: zu } 5\tfrac{1}{2}\,\%.$$

4) Zu wie viel % ist ein Kapital von fl. 4585 „ 31 angelegt, wenn es in $3\frac{1}{4}$ Jahr $844\frac{1}{2}$ fl. Interessen gibt? — Zu $5\frac{2}{3}$ %.

5) Jemand zahlt von einem k. Dukaten monatlich 3 kr. Zins; wie viel % macht dieses? — $13\frac{1}{3}$ %.

6) Zu wie viel % verinteressirt sich ein Kapital von 6800 fl., welches in 2 Jahren 4 Monaten 12 Tagen fl. 844 „ 54 Interessen gibt?

7) Ein Kapital von 3150 fl. trägt in 8 Monaten $73\frac{1}{2}$ fl. Interesse; zu wie viel % verzinset es sich?

Die Terminrechnung.

§. 61.

Häufig tritt der Fall ein, daß die Bezahlung einer Summe theilweise in bestimmten Zeitfristen oder Terminen bedungen wird. Es kann nun dem Schuldner oder dem Gläubiger oder beiden zugleich erwünscht sein, wenn die ganze Summe auf einmal berichtiget wird, wobei jedoch weder dem Schuldner noch dem Gläubiger ein Vortheil zum Nachtheile des andern erwachsen darf. Der Zeitpunkt, wann die Gesammtzahlung geleistet werden muß, damit weder der Schuldner noch der Gläubiger einen Nachtheil habe, wird der mittlere Termin genannt, und die Rechnung, nach welcher derselbe bestimmt wird, die Terminrechnung.

Um das bei der Terminrechnung zu beobachtende Verfahren abzuleiten, soll folgendes Beispiel durchgeführt werden.

Jemand ist 6000 fl. schuldig, und verpflichtet sich, 2000 fl. nach 2 Monaten, 2500 fl. nach 4 Monaten, und 1500 fl. nach 10 Monaten zu bezahlen; wann wird die Zahlung erfolgen müssen, wenn er die ganze Summe auf einmal abtragen will?

Bei der bedungenen Zahlungsweise hat der Schuldner den Vortheil, die Interessen von 2000 fl. durch 2 Monate, von 2500 fl. durch 4 Monate, und von 1500 fl. durch 10 Monate zu genießen. Eben so viel Interessen muß der Schuldner, damit er keinen Nachtheil habe, auch genießen, wenn er die ganze Schuld auf einmal entrichten soll, so daß man bei der vorliegenden Aufgabe eigentlich folgende Frage zu beantworten hat: In wie viel (x) Monaten wird die Summe 6000 aller Terminzahlungen eben so viel Interesse geben, als die einzelnen Terminzahlungen in den dazu gehörigen Zeitfristen.

Es geben nun

6000 Kap. in x Mon.	eben so viel Interesse als	6000 × x Kap. in 1 Mon.
2000 " " 2 "		2000 × 2 " " 1 "
2500 " " 4 "		2500 × 4 " " 1 "
1500 " " 10 "		1500 × 10 " " 1 "

daher muß das Interesse des Kapitals $6000 \times x$ in 1 Monate eben so groß sein, als die Interessen der Kapitalien $2000 \times 2 = 4000$, $2500 \times 4 = 10000$, $1500 \times 10 = 15000$ ebenfalls in 1 Monate; dieses aber kann, da in beiden Fällen die Zeit gleich ist und auch dasselbe Prozent vorausgesetzt werden muß, nur dann Statt finden, wenn das erste Kapital gleich ist der Summe aus den drei letzteren Kapitalien; es muß somit

$$6000 \times x = 29000$$

sein. Wenn man aber das Produkt zweier Faktoren, und den einen dieser Faktoren kennt, so wird der andere durch die Division gefunden. Der mittlere Termin x wird also erhalten, wenn man 29000, d. i. die Summe aus den Produkten aller Terminzahlungen in die zugehörigen Zeiten, durch 6000, d. i. durch die Summe aller Terminzahlungen, dividirt; es ist nämlich $x = \frac{29000}{6000} = 4\frac{5}{6}$ Monat.

Daraus ergibt sich für die Terminrechnung folgendes Verfahren:

1. Man multiplizire jede Terminzahlung mit der Zeit, nach welcher sie geleistet werden soll.

2. Man addirt sowohl die Terminzahlungen, als die erhaltenen Produkte, und dividirt die zweite Summe durch die erste; der Quozient zeigt den mittleren Termin an.

Beispiele.

1) Eine Summe von 10000 fl. ist in vier Raten zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl nach 8 Monaten, und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt wird, wann soll dieses geschehen?

	3000 fl.	nach	4	Mon.	=	1 2000
	2500 „	„	6	„	=	1 5000
	2000 „	„	8	„	=	1 6000
Rest	2500 „	„	12	„	=	3 0000
	10000					7·3000 = 7 Mon. 9 Tage.

Die Gesammtzahlung wird demnach nach 7 Monaten 9 Tagen zu erfolgen haben.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, untersuche man, ob der Schuldner wirklich bei der Gesammtzahlung denselben Vortheil hat als bei den ratenweisen Zahlungen, wenn man irgend ein Prozent, z. B. 5 % annimmt.

Bei den ratenweisen Zahlungen genießt der Schuldner

die Interessen von	3000 fl.	durch	4	Monate	= fl	50 „	—
„ „ „	2500 „	„	6	„	= „	62 „	30
„ „ „	2000 „	„	8	„	= „	66 „	40
„ „ „	2500 „	„	12	„	= „	125 „	—
					zusammen fl.	304 „	10

Berichtiget der Schuldner die ganze Summe von 10000 fl. nach 7 Monaten 9 Tagen, so genießt er dabei an Interessen auch fl. 304 „ 10. Der Schuldner hat also bei dieser Zahlungsweise weder einen Vortheil noch einen Nachtheil, woraus von selbst folgt, daß auch der Gläubiger dabei weder gewinnt noch verliert.

2) Jemand ist vertragsmäßig verpflichtet, 12000 fl. alsogleich, 9000 fl. nach 4 Monaten, 9000 fl. nach 8 Monaten, 9000 fl. nach 12 Monaten, und 9000 fl. nach 16 Monaten zu zahlen. Wann wird die Zahlung geschehen müssen, wenn sie auf einmal geleistet werden soll?

12000 × 0	4 × 0 = 0
9000 × 4	3 × 4 = 12
9000 × 8	3 × 8 = 24
9000 × 12	3 × 12 = 36
9000 × 16	3 × 16 = 48
	16 120

120 : 16 = $7\frac{1}{2}$ Monat. — Antwort: nach $7\frac{1}{2}$ Monaten.

Da hier die einzelnen Beträge ein gemeinschaftliches Maß haben, so können sie abgekürzt werden, und zwar zuerst durch 1000, und dann durch 3.

3) Jemand hat 20000 fl. so zu entrichten, daß er 4000 fl. sogleich, 4000 fl. nach 3 Monaten, 5000 fl. nach 6 Monaten, und den Rest nach 10 Monaten bezahlt. Er wünscht nun die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; nach wie viel Monaten wird dieses geschehen müssen?

$$\begin{array}{rcl} 4000 \times 0 & = & 0 \\ 4000 \times 3 & = & 12 \\ 5000 \times 6 & = & 30 \\ \text{Rest } 7000 \times 10 & = & 70 \\ \overline{20} & & \overline{112} : 20 = 5{\cdot}6. \end{array}$$

Nach 5 Monaten 18 Tagen.

4) Jemand kauft einen Acker um 6000 fl., wovon er 1500 fl. nach 4 Monaten, 1000 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 9 Monaten, und den Rest nach 1 Jahre bezahlen soll. Wann kann er die ganze Summe auf einmal erlegen, wenn weder der Käufer noch der Verkäufer einen Vortheil oder Nachtheil haben soll? — Nach 8 Monaten.

5) Wann müssen 1800 fl. auf einmal bezahlt werden, wenn man 300 fl. nach 1 Jahr, 400 fl. nach $1\frac{1}{4}$ Jahr, 500 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Jahren, und den Rest nach $3\frac{1}{3}$ Jahren ohne Zins zu zahlen schuldig ist?

6) Jemand hat 1000 fl. sogleich, 1050 fl. nach 2 Monaten, 1100 fl. nach 4 Monaten, 1150 fl. nach 6 Monaten, 1200 fl. nach 8 Monaten, 1250 fl. nach 19 Monaten zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

III. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 62.

Die Gesellschaftsrechnung wird angewendet, wenn eine Zahl in mehrere Theile so getheilt werden soll, daß diese Theile in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Die Zahlen, durch welche dieses Verhältniß ausgedrückt wird, heißen Verhältnißzahlen.

Z. B. Zu einem Handelsgeschäfte verbinden sich drei Personen; A legt 8500 fl., B 9800 fl., C 10000 fl. in den Handelsfond; wenn nun der ganze Gewinn 3400 fl. beträgt, wie viel davon gebührt einem jeden? — Hier muß der Gewinn verhältnißmäßig nach den Einlagen getheilt werden; diese Aufgabe gehört also zur Gesellschaftsrechnung und zwar bilden die Einlagen 8500, 9800, 10000 die Verhältnißzahlen.

Kommt in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältnißzahlen vor, so nennt man die Gesellschaftsrechnung eine einfache; werden aber mehrere Reihen von Verhältnißzahlen gegeben, so heißt das Rechnungsverfahren die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

Die Gesellschaftsrechnung kommt bei Handelsgesellschaften zur Theilung des Gewinnes in Anwendung, ferner bei Bankerotten, Erbschaften, Schiffsantheilen, Steuervertheilungen, Vermischungen und verschiedenen anderen Geschäften vor.

§. 63.

Um die Regeln für die einfache Gesellschaftsrechnung zu entwickeln, soll folgende Aufgabe gelöset werden:

Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 2800 fl., B 3600 fl. und C 4000 fl.; sie gewinnen damit 1300 fl.; wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jede der drei Personen?

Hier muß der Gewinn nach Verhältniß der Einlagen getheilt werden, die Verhältnißzahlen sind also 2800, 3600, 4000. Das Verhältniß mehrerer Zahlen wird nicht geändert, wenn man sie alle mit derselben Zahl multiplizirt oder dividirt; kürzt man daher die früheren Zahlen durch 100 ab, so bekommt man 28, 36, 40, und kürzt man noch durch 4 ab, so sind die auf die einfachste Form gebrachten Verhältnißzahlen 7, 9, 10. Der ganze Gewinn von 1300 fl. muß daher so vertheilt werden, daß auf A 7, auf B 9 und auf C 10, also auf alle zusammen 26 gleiche Theile kommen; dividirt man die zu vertheilende Zahl 1300 fl. durch 26, was die Summe aller Verhältnißzahlen ist, so zeigt der Quozient 50 fl. einen solchen Theil an; da aber A 7, B 9, C 10 solche Theile bekommt, so muß man 50 fl. noch mit den einzelnen Verhältnißzahlen multipliziren; nämlich:

$$
\begin{array}{rl}
50 \times 7 = 350 & \text{fl. gewinnt A,} \\
50 \times 9 = 450 & \text{〃 〃 B,} \\
50 \times 10 = 500 & \text{〃 〃 C.} \\
\hline
1300 & \text{fl. ganzer Gewinn.}
\end{array}
$$

Bei der einfachen Gesellschaftsrechnung sind demnach folgende Regeln zu beobachten:

1. Man schreibe die Verhältnißzahlen unter einander. Sind sie Brüche, so multiplizire man sie alle mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; haben alle Verhältnißzahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kürze man sie dadurch ab.

2. Die auf die einfachste Form gebrachten Verhältnißzahlen werden addirt.

3. Man dividire die zu vertheilende Zahl durch die Summe der Verhältnißzahlen, und multiplizire den erhaltenen Quozienten nach und nach mit jeder Verhältnißzahl; die Produkte sind die gesuchten Theile.

Beispiele und Aufgaben.

1) Die Bestandtheile des Schießpulvers sind: 75 Theile Salpeter, 13 Theile Kohlen und 12 Theile Schwefel; wie viel von jedem dieser Bestandtheile wird zu 800 Pfund Schießpulver erfordert?

Salpeter	75;	8 × 75 =	600 Pfd.
Kohlen	13;	8 × 13 =	104 „
Schwefel	12;	8 × 12 =	96 „
	800 : 100 = 8		800 Pfd.

2) Es sollen 5610 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ unter A, B, C, D vertheilt werden.

