Dr. Fr. Ritter von Močnik

Die Geometrische Formenlehre in der Volksschule

Dritte Auflage

40 kr.

40r / 10r

Die

Geometrische Formenlehre

in der

Volksschule.

Eine Anleitung für Lehrer

zur Ertheilung des geometrischen Unterrichtes.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Dritte Auflage.

Preis 30 Kreuzer.

Prag 1880.
Verlag von F. Tempsky.

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Inhalt.

Einleitung. Seite 3—7.

Erster Theil.

Betrachtung der Körper und der an ihnen vorkommenden Raumgebilde.

I. Der Würfel. Seite 8—21.
II. Das Prisma. Seite 22—33.
III. Das Tetraeder. Seite 34—39.
IV. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf. Seite 40—47.
V. Der Cylinder. Seite 48—56.
VI. Der Kegel und der Kegelstumpf. Seite 57—65.
VII. Die Kugel. Seite 65—72.
VIII. Wiederholende Zusammenstellung des gewonnenen Lehrstoffes. Seite 72.

Zweiter Theil.

Berechnung der Flächen und Körper.

Allgemeine Bemerkungen. Seite 75.
Flächenberechnungen. Seite 76—88.
II. Körperberechnungen. Seite 89—102.

Einleitung.

§. 1. Ziel der geometrischen Formenlehre in der Volksschule.

Die geometrische Formenlehre hat in der Volksschule die Aufgabe, den Schülern eine klare Kenntnis der wichtigsten Raumgebilde und ihrer Eigenschaften, und eine sicher bewusste Anwendung der letzteren auf die Verhältnisse des gewöhnlichen Lebens zu vermitteln. Ihr Zweck ist hier nicht, für eine spätere wissenschaftliche Behandlung der Geometrie die Vorbereitung zu gewähren, sondern dasjenige geometrische Wissen und Können, welches für einfache Lebensverhältnisse genügt, als ein selbständiges Ganze zum Abschluss zu bringen.

Aller Volksschulunterricht muss geistig bildend und praktisch verwendbar sein. Das gilt auch von der geometrischen Formenlehre. Mit der Erkenntnis der geometrischen Wahrheiten muss auch die praktische Gestaltung derselben Hand in Hand gehen; die Schüler müssen befähigt werden, die klar erkannten Raumformen auch durch die Zeichnung wiederzugeben und aus den Eigenschaften der betrachteten Figuren und Körper auch deren Größe zu bestimmen.

Soll daher die geometrische Formenlehre als ein Bestandtheil des erziehenden Unterrichtes in der Volksschule ihren Zweck erfüllen, so müssen dabei folgende drei Hauptmomente ins Auge gefasst werden:

1. Herbeischaffung klarer Vorstellungen der Raumgebilde und Betrachtung ihrer wichtigsten Eigenschaften;
2. Zeichnen einfacher geometrischer Formen;
3. Vergleichung der Raumgebilde in Bezug auf ihre Größe, d. i. Messen und Berechnen derselben.

In welchem Umfange dieser dreifachen Anforderung Rechnung getragen werden soll, hängt von der Verschiedenheit der Verhältnisse der einzelnen Volksschulen und von der für diesen Gegenstand zu Gebote stehenden Zeit ab. An Volksschulen, für welche der geometrischen Formenlehre ein zwei- oder dreijähriger Cursus zugemessen ist, werden insbesondere die Eigenschaften und Gesetze der Raumgebilde ausführlicher betrachtet und unter Anwendung derselben auch ausgedehntere Übungen im Zeichnen vorgenommen werden können; an ein- und zweiclassigen Volksschulen wird hierin wie auch in den Rechenaufgaben zur Größenbestimmung der Flächen und Körper eine weise Beschränkung eintreten müssen. Der Umfang des geometrischen Unterrichtes kann weiter oder enger bemessen werden; das Ziel bleibt überall dasselbe.

Aus dem Angeführten ist nun auch die wichtige Stellung ersichtlich, welche die geometrische Formenlehre unter den Lehrgegenständen der Volksschule in formaler und materieller Beziehung einnimmt. Indem sie den Schüler an ein verständiges Anschauen der Dinge gewöhnt, in ihm den Formensinn weckt, die Denkkraft schärft und dadurch die geistige Thätigkeit fördert, wirkt sie im Dienste der formalen Bildung. Sie hat aber auch ihren materialen Wert, da sie durch methodisch geordnete Übungen im Zeichnen der durch Anschauung aufgefassten Gebilde, im Messen und Berechnen derselben für das praktische Leben grundlegend vorbereitet.

§. 2. Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes.

Die geometrische Formenlehre hat vor allem einen genügenden Vorrath klarer Raumvorstellungen herbeizuschaffen. Dass dieses nur auf dem Wege der sinnlichen Anschauung geschehen kann, ist ein allgemein anerkannter Grundsatz; nicht so einig ist man über den dabei zu befolgenden Lehrgang. Mit Rücksicht auf den Eintheilungsgrund des zu behandelnden Lehrstoffes lassen sich die verschiedenen für diesen Gegenstand in Anwendung stehenden Lehrgänge füglich auf die zwei folgenden zurückführen.

Dem einen liegt die Eintheilung der Geometrie in die Planimetrie und Stereometrie zu Grunde. Nachdem aus der Betrachtung der geometrischen und der in der Wirklichkeit vorkommenden Körper die Grundvorstellungen des Körpers, der Fläche, der Linie und des Punktes entwickelt wurden, werden in naturgemäß fortschreitender Reihenfolge und in anschaulicher Weise zuerst die ebenen, dann die körperlichen Raumgebilde nach ihren verschiedenen Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen vorgeführt. Sachlich Zusammengehöriges wird auch beim Unterrichte zusammengehalten.

Bei dem andern Lehrgange gruppiert sich der ganze Unterricht um die geometrischen Körper, welche in entsprechender Auswahl nach und nach zur Anschauung gebracht werden. An jedem Körper werden nach der Ordnung die Flächen, Kantenlinien, Eckpunkte, Winkel und Figuren nach ihrer Zahl, Lage und bezüglich nach ihrer Gestalt und Größe betrachtet. Dehnt man diese Betrachtung auch auf die Eigenschaften der einzelnen Gebilde aus, so sind es solche, die zu dem betrachteten Körper in der nächsten Beziehung stehen.

Bei dem einen wie bei dem andern dieser Lehrgänge schließt sich an die Formenlehre das Zeichnen und die Größenbestimmung der Raumgebilde an.

Mag auch jener erstere Lehrgang erfolgreicher zum Ziele führen, wenn die geometrische Formenlehre, wie an den unteren Classen der Mittelschule, als Vorbereitung auf den wissenschaftlichen Unterricht in der Geometrie dienen soll; in der Volksschule, wo es sich um einen selbständigen Abschluss dieses Gegenstandes handelt, muss dem zweiten Lehrgange unbedingt der Vorzug eingeräumt werden, da er den geometrischen Lehrstoff, soweit ihn der Zweck der Volksschule verlangt, auf dem einfachsten und kürzesten Wege zuführt.

Auch wir wählen diesen zweiten Lehrgang, dessen vorzüglichste Vertreter Gasser, Zizmann, Lorey, Kaseliz, Schramm sind. Ihre wertvollen Schriften über den geometrischen Anschauungsunterricht sind auch bei der Abfassung des vorliegenden Leitfadens benützt worden.

Was nun zunächst die Wahl der zu betrachtenden geometrischen Körper betrifft, so muss darauf gesehen werden, dass die gewählten Körper möglichst viel Stoff in den möglichst vielen Beziehungen bieten. Wir betrachten von den eckigen Körpern den Würfel, das dreiseitige und sechsseitige Prisma, das Tetraeder, die vierseitige Pyramide und den dreiseitigen Pyramidenstumpf, von den runden Körpern den Cylinder, Kegel, Kegelstumpf und die Kugel.

