

Raziskovanje kvadratnih palindromov

Exploring Square Palindromes

Kaja Vreš, dijakinja Gimnazije Ravne na Koroškem

Mentorji: Dragomir Benko, Šolski center Ravne, Gimnazija Ravne na Koroškem

Domen Vreš, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko

Simona Vreš, Šolski center Ravne, Gimnazija Ravne na Koroškem

Izvleček

Kvadratni palindrom smo definirali kot par števil, za kateri velja, da ima eno število števk v obratnem vrstnem redu kot drugo, in to velja tudi za njuna kvadrata. V članku predstavimo, kakšni so pogoji, da je število kvadratni palindrom. Ugotovimo, da ne sme prihajati do prenosa enote pri kvadriranju števila. Predstavimo različne primere kvadratnih palindromov in posledice dejstva, da ne sme prihajati do prenosa enote.

Ključne besede: palindromi, kvadratni palindromi, indukcija

Abstract

A square palindrome is a pair of numbers whose digits are in reverse order to the other, and the same applies to their squares. This article describes the prerequisites for a number to be a square palindrome. When squaring an integer, we must ensure that no units are transferred. We give several examples of square palindromes and discuss the implications of the assumption that there must be no transfer of units.

Keywords: palindromes, square palindromes, induction

1 Uvod

V raziskovalni nalogi iz leta 2022, ki je nastala pod okriljem Gimnazije Ravne na Koroškem, raziskujemo dokaj neraziskano področje matematike – kvadratne palindrome. V tem članku so predstavljene bistvene ugotovitve, bralce pa vljudno vabimo, da si dokaze, ki so v tem članku izpuščeni, ogledajo v sami raziskovalni nalogi. Čeprav so kvadratni palindromi v literaturi, ki preučuje palindrome, velikokrat omenjeni, so navedeni le kot zanimivost.

1.1 Definicija kvadratnega palindroma

Palindrom je število, ki se enako prebere naprej in nazaj (simetrično število v matematiki). To pomeni, da so v njegovem desetiškem oziroma decimalnem zapisu vse števke razporejene simetrično (prva števka je enaka zadnji, druga števka je enaka predzadnji ...).

Lahko ga zapišemo kot: $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots} \dots \overline{a_3 a_2 a_1}$.

V raziskovalni nalogi raziskujemo posebno vrsto številskih palindromov, ki jo poimenujemo kvadratni palindrom. To poimenovanje uvedemo za potrebe raziskovalnega dela in je še nedefiniran pojem.

Kvadratni palindrom dobimo, ko kvadriramo dve števili, ki imata števke v obratnem vrstnem redu in sta njuna kvadrata rav-

no tako števili, ki imata obrnjen vrstni red števk. To je torej par števil (k, l) , za kateri velja:

$$k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}, \quad k^2 = \overline{b_m b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0},$$
$$l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}, \quad l^2 = \overline{b_0 b_1 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m}. \quad (1)$$

Primer:

$$\begin{aligned} 12^2 &= 144 \\ 21^2 &= 441 \end{aligned} \quad (2)$$

Opomba: Na začetku se osredotočimo na pare števil, ki imajo enako število števk, oziroma na števila, ki nimajo 0 za zadnjo števko.

1.2 Metode dela

Pri raziskovanju in pisanju naloge smo kot temeljno metodo dela uporabljali metodo matematičnega sklepanja in dokazovanja.

Kvadratne palindrome smo opazovali s pomočjo generiranih kvadratnih palindromov, ki smo jih generirali v programu Microsoft Excel. Grafe smo narisali s pomočjo programa GeoGebra.

2 Generiranje kvadratnih palindromov

Najprej smo na podlagi opazovanja poskušali zapisati nekaj primerov, ki jim morajo ustrezati števke, da je število kvadratni pa-

lindrom. S pomočjo aplikacije Microsoft Excel smo zapisali vsa dvo-, tri-, štiri- in petmestna števila. To smo lahko storili, saj program samostojno prepozna zaporedje in smo tako napisali prvi dve števili, nato pa razširili zaporedje na naslednje celice. Na koncu smo s pomočjo preproste funkcije A^2 izračunali kvadrate teh števil.

Funkcija, ki obrne vrstni red števk števila, je malo zahtevnejša in se razlikuje glede na število mest. Zapisali smo jo s pomočjo vgrajenih funkcij QUOTIENT in MOD. Dobljena števila, smo kvadrirali enako, kot smo kvadrirali prvotna števila.

2.1 Dvomesna števila

Ko smo zapisali vsa dvomesna števila in njihove kvadrate, smo obrnili vrstni red števk s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10) + \text{MOD}(A; 10) * 10$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Ko smo dobljena števila kvadrirali, smo lahko opazovali, katera števila so kvadratni palindromi. Dobljeni rezultati so prikazani na Sliki 1. Dvomesna števila, ki so kvadratni palindromi, so: 11, 12, 13, 21, 22, 31.