A $\frac{1}{2}$	6;	170 × 6 =	1020 fl.	bekommt A
B $\frac{2}{3}$	8;	170 × 8 =	1360 „	„ B
C $\frac{3}{4}$	9;	170 × 9 =	1630 „	„ C
D $\frac{5}{6}$	10;	170 × 10 =	1700 „	„ D

5610 : 33 = 170 — 5610 fl. zusammen.
231
00

3) Vier Personen treten zum Betriebe eines Geschäftes zusammen, und zwar A mit einer Einlage von 4500 fl., B mit 5400 fl., C mit 6000 fl., D mit 9600 fl. Wenn nun das Geschäft einen Gewinn von 4248 fl. abwirft, wie viel kommt auf jeden Theilnehmer?

A 45~~00~~	15 × 49·9765 =	749·647 fl.	= fl.	749 „ 39
B 54~~00~~	18 × 49·9765 =	899·577 „	= „	899 „ 35
C 60~~00~~	20 × 49·9765 =	999·530 „	= „	999 „ 32
D 96~~00~~	32 × 49·9765 =	1599·248 „	= „	1599 „ 15
	4248 : 8‚5 = 49·9765	4248·002 fl.	fl.	4248 „ 1.

848
830
650
550
40

4) Zu einem Brückenbaue, der fl. 5241 „ 21 kostet, sollen drei Gemeinden beitragen. Die Gemeinde A ist von der Brücke 1 Meile, B 2 und C 3 Meilen entfernt. Wie viel wird jede Gemeinde beisteuern, wenn die Zahlungen im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen, also nach den Verhältnißzahlen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ zu geschehen haben?

A 1	6 × 476·486 =	2858·916 fl.	= fl.	2858 „ 55
B $\frac{1}{2}$	3 × 476·486 =	1429·458 „	= „	1429 „ 28
C $\frac{1}{3}$	2 × 476·486 =	952·972 „	= „	952 „ 58
5241·35 : 11 = 476·4863			fl.	5241 „ 21

5) Ein Kreis hat vier Bezirke, von denen A fl. 2845 „ 28, B fl. 1748 „ 37, C fl. 2106 „ 29, D fl. 3019 „ 53 Steuer zahlt. Wenn nun dieser Kreis eine besondere Zahlung von fl. 548 zu leisten hat, wie viel wird jeder Bezirk im Verhältnisse der Steuerquote zu entrichten haben?

A	fl. 2845	„ 28	=	fl.	2845·467
B	„ 1748	„ 37	=	„	1748·617
C	„ 2106	„ 29	=	„	2106·483
D	„ 3019	„ 53	=	„	3019·883

845 : 9720·450 = 0·0869301.

A zahlt	0.0869301 × 2845·467 =	247·357 fl.	= fl.	247	„	22
B „	0·0869301 × 1748·617 =	152·007 „	= „	152	„	—
C „	0·0869301 × 2106·483 =	183.117 „	= „	183	„	7
D „	0·0869301 × 3019·883 =	262·519 „	= „	262	„	31
			fl.	845	„	—

6) Ein Kaufmann, welcher an A 7845 fl., an B 10824 fl., an C 8305 fl., an D 15234 fl., an E 4211 fl. schuldig ist, fallirt. Wenn nun sein Vermögen fl. 21428 „ 37 beträgt, wie viel wird jeder Gläubiger bekommen? — A fl. 3621 „ 31, B fl. 4996 „ 44, C fl. 3833 „ 52, D fl. 7032 „ 33, E fl. 1943 „ 57.

7) Jemand hinterläßt ein Vermögen von fl. 15845, welches unter seine drei Erben so vertheilt werden soll, daß A 2mal so viel als B, und B 3mal so viel als C bekommt. Was erhält jeder Erbe? — So oft C 1 fl. erhält, bekommt B 3 fl. und A 6 fl.; die Erbtheile von A, B und C stehen also im Verhältnisse 6 : 3 : 1, so daß A fl. 9507, B fl. 4753 „ 30, C fl. 1584 „ 30 erhält.

8) Für die Versendung von 2133 Pfd. Kaffee, 1735 Pfd. Zucker und 923 Pfd. Pfeffer werden 65 fl. 18 kr. Fracht gezahlt; wie viel kommt auf jeden dieser Artikel?

9) Bei guter rother Tinte rechnet man auf 1 Maß Weinessig, 2 Loth Alaun, $\frac{1}{2}$ Pfd. Fernambuk, $2\frac{1}{2}$ Loth arabischen Gummi. Wollte man nun aus 3 Pfd. 27 Loth dieser trockenen Mischung rothe Tinte bereiten, wie viel von jedem der drei letzteren Bestandtheile müßte genommen, und wie viel Weinessig dazu gesetzt werden?

10) Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3240 fl., B 1827 fl., C 2380 fl., D 3185 fl. hergibt, werden $581\frac{1}{2}$ fl. gewonnen; wie viel kommt auf jeden?

11) Man theile die Zahl 3555 im Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, 1.

12) Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 2 Theile Kies, 1 Theil Gyps; wie viel von jedem dieser Bestandtheile braucht man zu einer Masse von 105 Pfund?

13) Zu einem Geschäfte gibt A 1250 fl., B 2000 fl., C 2750 fl., D 3000 fl. Wenn 1260 fl. gewonnen werden, und A außer seinem verhältnißmäßigen Antheile wegen seiner besondern Dienstleistung noch 5% des Gewinnes erhält; wie viel kommt auf jeden?

§. 64.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, in welcher mehrere Reihen von Verhältnißzahlen angegeben werden, hängen die einzelnen Theile von den Produkten der darauf bezüglichen Verhältnißzahlen ab, wodurch jede zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung auf eine einfache zurückgeführt werden kann.

Wenn z. B. zu einem Handelsfonde A 13000 fl. durch 4 Monate, B aber 10000 fl. durch 6 Monate hergibt, und dabei ein Gewinn von 5000 fl. erzielt wird, so ist dieser Gewinn nach Verhältniß der Einlagen und zugleich nach Verhältniß der Zeit zu theilen. Allein da es gleichviel ist, ob

A 13000 fl. durch 4 Monate,
B 10000 „ „ 6 Monate,

oder ob

A $13000 \times 4 = 52000$ fl. durch 1 Monat,
B $10000 \times 6 = 60000$ „ „ 1 Monat

zur Benützung überläßt, so müssen auch in beiden Fällen auf A und B dieselben Antheile am Gewinne entfallen. Weil nun im zweiten Falle die Zeit der Benützung dieselbe ist, so wird der Gewinn nur nach Verhältniß der Einlagen, d. i. der Produkte 52000 und 60000 unter A und B zu vertheilen sein; diese Zahlen bilden sonach die Verhältnißzahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung.

Bei der **zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung** sind daher folgende **Regeln** zu beobachten:

1. Man schreibe die Verhältnißzahlen, welche auf denselben Theil Bezug haben, neben einander.
2. Man multiplizire die neben einander stehenden Verhältnißzahlen mit einander.
3. Die erhaltenen Produkte betrachte man als Verhältnißzahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Beispiele und Aufgaben.

1) Ein Fuhrmann verpflichtet sich, um einen Lohn von 112 fl. drei Ladungen, und zwar 24 Ztr. 15 Meilen weit, 30 Ztr. 20 Meilen weit und 26 Ztr. 25 Meilen weit zu führen. Was gebührt ihm für jede einzelne Ladung?

24×15	$36\cancel{0}$;	$0{\cdot}69565 \times 36 = 25{\cdot}043$ fl.	= fl. 25 „ 3
30×20	$60\cancel{0}$;	$0{\cdot}69565 \times 60 = 41{\cdot}739$ „	= „ 41 „ 44
26×25	$65\cancel{0}$;	$0{\cdot}69565 \times 65 = 45{\cdot}217$ „	= „ 45 „ 13
	$112 : 161 = 0{\cdot}69565$		fl. 112 „ —

2) Zu einem Geschäfte vereinigen sich drei Personen; A gibt 8200 fl. auf 5 Monate, B 10500 fl. auf 4 Monate, C 12000 fl. auf 3 Monate her. Das Geschäft bringt einen Gewinn von 4520 fl.; wie viel davon wird jede der drei Personen erhalten? — A fl. 1557 „ 18, B fl. 1595 „ 18, C fl. 1367 „ 24.

3) Bei einem Brückenbaue waren 3 Gemeinden beschäftiget. Aus der Gemeinde A arbeiteten 22 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 18 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 12 Stun-

den täglich. Wenn nun dafür ein Lohn von 400 fl. verabfolgt wird, wie viel wird jede einzelne Gemeinde bekommen? — Die Gemeinde A hat 176 fl., B 144 fl., C 80 fl. zu erhalten.

4) A beginnt am 1. Jänner ein Geschäft mit 8000 fl. Kapital, am 1. Mai tritt B mit 5000 fl., und am 1. Juli C mit 6000 fl. bei; wenn sich nun mit Ende Dezember ein Gewinn von 1180 fl. 20 kr. ergibt, wie viel gebührt davon jedem der drei Theilnehmer?

IV. Die Allegazionsrechnung.

§. 65.

Die Allegazions- oder auch Vermischungsrechnung wird angewendet, wenn man das Verhältniß finden will, in welchem zwei oder mehrere gleichartige Dinge von verschiedenem Gehalte mit einander verbunden werden müssen, um eine Mittelgattung von bestimmtem Gehalte zu bekommen.

Z. B. Ein Silberarbeiter braucht 13löthiges Silber, er hat aber nur feines und 11löthiges Silber vorräthig; in welchem Verhältnisse müßte er diese beiden Gattungen legiren, damit die Legirung genau 13löthig sei? Derlei Aufgaben werden nach der Allegazionsrechnung aufgelöset.

Die Gattung, welche man beim Mischen erhalten will, muß immer besser als die geringste, und geringer als die beste der Gattungen sein, die man zur Mischung verwendet. Wasser und Kupfer werden, wenn man sie zur Herabsetzung des Gehaltes des Weines und der edlen Metalle damit verbindet, ihrem Werthe nach gleich Null gesetzt, und nur der Menge nach berücksichtiget.

Bei den meisten Aufgaben muß, nachdem man durch die Allegazionsrechnung das Verhältniß der Mischung gefunden hat, die weitere Auflösung nach der Gesellschaftsrechnung vorgenommen werden.

§. 66.

Wenn man aus zwei gegebenen Gattungen eine Mittelgattung erhalten will, so muß bei der Mischung das, was der geringeren Gattung bis zur Mittelgattung abgeht, die bessere durch ihren Ueberschuß ersetzen; jemehr sich also die geringere Gattung von der Mittelgattung unterscheidet, desto mehr von der bessern Gattung muß zur Mischung genommen werden; die Menge der besseren Gattung oder die Verhältnißzahl der Mischung für die bessere Gattung wird also durch den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren angezeigt. Eben so muß das, was die bessere Gattung mehr werth ist als die Mittelgattung, durch Hinzusetzen der schlechteren ausgeglichen werden; man wird also um so mehr von der geringeren Gattung in die Mischung aufnehmen, je mehr sich die bessere Gattung von der Mittelgattung unterscheidet; dieser Unterschied ist also die Verhältnißzahl der Mischung für die gringere Gattung.

Wenn daher nur zwei Gattungen unter einander gemischt werden sollen, um daraus eine bestimmte Mittelgattung zu erhalten, so beobachte man folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die beiden zu vermischenden Gattungen unter einander, und setze links dazwischen die Mittelgattung.

2. Man ziehe die geringere Gattung von der Mittelgattung ab, und setze den Unterschied rechts neben die bessere Gattung; dann ziehe man die Mittelgattung von der besseren ab und schreibe den Unterschied rechts neben die geringere Gattung. Diese Unterschiede sind die Verhältnißzahlen der Mischung für die nebenstehenden Gattungen.

Beispiele.