Die Betrachtung der geometrischen Körper, so zahlreich und zweckmäßig sie auch gewählt sein mögen, vermittelt übrigens immer nur die Vorstellungen gewisser Arten von Raumgebilden, während dabei andere geometrische Formen, die an den Gegenständen der Wirklichkeit vorkommen und darum im Unterrichte gleichfalls ihre Berechtigung haben, gar nicht zur Anschauung gelangen. Auch gibt es mehrere Eigenschaften der Raumgebilde, die sich aus der Betrachtung der geometrischen Körper nicht unmittelbar ergeben, deren Kenntnis aber für die Übungen im Zeichnen und für die verständige Berechnung der Flächen und Körper unentbehrlich ist. Soll daher die geometrische Formenlehre auch den berechtigten Forderungen des praktischen Lebens genügen, so muss sich an die Unterrichtsergebnisse der unmittelbaren Betrachtung der geometrischen Körper noch eine Erweiterung des dabei gewonnenen Lehrstoffes anschließen, welche geeignet ist, die eben angedeuteten Lücken auszufüllen. Dabei muss man jedoch Maß halten und sich auf das unbedingt Nothwendige beschränken.

Einige nehmen diese Ergänzungslehren erst dann vor, wenn bereits alle zur Betrachtung gewählten Körper behandelt worden sind. Zweckmäßiger erscheint es, dieselben an den geeigneten Orten sofort auf die Betrachtung des jedesmaligen Körpers folgen zu lassen. Nicht nur erhalten bei dieser Anordnung die durch die unmittelbare Betrachtung eines Körpers erlangten Vorstellungen einen höheren Grad von Klarheit, weil zu den ersten Anschauungen neue und genauere hinzutreten; es wird dadurch auch in den Unterricht, welcher sich bei einer ununterbrochen fortgeführten einförmigen Betrachtung sämmtlicher Körper ermüdend gestalten würde, eine geistanregende Abwechslung gebracht.

Übungen im Zeichnen begleiten die ganze Formenlehre. Den Schluss bildet die Berechnung der Flächen und Körper.

§. 3. Didaktische Bemerkungen und Hilfsmittel.

Die Grundlage des Unterrichtes bildet die Betrachtung der Körper. Der zu betrachtende Körper wird gehörig aufgestellt. Dann muss der Lehrer durch geeignete Fragen den Schüler veranlassen, den Körper in einer bestimmten Ordnung genau anzuschauen und sich über das, was er angeschaut hat, klar und bündig auszusprechen. Die aus der Betrachtung des Körpers gewonnenen Vorstellungen werden sodann zusammengefasst und nach Bedürfnis in gleichfalls elementar-anschaulicher Weise erweitert. Die vorliegende Anleitung gibt die bezüglichen Unterrichtsergebnisse in bündigen Sätzen und in naturgemäß sich abwickelnder Reihenfolge; besondere Bemerkungen werden nur dort beigefügt, wo der Lehrgang oder das Lehrverfahren eine nähere Erläuterung erheischt.

Nachdem die Schüler aus der Betrachtung eines Körpers von gewissen Raumformen klare Vorstellungen erlangt haben, werden sie angeleitet, diese Formen auch durch die Zeichnung darzustellen. Das Zeichnen in der Volksschule ist Freihandzeichnen, welches selbstverständlich den Gebrauch des Zirkels und Lineals ausschließt. Die darzustellenden Formen werden zuerst von dem Lehrer auf die Schultafel, und dann von den Schülern anfänglich mittelst des Griffels auf die Schiefer-tafel, später mit Bleistift auf das Papier gezeichnet. Insbesondere sind die Schüler auch im Zeichnen des Netzes des betrachteten Körpers zu üben und zu veranlassen, die Zeichnung zu Hause auf Pappendeckel auszuführen und durch gehöriges Ausschneiden und Zusammenkleben sich selbst ein Modell des Körpers anzufertigen.

Der in dieser Anleitung am Schlusse jedes kleineren Abschnittes angeführte Übungsstoff enthält nebst Fragen und Aufgaben zur Befestigung und Erweiterung des Lehrstoffes auch die Übungsaufgaben für das Zeichnen, die sich an jenen Abschnitt anzuschließen haben.

Über das Lehrverfahren bei der Berechnung der Flächen und Körper enthält der zweite Theil dieser Anleitung ausführlichere Bemerkungen.

An Lehrmitteln für den geometrischen Unterricht sollen in jeder Schule vorhanden sein:

a) Zur Veranschaulichung der Raumvorstellungen:
Die Holzmodelle der zur Betrachtung gewählten Körper von einer Größe, dass sie bequem von jedem Schüler gesehen werden können. Von diesen Modellen sollen das dreiseitige Prisma in drei Pyramiden, die Pyramide, der Cylinder, der Kegel und die Kugel aber nach den daran zu versinnlichenden Schnitten derart zerlegbar sein, dass die Theile durch hölzerne Stifte befestiget werden können.

b) Zur Veranschaulichung der Maße:
1. Ein Meterstab mit der Eintheilung in Decimeter und Centimeter.
2. Ein Decimeter-Maßstab mit der Eintheilung in Centimeter und Millimeter.
3. Bandmaße aus Metallblech von 2, 5 oder 10 Meter Länge.
4. Ein Quadratmeter auf Pappendeckel mit der Eintheilung in Quadratdecimeter; ebenso ein Quadratdecimeter mit der Eintheilung in Quadratcentimeter und ein Quadratcentimeter mit der Eintheilung in Quadratmillimeter.
5. Ein zerlegbares Cubikdecimeter von Holz, bestehend aus 9 Platten von 1 *dm.* Länge, 1 *dm.* Breite und 1 *cm.* Dicke, aus 9 quadratischen Säulen von 1 *dm.* Länge, 1 *cm.* Breite und 1 *cm.* Dicke, endlich aus 10 Cubikcentimetern.
6. Ein hohles, oben offenes Cubikdecimeter von Blech.
7. Ein cylindrisches Litergefäß.

Erster Theil.

Betrachtung der Körper und der an ihnen vorkommenden Raumgebilde.

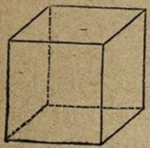
I. Der Würfel.

§. 4. Betrachtung des Würfels.

Der Lehrer stellt einen hinlänglich großen Würfel aus Holz auf dem Tische oder einem Gestelle so auf, dass zwei Flächen eine wagrechte Lage haben und dass eine Fläche den Schülern zugewendet ist. Aus der Betrachtung des so gestellten Würfels werden mit den Schülern durch geeignete Fragen nach einander die in folgenden Sätzen ausgesprochenen geometrischen Wahrheiten anschaulich entwickelt.

1.

Fig. 1.



Der Würfel (Fig. 1) nimmt einen Raum ein. Dieser Raum ist von allen Seiten begrenzt. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Der Würfel ist ein Körper.

Der Würfel ist nach drei Richtungen ausgedehnt: von rechts nach links, von vorn nach hinten, von unten nach oben; er ist lang, breit und hoch.

Jeder Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke).

2.

Der Würfel wird von sechs Flächen begrenzt. Diese sind: die obere, untere, vordere, hintere, rechte und linke Fläche. Weil der Würfel sechs Flächen hat, heißt er auch Sechsflächner oder Hexaeder.

Alle Flächen des Würfels sind ebene Flächen. Eine ebene Fläche heißt auch bloß Ebene.

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Richtungen ausgedehnt; die untere Fläche von rechts nach links und von vorn nach hinten, u. s. w. Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen: Länge und Breite.

Die untere Fläche, auf welcher der Würfel steht, sowie auch die obere Fläche heißen Grundflächen; die übrigen vier Flächen heißen Seitenflächen.

Jede Seitenfläche des Würfels ist lothrecht; jede Grundfläche ist wagrecht.

Die beiden Grundflächen haben gleiche Lage, sie sind parallel; von den Seitenflächen sind die vordere und hintere, ebenso die rechte und linke zu einander parallel. Am Würfel gibt es also drei Paare paralleler Flächen.