	A	B	C	D
1	11	121	11	121
2	12	144	21	441
3	13	169	31	961
4	14	196	41	1681
5	15	225	51	2601
6	16	256	61	3721
7	17	289	71	5041
8	18	324	81	6561
9	19	361	91	8281
10	20	400	2	4
11	21	441	12	144
12	22	484	22	484
13	23	529	32	1024
14	24	576	42	1764
15	25	625	52	2704
16	26	676	62	3844
17	27	729	72	5184
18	28	784	82	6724
19	29	841	92	8464
20	30	900	3	9
21	31	961	13	169

Slika 1: Preglednica dvomesnih kvadratnih palindromov.

	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	100	10000	1	1 31	130	16900	31	961 101	200	40000	2	4 201	300	90000	3	
2	101	10201	101	10201 32	131	17161	131	17161 102	201	40401	102	10404 202	301	90601	103	10609
3	102	10404	201	40401 33	132	17424	231	53361 103	202	40804	202	40804 203	302	91204	203	41209
4	103	10609	301	90601 34	133	17689	331	109561 104	203	41209	302	91204 204	303	91809	303	91809
5	104	10816	401	160801 35	134	17956	431	185761 105	204	41616	402	161604 205	304	92416	403	162409
6	105	11025	501	251001 36	135	18225	531	281961 106	205	42025	502	252004 206	305	93025	503	253009
7	106	11236	601	361201 37	136	18496	631	398161 107	206	42436	602	362404 207	306	93636	603	363609
8	107	11449	701	491401 38	137	18769	731	534361 108	207	42849	702	492804 208	307	94249	703	494209
9	108	11664	801	641601 39	138	19044	831	690561 109	208	43264	802	643204 209	308	94864	803	644809
10	109	11881	901	811801 40	139	19321	931	866761 110	209	43681	902	813604 210	309	95481	903	815409
11	110	12100	11	121 41	140	19600	41	1681 111	210	44100	12	144 211	310	96100	11	169
12	111	12321	111	12321 42	141	19881	141	19881 112	211	44521	112	12544 212	311	96721	113	12769
13	112	12544	211	44521 43	142	20164	241	58081 113	212	44944	212	44944 213	312	97344	213	45369
14	113	12769	311	96721 44	143	20449	341	116281 114	213	45369	312	97344 214	313	97969	313	97969
15	114	12996	411	168921 45	144	20736	441	194481 115	214	45796	412	169744 215	314	98596	413	170569
16	115	13225	511	261121 46	145	21025	541	292681 116	215	46225	512	262144 216	315	99225	513	263169
17	116	13456	611	373321 47	146	21316	641	410881 117	216	46656	612	374544 217	316	99856	613	375769
18	117	13689	711	505521 48	147	21609	741	549081 118	217	47089	712	506944 218	317	100489	713	508369
19	118	13924	811	657721 49	148	21904	841	707281 119	218	47524	812	659344 219	318	101124	813	660969
20	119	14161	911	829921 50	149	22201	941	885481 120	219	47961	912	831744 220	319	101761	913	833569
21	120	14400	21	441 51	150	22500	51	2601 121	220	48400	22	484 221	320	102400	21	529
22	121	14641	121	14641 52	151	22801	151	22801 122	221	48841	122	14884 222	321	103041	123	15129
23	122	14884	221	48841 53	152	23104	251	63001 123	222	49284	222	49284 223	322	103684	223	49729
24	123	15129	321	103041 54	153	23409	351	123201 124	223	49729	322	103684 224	323	104329	323	104329
25	124	15376	421	177241 55	154	23716	451	203401 125	224	50176	422	178084 225	324	104976	423	178929
26	125	15625	521	271441 56	155	24025	551	303601 126	225	50625	522	272484 226	325	105625	523	273529
27	126	15876	621	385641 57	156	24336	651	423801 127	226	51076	622	386884 227	326	106276	623	388129
28	127	16129	721	519841 58	157	24649	751	564001 128	227	51529	722	521384 228	327	106929	723	522729

Slika 2: Preglednica trimesnih kvadratnih palindromov.

2.2 Trimestna števila

Vrstni red števk trimestnega števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 100) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 10 + \text{MOD}(A; 10) * 100,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Nato smo dobljena števila ponovno kvadrirali. Rezultati so prikazani na Sliki 2. Iz te je razvidno, da so trimestni kvadratni palindromi: 101, 102, 103, 111, 112, 113, 121, 122, 201, 202, 211, 212, 221, 301, 311.

2.3 Štirimestna števila

Za obračanje vrstnega reda števk štirimestnega števila smo uporabili funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 1000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 10 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 100 + \text{MOD}(A; 10) * 1000,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Rezultati so prikazani na Sliki 3.

Ugotovili smo, da so štirimestna števila, ki so kvadratni palindromi: 1001, 1002, 1003, 1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1031, 1101, 1102, 1103, 1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1201, 1202, 1211, 1212, 1301, 2001, 2002, 2011, 2101, 2102, 2012, 2021, 2022, 2111, 2121, 2201, 2202, 2211, 3001, 3011, 3101, 3111.

