

Babilonska metoda za računanje kvadratnega korena



BOŠTJAN KUZMAN

→ Arheološke najdbe kažejo, da so mezopotamska ljudstva (Babilonci, Sumerci) med leti 1800 in 1600 pred našim štetjem verjetno poznala postopke za reševanje preprostih kvadratnih enačb. Domnevajo, da so Babilonci približke za kvadratni koren iz danega števila poiskali s postopkom, ki ga je prvi eksplicitno opisal grški matematik Heron okoli leta 60. Postopek je preprost in ga v GeoGebri pravzaprav uženemo že z dvema vrsticama kode. A še prej se malo ogrejmo z razlago in nekaj računanja na papirju.

Naj bo $N > 1$ dano število, katerega kvadratni koren želimo izračunati. Babilonska metoda pravi nekako takole: za prvi približek korena izberi kar N . Nato trenutnemu približku prištej začetno število, deljeno s tvojim približkom, in dobljeno vsoto deli z 2. Tako dobiš nov približek, s katerim ponavljaš prejšnji korak, dokler s približkom nisi zadovoljen.

V sodobnejšem jeziku ta postopek opišemo z rekurzivnimi zaporedji. Zaporedje približkov je podano z začetnim členom $a_1 = N$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right), n \geq 1.$$

Oglejmo si, kaj to pomeni v primeru, ko je $N = 2$. Z zaporednim vstavljanjem vrednosti dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= N = 2 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{N}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1,500 \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{N}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{17}{12} \doteq 1,4166 \\ a_4 &= \frac{1}{2} \left(a_3 + \frac{N}{a_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right) = \frac{577}{408} \\ &\doteq 1,4142159 \end{aligned}$$

Iz primera je razvidno, da se vrednosti a_n res približujejo¹ številu $\sqrt{2} \doteq 1,41421356 \dots$

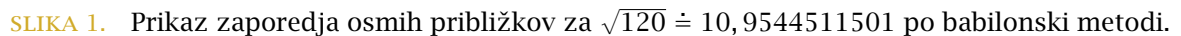
Za izračun zaporedja približkov bomo v GeoGebri uporabili ukaz `SeznamPonavljanj(f,N,n)`. V njem nastopajo funkcija f , ki pove, na kakšen način iz dane vrednosti dobimo novo, začetna vrednost N , in število ponovitev (iteracij) n . Koraki za izračun zaporedja so naslednji:

- Izberimo število, ki ga želimo koreniti, na primer $N=2$, in število korakov, na primer $n=10$.
- Definirajmo funkcijo z ukazom $f(x)=(x+N/x)/2$.
- Nato z ukazom $priblizki=SeznamPonavljanj(f,N,n)$ izračunamo seznam približkov, ki ga GeoGebra vrne v algebrskem oknu.
- Z ukazom $Element(priblizki,n)$ iz seznama približkov izberemo zadnjega, ki je najboljši.

Seveda si želimo v GeoGebri izkoristiti tudi možnost grafične ponazoritve zaporedja približkov v koordinatnem sistemu. Zato lahko vse skupaj nekoliko dodelamo, na primer na naslednji način:

- Število N določimo z izborom točke A na osi y , ki jo lahko poljubno premikamo, in ukazom $N=y(A)$.
- Dejansko vrednost $\sqrt{N}$ prikažemo s premico $y=sqrt(N)$.
- Vstavimo drsnik za število n in kot prej definiramo funkcijo f in seznam približkov $priblizki$.
- Nato upodobimo približke z ukazom $Zaporedje((k,Element(priblizki,k)),k,1,n)$.
- Za lepši prikaz prilagodimo koordinatne osi in morda še kaj.

¹Tudi na splošnem velja, da je tako definirano zaporedje a_n konvergentno z limito $\sqrt{N}$. Bralci, ki bi se želeli o tem prepričati z dokazom, naj najprej preverijo, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno s $\sqrt{N}$. Za njegovo limito $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ zato velja $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{N}{A} \right)$, kar lahko preuredimo v kvadratno enačbo $A^2 = N$ in sklepamo, da je $A = \sqrt{N}$.



✕ ✕ ✕



→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka letnika 50 je **Petdesetletnica**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Maja Antončič iz Celja, Janko Rušt iz Nove Gorice in Evita Košir Basle iz Žalca, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×