Am Würfel stehen je zwei Flächen, welche zusammentreffen, senkrecht auf einander; die vordere Fläche steht senkrecht auf der oberen, unteren, rechten und linken Fläche u. s. w.

Alle Grenzflächen des Würfels zusammen bilden dessen Oberfläche. Man nennt sie eine gebrochene Fläche.

3.

Jede Fläche am Würfel wird von vier Kanten oder Kantenlinien begrenzt. Eine Kantenlinie entsteht da, wo zwei Flächen zusammentreffen.

Am ganzen Würfel kommen 12 Kanten vor: die vordere obere, die vordere untere, die vordere rechte, u. s. w. Der Würfel hat also dreimal so viel Kanten als Seitenflächen.

Alle Kanten des Würfels sind gerade Linien. Eine gerade Linie heißt auch bloß Gerade.

Jede Kante des Würfels ist nur nach einer Richtung ausgedehnt; die vordere obere von rechts nach links, u. s. w. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge.

Alle Kanten des Würfels haben gleiche Länge.

Die 8 Kanten an den Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen 4 Kanten heißen Seitenkanten.

Jede Seitenkante des Würfels ist lothrecht; jede Grundkante ist wagrecht. Am Würfel gibt es also 4 lothrechte und 8 wagrechte Kanten.

Die Seitenkanten haben alle gleiche Richtung, von oben nach unten oder von unten nach oben; sie sind parallel. Von den Grundkanten haben die vordere obere, die vordere untere, die hintere obere und die hintere untere die Richtung von rechts nach links oder von links nach rechts; sie sind also auch zu einander parallel. Die übrigen vier Grundkanten haben die Richtung von vorn nach hinten oder von hinten nach vorn; sie sind auch parallel. Am Würfel gibt es also drei Gruppen von je vier Kanten, die zu einander parallel sind.

Jede Kante des Würfels ist parallel zu der Fläche, die sie nicht trifft und in der sie nicht liegt; die vordere rechte Kante ist parallel zu der hinteren und der linken Fläche, u. s. w.

Am Würfel stehen je zwei Kanten, welche zusammentreffen, senkrecht auf einander; die vordere rechte Kante steht senkrecht auf der vorderen oberen, der rechten oberen, der vorderen unteren und der rechten unteren Kante, u. s. w.

Jede Kante des Würfels steht auch senkrecht auf der Fläche, welche sie trifft; die vordere rechte Kante steht senkrecht auf der oberen und auf der unteren Fläche, u. s. w.

Eine nach allen Seiten begrenzte Ebene heißt Figur. Die Grenzlinien einer Figur heißen Seiten derselben. Jede Fläche des Würfels ist eine vierseitige Figur. Weil die Seiten gerade Linien sind, heißt die Figur geradlinig; weil alle Seiten gleich sind, heißt sie gleichseitig.

Alle Grenzlinien einer Figur zusammen bilden deren Umfang. Der Umfang einer Fläche des Würfels ist eine gebrochene Linie.

4.

Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei Eckpunkten begrenzt. Ein Eckpunkt entsteht da, wo drei Flächen zusammentreffen.

Der Würfel hat 8 Eckpunkte. Diese sind: Der vordere obere rechte, der vordere obere linke, der vordere untere rechte, u. s. w. Der Würfel ist ein eckiger Körper.

Die Eckpunkte des Würfels sind nach keiner Richtung ausgedehnt; sie sind weder lang, noch breit, noch dick. Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Eine Figur, welche vier Seiten hat, hat auch vier Eckpunkte; eine vierseitige Figur heißt deshalb auch ein Viereck. Jede Fläche am Würfel ist ein gleichseitiges Viereck.

5.

Zwei Kanten, welche sich treffen, bilden einen Winkel.

Jede Fläche des Würfels hat 4 Winkel. Am ganzen Würfel sind 24 Winkel.

Die Kanten, welche einen Winkel bilden, heißen die Schenkel, und der Eckpunkt, in dem sie zusammentreffen, der Scheitel des Winkels.

Ein Winkel, dessen Schenkel auf einander senkrecht stehen, heißt ein rechter. Am Würfel kommen lauter rechte Winkel vor.

Ein Viereck, dessen Winkel rechte sind, heißt rechtwinklig. Ein Viereck, das gleichseitig und rechtwinklig ist, heißt ein regelmäßiges Viereck oder ein Quadrat. Am Würfel ist jede Fläche ein Quadrat.

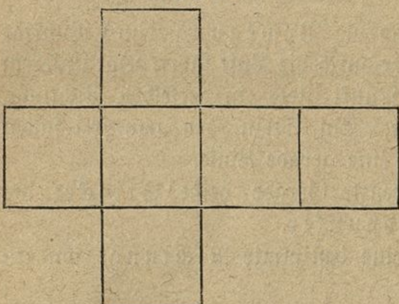
Man kann sich ein größeres und ein kleineres Quadrat vorstellen; beide haben dieselbe Gestalt, aber verschiedene Größe. Die Quadrate am Würfel haben nicht nur gleiche Gestalt, sondern auch gleiche Größe; legt man sie auf einander, so decken sie sich; sie sind congruent.

Ein Körper, welcher von lauter congruenten und regelmäßigen Figuren begrenzt wird, heißt regelmäßig. Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper.

Weil die obere Grundfläche des Würfels mit der unteren congruent ist, nennt man den Würfel auch Säule, und zwar, weil er ein eckiger Körper ist, Ecksäule oder Prisma. Da die Seitenkanten des Würfels auf den Grundflächen senkrecht sind, sagt man: der Würfel ist ein senkrechtes Prisma.

6.

Fig. 2.



Werden die vier Seitenflächen des Würfels neben einander in eine Ebene ausgebreitet und dann über und unter einer Seitenfläche auch die Grundflächen in dieselbe Ebene gebracht, so erscheint die Oberfläche des Würfels als eine einzige zusammenhängende ebene Fläche, welche das Netz des Würfels heißt (Fig. 2).

Die Versinnlichung geschieht mittelst eines aus Pappe gefertigten Netzes, mit dem man den Würfel umschließt.

7.

Dreht man den Würfel um eine Grundkante so, dass diese allein in der wagrechten Fläche liegt, so bleiben diese Grundkante und die mit ihr parallelen Kanten noch immer wagrecht; die übrigen Kanten aber sind in der neuen Lage weder wagrecht noch auch lothrecht, sie sind schräge. Die Flächen sind sämmtlich schräge. In der Lage der Flächen, Kanten und Eckpunkte gegen einander wird nichts geändert.

Stellt man einen Würfel so auf, dass nur ein Eckpunkt in der wagrechten Fläche liegt, so gibt es weder lothrechte noch wagrechte Kanten und Flächen; alle Kanten und alle Flächen sind schräge.

Bei der Betrachtung der Würfels muss längere Zeit verweilt werden, weil hier die geometrischen Formen zum erstenmale auftreten. Der Lehrer muss sich durch wiederholtes Durchfragen die Überzeugung verschafft haben, dass die voranstehenden Unterrichtsergebnisse volles geistiges Eigenthum der Schüler geworden sind. Dann erst wird er daran gehen, den aus der unmittelbaren Betrachtung des Würfels gewonnenen Lehrstoff gleichfalls in anschaulicher Weise theils nach Erfordernis zu erweitern, theils bezüglich einzelner Formelemente genauer zu erläutern, und damit die grundlegenden Übungen im Zeichnen zu verbinden.

§. 5. Gerade Linien.

1.

Durch jeden Eckpunkt des Würfels gehen 3 Kanten. Durch einen einzigen Punkt ist also eine Kante nicht bestimmt. Durch zwei Eckpunkte geht nur eine Kante. Durch zwei Punkte ist daher eine gerade Linie vollkommen bestimmt.