2.4 Petmestna števila

Vrstni red števk petmestnega števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 1000); 10) * 10 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 100 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 1000 + \text{MOD}(A; 10) * 10000,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

B	C	D	E	F	B	C	D	E	F	B	C	D	E	F
10	10000	-	-	10000001	1210	1464100	121	14641	146410014641	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004
1001	1002001	1001	1002001	10020011002001	1211	1466521	1121	1256641	14665211256641	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004
1002	1004004	2001	4004001	10040044004001	1212	1468944	2121	4498641	14689444498641	2010	4040100	102	10404	404010010404
1003	1006009	3001	9006001	10060099006001	1220	1488400	221	48841	148840048841	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404
1010	1020100	101	10201	102010010201	1300	1690000	31	961	1690000961	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404
1011	1022121	1101	1212201	10221211212201	1301	1692001	1031	1062961	16920011062961	2020	4080400	202	40804	408040040804
1012	1024144	2101	4414201	1024144414201	2000	4000000	2	4	40000004	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804
1013	1026169	3101	9616201	10261699616201	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004	2022	4088484	2202	4488804	40884844488804
1020	1040400	201	40401	104040040401	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004	2100	4410000	12	144	4410000144
1021	1042441	1201	1442401	10424411442401	2010	4040100	102	10404	404010010404	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144
1022	1044484	2201	4844401	10444844844401	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144
1030	1060900	301	90601	106090090601	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404	2110	4452100	112	12544	445210012544
1031	1062961	1301	1692061	10629611692061	2020	4080400	202	40804	408040040804	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544
1100	1210000	11	121	1210000121	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804	2120	4494400	212	44944	449440044944
1101	1212201	1011	1022121	12122011022121	2022	4088484	2202	4488804	40884844488804	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944
1102	1214404	2011	4044121	12144044044121	2100	4410000	12	144	4410000144	2200	4840000	22	484	4840000484
1103	1216609	3011	9066121	12166099066121	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484
1110	1232100	111	12321	123210012321	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144	2202	4848804	2022	4088804	48488044088804
1111	1234321	1111	1234321	12343211234321	2110	4452100	112	12544	445210012544	2210	4884100	122	14884	488410014884
1112	1236544	2111	4456321	12365444456321	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884
1113	1238769	3111	9678321	12387699678321	2120	4494400	212	44944	449440044944	3000	9000000	3	9	90000009
1120	1254400	211	44521	125440044521	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944	3001	9006001	1003	1006009	90060011006009
1121	1256641	1211	1466521	12566411466521	2200	4840000	22	484	4840000484	3010	9060100	103	10609	906010010609
1122	1258884	2211	4888521	12588844888521	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484	3011	9066121	1103	1216609	90661211216609
1130	1276900	311	96721	127690096721	2202	4848804	2022	4088804	48488044088804	3100	9610000	13	169	9610000169
1200	1440000	21	441	1440000441	2210	4894100	122	14884	489410014884	3101	9616201	1013	1026169	96162011026169
1201	1442401	1021	1042441	14424011042441	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884	3110	9672100	113	12769	967210012769
1202	1444804	2021	4084441	14448044084441	3000	9000000	3	9	90000009	3111	9678321	1113	1238769	96783211238769

Slika 3:
Preglednica
štirimestnih
kvadratnih
palindromov.

Petmestnih števil, ki so kvadratni palindromi, je veliko (90), zato si oglejmo le nekaj primerov, in sicer: 10001, 10002, 10003, 10011, 10012, 10013, 10021, 10022, 10031, 10101, 10102, 10103, 10111, 10112, 10113 ...

Nekaj primerov petmestnih kvadratnih palindromov je prikazanih tudi na Sliki 4.

B	C	D	E	F	G
21200	449440000	212	44944	44944000044944	Palindrom
21201	449482401	10212	104284944	449482401104284944	Palindrom
21210	449864100	1212	1468944	4498641001468944	Palindrom
22000	484000000	22	484	484000000484	Palindrom
22001	484044001	10022	100440484	484044001100440484	Palindrom
22002	484088004	20022	400880484	484088004400880484	Palindrom
22010	484440100	1022	1044484	4844401001044484	Palindrom
22011	484484121	11022	121484484	484484121121484484	Palindrom
22020	484880400	2022	4088484	4848804004088484	Palindrom
22100	488410000	122	14884	48841000014884	Palindrom
22101	488454201	10122	102454884	488454201102454884	Palindrom
22102	488498404	20122	404894884	488498404404894884	Palindrom
22110	488852100	1122	1258884	4888521001258884	Palindrom
22111	488896321	11122	123698884	488896321123698884	Palindrom
30000	900000000	3	9	9000000009	Palindrom
30001	900060001	10003	100060009	900060001100060009	Palindrom
30010	900600100	1003	1006009	9006001001006009	Palindrom
30011	900660121	11003	121066009	900660121121066009	Palindrom

Slika 4: Primer najdenih petmestnih kvadratnih palindromov.