1) Ein Wirth will zweierlei Weine, den einen zu 20 kr., den andern zu 48 kr. so mischen, daß eine Maß der Mischung 40 kr. werth ist; in welchem Verhältnisse wird die Mischung geschehen müssen?

$$40\ \frac{20}{48}\left|\begin{array}{c|c}8&2\\20&5\end{array}\right.$$

Der Unterschied zwischen der Mittelgattung 40 und der geringeren 20 ist 20 und wird neben die bessere 48 hinzugesetzt; der Unterschied zwischen der Mittelgattung 40 und besseren 48 ist 8, und wird neben die geringere 20 hingeschrieben. Die Verhältnißzahlen der Mischung sind also 8 und 20, oder abgekürzt 2 und 5; d. h. der Wirth muß von dem schlechteren Weine 2 Theile, von dem besseren aber 5 eben solche Theile zur Mischung verwenden; wollte er z. B. 10 Maß Wein zu 20 kr. nehmen, so müßten 25 Maß zu 48 kr. dazu gemischt werden, weil aus $x : 10 = 5 : 2$ sich $x = 25$ ergibt. Daß eine Maß dieser Mischung wirklich 40 kr. werth ist, findet man durch die Durchschnittsrechnung; es ist

10 Maß	zu 20 kr. =	200 kr.
25 "	" 48 " =	1200 "
35 Maß	der Mischung	1400 kr.
daher 1 "	" "	40 kr.

2) Ein Kaufmann will aus Kaffee im Preise zu 40 fl. und zu 30 fl. 28 Ztr. zu 32 fl. mischen; wie viel Ztr. muß er von jeder Sorte nehmen?

$$32\ \frac{40}{30}\left|\begin{array}{c|c}2&1\\8&4\end{array}\right.$$

Die Menge von 28 Ztr. muß also im Verhältnisse 1 : 4 getheit werden; man hat nach der Gesellschaftsrechnung:

$1;\quad 1 \times 5\frac{3}{5} = 5\frac{3}{5}$ Ztr. von der Sorte zu 40 fl.

$4;\quad 4 \times 5\frac{3}{5} = 22\frac{2}{5}$ " " " " " 30 "

$28 : 5 = 5\frac{3}{5}.$

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, wendet man die Durchschnittsrechnung an; man erhält

$5\frac{3}{5}$ Ztr. zu 40 fl. = 224 fl.
$22\frac{2}{5}$ " " 30 " = 672 "
28 Ztr. . . . . 896 fl.
daher 1 Ztr. 32 fl.

3) Ein Wirth hat zweierlei Weine, den Eimer zu 15 fl. und zu 24 fl.; er will durch Mischung dieser beiden Gattungen 10 Eimer zu 21 fl. erhalten; wie viel muß er von jeder Gattung dazu verwenden?

$$21 \begin{array}{c|c|l} 24 & 6 & 2 \times 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ Eimer zu 24 fl.} \\ \hline 15 & 3 & 1 \times 3\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ " " 15 "} \end{array}$$
$$10 : 3 = 3\frac{1}{3}$$

Probe. $6\frac{2}{3}$ Eimer zu 24 fl. = 160 fl.
$3\frac{1}{3}$ " " 15 " = 50 "
10 Eimer der Mischung 210 fl.
also 1 Eimer 21 fl.

4) Jemand will aus feinem und 10löthigen Silber 16 Mark $13\frac{2}{3}$löthiges Silber legiren; wie viel von jeder Gattung muß er dazu nehmen?

$$13\frac{2}{3} \begin{array}{c|c|l} & & 3 \\ 16 & 3\frac{2}{3} & 11 \times \frac{8}{9} = 9\frac{7}{9} \text{ Mark feines Silber} \\ \hline 20 & 2\frac{1}{3} & 7 \times \frac{8}{9} = 6\frac{2}{9} \text{ " 10löth. "} \end{array}$$
$$16 : 18 = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}.$$

Probe. $9\frac{7}{9}$ Mark feines Silber enthalten $156\frac{4}{9}$ Lth. fein Silber
$6\frac{2}{9}$ " 10löth. " " $62\frac{2}{9}$ " " "
16 Mark der Legirung . . . . $218\frac{2}{3}$ Lth. fein Silber
daher kommen auf 1 Mark $13\frac{2}{3}$ Lth. fein Silber.

5) Ein Silberarbeiter hat 6 Mark feines Silber; wie viel Kupfer muß er damit legiren, um 13löthiges Silber zu bekommen?

$$13 \begin{array}{c|c} 16 & 13 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{daher } x : 6 = 3 : 13, \\ \text{woraus } x = 1\frac{5}{13} \text{ Mark Kupfer.} \end{array}$$

Probe. 6 Mark 16löth. = 96 Lth. fein Silber
$1\frac{5}{13}$ " 0 " = 0 " "
$7\frac{5}{13}$ Mark . . . 96 Lth. fein Silber
1 Mark . . . 13 Lth. fein Silber.

6) Ein Goldarbeiter will aus 17 und 23karatigem Golde $2\frac{1}{2}$ Mark 21karatiges Gold legiren, wie viel muß er von jeder Sorte dazu nehmen? — Vom 17karatigem Golde $\frac{5}{6}$ Mark, vom 23karatigen $1\frac{2}{3}$ Mark.

7) Zwei Gattungen Kaffee, zu 18 kr. und zu 28 kr. das Pfund, sollen so gemischt werden, daß man einen Zentner zu 24 kr. das Pfund erhält; wie viel von jeder Gattung muß dazu genommen werden? — 40 Pfund zu 18 kr. und 60 Pfund zu 28 kr.

8) Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen; unverdünnt würde er die Maß um 16 kr. verkaufen; wenn er $12\frac{1}{2}$ Eimer verdünnten Essig erhalten, und die Maß davon um 12 kr. verkaufen will, wie viel Essig und wie viel Wasser muß er zu der Mischung nehmen?

9) Aus 16 und 22karatigem Gold will man 4 Mark 18karatiges schmelzen; wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

10) Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer muß man nehmen, um $7\frac{3}{4}$ Mark $11\frac{5}{8}$löthiges Silber zu bekommen?

§. 67.

Häufig soll man auch mehr als zwei Gattungen zur Mischung verwenden, und zu diesem Ende das Mischungsverhältniß ausmitteln. Die Auflösung dieser Aufgabe ist unbestimmt; es lassen sich nämlich verschiedene Zusammensetzungen vornehmen, welche alle auf die bestimmte Mittelgattung führen.

Sollen mehr als zwei Gattungen mit einer gemischt werden, um eine Mittelgattung zu erhalten, so geht man dabei von dem Grundsatze aus: wenn man immer eine bessere und eine schlechtere Gattung so zusammensetzt, daß man die verlangte Mittelgattung erhält, so wird gewiß auch durch alle diese Mischungen zusammen genommen dieselbe Mittelgattung zum Vorschein kommen. Daraus ergibt sich zur Auffindung des Mischungsverhältnisses folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die zu vermischenden Gattungen in der Ordnung von der besten bis zur geringsten, oder umgekehrt unter einander; links wird die Mittelgattung gesetzt.

2. Man nehme nach und nach immer eine bessere und eine geringere Gattung und vergleiche sie mit der Mittelgattung; den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren setze man rechts neben der besseren Gattung, den Unterschied zwischen der mittleren und besseren Gattung schreibe man rechts neben der geringeren an. So fahre man fort, bis jede Gattung mit einer anderen verbunden erscheint. Oefters wird eine Gattung auch mit mehreren anderen zusammengesetzt, und zwar dann, wenn die Anzahl der besseren Gattungen jener der geringeren nicht gleich ist, oder wenn man von einer Gattung eine größere Menge zur Mischung verwenden will; in solchen Fällen kommen dann neben jener Gattung mehrere Unterschiede zu stehen. Der Unterschied, welcher neben jeder Gattung steht, oder wenn mehrere Unterschiede da sind, ihre Summe ist die Verhältnißzahl der Mischung für die betreffende Gattung.

Beispiele und Aufgaben.

1) Ein Silberarbeiter braucht 13löthiges Silber; er besitzt aber nur feines und 15löthiges Silber und muß daher auch Kupfer dazu mischen; in welchem Verhältnisse muß nun die Legirung vorgenommen weren?

$$\begin{array}{r|c|c} 16 & 13 & 13 \\ 15 & 13 & 13 \\ 13\text{---} & & \\ 0 & 3 + 2 & 5 \end{array}$$

Hier verbindet man zuerst 16löthiges Silber und Kupfer (0löthiges Silber), dann 15 und 0löthiges, und erhält so die Verhältnißzahlen 13, 13 und 5.

Wenn man z. B. 13 Mark feines Silber und 13 Mark 15löthiges Silber nimmt, so muß man 5 Mark Kupfer dazu setzen, um 13löthiges Silber zu bekommen; es ist wirklich

13 Mark	à 16 Lth.	= 208 Lth.	Silber
13 „	à 15 „	= 195 „	„
5 „	à 0 „	= 0 „	„
31 Mark der Legirung		403 Lth.	fein Silber.

also kommen auf 1 Mark 13 Lth. fein Silber.

2) Aus 8löthigem, 10löthigem und feinem Silber sollen 15 Mark 13löthiges Silber legirt werden; wie viel Mark sind von jeder Sorte zu nehmen?

$$\begin{array}{r|c|l} 8 & 3 & 3 \times 1\tfrac{1}{14} = 3\tfrac{3}{14} \text{ Mark} \\ 13\;\; 10 & 3 & 3 \times 1\tfrac{1}{14} = 3\tfrac{3}{14} \;\text{„} \\ 16 & 5 + 3 & 8 \times 1\tfrac{1}{14} = 8\tfrac{8}{14} \;\text{„} \end{array}$$

$15 : 14 = 1\frac{1}{14}$.

Probe. $3\frac{3}{14}$ Mark	8löth.	Silber	= $25\frac{5}{7}$	Loth fein
$3\frac{3}{14}$ „	10 „	„	= $32\frac{1}{7}$	„ „
$8\frac{4}{7}$ „	16 „	„	= $137\frac{1}{7}$	„ „
15 Mark Legirung	. . .		195	Loth fein.
also 1 Mark	. . .		13	Loth fein.

3) Ein Wirth will viererlei Weine zu 15 fl., zu 18 fl., zu 24 fl., zu 28 fl. so mischen, daß er 38 Eimer zu 20 fl. erhalte; wie viel Eimer muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

Diese Aufgabe läßt verschiedene Auflösungen zu.

a. Man verbinde die beste und schlechteste, und dann die beiden Mittelgattungen.

A 15	8 × 2 = 16	Eimer	à 15 fl.	= 240 fl.
B 18	4 × 2 = 8	„	à 18 „	= 144 „
20 C 24	2 × 2 = 4	„	à 24 „	= 96 „
D 28	5 × 2 = 10	„	à 28 „	= 280 „
38 : 19 = 2	38	Eimer	. . . .	760 fl.
	1	Eimer	kostet wirklich	20 fl.

b. Man verbinde A mit C, B mit D.

A 15	4 × 2 = 8	Eimer	à 15 fl.	= 120 fl.
B 18	8 × 2 = 16	„	à 18 „	= 288 „
20 C 24	5 × 2 = 10	„	à 24 „	= 240 „
D 28	2 × 2 = 4	„	à 28 „	= 112 „
38 : 19 = 2	38	Eimer	. . . .	760 fl.
		also kostet	1 Eimer	20 fl.

c. Man verbinde A mit C, A mit D, B mit C.

	A 15	4 + 8	$12 \times 1\frac{5}{14}$	$= 16\frac{4}{14}$ Eimer	zu 15 fl.	$= 244\frac{4}{14}$ fl.
	B 18	4	$4 \times 1\frac{5}{14}$	$= 5\frac{6}{14}$ "	" 18 "	$= 97\frac{10}{14}$ "
20	C 24	5 + 2	$7 \times 1\frac{5}{14}$	$= 9\frac{7}{14}$ "	" 24 "	= 228 "
	D 28	5	$5 \times 1\frac{5}{14}$	$= 6\frac{11}{14}$ "	" 28 "	= 190 "
			$38 : 28 = 1\frac{5}{14}$	38 Eimer	. . . . .	760 "
					1 Eimer kostet also	20 fl.

Welche Verbindungen lassen sich hier noch vornehmen, und in welchem Falle wäre die eine oder die andere vorzuziehen?

4) Aus 10löthigem, 11löthigem, 15löthigem Silber und aus Kupfer sollen 10 Mark 13löthiges Silber legirt werden; wie viel Mark wird man von jeder Sorte dazu nehmen müssen? — Vom 10löthigen Silber nimmt man $\frac{5}{6}$ Mark, vom 11löthigen $\frac{5}{6}$ Mark, vom 15löthigen $7\frac{1}{2}$ Mark, vom Kupfer $\frac{5}{6}$ Mark. Welche Verbindungen genügen ebenfalls der Aufgabe?