Eine Linie kann man sich durch die Bewegung eines Punktes entstanden denken. Ein Feuerfunke, der durch die Luft fährt, zeigt unserem Blick eine Linie. Bewegt sich ein Punkt stets in derselben Richtung, so entsteht dadurch eine gerade Linie. Ein Stein, den man frei fallen läſst, beschreibt während des Falles eine gerade Linie.

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpunkte heißen ihre Endpunkte.

Eine Strecke hat nicht nur eine bestimmte Richtung, sondern auch eine bestimmte Länge.

Die Strecke ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten. Ihre Länge heißt die Entfernung oder der Abstand der beiden Punkte.

Eine Linie, welche aus mehreren Geraden von verschiedener Richtung besteht, heißt eine gebrochene Linie.

Übungsstoff.

1. Eine Kante des Würfels geht durch den vorderen unteren rechten Eckpunkt; welche Kante kann es sein?

2. Eine Kante geht durch den hinteren oberen rechten und den hinteren unteren rechten Eckpunkt; welche Kante ist es?
3. Welche Eckpunkte haben eine Kante gemeinschaftlich?
4. Welche Eckpunkte haben keine Kante gemeinschaftlich?
5. Eine Kante beginnt am vorderen oberen linken Eckpunkte und hat die Richtung von vorn nach hinten; a) welche Kante ist es, b) wo endet sie?
6. Zeichne zwei Punkte und ziehe zwischen ihnen eine Gerade.
7. Zeichne drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, und verbinde je zwei durch eine Gerade. Wie viele Gerade erhältst du?
8. Wie viele Gerade sind überhaupt zwischen einer bestimmten Anzahl von Punkten, von denen je drei nicht in einer geraden Linie liegen, möglich?

Um das Gesetz, auf welches die Beantwortung dieser Frage führt, anschaulich abzuleiten, kann der Lehrer so verfahren:

Zeichne 2 Punkte und verbinde sie durch eine Gerade. Zwischen 2 Punkten ist nur 1 Gerade möglich.

Zeichne einen 3. Punkt. Zwischen den ersten 2 Punkten ist 1 Gerade möglich; von jedem dieser Punkte kann zu dem 3. Punkte noch eine Gerade gezogen werden. Zwischen 3 Punkten sind also $1 + 2 = 3$ Gerade möglich.

Zeichne noch einen 4. Punkt. Zuerst gibt es $1 + 2 = 3$ Gerade zwischen den früheren 3 Punkten, und dann von jedem derselben noch eine Gerade an den 4. Punkt; zusammen $1 + 2 + 3 = 6$ Gerade.

Fügt man einen 5. Punkt dazu, so kann man von jedem der früheren 4 Punkte noch eine Gerade zu dem neu hinzugekommenen 5. Punkte ziehen. Zwischen 5 Punkten sind also $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Gerade möglich.

Eben so findet man, daſs
zwischen 6 Punkten $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Gerade,
„ 7 „ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ Gerade, u. s. w.
gezogen werden können.

Gesetz: Um die Anzahl der Geraden zwischen einer bestimmten Anzahl von Punkten, von denen je drei nicht in einer geraden Linie liegen, zu finden, addiert man die Zahlenreihe von 1 bis zu der Zahl, welche um 1 kleiner ist, als die Anzahl der Punkte.

Läſst man die Schüler noch beachten, daſs in einer solchen Zahlenreihe, z. B.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

die erste und letzte Zahl $(1 + 11)$, die zweite und vorletzte Zahl $(2 + 10)$, die dritte und drittletzte Zahl $(3 + 9)$, überhaupt je zwei vom Anfange und Ende gleichweit abstehende Zahlen, dieselbe Summe 12 geben, so werden sie einsehen, daſs man von jener Zahlenreihe die Addition kürzer verrichten kann, wenn man nur die erste und die letzte Zahl addiert und ihre Summe mit der halben Anzahl der Zahlen multipliciert.

z. B. Zwischen 16 Punkten sind so viele Gerade möglich, als die Summe der Zahlenreihe von 1 bis 15 beträgt, oder $16 \times {}^{15}/_2 = 120$ Gerade.

2.

Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilothes, d. i. eines freihängenden, durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt lothrecht oder vertical. Wenn ein Körper frei fällt, so fällt er in lothrechter Richtung.

Welche Kanten des Würfels sind lothrecht?

Auf dem Papier oder der Tafel wird die lothrechte Linie durch eine von oben nach unten oder von unten nach oben gezogene Gerade dargestellt.

Eine Gerade, welche die Richtung eines an beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens oder eines am ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens hat, heißt wagrecht oder horizontal. Welche Kanten des Würfels sind wagrecht?

Eine wagrechte Linie wird auf dem Papier oder der Tafel durch eine von links nach rechts oder von rechts nach links gezogene Gerade dargestellt.

Eine Gerade, welche weder lothrecht noch wagrecht ist, heißt schräge. Bei welcher Stellung des Würfels sind seine Kanten schräge?

Übungsstoff.

1. Gib an Gegenständen im Lehrzimmer gerade Linien an, die a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge sind.
2. Zeichne einen Punkt, gerade darunter einen zweiten Punkt, und ziehe durch beide Punkte eine Gerade. Welche Richtung stellt diese Gerade vor? Bringe die Schreibtafel in eine solche Lage, dass die gezeichnete Gerade wirklich lothrecht wird.
3. Zeichne einen Punkt, rechts daneben einen zweiten Punkt, und verbinde beide durch eine Gerade. Welche Richtung stellt diese Gerade vor?
4. Zeichne eine schräge Gerade a) von links unten nach rechts oben, b) von links oben nach rechts unten.
5. Ziehe auf deiner Schreibtafel eine beliebige Gerade und bringe dann die Tafel in eine solche Lage, dass die Gerade a) eine lothrechte, b) eine wagrechte, c) eine schräge Richtung hat.
6. Ziehe drei Gerade, welche a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge sind.
7. Wie viele lothrechte Linien sind durch einen Punkt möglich?
8. Wie viele wagrechte Linien sind durch einen Punkt möglich?

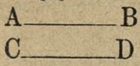
3.

Die vordere rechte und die vordere linke Kante des Würfels liegen in *derselben Ebene* und haben auch *gleiche Richtung*. Die vordere rechte und die vordere obere Kante liegen auch in *derselben Ebene*, sie haben aber *ungleiche Richtung*. Durch die vordere rechte und die hintere obere Kante kann man sich keine Ebene vorstellen; sie liegen in *verschiedenen Ebenen*.

In Beziehung auf die *Lage zweier Geraden gegen einander* sind also drei Fälle möglich.

a) Zwei Gerade liegen in *derselben Ebene* und haben *gleiche Richtung*, wie AB und CD (Fig. 3); dann heißen sie *parallel*.

Fig. 3.

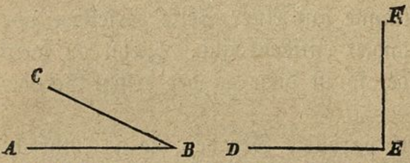


Zwei parallele Gerade sind überall gleichweit von einander entfernt; sie können daher, wenn man sie auch noch so weit verlängern würde, nie zusammentreffen.

Welche Kanten des Würfels sind zu einander parallel?

b) Zwei Gerade liegen in *derselben Ebene* und haben *ungleiche Richtung*, wie AB und BC, oder DE und EF. (Fig. 4.)

Fig. 4.



Zwei solche Gerade entfernen sich auf der einen Seite und nähern sich auf der andern Seite; sie müssen daher hinreichend verlängert in einem Punkte zusammentreffen. Man sagt: die zwei Geraden *schneiden sich*, und nennt den Punkt, in welchem sie zusammentreffen, ihren *Durchschnittspunkt*.