2.5 Ugotovitve

Z opazovanjem pridobljenih kvadratnih palindromov smo ugotovili, da so ti sestavljeni samo iz števk 0, 1, 2 in 3, zato lahko sklepamo, da je to eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom. Opazili smo tudi, da se z večanjem števila mest večja število kvadratnih palindromov.

3 Števke, ki tvorijo kvadratni palindrom

V raziskovalni nalogi najprej dokažemo, da so lahko na prvem oziroma zadnjem mestu le števke 1, 2 in 3. S pomočjo tega doka-

za v drugem delu potrdimo, da so te številke skupaj z 0 edine, ki se lahko pojavijo v kvadratnih palindromih.

V obeh dokazih predpostavimo, da imamo par števil (k , l), ki tvorita kvadratni palindrom. Njuna desetiška zapisa sta: $k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$, $l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$.

V obeh dokazih opazujemo kvadrata teh števil, ki ju zaporedoma označimo z x in y .

$$x = k^2 = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0^2}$$

$$y = l^2 = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n^2} \quad (3)$$

Eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom, je, da je na prvem oziroma zadnjem mestu ena izmed števk 1, 2 ali 3, torej velja:

$$a_0 \leq 3 \text{ oziroma } a_n \leq 3.$$

4 Posplošitev za celotno število

x :

y :

$$a_n^2 \cdot 10^{2n}$$

$$a_0^2 \cdot 10^{2n}$$

$$2a_n a_{n-1} \cdot 10^{2n-1}$$

$$2a_1 a_0 \cdot 10^{2n-1}$$

$$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^{2n-2}$$

$$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^{2n-2}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^2$$

$$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^2$$

$$2a_1 a_0 \cdot 10^1$$

$$2a_n a_{n-1} \cdot 10^1$$

$$a_0^2 \cdot 10^0$$

$$a_n^2 \cdot 10^0$$

1. Ker mora biti $a_0 \leq 3$ in s tem $a_0^2 \leq 9$, ne pride do prenosa enote z enic na desetic v številu x , saj je $a_0^2 \leq 10$.
2. Na zadnje mesto v številu X ne vpliva nobeno drugo mesto, kar pomeni, da je vrednost zadnje števke števila x enaka vrednosti a_0^2 . Ker morata biti zadnja števka števila x in prva števka števila y enaki (da sta to kvadratna palindroma), to pomeni, da mora imeti tudi prva števka števila y vrednost a_0^2 . Iz tega sledi, da drugo mesto v tem številu ne sme vplivati na prvo mesto. Da to drži, mora biti $2a_2a_0 \leq 9$.
3. Sedaj vemo, da velja $a_0^2 \leq 9$ in $2a_1a_0 \leq 9$. Torej je vrednost predzadnje števke števila x enaka vrednosti $2a_1a_0$. Ker enice ne vplivajo na desetic in ker je ta vrednost manjša od deset, je predzadnja števka x enaka $2a_1a_0$. Da bosta števili x in y kvadratna palindroma, morata biti tudi druga števka števila y in predzadnja števka števila x enaki. Iz tega sledi, da mora imeti tudi druga števka števila y vrednost $2a_1a_0$. Da to drži, ne sme priti do prenosa enote iz tretjega na drugo mesto števila y , torej tretje mesto ne sme vplivati na drugo. Iz tega sledi, da mora veljati $(a_1^2 + 2a_2a_0) \leq 9$.
4. Ta postopek bi lahko ponavljali, dokler ne bi prišli do prvega mesta števila x in zadnjega mesta števila y . Z indukcijo dokažemo, da se na nobenem mestu ne zgodi prenos enote na naslednje mesto.

4.1 Pogoji, ki določajo kvadratne palindrome

4.1.1 Potence s sodimi eksponenti

Vsota dveh sodih števil je sodo število in vsota dveh lihih števil je sodo število. Ko množimo potence z enako osnovo, storimo to tako, da osnovo prepišemo, eksponente pa seštejemo.

Potence s sodim eksponentom ($2k$) bodo zato pomnožene s koeficienti oblike:

$$a_k^2 + 2 \sum_{i \neq j, i+j=2k} a_i a_j. \quad (4)$$

Ker ne sme priti do prenosa enote, iz tega sledi:

- 1) $a_k^2 \leq 9$ za $0 \leq k \leq n$,
- 2) $a_k \leq 3$ za $0 \leq k \leq n$.

Kvadrati vseh števk števil k in l so manjši od 10, kar pomeni, da mora biti njihova osnovna vrednost manjša ali enaka 3, saj je $4^2 = 16$ večje od 10, medtem ko je $3^2 = 9$ manjše od 10.

4.1.2 Potence z lihimi eksponenti

Potence z lihimi eksponenti ($2k + 1$) bodo pomnožene s koeficienti oblike:

$$2 \sum_{i \neq j, i+j=2k+1} a_i a_j. \quad (5)$$

4.2 Omejitve

Pri kvadriranju moramo pomnožiti vsako števko z vsako števko po formuli $2a_i a_j$. Ker smo ugotovili, da ne sme priti do prenosa enote v številu, to pomeni, da je $2a_i a_j \leq 9$.