5) Ein Kaufmann hat fünf verschiedene Sorten Kaffee, den Zentner zu 30 fl., zu 38 fl., zu 42 fl., zu 45 fl., zu 50 fl.; welche Verbindungsarten lassen sich vornehmen, um eine Sorte Kaffee zu erhalten, wovon der Zentner 40 fl. kostet?

V. Die Kettenrechnung.

§. 68.

Es gibt Aufgaben, zu deren Auflösung solche Mittelbestimmungen erforderlich sind, daß jede derselben zwei ungleichartige am Werthe gleiche Größen enthält, die einzeln entweder mit einer Größe einer andern Mittelbestimmung oder der Aufgabe selbst gleichnamig sind. Die Rechnungsart, durch welche solche Aufgaben gelöset werden, heißt wegen der innigen Verkettung der dabei vorkommenden Größen die **Kettenrechnung**.

Z. B. Auf wie viel Gulden K. M. kommen 128 Wiener Pfund einer Waare, wovon 65 Hamburger Pfund 524 Mark Banko betragen? — Zur Lösung dieser Aufgabe muß man nothwendig die Verhältnisse zwischen dem Hamburger Pfund und dem Wiener Pfund, zwischen der Mark Banko und dem Gulden K. M. kennen; man ersieht dieselben aus folgenden Bestimmungen:

100 Hamburger Pfd. machen $86\frac{1}{2}$ Wiener Pfd.,
200 Mark Banko betragen 146 Gulden K. M.

Mit Hilfe dieser Mittelbestimmungen, deren jede zwei ungleichartige gleiche Größen enthält, die einzeln mit den Größen der Aufgabe gleichnamig sind, kann nun die unbekannte Zahl gefunden werden. Dieß ist also eine Aufgabe, bei welcher die Kettenrechnung angewendet wird.

Jede Aufgabe der Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri aufgelöset werden. So läßt sich die vorliegende Aufgabe in folgende drei Aufgaben zerlegen:

a) Wie viel Wiener Pfd. machen 65 Hamb. Pfd., wenn 100 Hamb. Pfd. $86\frac{1}{2}$ Wien. Pfd. betragen?

y Wien. Pfd.	65 Hamb. Pfd.	$y : 86\frac{1}{2} = 65 : 100$
$86\frac{1}{2}$ „ „	100 „ „	also $y = 56{\cdot}225$ Wien. Pfd.

b) Wie viel fl. K. M. betragen 524 M. B., wenn 200 M. B. 146 fl. K. M. machen?

z fl. K. M.	524 Mark B.	$z : 146 = 524 : 200$
146 „ „	200 „	also $z = 382{\cdot}52$ fl. K. M.

c) Wie viel fl. K. M. kosten 128 Wien. Pfd., wenn 56·225 Wien. Pfd. 382·52 fl. K. M. kosten?

x fl. K. M.	128 Wien. Pfd.	$x : 382{\cdot}52 = 128 : 56{\cdot}224$
382·52 „ „	56·225 „	folglich $x = 870{\cdot}779$ fl. K. M.
		= fl. 870 „ 47.

Eine solche wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri führt zwar zum gewünschten Resultate, ist aber zu weitläufig; daher soll ein Verfahren abgeleitet werden, nach welchem die Aufgaben der Kettenrechnung mittelst eines einzigen Ansatzes aufgelöset werden.

Stellt man die erhaltenen drei Proporzionen zusammen, indem man jedoch in der ersten die beiden Verhältnisse verwechselt, und in der dritten statt der gefundenen Zahlen 56·225 und 382·52 die Buchstaben y und z beibehält, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} 65 : 100 = y : 86\frac{1}{2} \\ z : 146 = 524 : 200 \\ x : z = 128 : y \end{array}\right\}$$ durch Multiplikazion der gleichnamigen Glieder erhält man wieder eine Proporzion

$$x \times z \times 65 : z \times 100 \times 146 = y \times 524 \times 128 : y \times 86\tfrac{1}{2} \times 200$$

Kürzt man das erste Verhältniß mit z und das zweite mit y ab, so ist

$$x \times 65 : 100 \times 146 = 524 \times 128 : 86\tfrac{1}{2} \times 20.$$

Das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkte der innern Glieder, daher

$$x \times 86\tfrac{1}{2} \times 65 \times 20 = 128 \times 100 \times 524 \times 146,$$

und

$$x = \frac{128 \times 100 \times 524 \times 146}{86\frac{1}{2} \times 65 \times 20}$$

Um den Zusammenhang dieses Ausdruckes mit den Zahlen der Aufgabe zu ersehen, bringe man diese auf diejenige Form, in welcher die Kettenverbindung am deutlichsten in die Augen fällt. Man fange nämlich mit der Frage an, indem man zuerst x mit seiner Benennung und daneben die Größe setzt, welche mit x gleichen Werth hat und deren Betrag eben gesucht wird; darunter setze man die einzelnen Mittelbestimmungen so, daß die erste Größe einer jeden Bestimmung mit der zweiten Größe der vorhergehenden Bestimmung gleichen Namen hat. Bei dieser Anordnung wird die zweite Größe der letzten Bestimmung mit x gleichnamig erscheinen. Die hier betrachtete Aufgabe wird unter dieser Form so stehen:

fl. K. M. x kosten 128 Wien. Pfd.
wenn Wr. Pfd. $86\frac{1}{2}$ . . . . 100 Hamb. Pfd. betragen,
wenn Hamb. Pfd. 65 . . . . 524 Mark B. kosten,
und wenn Mark B. 200 . . . . . 146 fl. K. M. machen.

Vergleicht man nun diesen Ansatz mit dem oben für x gefundenen Ausdrucke, so sieht man sogleich, daß x gleich ist dem Produkte aller im Ansatze rechts stehenden Zahlen dividirt durch das Produkt aller links vorkommenden bekannten Zahlen. Würde man zwischen beiden Reihen von Zahlen einen aufrechten Strich ziehen, so könnte der Werth von x nach der Strichmethode gefunden werden.

§. 69.

Aus allem diesen ergibt sich für die Kettenrechnung folgendes Verfahren:

1. Man ziehe einen aufrechten Strich und schreibe x mit seiner Benennung links, die bekannte Größe aber, deren Betrag gesucht wird, und die daher mit x gleichen Werth hat, rechts des Striches.
2. Darunter setze man alle Mittelbestimmungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden Größe auf der rechten Seite völlig gleichen Namen und gleiche Natur hat, und rechts neben jede Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichen Werth hat. Kommt eine mehrnamige Zahl vor, so muß sie in eine einnamige verwandelt werden. — Wenn alle Mittelbestimmungen in die Kette aufgenommen wurden, was man daran erkennt, daß die letzte Größe rechts mit x gleiches Namens und gleicher Natur ist, so ist der Ansatz vollendet.
3. Die Auflösung erfolgt nach der Strichmethode.

Beispiele und Aufgaben.

1) Was kosten 3 Ztr. einer Waare, wenn man 5 Loth um 18 kr. bekommt

fl. x	3 Ztr.
1	100 Pfd.
1	32 Lth.
5	18 kr.
60	1 fl.; woraus x = 576 fl.

Man setzt x mit dem Namen, hier Gulden, links, und rechts die Größe 3 Ztr., deren Werth man sucht. Da man mit Ztr. aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmung mit Ztr. anfangen; dieses geschieht, indem man folgert: wenn 1 Ztr. . . . 100 Pfund enthält. Hier hört man rechts mit Pfd. auf, so muß man wieder links mit Pfd. anfangen; dieß geschieht, indem man ansetzt: wenn 1 Pfd. . . . 32 Loth enthält. Nun bildet man den Uebergang von der Waare zum Preise dadurch, daß man sagt: wenn 5 Loth . . . 18 kr. kosten. Hier hört man mit Kreuzern auf; x bedeutet aber Gulden, darum zieht man noch die Mittelbestimmung zu Hülfe: wenn 60 kr. . . . 1 fl. geben. Da nun die letzte Größe rechts mit x gleichen Namen hat, so ist der Ansatz fertig. Zur Auflösung desselben bedient man sich der Strichmethode.

2) Ein Landmann gibt einem Wirthe $13\frac{1}{2}$ Metzen Weizen zu $2\frac{1}{3}$ fl.; wie viel Wein muß ihm dafür der Wirth geben, den Eimer zu $8\frac{2}{5}$ fl. gerechnet?

Eimer x	$13\frac{1}{2}$ Metzen
1	$2\frac{1}{3}$ fl.
$8\frac{2}{5}$	1 Eimer; also $x = 7\frac{1}{2}$ Eimer.

3) In Odessa kostet 1 Tschetwert Weizen 22 Bankrubel; wie hoch kommt 1 Wiener Metzen zu stehen, wenn 2 Tschetwert 5 Star, wenn 10 Star 12 Wien. Metzen machen, und wenn 100 Bankrubel $45\frac{1}{2}$ fl. K. M. betragen?

fl. x	1 W. Metz.
12	10 Star
5	2 Tschetw.
1	22 Bankrub.
100	$45\frac{1}{2}$ fl.

$x = 3{\cdot}337$ fl.
$=$ fl. 3 „ 20.

4) Wie viel Londner Ztr. machen 253 Wien. Ztr., wenn 100 Lond. Pf. = 81 Wien. Pfd., und wenn 1 Londn. Ztr. 112 Lond. Pfd. enthält?

Londn. Ztr. x	253 Wien. Ztr.
1	100 Wien. Pfd.
81	100 Londn. Pfd.
112	1 Londn. Ztr.

$x = 278{\cdot}88$ Ldn. Ztr.

5) In Hamburg kostet 1 Hamb. Pfd. Kaffeh $5\frac{1}{2}$ Schilling, wie hoch in K. M. kommen $5\frac{1}{3}$ Wien. Ztr., wenn 100 Hamb. Pfd. $= 86\frac{1}{2}$ Wien. Pfd., und 200 Mark $= 146\frac{1}{4}$ fl. K. angenommen werden, wenn endlich 1 Mark 16 Schill. enthält?

fl. x	$5\frac{1}{3}$ Wien. Ztr.
1	100 Wien. Pfd
$86\frac{1}{2}$	100 Hamb. Pfd
1	$5\frac{1}{2}$ Schill.
16	1 Mark
200	$146\frac{1}{4}$ fl.

$x = 309{\cdot}971$ fl.
$=$ fl. 309 „ 58.

6) Jemand kauft 3 Ztr. 54 Pfd. um 118 fl. ein. Wie theuer wird er 1 Pfd. verkaufen, wenn er die um 100 fl. eingekaufte Waare um 120 fl. verkaufen will?

kr. Verkauf x	1 Pfd.
354	118 fl. Einkauf
100	120 fl. Verkauf
1	60 kr. Verkauf

$x = 24$ kr.

7) Ein Silberbarren ist $14\frac{1}{2}$ Mark schwer, und zwar enthält jede Mark 13 Loth fein Silber; wie viel ist der Silberbarr. werth, wenn 16 Lth. fein Silber zu $20\frac{1}{5}$ fl. gerechnet werden?

fl. x	$14\frac{1}{2}$ Mark
1	13 Lth. fein Silb.
16	$20\frac{1}{5}$ fl.

$x = 237{\cdot}981$ fl.
$=$ 237 „ 59.

8) In London kostet ein 4 Pfund Laib Brot von der besten Gattung 10 Pences; wie viel Wiener Loth müßte nach demselben Verhältnisse eine Kreuzersemmel wiegen? 1 Pfund Sterling hat 20 Schilling zu 12 Pences, $2\frac{1}{8}$ Pfd. St. machen 20 fl. K. M.; ferner sind 100 Pfd. avoir = 81 Wiener Pfd.

x Lth.	1 kr.
60	1 fl.
20	$2\frac{1}{8}$ Pfd. St.
1	20 Schill.
1	12 Penc.
10	4 Pfd. avoir
100	81 Wien. Pfd.
1	32 Loth

x = $4\frac{2}{5}$ Loth.

9) Wenn man 923 Pfd. einer Waare um fl. 295 „ 20 einkauft und den Zentner um 29 fl. verkauft; hat man dabei Gewinn oder Verlust, und zwar wie viel %?

Um den Gewinn oder Verlust in Prozenten zu bestimmen, fängt man die Kette mit der Frage an: x fl. Einnahme beim Verkaufe geben 100 fl. Ausgabe beim Einkaufe. Ist das Resultat der Kettenrechnung größer als 100, so hat man Gewinn, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme größer als 100 ist, die Gewinn % an; kommt weniger als 100 heraus, so hat man Verlust, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme kleiner als 100 ist, die Verlust % an; kommt gerade 100 heraus, so hat man weder Gewinn noch Verlust.