Haben zwei Gerade, welche sich schneiden, eine solche Lage gegen einander, dass, wenn man die eine in die lothrechte Richtung bringt, die andere wagrecht ist, wie DE und EF, so sagt man: sie stehen *senkrecht* auf einander, oder sie schneiden sich unter einem *rechten Winkel*. Welche Kanten des Würfels stehen senkrecht auf einander?

c) Zwei Gerade liegen in *verschieden Ebenen*; dann können sie weder parallel sein, noch sich schneiden, die eine geht über oder neben der andern vorbei. Man sagt in diesem Falle: die zwei Geraden *kreuzen sich*. Welche Kanten des Würfels kreuzen sich?

Versinnlichung der vorangeführten Lagen mittels zweier Stäbchen.

Übungsstoff.

1. Eine Kante des Würfels ist parallel zu der vorderen oberen und beginnt am hinteren unteren linken Eckpunkte; welche Kante ist es?
2. Welche Kanten haben einen Eckpunkt gemeinschaftlich?
3. Welche Kanten haben keinen Eckpunkt gemeinschaftlich?
4. In wie vielen Punkten können sich eine bestimmte Anzahl Gerader, von denen je zwei nicht parallel sind, schneiden?

Z. B. 6 Gerade können sich in $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ oder $6 \times {}^{5}/_{2} = 15$ Punkten schneiden.

Der unterrichtliche Vorgang zur anschaulichen Ableitung des Gesetzes stimmt mit dem §. 5, Absatz 1, Übungsstoff 8 angegebenen Lehrverfahren überein.

2 Gerade schneiden sich in 1 Punkte.

Kommt eine 3. Gerade dazu, so hat man den einen Durchschnittspunkt der früheren zwei Geraden; durch die dritte kann jede der beiden früheren noch einmal geschnitten werden. Es gibt also $1 + 2 = 3$ Durchschnittspunkte.

Jede neu hinzukommende Gerade kann jede der früheren Geraden einmal schneiden. Die 4. Gerade fügt also 3 Durchschnittspunkte dazu; u. s. w.

5. Gib an Gegenständen im Lehrzimmer gerade Linien an, welche a) parallel sind, b) sich schneiden, c) sich kreuzen.
6. Gib zwei parallele Gerade an, welche a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge sind.
7. Zeichne eine Gerade und bestimme auf einer Seite derselben zwei Punkte, welche von ihr gleichweit entfernt sind. Ziehst du durch die beiden Punkte eine Gerade, so ist diese zu der ersten Geraden parallel.
8. Zeichne auf gleiche Weise drei parallele Gerade, die a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge sind.
9. Was für ein Unterschied ist zwischen l o t h r e c h t und s e n k r e c h t?
10. Welche Richtung haben das Zünglein einer Schalenwage und der Wagebalken, wenn die Schalen a) gleich, b) ungleich belastet sind? Welche Lage gegeneinander haben Zünglein und Balken in jedem Falle?
11. Welche Richtung haben die Kanten des Würfels, welche a) auf einer lothrechten, b) auf einer wagrechten Kante senkrecht stehen?
12. Die vordere linke Kante des Würfels steht auf einer Kante senkrecht; welche kann es sein?
13. Wie viele Kanten schneidet jede Kante unter einem rechten Winkel?
14. Falte ein Blatt Papier zweimal so zusammen, daſs die Buglinien genau auf einander fallen. Dann erhältst du einen rechten Winkel.

15. Ziehe eine lothrechte Gerade, und von dem unteren Endpunkte eine wagrechte. Was entsteht dadurch?

4.

In Beziehung auf die Länge sind zwei Strecken entweder gleich oder ungleich.

Fig. 5.

A ———————— B

C ———————— D

Zwei Strecken sind gleich, wenn die Endpunkte der einen eben so weit von einander entfernt sind, als die Endpunkte der andern. Zwei gleiche Strecken, wie AB und CD (Fig. 5), können so auf einander gelegt werden, dass sie sich decken, d. i. dass ihre Endpunkte zusammenfallen. Am Würfel sind alle Kanten einander gleich.

Fig. 6.

A —————————— B

C ———————— D

Zwei Strecken, deren Endpunkte nicht gleiche Entfernungen von einander haben, heißen ungleich, und zwar ist diejenige, deren Endpunkte weiter von einander entfernt sind, die größere, die andere die kleinere.

Zwei ungleiche Strecken, wie AB und CD (Fig. 6), können einander nicht decken.

Übungsstoff.

1. Wie untersucht man, ob zwei gerade Linien gleich oder ungleich sind?
2. Ziehe a) zwei lothrechte, b) zwei wagrechte, c) zwei schräge und parallele Strecken, die einander gleich sind.
3. Ziehe in gleichen Entfernungen von einander fünf gleiche Strecken, die a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge und parallel sind.
4. Zeichne einen rechten Winkel, mache die Schenkel desselben gleich und ziehe auf dieselben durch die Endpunkte Senkrechte, welche sich schneiden. Welche Figur erhältst du dadurch?
5. Zeichne vier gleiche Quadrate so neben einander, dass je zwei eine gemeinschaftliche Seite haben, und überdies noch zwei Quadrate an den entgegengesetzten Seiten eines jener ersteren Quadrate. Die Zeichnung ist das Netz eines Würfels.
6. Fertige zu Hause dieselbe Zeichnung möglichst genau auf Pappendeckel an. Schneidest du dann diejenigen Seiten, welche zwei Quadraten gemeinschaftlich sind, zur Hälfte, und die übrigen ganz durch, so erhältst du durch gehöriges Umklappen der Netzflächen und durch Verkleben mit Papierstreifen und aufgelöstem Gummi den Würfel.

5.

Die Länge einer Strecke bestimmen, heißt dieselbe messen. Um eine Strecke zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Strecke als Einheit an und untersucht, wie oft sie in der zu messenden Strecke enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des neuen Längenmaßes ist das Meter (*m*). Das Meter wird in 10 Decimeter (*dm*), das Decimeter in 10 Centimeter (*cm*) und das Centimeter in 10 Millimeter (*mm*) eingetheilt. 1000 Meter sind ein Kilometer (*Km*) und 10000 Meter ein Myriameter (*Mm*).

Zum Messen der Strecken bedient man sich der Maßstäbe; dies sind Stäbe aus Holz oder Metall, auf welchen die Länge einer oder mehrerer Längeneinheiten nebst den Unterabtheilungen aufgetragen ist. Das Messen längerer Strecken geschieht mittelst der Bandmaße aus Metallblech oder der Meßkette.

Die metrischen Längenmaße werden hier an einem Meterstabe zur unmittelbaren Anschauung gebracht und dann sofort zur wirklichen Messung angewendet. Es werden gemessen: die Länge einer Schulbank; die Länge und Breite der Schultafel, einer Tischplatte; die Breite und Höhe der Thür, eines Fensters, einer Fensterscheibe; die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers.

Zur Übung des Augenmaßes lasse man die Längen, bevor ihre Messung vorgenommen wird, jedesmal früher mit dem Auge abschätzen.

Ein sehr wichtiges Glied in der Stufenleiter der Längenmaße ist das Decimeter, weil es die Grundlage des Hohl- und Gewichtsmaßes bildet. Um sich die Länge desselben durch öfteres Anschauen besser einzuprägen und um damit Messungen vorzunehmen, soll jeder Schüler mit einem Lineal versehen sein, auf welchem ein Decimeter mit der Theilung in Centimeter und der weiteren Untertheilung eines Centimeters in Millimeter aufgetragen ist. Der Lehrer leite die Schüler an, mittelst dieses Maßstabes und eines Papierstreifens a) auf der Schreibtafel gezogene Strecken zu messen, b) Strecken von gegebener Länge aufzutragen.

Hier werden die Schüler auch geübt, gegebene Strecken nach dem Augenmaße in gleiche Theile zu theilen.

Übungsstoff.