Iz tega lahko hitro ugotovimo nekaj pravil, ki jih ne smemo prekršiti, da bo neko število kvadratni palindrom. Pri tem nam bo v pomoč dejstvo, da kvadratni palindrom tvorijo le števke 0, 1, 2 in 3.

S temi števki dobimo devet možnosti (1 in 0, 1 in 1, 1 in 2, 1 in 3, 2 in 0, 2 in 2, 2 in 3, 3 in 0, 3 in 3), ki nam povedo, katera števila lahko soustvarjajo kvadratni palindrom in katera ne.

Iz teh možnosti smo ugotovili:

- 1) števki 2 in 3 ne smeta biti v istem številu hkrati, da je le-to še kvadratni palindrom,
- 2) v številu je lahko samo ena števka enaka 3.

4.3 Dodatne omejitve

Poleg vseh že ugotovljenih lastnosti in omejitev lahko pri opazovanju potenc v zapisu števila določimo dodatne omejitve. Te se razlikujejo glede na to, ali je število mest liho ali sodo. Preden raziščemo te omejitve, si pogledajmo še nekaj desetiških zapisov in značilnosti, ki jih ob tem opazimo.

Trimestno število:

$$a = \overline{a_2 a_1 a_0} = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \\ a^2 = a_2^2 \cdot 10^4 + 2a_1 \cdot a_2 \cdot 10^3 + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_1 a_0 \cdot 10 + a_0^2. \quad (6)$$

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu trimestnega števila a je 2.

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu kvadrata danega trimestnega števila a je 4.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci z osnovo 10 (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 2, 1.

Štirimestno število:

$$a = \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \\ a^2 = a_3^2 \cdot 10^6 + 2a_2 \cdot a_3 \cdot 10^5 + (a_2^2 + 2a_1 \cdot a_3) \cdot 10^4 \\ + (2a_0 \cdot a_3 + 2a_1 \cdot a_2) \cdot 10^3 \\ + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_1 a_0 \cdot 10 + a_0^2. \quad (7)$$

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu štirimestnega števila a je 3.

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu kvadrata danega štirimestnega števila a je 6.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci z osnovo 10 (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1.

4.3.1 Pomembne ugotovitve

Prva takšna ugotovitev je, da a_n vpliva le na koeficiente od potence 10^n do potence 10^{2n} . Nižje potence, pri kateri ima a_n vpliv, ni, ker je najmanjša potenca, s katero lahko množimo potenco 10^n , potenca 10^0 oziroma 1.

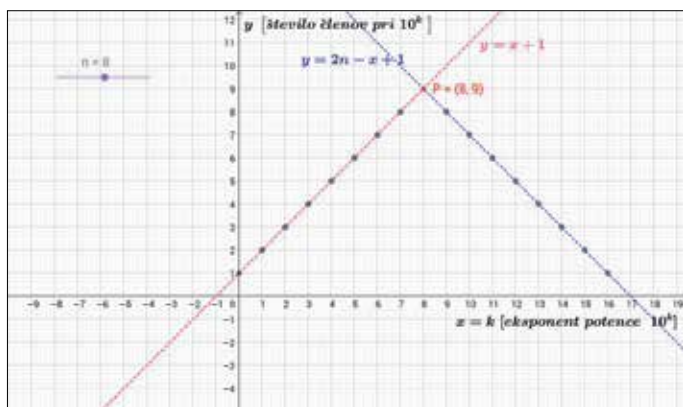
Druga pomembna ugotovitev je, da je vsota indeksov koeficientov v členih pri posamezni potenci števila 10 v zapisu kvadrata

vedno enaka eksponentu potence števila 10. Tako je v kvadratu števila a potenca 10^k pomnožena z vsoto členov oblike $a_i \cdot a_j$, pri čemer je $i + j = k$. Če v vsoti sodeluje a_i^2 , je $2i = k$.

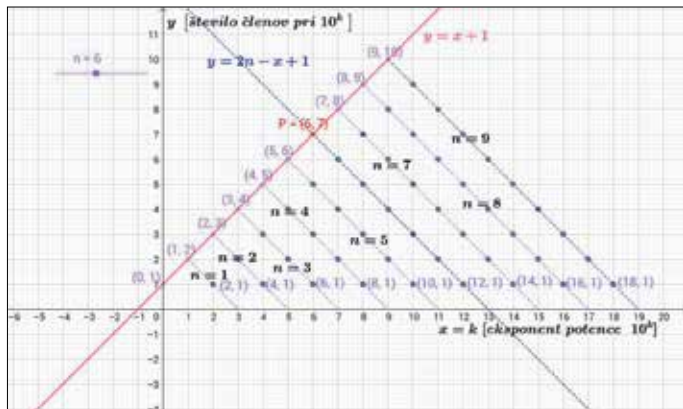
Število členov oblike $a_i \cdot a_j$; $i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k v zapisu kvadrata, linearno raste oziroma pada. Zato lahko število členov oblike $a_i \cdot a_j$; $i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k v zapisu kvadrata števila $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ izračunamo po formuli:

$$f(k) = \begin{cases} k+1; & 0 \leq k \leq n \\ 2n-k+1; & n < k \leq 2n \end{cases}; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Največ členov nastopa pri potenci 10^n , kjer je tudi presečišče obeh grafov, ki sta prikazana na Sliki 5 in Sliki 6.