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
$295\frac{1}{3}$	923 Pfd.
100	29 fl. Einnahme.

x = 90·63 fl. Einnahme, also

100
90·63
9·37 % Verlust.

10) Jemand kauft 80 Eimer Wein zu 14 fl. und verkauft dann die Maß zu 24 kr.; wie viel % gewinnt oder verliert er?

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
14	40 Maß
1	24 kr. Einnahme
60	1 fl. Einnahme

x = $114\frac{2}{7}$ fl. Einnahme; daher $14\frac{2}{6}$ % Gewinn.

11) Jemand kauft den Ztr. Oel um 30 fl. und muß dann das Pfund um 18 kr. verkaufen; wie viel % Gewinn oder Verlust hat er dabei?

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
30	100 Pfund
1	18 kr. Einnahme
60	1 fl. Einnahme

x = 100 fl. Einnahme.

Es ist also bei dem Verkaufe weder gewonnen noch verloren worden.

12) In Oesterreich gehen 20 fl. auf eine Mark fein Silber und 67 # à $4\frac{1}{2}$ fl. auf eine Mark Gold, fein $23\frac{2}{3}$ Karat; welches Verhältniß haben daselbst Gold und Silber gegen einander?

x Mark fein Silber	1 Mark fein Gold
1	24 Karat fein Gold
$23\frac{2}{3}$	67 #
1	$4\frac{1}{2}$ fl.
20	1 Mark fein Silber.

x = 15·2873 Mark fein Silber.

Eine Mark fein Gold gilt daher in Oesterreich 15·2873mal so viel als eine Mark fein Silber, oder es verhält sich Gold zu Silber wie 15·2873 : 1.

13) Eine Lira austriaca hat 3·897828 Denari feines Silber; wie viel Lire gehen auf eine kölnische Mark fein Silber, wenn 29 metrische Pfd. = 124 köln. Mark und 1000 Denari = 1 metr. Pfd. sind? — 60 Stück.

14) Ein Wiener Joch enthält 57·557, ein preußischer Morgen 25·532 französische Ares; wie viel Wiener Joch hält ein Grundstück, welches nach preußischem Maße $137\frac{3}{4}$ Morgen groß ist?

15) Wie viele französische Meter gehen auf die österreichische Meile von 4000 Wiener Klafter, wenn 1 Wiener Fuß 0·31611 Meter enthält?

16) Der Hamburger Zentner hat 112 Hamburger Pfd., wovon jedes 0·4846 Kilogramm enthält, und das Wiener Pfd. wiegt 0·56 Kilogramm; wie viel fl. K. M. kostet der Wiener Zentner einer Waare, wovon 3 Hamburger Zentner $208\frac{1}{2}$ Mark Banko kosten, wenn man 200 Mark Banko zu $163\frac{1}{4}$ fl. K. M. rechnet?

17) Jemand kauft 4 Stück Tuch zu 32 Ellen um 430 fl.; wie theuer muß er die Elle verkaufen, wenn er 10% gewinnen will?

18) Wie viel Wiener Pfd. beträgt der preußische Zentner von 112 Pfd, wenn 1 Wiener Pfd. 0·56 Kilogramm und 1 preuß. Pfd. = 0·4677 Kilogramm ist.

19) Man verwandle 100 preußische Friedrichsd'or nach ihrem innern Geldwerthe in kais. Dukaten. — Aus einer kölnischen Mark Gold, 260 Grän fein, werden 35 Friedrichsd'or geprägt; dagegen gehen von k. Dukaten auf eine köln. Mark Gold, $23\frac{2}{3}$ Karat fein, 67 Stück

20) Die jährliche Weinausfuhr aus Oporto in Portugal beträgt im Durchschnitte 34280 Pipas; wie viel sind das österr. Eimer? — 1 Pipa = 26 Almudas zu 12 Canhadas; 1 Canhada = 1·3867 Liter; ein Wiener Maß = 1·4151 Liter.

Zinseszinsrechnung.

§. 70.

Bei Verzinsungen von Kapitalien geschieht es häufig, daß die Interessen am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Kapitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Kapital ist auf Zins von Zins oder auf Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen werden auch zusammengesetzte Interessen genannt, während die gewöhnlichen Interessen einfache heißen.

Um den Werth eines Geldbetrages nach einer bestimmten Zeit, während welcher die Zinsen nach einer bestimmten Periode wieder zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinst werden, zu erhalten, könnte man das Interesse für jede einzelne Periode berechnen, und jedesmal zu dem Anfangskapitale jener Periode addiren.

Z. B. Wie hoch werden 2000 fl. Kapital in 4 Jahren anwachsen, wenn man die 5% Interessen am Ende eines jeden Jahres zum Kapitale schlägt und von Neuem verzinset?

Anfangskapital	fl.	2000
Zins des 1. Jahres	„	100
Kapital zu Ende des 1. Jahres	fl.	2100
Zins des 2. Jahres	„	105
Kapital zu Ende des 2. Jahres	fl.	2205
Zins des 3. Jahres	„	110·25
Kapital zu Ende des 3. Jahres	fl.	2315·25
Zins des 4. Jahres	„	115·7625
Kapital zu Ende des 4. Jahres	fl.	2431·0125 = fl. 2431 „ 1.

Nach den einfachen Interessen wäre der Zins in 1 Jahre 100 fl., also in 4 Jahren 400 fl., während das Erträgniß nach Zinseszinsen fl. 431 „ 1 ist; der Unterschied von fl. 31 „ 1, geht also aus den Zinseszinsen hervor.

Da die vorhergehende Rechnung sehr weitläufig ist, so soll hier ein anderes, kürzeres Verfahren entwickelt werden, nach welchem man das Anwachsen mittelst Zinseszinsen berechnen kann.

100 fl. am Anfange eines Jahres sind zu 5% verzinset am Ende desselben Jahres 105 fl., also 1 fl. den 100sten Theil von 105, nämlich 1·05 fl. werth. Man hat daher für das frühere Beispiel folgende Kettenrechnung:

x fl. Werth am Ende des 4. Jahr.	2000 fl. Anfangskapital
1	1·05 fl. am Ende des 1. Jahres
1	1·05 „ „ „ „ 2. „
1	1·05 „ „ „ „ 3. „
1	1·05 „ „ „ „ 4. „

$$x = 2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$

oder $x = 2000 \times (1{\cdot}05)^4$.

Man muß also 1·05, d. i. die Zahl, welche gefunden wird, wenn man zu 100 das Prozent 5 addirt, und diese Summe 105 durch 100 dividirt, 4mal, d. i. so oftmal, als Jahre da sind, als Faktor setzen, und dann das Anfangskapital damit multipliziren.

$(1{\cdot}05)^4$ gibt 1·215506 und

$2000 \times 1{\cdot}215506 = 2431{\cdot}012 =$ fl. 2431 „ 1, wie oben.

Würde man die Interessen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Kapitale schlagen, so hätte man, da 100 fl. nach einem Halbjahre 102·5 fl. werth sind, 1 fl. also den Werth von 1·025 fl. bekommt, folgende Kette:

x Werth am Ende des 8. Halbjahres	2000 fl. Anfangskapital
1	1·025 fl. am Ende des 1. Halbjahres
1	1·025 " " " " 2. "
1	1·025 " " " " 3. "
1	1·025 " " " " 4. "
1	1·025 " " " " 5. "
1	1·025 " " " " 6. "
1	1·025 " " " " 7. "
1	1·025 " " " " 8. "

$$x = 2000 \times (1·025)^8.$$

Hier ist also 1·025, d. i. die Zahl, welche erhalten wird, wenn man zu 100 das Prozent 2·5 für ein halbes Jahr addirt und die Summe 102·5 durch 100 dividirt, zur 8ten, d. i. zur sovielten Potenz zu erheben, als Halbjahre da sind, und mit der so erhaltenen Zahl das Anfangskapital zu multiplizieren.

Die Zahlen $(1·05)^4$ und $(1·025)^8$ kann man **Aufzinsungsfaktoren** nennen.

Um daher den **Werth eines Kapitals nach einer bestimmten Zeit, während welcher Zins von Zins gerechnet wird, zu finden, multiplizirt man das gegebene Kapital mit dem entsprechenden Aufzinsungsfaktor.** Es wird aber der entsprechende Aufzinsungsfaktor berechnet, wenn man zu 100 das Prozent für eine Zeitperiode addirt, diese Summe durch 100 dividirt, und den Quozienten zur sovielten Potenz erhebt, als Zeitperioden da sind.

Zur Berechnung des Aufzinsungsfaktors für 6 Perioden, wenn der Zinsfuß z. B. 4% ist, hat man

```
     1·04 × 1·04          1·1 2 4 8 6 4 × 1·124864
      416                 4,6,8,4,2,1,1
(2)  1·0816 × 1·04        1·1 2 4 8 6 4
       43264                1 1 2 4 8 6
(3)  1·124864                 2 2 4 9 7
                                4 4 9 9
                                  9 0 0
                                    6 8
                                      5
            (1·04)^6 = 1·2 6 5 3 1 9.
```

Die folgende Tabelle enthält die bereits ausgerechneten Aufzinsungsfaktoren für 2, 3, 4, 5 Prozent und 1, 2, 3, ... 29, 30 Zeitperioden.

Zeit-perioden.	2%	3%	4%	5%
1	1.02	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1 229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1 384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345869	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·973587	2 464716	3·071524
24	1·608437	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	2·093778	2·6[illegible]5836	3·386355
26	1·673418	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	2·221289	2·883369	3·733456
28	1·741024	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·427262	3·423398	4·321942

§. 71.

Beispiele.

1) Ein Kapital von 5000 fl. ist zu 5% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es bei ganzjähriger Kapitalisirung in 6 Jahren anwachsen?

Der Aufzinsungsfaktor für 6 Zeitperioden und 5% ist 1 340096; man hat daher

$$\begin{array}{r} 5000 \times 1{\cdot}340\,096 \\ \hline 6\,700{\cdot}480 \end{array} = \text{fl. } 6700 \,\text{„}\, 29.$$

2) Wie hoch wird ein zu 4 % Zins von Zins angelegtes Kapital von 1234 fl. in 7 Jahren bei halbjähriger Kapitalisazion anwachsen?

Hier sind 14 Halbjahre und das halbjährige Prozent, nämlich 2 % in Rechnung zu bringen; der entsprechende Aufzinsungsfaktor ist 1·319479, und man hat

1234 × 1·319 479
4 321
———————
1 319 479
263 896
39 584
5 278
———————
1 628·237 = fl. 1628 „ 14.

3) Wie viel werden 5800 fl. zu % Zinseszins bei ganzjähriger Kapitalisirung nach 20 Jahren werth sein?

5800 × 1·806111 = 10475·444 = fl. 10475 „ 27.

4) Ein Vater legt zu Gunsten seines jetzt 13jährigen Sohnes 2300 fl. in die Sparkasse ein, welche mit 4 % jährlich verzinst, und die Interessen halbjährig zum Kapitale schlägt. Welchen Betrag wird der Sohn, wenn er das 24ste Jahr erreicht hat, aus der Sparkasse beziehen?

Man hat hier 22 Halbjahre und 2 % halbjährig, daher

2300 × 1·545980 = 3555·754 = fl. 3555 „ 45.

5) Jemand ist verpflichtet, 3000 fl. nach 1 Jahre, 2000 fl. nach 2 Jahren, 1000 fl. nach 3 Jahren und 4000 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren werth sein, wenn man 5 % Zinseszins rechnet, und wenn die Kapitalisirung ganzjährig geschieht?

3000 fl. nach 1 Jahre zahlbar, sind nach 4 Jahren fl. 3472·975 werth
2000 „ „ 2 Jahren „ „ „ „ „ „ 2205·000 „
1000 „ „ 3 „ „ „ „ „ „ „ 1050·000 „
4000 „ „ 4 „ „ „ „ „ „ „ 4000·000 „
ganzer Betrag nach 4 Jahren fl. 10727·875
= fl. 10727 „ 52.

6) Jemand legt durch 6 Jahre zu Anfange eines jeden derselben 325 fl. auf Zins von Zins; wie hoch wird das Kapital bei ganzjähriger Kapitalisazion zu 4 % in jener Zeit anwachsen?