1. Zeichne mehrere ungleiche Strecken, gib durch Abschätzung ihre Länge in Centimetern und Millimetern an und prüfe sodann die Richtigkeit durch wirkliche Messung.
2. Ziehe eine Gerade und trage darauf 3*cm*, 2*cm* 4*mm*, 57*mm* auf.
3. Zeichne eine Strecke von 2*cm* 6*mm* und verlängere sie um 1*cm* 4*mm*.
4. Zeichne fünf a) lothrechte, b) wagrechte, c) schräge und parallele Strecken, deren jede 23*mm* lang ist.

5. Zeichne eine Strecke von 5*cm* 4*mm* und halbiere sie, d. i. theile sie in zwei gleiche Theile.
6. Zeichne eine beliebige Strecke und halbiere sie.

Bestimme in der Strecke einen Punkt so, dass er von den beiden Endpunkten der Strecke gleichweit entfernt ist.

7. Theile eine Strecke in 2 gleiche Theile und jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile. Wie viel gleiche Theile erhältst du?
8. Theile eine Strecke nach dem Augenmaße in 3, 5 gleiche Theile.
9. Theile eine Strecke in 6, 8, 10 gleiche Theile.
10. Trage die Länge eines Decimeters möglichst genau auf einen starken Bindfaden 10mal auf, binde nach jeder Länge eines Decimeters einen Knoten ein und miss mittelst dieses Metermaßes verschiedene Strecken im Freien, nachdem du ihre Länge früher nach dem Augenmaße abgeschätzt hast.

§. 6. Ebene Flächen.

1.

Durch jeden Eckpunkt des Würfels gehen drei Flächen. Durch zwei Eckpunkte oder die sie verbindende Kante gehen zwei Flächen. Durch einen einzigen oder durch zwei Punkte ist also eine Ebene nicht bestimmt. Durch drei Eckpunkte geht nur eine ebene Fläche. Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte ist daher eine Ebene vollkommen bestimmt.

Versinnlichung durch ein Blatt steifes Papier oder durch ein Brettchen, welches zuerst um einen Eckpunkt, dann um zwei Eckpunkte oder die sie verbindende Gerade gedreht wird, bis es endlich auch noch durch einen dritten, außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt geht und hiedurch eine bestimmte Stellung erhält.

Eine Ebene hat die Eigenschaft, dass jede Gerade, welche zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat, ganz in die Ebene hineinfällt. In einer Ebene kann man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen.

Übungsstoff.

1. Welche Flächen des Würfels haben den vorderen oberen linken Eckpunkt gemeinschaftlich?
2. Welche Flächen haben den vorderen oberen linken und den vorderen unteren linken Eckpunkt gemeinschaftlich?
3. Durch welche drei Eckpunkte geht die vordere Fläche?

4. Ist durch drei Punkte, welche in derselben Geraden liegen, eine Ebene bestimmt?
5. Gib an Gegenständen im Lehrzimmer ebene Flächen an und weise an ihnen die zwei Ausdehnungen nach.

2.

Eine Ebene heißt lothrecht oder vertical, wenn sie durch eine lothrechte Gerade geht. Welche Flächen des Würfels sind lothrecht?

Eine Ebene heißt wagrecht oder horizontal, wenn jede in ihr liegende Gerade wagrecht ist. Welche Flächen des Würfels sind wagrecht?

Eine Ebene, welche weder lothrecht noch wagrecht ist, heißt schräge. Bei welcher Stellung des Würfels sind seine Flächen schräge?

Übungsstoff.

1. Wie viele lothrechte Ebenen sind durch einen Punkt möglich?
2. Wie viele wagrechte Ebenen sind durch einen Punkt möglich?
3. Wie viele lothrechte Ebenen sind a) durch eine lothrechte, b) durch eine wagrechte Gerade möglich?
4. Wie viele wagrechte Ebenen sind durch eine wagrechte Gerade möglich?
5. Kann man a) durch eine lothrechte, b) durch eine schräge Gerade eine wagrechte Ebene legen?
6. Kann man durch eine lothrechte Gerade eine schräge Ebene legen?
7. Gib an Gegenständen im Lehrzimmer a) lothrechte, b) wagrechte, c) schräge Ebenen an.

3.

Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene liegt, kann gegen diese Ebene eine zweifache Lage haben.

a) Die Gerade ist von der Ebene überall gleich weit entfernt, so dass sie noch so weit verlängert mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammentrifft. Dann sagt man: die Gerade ist mit der Ebene parallel. Welche Kanten und Flächen des Würfels sind zu einander parallel?

b) Die Gerade hat von der Ebene nicht überall dieselbe Entfernung, sie entfernt sich von ihr auf der einen Seite und nähert sich ihr auf der andern Seite; sie muss daher hinreichend verlängert mit der Ebene in einem Punkte zusammentreffen. Man sagt: die Gerade schneidet die Ebene, und nennt den Punkt, in welchem sie zusammentreffen, den Fußpunkt der Geraden in der Ebene.

Hat eine Gerade gegen die Ebene, welche sie schneidet, eine solche Lage, dass, wenn man die Gerade in die lothrechte Richtung bringt, die Ebene wagrecht ist, so heißt die Gerade auf der Ebene senkrecht. Welche Kanten und Flächen des Würfels stehen senkrecht auf einander?

Dreht man einen rechten Winkel um den einen Schenkel herum, so beschreibt der zweite Schenkel während dieser Drehung eine Ebene, auf welcher der erste Schenkel senkrecht steht. Der zweite Schenkel stellt dabei nach und nach alle Geraden vor, welche in der Ebene durch den Fußpunkt des senkrechten Schenkels gehen. Wenn daher eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so ist sie senkrecht auf allen Geraden, welche in der Ebene durch den Fußpunkt der ersten Geraden gehen.

Übungsstoff.

1. Wie viele Kanten des Würfels sind zu jeder Fläche parallel?
2. Zu wie vielen Flächen ist jede Kante parallel?
3. Gib gerade Linien im Lehrzimmer an, welche a) zu einer Ebene parallel sind, b) eine Ebene schneiden.
4. Welche Richtung kann oder muss eine Gerade haben, die a) zu einer lothrechten, b) zu einer wagrechten, c) zu einer schrägen Ebene parallel ist?
5. Wie viele Kanten des Würfels sind auf jeder Fläche senkrecht?
6. Auf wie vielen Flächen steht jede Kante senkrecht?
7. Welche Lage gegen einander haben eine lothrechte Gerade und a) eine lothrechte, b) eine wagrechte, c) eine schräge Ebene?
8. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine wagrechte Gerade und a) eine lothrechte, b) eine wagrechte, c) eine schräge Ebene haben?
9. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine schräge Gerade und a) eine lothrechte, b) eine wagrechte, c) eine schräge Ebene haben?

4.

Zwei Ebenen können eine zweifache Lage gegen einander haben.

a) Die zwei Ebenen sind überall gleichweit von einander entfernt, so dass sie, wenn man sie auch beliebig erweitern würde, nie zusammentreffen. Zwei solche Ebenen heißen parallel. Welche Flächen des Würfels sind zu einander parallel?

b) Die zwei Ebenen haben nicht überall dieselbe Entfernung von einander, sie entfernen sich auf der einen Seite und nähern sich auf der andern; sie müssen daher hinreichend erweitert zusammentreffen, und zwar in einer geraden Linie. Man sagt: die zwei Ebenen schneiden sich, und nennt die Gerade, in welcher sie zusammentreffen, ihre Durchschnittslinie.

Haben zwei Ebenen, welche sich schneiden, eine solche Lage gegen einander, dass, wenn man die eine in die lothrechte Stellung bringt, die andere wagrecht ist, so sagt man: die beiden Ebenen stehen senkrecht auf einander. Welche Flächen des Würfels stehen senkrecht auf einander?

Übungsstoff.