Slika 5: Grafični prikaz števila členov za devetmestno število.



Slika 6: Grafični prikaz števila členov za poljuben n .

Tretja pomembna ugotovitev je prej navedena oblika vsote členov, s katerimi so pomnožene posamezne potence števila 10.

4.3.2 Kvadratni palindromi z lihim številom štev

Če je n sodo število, potem ima osnovno število liho število mest. Indeksi gredo pri števkih od n do $\frac{n}{2} + 1$ pri prvem faktorju in od 0 do $\frac{n}{2} - 1$ pri drugem faktorju. To velja za produkte oblike: $2 \cdot a_i \cdot a_j$. Ker pa je n sodo število, je 10^n potenca s sodim eksponentom, iz česar sledi, da se pojavi tudi člen $a_{\frac{n}{2}}$.

$$10^n \cdot \left(a_{\frac{n}{2}}^2 + 2a_n a_0 + 2a_{n-1} a_1 + \cdots + 2a_{\frac{n}{2}+1} a_{\frac{n}{2}-1} \right) \quad (9)$$

Opazimo, da pri sodih n srednja številka števila $a_{\frac{n}{2}}$ ne sme biti 3, saj pri 10^n nastopa poleg $a_{\frac{n}{2}}$ še faktor $2a_n a_0$, ki ima vrednost vsaj ena, saj je a_n različno od nič, ker je prva številka. Ravno tako je a_0 različno od nič, ker je zadnja številka in raziskujemo kvadratne palindrome, ki imajo zadnjo številko različno od 0.

Če bi bila števka $a_{\frac{n}{2}} = 3$, bi to pomenilo, da je $a_{\frac{n}{2}}^2 = 9$ in bi prišlo do prenosa enote, saj je $2a_{\frac{n}{2}}$ zagotovo 1 ali več.

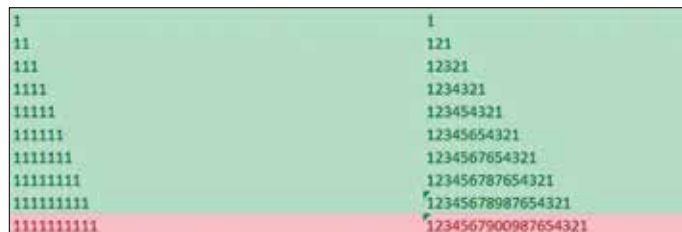
Ta ugotovitev velja samo za kvadratne palindrome z lihimi številom števk, saj pri kvadratnih palindromih s sodim številom števk srednje številke ni in člen $a_{\frac{n}{2}}^2$ pri potenci 10^n ne nastopa.

5 Kvadratni palindromi, zgrajeni iz enakih števk

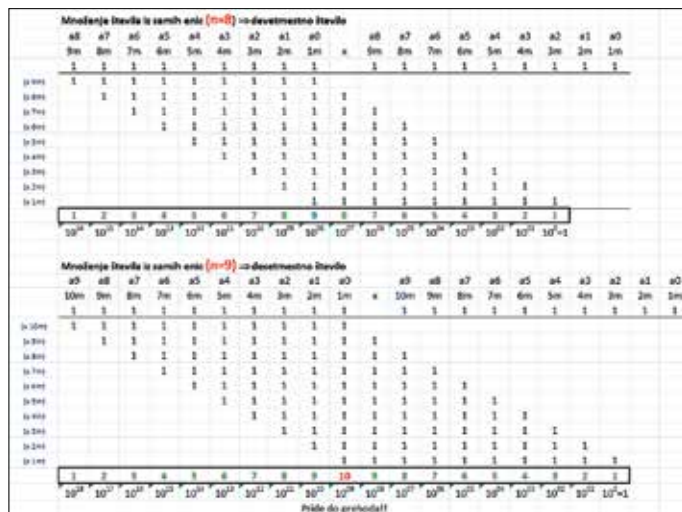
V tej nalogi smo se ukvarjali tudi s kvadratnimi palindromi, ki so zgrajeni iz enakih števk. Ker smo do te točke ugotovili, da kvadratne palindrome gradijo le številke 1, 2, 3 in 0, tudi kvadratnih palindromov, zgrajenih iz enakih števk, ne morejo tvoriti katere druge številke, vendar niti vse od teh števk ne tvorijo takšnih kvadratnih palindromov, saj 0 in 3 ne prideta v poštev.

5.1 Kvadratni palindromi, zgrajeni iz samih enic

Kljub temu da je 1 najmanjše naravno število, ob preveliki količini enic v številu pri kvadriranju tega števila pride do prenosa enote in to število posledično ni kvadratni palindrom. S pomočjo aplikacije Microsoft Excel smo preverili, največ koliko mest lahko ima število, zgrajeno iz samih 1, da je to še lahko kvadratni palindrom. Rezultati so prikazani na Sliki 7.