Da die erste Summe durch 6, die zweite durch 5, . . . die sechste durch 1 Jahr anliegt, so hat man

1. Summe nach 6 Jahren 325 × 1·265319
2. „ „ „ „ 325 × 1·216653
3. „ „ „ „ 325 × 1·169859
4. „ „ „ „ 325 × 1·124864
5. „ „ „ „ 325 × 1·081600
6. „ „ „ „ 325 × 1·040000
Gesammtbetrag nach 6 Jahr. 325 × 6·898295 = 2241·949
= 2241 „ 57.

7) Welchen Werth hat ein Kapital von fl. 3758 „ 24 bei 5 % Zinseszins nach 18 Jahren?

8) Ein Vater will seinem Sohne gleich bei der Geburt ein Kapital sichern, welches dem Letztern im 24sten Lebensjahre ausgezahlt wird. Zu dem Ende legt er gleich jetzt den Betrag von 1250 fl. in eine Versicherungsanstalt, welche 4% gibt. Welche Summe wird diese Anstalt, wenn die Zinsen jährlich zum Kapitale geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?

9) Jemand legt zu Anfange jedes halben Jahres durch 12 Jahre hinter einander 40 fl. in eine Sparkasse, bei welcher halbjährige Kapitalisirung mit 2% Statt findet. Wie groß ist sein Ersparniß nach dieser Zeit?

10) Bei einem Hausverkaufe wird dem Käufer freigestellt, jetzt gleich 6000 fl. zu erlegen und das zweite und dritte Jahr zu derselben Zeit eine gleiche Summe; oder zur Zeit des letzten Termins in einer Summe 19000 fl. zu entrichten. Da der Käufer seine Gelder in seinem Geschäfte mit 5% Nutzen verwenden kann, so möchte er wissen, auf welche der Bedingungen er, um seinen Vortheil zu wahren, eingehen müsse.

§. 72.

Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, wie nämlich der Werth eines Geldbetrages vor einer gewissen Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen bestimmt wird, wird man wieder die Kettenrechnung zu Hilfe ziehen.

Man suche z. B. den Werth, den ein Betrag von 2000 fl. vor 3 Jahren hat, den Zins von Zins zu 4% gerechnet, und zwar bei ganzjähriger Kapitalisazion. — 100 fl. sind nach einem Jahre 104 fl., daher 1 fl. den 100sten Theil von 104, d. i. 1·04 fl. werth; umgekehrt muß also der Werth von 1·04 fl. um 1 Jahr früher nur 1 fl. sein. Man hat daher die Kette:

x fl. Werth vor 3 Jahren	2000 fl. gegenwärtiger Werth
1·04	1 fl. Werth vor 1 Jahre
1·04	1 „ „ „ 2 Jahren
1·04	1 „ „ „ 3 „

$$\text{woraus } x = \frac{2000}{(1{\cdot}04)^3} = 2000 \cdot \frac{1}{(1{\cdot}04)^3}.$$

Es ist also 1 durch den Aufzinsungsfaktor ($1{\cdot}04^3$) zu dividiren, und mit der dadurch erhaltenen Zahl der gegebene Geldbetrag 2000 zu multipliziren.

Da $(1{\cdot}04)^3 = 1{\cdot}124864$ und somit $\frac{1}{(1{\cdot}04)^3} = 0{\cdot}888996$ ist, so hat man $x = 2000 \times 0{\cdot}888996 = 1777{\cdot}992 =$ fl. 1778.

Wäre hier die Kapitalisazion halbjährig vorausgesetzt worden, so hätte man nur das halbe Prozent, also 2 nehmen, dagegen 1 durch $(1{\cdot}02)^6$, weil 6 halbe Jahre vorkommen, dividiren, und folglich 2000 mit $\frac{1}{(1{\cdot}02)^6}$ multipliziren müssen.

Die Zahlen $\frac{1}{(1·04)^{8}}$ und $\frac{1}{(1·02)^{6}}$ sollen **Abzinsungsfaktoren** heißen.

Um daher den **Werth eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu finden, multiplizirt man jenen Betrag mit dem entsprechenden Abzinsungsfaktor.** Es wird aber dieser Abzinsungsfaktor berechnet, wenn man 1 durch den entsprechenden Aufzinsungsfaktor dividirt.

In der folgenden Tabelle erscheinen die Abzinsungsfaktoren für 2, 3, 4, 5 Prozent und 1, 2, 3, . . . 29, 30 Zeitperioden bereits ausgerechnet.

Zeitperioden.	2%	3%	4%	5%
1	0·980392	0·970874	0·961539	0·952381
2	0·961169	0·942596	0·924556	0·907030
3	0·942322	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·888487	0·854804	0·822703
5	0·905731	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853491	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820348	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714163	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·553676	0·456387	0·376890
21	0·659776	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·491934	0·390122	0·310068
25	0·609531	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·437077	0·333478	0·255094
29	0·563112	0.424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·411987	0·308319	0·231377

§. 73.

Beispiele.

1) Wie viel sind 4000 fl. nach 5 Jahren zahlbar bei ganzjähriger Kapitalisazion zu 4% Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 5 Jahre früher, werth?

Für 5 Perioden und 4% hat man den Abzinsungsfaktor 0·821927, daher

$4000 \times 0·821927 = 3287·708 =$ fl. 3287 „ 42.

2) Welchen Werth haben fl. 7310 „ 45 vor 15 Jahren, 5% Zinseszins und ganzjährige Kapitalisirung vorausgesetzt?

$7310·75 \times 0·481017 = 3516·595 =$ fl. 3516 „ 36.

3) Wie viel Kapital muß man zu 4% Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 fl. anwachse?

Der Abzinsungsfaktor für 24 Perioden und 2 Prozent ist 0·621722, man hat daher

$5200 \times 0·621722 = 3232·954 =$ fl. 3232 „ 57.

4) Ein 60jähriger Mann will bei seinem Absterben seinem treuen Diener einen Bezug von 800 fl. versichern. Welche Einlage muß er in die Versorgungsanstalt machen, wenn diese ganzjährig zu 4% kapitalisirt?

Da die mittlere Lebensdauer eines 60jährigen Menschen 12 Jahre ist, so ist diese Aufgabe mit der folgenden gleichbedeutend: wie viel Kapital muß man anlegen, damit es in 12 Jahren zu 4% Zinseszins auf 800 fl. anwachse; oder: welchen Werth haben 800 fl. vor 12 Jahren bei 4% Zins von Zins? Man hat also

$800 \times 0·624597 = 498·678 =$ fl. 498 „ 41 Einlage.

5) Zu einem Gute finden sich drei Käufer. A will 18000 fl. sogleich baar bezahlen; B bietet 20000 fl. an, aber so, daß er nur 10000 fl. sogleich, und die andere Hälfte erst nach 5 Jahren erlegen will; C bietet auch 20000 fl. und zwar 5000 fl. sogleich, 8000 fl. nach 3 Jahren und den Rest nach 4 Jahren zahlbar. Welcher von den drei Kauflustigen hat wohl am meisten angeboten, wenn man die Kapitalisirung ganzjährig zu 5% Zinseszins annimmt?

Hier muß man alle Zahlungen auf dieselbe Zeit reduziren; man sucht z. B. den gegenwärtigen Werth aller Anbote.

A bietet baar	sogleich	fl.	18000
B bietet	sogleich	fl.	10000
und 10000 fl. nach 5 Jahr., oder	„	„	7835 „ 16
	zusammen sogleich	fl.	17835 „ 16
C bietet	sogleich	fl.	5000
8000 fl. nach 3 Jahren, oder	„	„	6910 „ 42
7000 „ „ 4 „ „	„	„	5758 „ 55
	zusammen sogleich	fl.	17669 „ 37

A hat also den vortheilhaftesten Anbot gemacht.

6) A will dem B eine Geldsumme geben, damit ihm dieser durch 5 Jahre am Ende eines jeden Jahres 586 fl. auszahle; wie groß wird jene Summe bei 4 % Zinseszins und ganzjähriger Kapitalisirung sein müssen?

Hier muß man berechnen, was der erste Jahresbetrag von 586 fl. um 1 Jahr früher, der zweite um 2 Jahre früher, ... der fünfte um 5 Jahre früher werth ist.

586 fl. um 1 Jahr früher = 586 × 0·961539
" " " 2 " " = 586 × 0·924556
" " " 3 " " = 586 × 0·888996
" " " 4 " " = 586 × 0·854804
" " " 5 " " = 586 × 6·821927

Gegenwärtiger Gesammtwerth = 586 × 4·451822 = 2608·768.
= fl. 2608 „ 46.

7) Welches Kapital wächst bei 4 % Zinseszins nach 14 Jahren auf 3580 fl. an?

8) Wenn ein Vater seinem Kinde im 20sten Jahre eine Aussteuer von 3000 fl. dadurch sichern will, daß er gleich bei der Geburt in eine Versicherungsanstalt eine bestimmte Summe einlegt; wie hoch wird diese Summe sein müssen, wenn die Anstalt 4 % Zinseszinsen berechnet?

9) Jemand übernimmt ein Haus mit der Verpflichtung, dem bisherigen Besitzer 15 Jahre hinter einander eine nachschußweise Rente von 600 fl. auszuzahlen. Wie hoch wurde das Haus veranschlagt, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Sechster Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades mit einer einzigen Unbekannten.

---

§. 74.

Die Gleichstellung zweier Ausdrücke, welche einerlei Werth haben, wird eine Gleichung genannt; z. B.:

$$a = a;\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2;\ 3x - 5 = 2x + 3.$$

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen Theile der Gleichung, und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $3x - 5 = 2x + 3$ ist $3x - 5$ der erste, $2x + 3$ der zweite Theil; jeder dieser beiden Theile besteht aus zwei Gliedern.

Man unterscheidet zweierlei Gleichungen, identische und Bestimmungsgleichungen. Eine identische Gleichung gilt für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen; diese Eigenschaft haben die obigen Gleichungen $a = a$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, welche richtig bleiben, man mag für a und b was immer für Werthe setzen. Bestimmungsgleichungen dagegen sind solche, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten giltig sind. So ist $3x - 5 = 2x + 3$ eine Bestimmungsgleichung, weil ihr nur der Werth $x = 8$ Genüge leistet.

Die Werthe einer Bestimmungsgleichung auffinden, welche ihr Genüge leisten, heißt die Gleichung auflösen.

Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei oder mit mehreren Unbekannten. Z. B. $7x - 3 = 4x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 4$ eine Gleichung mit drei Unbekannten.

Nach dem höchsten Potenzexponenten der Unbekannten werden die Gleichungen in jene des ersten, zweiten, dritten . . . Grades eingetheilt. So sind

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 20 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}\ \text{Gleichungen des ersten Grades,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x = 9 \\ x^2 + y^2 = 2xy \end{array}\right\}$$ Gleichungen des zweiten Grades.

In dieser Anleitung soll nur von den Bestimmungsgleichungen des ersten Grades mit einer einzigen Unbekannten die Rede sein.

I. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 75.

Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist als aufgelöset zu betrachten, wenn die Unbekannte für sich allein vor dem Gleichheitszeichen steht, und hinter demselben nur bekannte Zahlen vorkommen. Wenn man z. B. aus der Gleichung $6x + 4x = 780 - 3x$ das Resultat $x = 60$ findet, so ist jene Gleichung aufgelöset.

Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruhet auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Ausdrücken gleiche Veränderungen vornimmt, so müssen wieder gleiche Ausdrücke zum Vorschein kommen.

Aus diesem allgemeinen Grundsatze ergeben sich folgende besondere Sätze:

1. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a + c = b + d$ sein.

2. Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt gleiche Reste.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a - c = b - d$ sein.

Zu Folge dieser beiden Sätze kann jedes Glied auf einer Seite der Gleichung weggelassen und auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen werden. Hat man z. B. $x + a = b$, so ist $x = b - a$; durch diese Versetzung ist nichts anderes geschehen, als daß von beiden Theilen der Gleichung $+ a$ subtrahirt wurde. Aus $5x = 16 - 3x$ folgt $5x + 3x = 16$; hier wurde auf beiden Seiten $3x$ dazu addirt, oder, was gleich viel ist, $-3x$ subtrahirt.

3. Gleiches mit Gleichem multiplizirt, gibt gleiche Produkte.

   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $ac = bd$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Brüche in einer Gleichung wegschaffen; man darf nur beide Theile der Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multipliziren. Z. B. Aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt, wenn man mit a multiplizirt, $x - ab = ac$.