1. Gib an den Gegenständen im Lehrzimmer parallele Ebenen an, die a) lothrecht, b) wagrecht, c) schräge sind.
2. Können a) zwei lothrechte, b) zwei wagrechte, c) zwei schräge Ebenen sich schneiden?
3. Können zwei sich schneidende Ebenen wagrecht sein?
4. Wie viel Flächen des Würfels stehen auf einer senkrecht?
5. Auf wie vielen Flächen ist eine senkrecht?
6. Welche Lage gegen einander können oder müssen a) zwei lothrechte Ebenen, b) eine lothrechte und eine wagrechte Ebene, c) eine lothrechte und eine schräge Ebene, d) zwei wagrechte Ebenen, e) eine wagrechte und eine schräge Ebene, f) zwei schräge Ebenen haben?

II. Das Prisma.

§. 7. Betrachtung eines senkrechten Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

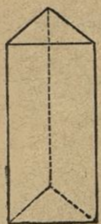
(Eine Seitenkante ist doppelt so groß als eine Grundkante.)

Das senkrechte dreiseitige Prisma wird so aufgestellt, dass die Grundflächen eine wagrechte Lage haben und dass eine Seitenfläche den Schülern zugewendet ist.

1.

Der Körper (Fig. 7), der hier steht, wird von fünf Flächen begrenzt. Die untere und die obere Fläche sind die Grundflächen, die vordere, die hintere rechte und die hintere linke Fläche sind die Seitenflächen. Alle Flächen sind ebene Flächen.

Fig. 7.



Die Seitenflächen sind lothrecht, die Grundflächen sind wagrecht.

Die Grundflächen sind parallel; die Seitenflächen sind nicht parallel, sie schneiden sich.

Die Seitenflächen stehen senkrecht auf den Grundflächen; zu einander stehen die Seitenflächen nicht senkrecht. Wenn man nämlich den Körper in eine solche Stellung bringt, dass von zwei Seitenflächen die eine lothrecht ist, so ist die andere schräge; man sagt: die Seitenflächen stehen zu einander schief.

Die Grundflächen des Körpers haben gleiche Gestalt und gleiche Größe, sie sind congruent; die Seitenflächen sind auch congruent.

Weil der Körper zwei congruente Grundflächen hat und eckig ist, so ist er eine Ecksäule oder ein Prisma. Da das Prisma drei Seitenflächen hat, heißt es dreiseitig.

2.

Das dreiseitige Prisma hat 6 Grundkanten und 3 Seitenkanten, zusammen 9 Kanten. Diese sind: die untere vordere, die untere rechte, die untere linke, die obere vordere, die obere rechte und die obere linke Grundkante; dann die rechte, linke und hintere Seitenkante. Das Prisma hat also dreimal so viele Kanten als Seitenflächen. Alle Kanten sind gerade Linien.

Die Seitenkanten sind lothrecht, die Grundkanten sind wagrecht.

Die drei Seitenkanten sind parallel. Von den Grundkanten sind immer eine untere und eine obere parallel; die untere vordere und die obere vordere Grundkante, u. s. w. Jede Seitenkante ist senkrecht auf einer unteren und einer oberen Grundkante. Die Grundkanten sind nicht senkrecht auf einander. Wenn man nämlich das Prisma in eine solche Stellung bringt, dass von zwei Grundkanten die eine lothrecht ist, so ist die andere schräge; man sagt: die zwei Grundkanten sind zu einander schief.

Die Seitenkanten stehen auch senkrecht auf den Grundflächen; das Prisma heißt deshalb ein senkrechtes Prisma.

Alle Seitenkanten sind einander gleich; alle Grundkanten sind einander gleich. Die Seitenkanten sind jedoch den Grundkanten nicht gleich; eine Seitenkante ist doppelt so groß als eine Grundkante.

Der Umfang jeder Fläche des Prisma ist eine gebrochene Linie.

3.

Das dreiseitige Prisma hat 6 Eckpunkte. Diese sind: der untere rechte, der untere linke, der untere hintere, der obere rechte, u. s. w.

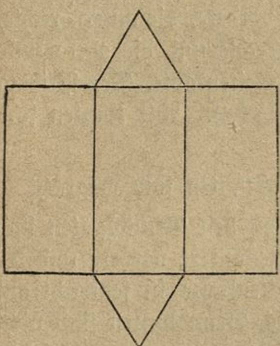
Jede Grundfläche hat drei Eckpunkte, sie ist ein Dreieck. Jede Seitenfläche hat vier Eckpunkte, sie ist ein Viereck.

4.

Jede Grundfläche des senkrechten dreiseitigen Prisma hat drei Winkel, jede Seitenfläche hat vier Winkel. Am ganzeu Prisma sind 18 Winkel.

Die Winkel an den Seitenflächen sind rechte, weil ihre Schenkel auf einander senkrecht stehen; die Winkel an den Grundflächen heißen schief, weil ihre Schenkel zu einander schief stehen. Ein schiefer Winkel an der Grundfläche ist kleiner als ein rechter; er ist ein spitzer Winkel. Am senkrechten dreiseitigen Prisma kommen also 12 rechte und 6 spitze Winkel vor.

Fig. 8.



Jede Grundfläche hat drei gleiche Seiten, sie ist ein gleichseitiges Dreieck. In jeder Seitenfläche sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, je zwei zusammentreffende Seiten aber ungleich; sie ist ein ungleichseitiges Viereck. Ein Viereck, welches rechtwinklig, aber ungleichseitig ist, heißt Rechteck. Am senkrechten dreiseitigen Prisma ist jede Seitenfläche ein Rechteck.

5.

Werden die Seitenflächen des dreiseitigen Prisma neben einander in eine Ebene ausgebreitet und dann über und unter einer Seitenfläche auch die Grundflächen in dieselbe Ebene gebracht, so erhält man das Netz des senkrechten dreiseitigen Prisma. (Fig. 8.)

6.

Damit die gewonnenen Anschauungen noch höhere Klarheit erlangen, wird der Lehrer den Würfel und das senkrechte dreiseitige Prisma neben einander aufstellen und die beiden Körper mit Rücksicht auf ihre Flächen, Kanten, Eckpunkte und Winkel nach Zahl, Lage und Größe mit einander vergleichen lassen.

1. Der Würfel hat 6 Flächen, das senkrechte dreiseitige Prisma nur 5. Die Flächen des Würfels sind ebene Flächen, die des Prisma auch. Die Flächen des Würfels sind Quadrate, die Flächen des senk-

rechten dreiseitigen Prisma theils gleichseitige Dreiecke theils Rechtecke. Am Würfel sind die Grundflächen wagrecht, die Seitenflächen lothrecht; am Prisma auch. Die Grundflächen des Würfels sind parallel, die des Prisma auch. Am Würfel sind auch die gegenüberliegenden Seitenflächen parallel; die Seitenflächen des dreiseitigen Prisma sind nicht parallel. Am Würfel stehen die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht; am Prisma auch. Am Würfel stehen auch je zwei zusammentreffende Seitenflächen zu einander senkrecht; am Prisma sind sie zu einander schief.

2. Der Würfel hat 12 Kanten, das dreiseitige Prisma nur 9. Die Kanten des Würfels sind gerade Linien, die des Prisma auch. Am Würfel sind die Grundkanten wagrecht, die Seitenkanten lothrecht; am Prisma auch. Am Würfel sind die Seitenkanten parallel; am Prisma auch. Am Würfel sind auch je zwei gegenüberliegende Kanten parallel; am Prisma sind nur je eine untere und eine obere Grundkante parallel, dagegen die unteren Grundkanten unter sich, und die oberen unter sich nicht parallel. Am Würfel sind je zwei sich treffende Kanten auf einander senkrecht; am Prisma sind nur die Seitenkanten auf den Grundkanten senkrecht, die unteren, ebenso die oberen Grundkanten stehen auf einander schief. Die Kanten des Würfels sind alle gleich, die des Prisma nicht; an diesem sind nur die Grundkanten unter sich, sowie die Seitenkanten unter sich gleich.