Slika 7: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih enic.



Slika 8: Kvadriranje osem mestnega in devet mestnega števila, sestavljenega iz samih enic.

Ugotovili smo, da ima takšno število lahko 9 mest, da je še kvadratni palindrom. Pri desetmestnem številu namreč pride do prenosa enote, saj je vsota členov pri potenci 10^{10} enaka 10. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega devetmestnega in desetmestnega števila je razvidno na Sliki 8.

5.2 Kvadratni palindromi, sestavljeni iz samih dvojk

Ponovno smo si pomagali s programom Microsoft Excel in napisali nekaj števil, zgrajenih iz samih 2, ter jih kvadrirali. Rezultati so vidni na Sliki 9.

2	4
22	484
222	49284
2222	4937284
22222	493817284
222222	49382617284
2222222	4938270617284
22222222	493827150617284
222222222	49382715950617300
2222222222	4938271603950620000
22222222222	493827160483951000000

Slika 9: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih dvojk.

Ugotovili smo, da sta takšna kvadratna palindroma samo dva, saj pri trimesnem številu že pride do prenosa enote, ker je vsota členov pri potenci 10^3 enaka 12. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega dvomestnega in trimesnega števila je razvidno na Sliki 10.

Množenje števila iz samih dvojk ($n=1$) $\Rightarrow$ dvomestno število število									
a1	a0		a1	a0					
2m	1m	x	2m	1m					
2	2		2	2					
(x 2m)	4	4							
(x 1m)	4	4	4						
	4	8	4						
	10^{02}	10^{01}	$10^0=1$						
Množenje števila iz samih dvojk ($n=2$) $\Rightarrow$ trimesno število število									
a2	a1	a0		a2	a1	a0			
3m	2m	1m	x	3m	2m	1m			
2	2		2		2		2		2
(x 3m)	4	4	4						
(x 2m)	4	4	4	4					
(x 1m)	4	4	4	4	4				
	4	8	12	8	4				
	10^{04}	10^{03}	10^{02}	10^{01}	$10^0=1$				
Pride do prehoda!!									

Slika 10: Kvadriranje dvomestnega in trimesnega števila, sestavljene-ga iz samih dvojk.

6 Kvadratni palindromi z različnim številom mest

Posebno obravnavo si zaslužijo tudi naravna števila, ki se končajo z vsaj eno števk 0. Ko zamenjamo vrstni red števk, ima dobljeno število v resnici v mestnem zapisu eno ali več mest manj. Kljub temu bi lahko bila nekatera takšna števila kvadratni palindromi.

$$120^2 = 14400$$

$$21^2 = 441$$

(10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I		A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	10	100	1	1		10	1000	1	1	1	100	10000	1	1		100	1000000	1	1
2	11	121	11	11		11	1331	11	1331	2	101	10201	101	10201		101	1030301	101	1030301
3	12	144	21	441		12	1728	21	9261	3	102	10404	201	40401		102	1061208	201	8120601
4	13	169	31	961		13	2197	31	29791	4	103	10609	301	90601		103	1092727	301	27270901
5	14	196	41	1681		14	2744	41	68921	5	104	10816	401	160801		104	1124864	401	64481201
6	15	225	51	2601		15	3375	51	132651	6	105	11025	501	251001		105	1157625	501	1,26E+08
7	16	256	61	3721		16	4096	61	226981	7	106	11236	601	361201		106	1191016	601	2,17E+08
8	17	289	71	5041		17	4913	71	357911	8	107	11449	701	491401		107	1225043	701	3,44E+08
9	18	324	81	6561		18	5832	81	531441	9	108	11664	801	641601		108	1259712	801	5,14E+08
10	19	361	91	8281		19	6859	91	753571	10	109	11881	901	811801		109	1295029	901	7,31E+08
11	20	400	2	4		20	8000	2		11	110	12100	11	121		110	1331000	11	1331
12	21	441	12	144		21	9261	12	1728	12	111	12321	111	12321		111	1367631	111	1367631
13	22	484	22	484		22	10648	22	10648	13	112	12544	211	44521		112	1404928	211	9393931
14	23	529	32	1024		23	12167	32	32768	14	113	12769	311	96721		113	1442897	311	30080231
15	24	576	42	1764		24	13824	42	74088	15	114	12996	411	168921		114	1481544	411	69426531
16	25	625	52	2704		25	15625	52	140608	16	115	13225	511	261121		115	1520875	511	1,33E+08
17	26	676	62	3844		26	17576	62	238328	17	116	13456	611	373321		116	1560896	611	2,28E+08
18	27	729	72	5184		27	19683	72	373248	18	117	13689	711	505521		117	1601613	711	3,59E+08
19	28	784	82	6724		28	21952	82	551368	19	118	13924	811	657721		118	1643032	811	5,33E+08
20	29	841	92	8464		29	24389	92	778688	20	119	14161	911	829921		119	1685159	911	7,56E+08
21	30	900	3	9		30	27000	3	27	21	120	14400	21	441		120	1728000	21	9261
22	31	961	13	169		31	29791	13	2197	22	121	14641	121	14641		121	1771561	121	1771561
23	32	1024	23	529		32	32768	23	12167	23	122	14884	221	48841		122	1815848	221	10793861
24	33	1089	33	1089		33	35937	33	35937	24	123	15129	321	103041		123	1860867	321	33076161
25	34	1156	43	1849		34	39304	43	79507	25	124	15376	421	177241		124	1906624	421	74618461
26	35	1225	53	2809		35	42875	53	148877	26	125	15625	521	271441		125	1953125	521	1,41E+08
27	36	1296	63	3969		36	46656	63	250047	27	126	15876	621	385641		126	2000376	621	2,39E+08
28	37	1369	73	5329		37	50653	73	389017	28	127	16129	721	519841		127	2048383	721	3,75E+08
29	38	1444	83	6889		38	54872	83	571787	29									
30	39	1521	93	8649		39	59319	93	804357	30									
31	40	1600	4	16		40	64000	4	64	31									
32	41	1681	14	196		41	68921	14	2744	32									
33	42	1764	24	576		42	74088	24	13824	33									
34	43	1849	34	1156		43	79507	34	39304	34									
35	44	1936	44	1936		44	85184	44	85184	35									
36	45	2025	54	2916		45	91125	54	157464	36									