Eben so gibt $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3}$, wenn beide Theile mit $2 \times 3 = 6$ multiplizirt werden, $3x - 12 = 2x$.

4. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt gleiche Quozienten.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a : c = b : d$ sein.

Es ist daher erlaubt, beide Theile einer Gleichung durch dieselbe Zahl zu dividiren, wodurch die Gleichung häufig auf eine einfachere Gestalt gebracht wird. So gibt $6x = 24$ die einfachere Gleichung $x = 4$.

§. 76.

Um durch Anwendung der vorhergehenden Sätze eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, verfährt man auf folgende Art:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplizirt.

2. Kommen in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die durch Klammern angezeigten Operazionen wirklich ausgeführt.

3. Es werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die erste Seite der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die bekannten Glieder dagegen werden auf die zweite Seite übertragen und ebenfalls zusammengezogen.

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Koeffizienten, indem man beide Theile der Gleichung durch denselben dividirt.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur den gefundenen Werth für die Unbekannte in die gegebene Gleichung substituiren, und die Ausdrücke auf beiden Seiten auf die einfachste Gestalt bringen. Erhält man beiderseits einerlei Resultat, so ist die Auflösung richtig; im entgegengesetzten Falle wäre sie unrichtig.

Beispiele.

1) $3x - 8 = 13$

Auflösung. $3x = 13 + 8$	Probe. $3 \times 7 - 8 = 13$
$3x = 21$	$21 - 8 = 13$
$x = 7$	$13 = 13$

2) $12(x - 1) = 3x + 24$

Auflös. $12x - 12 = 3x + 24$	Probe. $12(4 - 1) = 3 \times 4 + 24$
$12x - 3x = 24 + 12$	$12 \times 3 = 12 + 24$
$9x = 36$	$36 = 36$
$x = 4$	

3) $\frac{x}{2} = x - 5$

Aufl. $x = 2x - 10$ Probe. $\frac{10}{2} = 10 - 5$

$x - 2x = -10$ $5 = 5$

$-x = -10.$

$x = 10$

4) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2$

Aufl. $9(x+3) - 5(x-3) = 90$ Probe. $\frac{12+3}{5} - \frac{12-3}{9} = 2$

$9x + 27 - 5x + 15 = 90$ $\frac{15}{5} - \frac{9}{9} = 2$

$9x - 5x = 90 - 27 - 15$ $3 - 1 = 2$

$4x = 48$ $2 = 2$

$x = 12.$

5) $6(x-2) - 2(3x+1) = 1 - 4(2x+3)$

Aufl. $6x - 12 - 6x - 2 = 1 - 8x - 12$

$6x - 6x + 8x = 1 - 12 + 12 + 2$

$8x = 3$

$x = \frac{3}{8}.$

6) $7x - \frac{4x}{7} + 2(x-1) = 8x + 1$

$49x - 4x + 14x - 14 = 56x + 7$

$49x - 4x + 14x - 56x = 7 + 14$

$3x = 21$

$x = 7.$

7) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{2x}{11} - \frac{2-3x}{4} - 3.$

$66x + 44(x+1) + 33(x-2) = 24x - 33(2-3x) - 396$

$66x + 44x + 44 + 33x - 66 = 24x - 66 + 99x - 396$

$66x + 44x + 33x + 24x - 99x = -66 - 396 - 44 + 66$

$20x = -440$

$x = -22.$

Man löse noch folgende Gleichungen auf:

8) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 17.$

9) $3(x+1) - 4(x-1) = 8(2x-15).$

10) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}.$

11) $\frac{9-x}{14} - 1 = \frac{x+7}{5} - 2.$

12) $\frac{8+x}{9} - \frac{x-6}{6} - 3 = 10 - \frac{x+4}{5}.$

II. Anwendung der Gleichungen auf die Auflösung von Aufgaben.

§. 78.

In jeder Aufgabe werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen Genüge leisten sollen. Das erste Geschäft bei der algebraischen Auflösung einer Aufgabe besteht darin, daß man die gegebenen Bedingungen in die algebraische Zeichensprache überträgt, was man das Ansetzen der Gleichungen nennt. Dafür gibt es keine allgemeinen Regeln; Scharfsinn und eine durch Lösung vieler Aufgaben erworbene Uebung werden in jedem einzelnen Falle angeben, wie die zu bestimmende Unbekannte nach den Bedingungen der Aufgabe zu behandeln und in eine Gleichung zu bringen ist.

Ist die Gleichung angesetzt, so gibt ihre Auflösung den gesuchten Werth für die Unbekannte.

Es ist Anfängern sehr anzurathen, daß sie die verschiedenen Aufgaben, auch ohne Ansatz einer Gleichung, durch bloße Verstandesschlüsse im Kopfe aufzulösen versuchen. Bei den erstern Aufgaben erscheint in dieser Anleitung nebst der algebraischen Lösung auch jene im Kopfe angegeben, bei den weitern Aufgaben wird diese dem eigenen Nachdenken der Schüler überlassen.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe zu überzeugen, untersuche man, ob durch den gefundenen Werth der Unbekannten auch wirklich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

1. Aufgaben mit Beifügung des Ansatzes.

§. 79.

1. Man suche eine Zahl, deren 5faches und 7faches zusammen 96 beträgt.

Im Kopfe. Das 5fache und 7fache macht das 12fache; 96 ist also das 12fache von der gesuchten Zahl, oder diese Zahl ist der 12te Theil von 96, mithin 8.

Algebraisch. Es sei x die gesuchte Zahl; ihr 5faches ist 5x, das 7fache 7x. Nach der Bedingung der Aufgabe muß also

$$5x + 7x = 96$$

sein: löst man diese Gleichung auf, so ergibt sich $x = 8$.

Probe. $5 . 8 + 7 . 8 = 40 + 56 = 96.$

2. Wie heißt die Zahl, deren 5faches um 42 vermehrt ihr 8faches gibt.

Im Kopfe. Um aus dem 5fachen das 8fache zu erhalten, muß man das 3fache dazu setzen. Wenn man nun aus dem 5fachen auch durch Hinzusetzung von 42 das 8fache bekommt, so muß 42 gleich dem 3fachen der Zahl sein, und daher die gesuchte Zahl der dritte Theil von 42, d. i. 14.

Algebraisch. Ist x die gesuchte Zahl, so ist 5x ihr 5faches, 8x ihr 8faches. Nun muß ersteres um 42 vermehrt werden, um das letztere zu geben, somit hat man $5x + 42 = 8x$, und daraus $x = 14$.

$9x - 72 = 5x$
$9x - 5x = 72$
$4x = 72$
18

Probe. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112,$
$8 \times 14 = 112.$

3) Welche Zahl ist es, deren 9faches um 72 vermindert ihr 5faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 9fachen das 5fache zu erhalten, muß man das 4fache abziehen. Soll also das 9fache durch die Verminderung um 72 in das 5fache übergehen, so muß 72 das 4fache der gesuchten Zahl vorstellen, die Zahl selbst also der 4te Theil von 72, somit 18 sein.

Algebraisch. Heißt x die verlangte Zahl, so ist 9x ihr 9faches, 5x ihr 5faches, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$9x - 72 = 5x$$

sein, woraus $x = 18$ folgt.

Probe. $9 \times 18 - 72 = 162 - 72 = 90,$
$5 \times 18 = 90.$

4) Die Hälfte und der dritte Theil einer Zahl betragen 25; wie groß ist die Zahl?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind $\frac{5}{6}$; wenn nun $\frac{5}{6}$ von der Zahl, d. i. das 5fache von dem 6ten Theile der gesuchten Zahl 25 ist, so ist $6 \times 25 = 150$ das 5fache von der ganzen Zahl, daher diese Zahl selbst der 5te Theil von 150, somit 30.

Algebraisch. Heißt x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$, und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

folglich $x = 30$.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3}\ 15 + 10 = 25.$

5) Das 5fache einer Zahl ist um 86 größer als ihre Hälfte und ihr Fünftel zusammengenommen; wie heißt die Zahl?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ sind $\frac{7}{10}$; das 5fache der gesuchten Zahl soll also um 86 größer sein als 7mal der 10te Theil, somit das 50fache um 860 größer als das 7fache; das 50fache ist aber um das 43fache größer als das 7fache, es muß also 860 das 43fache der gesuchten Zahl, also diese der 43ste Theil von 860, mithin 20 sein.

Algebraisch. Wenn x die gesuchte Zahl vorstellt, so ist 5x ihr 4faches, $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte und $\frac{x}{5}$ ihr Fünftel, und man hat

$$5x - 86 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$

woraus $x = 20$ folgt.

Probe. $5 \times 20 = 100 \qquad 100 - 14 = 86.$
$\frac{20}{2} + \frac{20}{5} = 10 + 4 = 14.$

6) Jemand wird gefragt, wie viel Geld er bei sich hat. Er antwortet: wenn ich noch halb so viel hätte, als ich jetzt habe, weniger 2 fl., so hätte ich 16 fl. Wie viel Gulden hat er bei sich?

Im Kopfe Eine Zahl um ihre Hälfte vermehrt, gibt 3mal die Hälfte, und dieses um 2 vermindert muß 16, also 3mal die Hälfte

18 geben; daher ist die Hälfte der Zahl der dritte Theil von 18, d. i. 6, und somit die Zahl selbst 12.

Algebraisch. Es sei x die Anzahl der Gulden, die der Gefragte bei sich hat, so ist $\frac{x}{2}$ die Hälfte davon, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$x + \frac{x}{2} - 2 = 16$$

sein, woraus $x = 12$ hervorgeht.

Probe. $12 + \frac{12}{2} - 2 = 12 + 6 - 2 = 16$.

§. 80.

7) Ein Reisender wird gefragt, wie viel Meilen er zurückgelegt hat. Er gibt zur Antwort: wenn ich 48 Meilen mehr zurückgelegt hätte, so würde ich 3mal so weit gekommen sein als jetzt. Wie viel Meilen hat er zurückgelegt?

Es sei x die Anzahl der zurückgelegten Meilen. Hätte der Reisende 48 Meilen mehr zurückgelegt, so würde er $x + 48$ Meilen gemacht haben, und da er in diesem Falle 3mal so weit, also 3x Meilen weit gekommen wäre, so ist $x + 48 = 3x$, daher $x = 24$.

Probe. $24 + 48 = 72$, $3 \times 24 = 72$.

8) Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, die Elle zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{3}$ fl. die Elle. Wenn er nun dabei 21 fl. gewonnen hat, wie viel Ellen enthält das Stück?

Bei dieser Aufgabe wird als stillschweigende Bedingung vorausgesetzt, daß der Gewinn gleich ist der Verkaufssumme weniger der Einkaufssumme.

Es sei x die Anzahl der Ellen, so ist

die Verkaufssumme für x Ellen $= 4\frac{1}{3} \;.\; x = \frac{13x}{3}$,

die Einkaufssumme für x Ellen $= 3\frac{3}{4} \;.\; x = \frac{15x}{4}$; daher

$$\frac{13x}{3} - \frac{15x}{4} = 21,$$

woraus $x = 36$ folgt.

Probe. 36 Ellen zu $4\frac{1}{3}$ fl. geben 156 fl. beim Verkaufe
36 „ „ $3\frac{3}{4}$ „ „ 135 „ „ Einkaufe
21 fl. Gewinn.

9) Jemand wurde um sein Alter gefragt und sagte: Mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre = x, so ist

sein Alter nach 10 Jahren $= x + 10$,
sein Alter vor 4 Jahren $= x - 4$.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein muß, als die zweite, so wird, damit man eine Gleichung bekomme, die zweite Zahl mit 2 multiplizirt; daher ist

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

woraus $x = 18$ folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren = 28 Jahre
Alter vor 4 Jahren = 14 Jahre,
und wirklich ist $28 = 2 \times 14$.

10) Ein Vater ist 32, sein Sohn 2 Jahre alt; nach wie viel Jahren wird der Vater gerade 3mal so alt sein als sein Sohn?

Nach x Jahren. Nach dieser Zeit wird der Vater $32 + x$, der Sohn $2 + x$ Jahre alt, und da nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl 3mal so groß ist als die zweite, so muß man, damit die Gleichheit hergestellt werde, die zweite Zahl mit 3 multipliziren; man hat also die Gleichung:

$$32 + x = 3(2 + x),$$

welcher der Werth $x = 13$ Genüge leistet.

Probe. Nach 13 Jahren wird der Vater 45, der Sohn 15 Jahre alt, daher der Vater wirklich 3mal so alt als der Sohn.