Slika 11: Preglednica dvomestnih in trimesnih kubičnih palindromov.

Število 120 je torej neke vrste kvadratni palindrom, medtem ko število 140 ni.

$$\begin{aligned} 140^2 &= 19600 \\ 41^2 &= 1681 \end{aligned} \quad (11)$$

Ko smo generirali kvadratne palindrome, smo opazili, da je kar nekaj takšnih kvadratnih palindromov. Pri dvomestnih številih: 10, 20 in 30.

Pri trimestnih številih: 100, 110, 120, 130, 200, 210, 220, 300, 310.

Pri štirimestnih številih so takšni primeri: 1000, 1010, 1020, 1030, 1100, 1110, 1120, 1130, 1200, 1210, 1220, 1300, 2000, 2010, 2020, 2100, 2110, 2120, 2200, 2210, 3000, 3010, 3100, 3110.

Kljub temu da lahko te kvadratne palindrome obravnavamo kot kvadratne palindrome z enakim številom mest, zanje ne veljajo vsa pravila in omejitve. Tako lahko imajo takšni kvadratni palindromi za srednjo števk 3. Ta omejitev zanje ne drži, ker je pogoj za ustreznost te omejitve, da sta prva in zadnja številka različni od 0, kar zagotavlja, da je $2a_n a_0$ enako 1 ali več. V tem primeru to ni zagotovljeno, torej lahko imajo takšni palindromi za srednjo števk 3.

6.1 Možne razširitve

6.1.1 Kubični palindromi

Podobno, kot smo iskali pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, bi lahko iskali pogoje in lastnosti kubičnih palindromov.

Opazovali bi jih lahko s pomočjo Microsoft Excela, saj je postopek popolnoma enak, samo da namesto A^2 uporabimo A^3 . Rezultati tega so prikazani na Sliki 11.

Ko opazujemo kubične palindrome, opazimo, da so sestavljeni samo iz števk 0, 1 in 2.

6.1.2 Vsota členov pri isti potenci manjša od 10

Kljub temu da smo v nalogi točno določili pogoje, kdaj je neko število kvadratni palindrom, ni lahko ugotoviti, ali vsota členov pri isti potenci ni večja oziroma enaka 10.

Sicer smo odkrili, da se z višanjem števila mest viša tudi število členov pri isti potenci, vendar je težko določiti, katere številke sestavljajo te člene in kdaj se jih nabere toliko, da brez manjših števk pride do prehoda. Če bi uspeli odkriti še to, bi lahko točno določili, na katera mesta lahko postavimo katera števila in kolikokrat lahko uporabimo katero od števil.

Zaključek

Definirali in raziskali smo dokaj neraziskano področje, kvadratne palindrome. Odkrili smo ključne pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, in sicer:

- 1) pri kvadriranju števila ne sme priti do prenosa enote,
- 2) sestavljen je samo iz števk 0, 1, 2 in 3.

Ko smo dokazali, da ne sme prihajati do prenosa enote, smo lahko iz tega dobili dva dodatna pogoja:

- 1) številki 2 in 3 ne smeta biti hkrati v istem številu, da je le-to še kvadratni palindrom,
- 2) v številu je lahko samo ena številka enaka 3.

Poleg tega smo opazili, da se število kvadratnih palindromov večja z večanjem števila mest.

Priloga

1. Excelova datoteka: Kvadratni palindromi.xlsx.

Objavljeno na <https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Viri in literatura

Vreš, K. (2023). *Kvadratni palindromi*. Gimnazija Ravne na Koroškem. Dostopno na naslovu: https://zbirke.zotks.si/2022/resources/SS_matem_1137.pdf.