11) Ein Menschenfreund wollte eine Summe, die er eben bei sich hatte, unter 10 Arme vertheilen. Gibt er jedem 10 kr., so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem nur 18 kr. geben will. Wie viel Kreuzer hatte er bei sich?

Es sei x die Anzahl der Kreuzer. Will er jedem Armen 20 kr. geben, so hat er $200 - x$ Kreuzer zu wenig; will er jedem 18 kr. geben, so hat er $x - 180$ Kreuzer zu viel. Da nun diese beiden Zahlen gleich sein müssen, so ist

$$200 - x = x - 180,$$

woraus $x = 190$ folgt.

12) Ein Herr versprach seinem Bedienten jährlich ein Kleid und 60 Gulden. Nach zwei Monaten wird der Bediente entlassen und erhält das Kleid. Wie hoch wurde ihm dieses angerechnet?

Es sei der Werth des Kleides = x fl. Der ganzjährige Lohn beträgt also $x + 60$ Gulden, folglich der Lohn für zwei Monate $\frac{x + 60}{6}$ fl; da nun der Bediente für diese Zeit das Kleid, also x fl. im Werthe bekommen hat, so muß

$$x = \frac{x + 60}{6},$$

daher $x = 12$ sein.

13) Ein Kourier geht nach A und macht täglich 12 Meilen; einen Tag später wird ihm ein zweiter Kourier nachgeschickt; wie viel Meilen muß dieser täglich zurücklegen, damit er den ersten Kourier in 4 Tagen einhole?

Bedeutet x die Anzahl der Meilen, welche der zweite Kourier täglich zurücklegen muß, so werden von ihm in 4 Tagen 4x Meilen gemacht; der erste Kourier, welcher einen Tag länger auf dem Wege ist, wird in diesen Tagen $12 \times 5 = 60$ Meilen machen. Da nun die von beiden Kourieren zurückgelegten Wege, wenn sie zusammenkommen, gleich sein müssen, so hat man $4x = 60$, somit $x = 15$.

§. 81.

Man kann oft auch Aufgaben, in denen nach mehreren Unbekannten gefragt wird, sehr leicht durch eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten auflösen, wie dieß aus den folgenden Beispielen ersichtlich ist.

13) Ich denke mir zwei Zahlen, von denen die erste um 3 kleiner ist ist als die zweite; multiplizire ich die erste mit 4 und ziehe vom Produkte 18 ab, so erhalte ich die zweite. Welches sind die zwei Zahlen?

Heißt x die erste Zahl, so ist $x + 3$ die zweite. Man hat daher nach den Bedin gungen der Aufgabe

$$4x - 18 = x + 3,$$

woraus $x = 7$ hervorgehet, und daher $x + 3 = 10$.

Probe. Die zweite Zahl 10 ist wirklich um 3 größer als die erste 7; ferner gibt das 4fache von 7 weniger 18 zur Differenz 10, d. i. die zweite Zahl.

15) Man theile 50 in zwei Theile, so daß der eine Theil um 6 kleiner ist als der andere.

Heißt der größere Theil x, so ist $50 - x$ der kleinere, und man muß nach den Bedingungen der Aufgabe zu dem kleineren Theile $50 - x$ noch 6 dazu addiren, um den größeren x zu erhalten; es ist daher $x = 50 - x + 6$, woraus $x = 28$, und $50 - x = 22$ hervorgehet.

16) Ein Vater ist gegenwärtig 2mal so alt als sein Sohn; vor 15 Jahren war er 5mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Sohn sei x Jahre alt, so ist das Alter des Vaters $2x$ Jahre; vor 15 Jahren war also der Vater $2x - 15$, der Sohn $x - 15$ Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

woraus man $x = 20$ und $2x = 40$ erhält. Der Vater ist also 40, der Sohn 20 Jahre alt.

17) Ein Knabe sagte: ich und mein Vater sind 60 Jahre alt; ich habe aber nur den 4ten Theil von dem Alter meines Vaters. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Das Alter des Vaters sei x, also jenes des Sohnes $\frac{x}{4}$ Jahre, so hat man

$$x + \frac{x}{4} = 60,$$

woraus $x = 48$ und $\frac{x}{4} = 12$ hervorgeht. Der Vater ist also 48, der Sohn 12 Jahre alt.

18) Unter drei Knaben werden 100 Groschen so vertheilt, daß der zweite doppelt so viel als der erste, und der dritte um 10 mehr

als die Hälfte dessen bekommt, was der erste und zweite zusammen erhalten. Wie viel Groschen bekommt jeder der drei Knaben?

Heißt x die Anzahl Groschen, welche A bekommt,

so ist $2x$ „ „ „ B „

$\frac{x+2x}{2}+10$ „ „ „ C „

daher

$$x+2x+\frac{3x}{2}+10=100,$$

welche Gleichung $x=20$ gibt.

A bekommt also $x=20$ Groschen

B „ „ $2x=40$ „

C „ $\frac{3x}{2}+10=40$ „

19) Ein Knabe gibt seinem ältesten Bruder die Hälfte seiner Nüsse, weniger 8, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8, dem dritten wieder 8 weniger als die Hälfte des jetzigen Restes, und so auch dem vierten 8 weniger als die Hälfte des neuen Restes; die noch übrigen 20 Stücke behält er selbst. Wie viel Nüsse hatte er anfänglich und wie viele gab er jedem Bruder?

Heißt x die anfängliche Zahl der Nüsse, so gab er dem ersten Bruder $\frac{x}{2}-8$, und es blieben noch $x-\frac{x}{2}+8=\frac{x}{2}+8$; der zweite Bruder bekam $\frac{x}{4}+4-8=\frac{x}{4}-4$; und es blieben noch $\frac{x}{2}+8-\left(\frac{x}{4}-4\right)$ $=\frac{x}{4}+12$; der dritte Bruder bekam $\frac{x}{8}+6-8=\frac{x}{8}-2$, und es blieben noch $\frac{x}{4}+12-\left(\frac{x}{8}-2\right)=\frac{x}{8}+14$; davon erhielt der vierte Bruder $\frac{x}{16}+7-8=\frac{x}{16}-1$, so daß noch $\frac{x}{8}+14-\left(\frac{x}{16}-1\right)=\frac{x}{16}+15$ übrig bleiben. Der Rest soll aber 20 betragen; mithin ist

$$\frac{x}{16}+15=20,$$

woraus $x=80$ folgt.

Der Knabe hatte also anfänglich 80 Nüsse, und gab

dem ersten Bruder $\frac{x}{2}-8=32$,

„ zweiten „ $\frac{x}{4}-4=16$,

„ dritten „ $\frac{x}{8}-2=8$,

„ vierten „ $\frac{x}{16}-1=4$.

2. Aufgaben zur Selbstübung im Ansatze.

§. 82.

1) Welche Zahl ist um 23 größer, als die Summe aus ihrem vierten, fünften und sechsten Theile? — Die Zahl 60.

2) Man suche eine Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie durch 3 dividirt, eben so viel herauskommt, als wenn man von ihr 32 abzieht. — Die Zahl ist 48.

3) Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich dieselbe mit 3 multiplizire, 8 dazu addire, die Summe durch 8 dividire und von dem Quozienten 4 abziehe, so erhalte ich 0. Welche Zahl habe ich mir gedacht? — Die Zahl 8.

4) Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der sechste und neunte Theil derselben. Wie viel Schüler hatte er? — 72 Schüler.

5) Jemand war vor 8 Jahren 4mal so alt, als der 5te Theil seines gegenwärtigen Alters beträgt; wie alt ist er jetzt? — 40 Jahre.

6) Jemand wurde nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: nach 12 Jahren werde ich 4mal so alt sein, als ich vor 12 Jahren war. Wie alt ist er? — 20 Jahre.

7) Ein Vater sagt: Ich bin jetzt 40 Jahre alt, mein älterer Sohn 16, mein jüngerer 3; nach wie viel Jahren werden meine Söhne zusammen so viele Jahre zählen als ich? — Nach 21 Jahren.

8) Ein Bauernmädchen wurde nach der Anzahl Eier gefragt, die sie im Korbe trug. Drei Viertel davon, erwiederte sie, betragen 5 mehr, als fünf Achtel davon machen. Wie viel Eier waren im Korbe? — 40 Eier.

9) Zwei Kouriere gehen von A nach B ab; der erste legt täglich 10 Meilen, der zweite 15 Meilen zurück. Wenn nun der zweite um 4 Tage später von A abgegangen ist als der erste, in wie viel Tagen wird er den ersten einholen? — In 8 Tagen.

10) Von B gegen C marschirt ein feindliches Heer und macht täglich 4 Meilen; von A aus will man demselben nachsetzen, um es in 5 Tagen einzuholen, wie viele Meilen müssen täglich zurückgelegt werden, wenn die Entfernung zwischen A und B 10 Meilen beträgt? — 6 Meilen täglich.

11) Einem Boten, der von A aus vor 6 Tagen abging und täglich 6 Meilen macht, wird von B aus, welchen Ort er berührte, ein zweiter Bote nachgesendet, welcher täglich 10 Meilen macht; in wie viel Tagen wird er den ersten einholen, wenn die Entfernung zwischen A und B 11 Meilen beträgt?

12) Hätte A 120 fl. mehr, so würde er gerade so viel über 400 fl. besitzen, als ihm jetzt noch daran fehlen. Wie viel fl. hat er?

13) Wenn man von einer Summe die Hälfte wegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte, und von dem neuen Reste nochmals die Hälfte, so bleiben 37 fl. übrig. Wie groß war die anfängliche Summe?

14) Welche zwei Zahlen geben 81 zur Summe und 35 zur Differenz? — Die Zahlen 58 und 23.
15) Zwei Brüder zählen gegenwärtig zusammen 47 Jahre. Vor 10 Jahren war der ältere Bruder gerade doppelt so alt als der jüngere. Wie alt ist jeder? — Der ältere Bruder ist 28, der jüngere 19 Jahre alt.
16) Ein Vater ist jetzt 3mal so alt als sein Sohn, nach 12 Jahren wird er nur doppelt so alt als der Sohn sein. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn? — Der Vater hat 36, der Sohn 12 Jahre.
17) Man soll die Zahl 76 in zwei Theile so theilen, daß, wenn der größere durch 11 und der kleinere durch 7 dividirt wird, die Quozienten zusammen 8 ausmachen. Welche Theile sind es? — 55 und 21.
18) Es sollen 140 fl. unter 5 Personen so vertheilt werden, daß jede folgende 4 fl. weniger bekommt. Wie viel erhält jede Person? — A bekommt 36, B 32, C 28, D 24, E 20 Gulden.
19) Auf einem Tische lag eine bestimmte Summe Geldes. A sagt: ich habe 2mal so viel Geld; B, ich habe 3mal so viel Geld; C, ich habe die Hälfte von dem, was A und B zusammen haben. Wenn nun alle zusammen 240 fl. hatten; wie viel Geld lag auf dem Tische und wie viel besaß jeder?
20) Von zwei Spielern hatte A 4mal so viel Geld als B. Nachdem aber A an B 5 fl. verloren hat, hatte A nur noch 3mal so viel als B. Wie viel Geld hatte jeder am Anfange des Spieles?
21) In einer Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen; nachdem aber später drei Herren mit 4 Damen dazu kamen, waren nur 2mal so viel Herren als Damen. Wie viel Herren und Damen waren Anfangs da?
22) Jemand hat zwei goldene Dosen, die eine ist $\frac{5}{8}$ von der andern werth, und kostet deßhalb um 14 fl. weniger. Wie theuer ist jede Dose?
23) Ich habe mir zwei Zahlen gedacht, welche um 1 verschieden sind. Dividire ich die größere durch 4 und die kleinere durch 5, so sind die Quozienten ebenfalls um 1 verschieden. Welches sind die zwei Zahlen?
24) Hier dies Grabmal deckt Diophantus sterbliche Hülle,
Und in des Trefflichen Kunst zeigt es sein Alter Dir an.
Knabe zu sein, gewährt ihm der Schöpfer ein Sechstel des Lebens,
Und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt.
Noch ein Siebentel schwand, da fand er des Lebens Gefährtin,
Und fünf Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind.
Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet,
Als ihn plötzlich der Tod seinem Erzeuger entriß.
Noch vier Jahre betrauert' er ihn im schmerzlichen Kummer,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.

Inhalts-Verzeichniß

der zweiten Abtheilung der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.