3. Der Würfel hat 8 Eckpunkte, das dreiseitige Prisma nur 6. Am Würfel sind die Eckpunkte jeder Kante gleich weit von einander entfernt; am Prisma sind auch die Eckpunkte jeder Grundkante gleich weit von einander entfernt, ebenso die Eckpunkte jeder Seitenkante, aber die beiden Entfernungen sind ungleich.

4. Der Würfel hat 24 Winkel, das dreiseitige Prisma nur 18. Am Würfel sind alle Winkel rechte; das Prisma hat nur an den Seitenflächen rechte, an den Grundflächen dagegen spitze Winkel.

§. 8. Betrachtung eines senkrechten Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist.

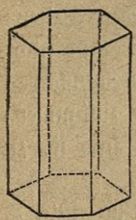
(Eine Seitenkante ist dreimal so groß als eine Grundkante.)

Das senkrechte sechsseitige Prisma wird so aufgestellt, daß die Grundflächen eine wagrechte Lage haben und daß drei Seitenflächen sichtbar sind.

1.

Der Körper (Fig. 9) hat zwei Grundflächen und sechs Seitenflächen, zusammen 8 Flächen: die untere, obere, vordere, vordere rechte, vordere linke, hintere, hintere rechte, hintere linke Fläche. Alle Flächen sind ebene Flächen.

Fig. 9.



Die Seitenflächen sind lothrecht, die Grundflächen wagrecht.

Die Grundflächen sind parallel, die Seitenflächen schneiden sich und die Grundflächen. Die Seitenflächen stehen senkrecht auf den Grundflächen; zu einander stehen die Seitenflächen schief.

Die Grundflächen sind unter sich, die Seitenflächen ebenfalls unter sich congruent.

Da der Körper congruente Grundflächen hat und eckig ist, ist er ein **Prisma**. Da der Körper sechs Seitenflächen hat, ist er ein **sechsseitiges** Prisma.

Die Oberfläche des Körpers ist eine gebrochene Fläche.

2.

Das sechsseitige Prisma hat 12 Grundkanten und 6 Seitenkanten, zusammen 18 Kanten; also dreimal so viele Kanten als Seitenflächen. Die Grundkanten heißen: die untere vordere, die untere vordere rechte, die untere vordere linke, die untere hintere, die untere hintere rechte und die untere hintere linke Kante; ferner die obere hintere, die obere hintere rechte, u. s. w. Die Seitenkanten heißen: die vordere rechte, die vordere linke, die rechte, die linke, die hintere rechte, die hintere linke Seitenkante. Alle Kanten sind gerade Linien.

Die Seitenkanten sind lothrecht, die Grundkanten wagrecht.

Die Seitenkanten sind alle parallel. Von den Grundkanten ist jede nur mit drei anderen parallel; die untere vordere mit der unteren hinteren, der oberen vorderen und der unteren vorderen; u. s. w.

Die Seitenkanten stehen senkrecht auf den Grundkanten; die Grundkanten stehen zu einander schief.

Weil die Seitenkanten auch auf den Grundflächen senkrecht stehen, heißt das Prisma **senkrecht**.

Alle Seitenkanten sind einander gleich; alle Grundkanten sind einander gleich. Die Seitenkanten sind jedoch den Grundkanten nicht gleich; eine Seitenkante ist dreimal so groß als eine Grundkante.

Der Umfang jeder Fläche des Prisma ist eine gebrochene Linie.

3.

Das sechsseitige Prisma hat 12 Eckpunkte. Sie heißen: der untere vordere rechte, der untere vordere linke, der untere rechte, der untere linke, der untere hintere rechte, der untere hintere linke, der obere vordere rechte, u. s. w.

Jede Grundfläche hat sechs Eckpunkte, sie ist ein Sechseck. Jede Seitenfläche hat vier Eckpunkte, sie ist ein Viereck.

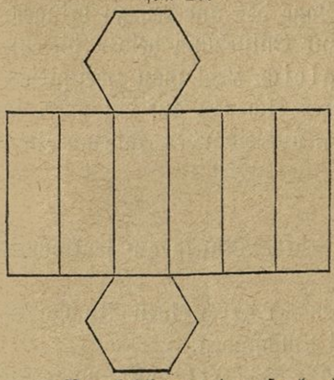
4.

Jede Grundfläche des senkrechten sechsseitigen Prisma hat sechs, jede Seitenfläche vier Winkel. Am ganzen Prisma sind 36 Winkel.

Die Winkel an den Seitenflächen sind rechte, die Winkel an den Grundflächen sind schiefe Winkel. Ein schiefer Winkel an der Grundfläche ist größer als ein rechter; er ist ein stumpfer Winkel. Am senkrechten sechsseitigen Prisma sind also 24 rechte und 12 stumpfe Winkel.

Jede Seitenfläche des senkrechten Prisma ist ein Rechteck. Jede Grundfläche hat 6 gleiche Seiten und 6 gleiche Winkel, sie ist ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck. Ein Sechseck, das gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt regelmäßig. Jede Grundfläche ist also ein regelmäßiges Sechseck.

Fig. 10.



5.

Werden die Seitenflächen des sechsseitigen Prisma neben einander in eine Ebene ausgebreitet und dann über und unter einer Seitenfläche auch die Grundflächen in dieselbe Ebene gebracht, so erhält man das Netz des senkrechten sechsseitigen Prisma. (Fig. 10.)

6.

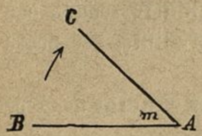
Vergleichung des senkrechten sechsseitigen Prisma mit dem senkrechten dreiseitigen Prisma.

Wird in ähnlicher Weise durchgeführt, wie oben die Vergleichung des senkrechten dreiseitigen Prisma mit dem Würfel.

Nachdem die Schüler aus der Betrachtung der bisherigen Körper die Anschauung des rechten, spitzen und stumpfen Winkels, ferner des Quadrates, Rechteckes, Dreieckes und Sechseckes gewonnen haben, kann nur eine eingehendere anschauliche Belehrung über die Winkel und die geradlinigen Figuren, ihre Arten und deren Eigenschaften folgen.

§. 9. Winkel.

Fig. 11.



1.

Zwei gerade Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, bilden einen **Winkel**.

Einen Winkel kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich eine Gerade AB (Fig. 11) in einer Ebene um den Punkt A dreht, und dadurch in eine zweite Lage AC gelangt. Je größer die Drehung, desto größer ist auch der Winkel.

Die beiden Geraden AB und AC, welche den Winkel bilden, nennt man die **Schenkel**, und ihren Durchschnittspunkt A den **Scheitel** des Winkels.

Der Winkel heißt BAC, wobei der Scheitel A in der Mitte genannt wird. Man kann ihn auch durch einen einzigen Buchstaben, z. B. m, bezeichnen, den man nahe an den Scheitel zwischen die Schenkel setzt.

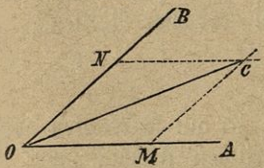
Die **Größe eines Winkels** hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern bloß von der Größe der Drehung ab, welche erforderlich ist, um den einen Schenkel in die Lage des anderen zu bringen.

Zwei Winkel sind **gleich**, wenn zur Entstehung beider dieselbe Drehung erforderlich ist; sonst sind sie **ungleich**. Legt man zwei gleiche Winkel mit ihren Scheiteln und einem ihrer Schenkel auf einander, so müssen auch die beiden anderen Schenkel auf einander fallen. Zwei gleiche Winkel decken sich.

Übungsstoff.

1. Nenne Scheitel und Schenkel eines jeden Winkels am senkrechten dreiseitigen Prisma.
2. Zeichne 5 Winkel und benenne jeden a) durch einen Buchstaben in der Winkelöffnung, b) durch drei Buchstaben.
3. Ziehe vom Punkte A vier Gerade AB, AC, AD, AE und nenne die Winkel, welche je zwei dieser Geraden bilden.
4. Zeichne zwei gleiche Winkel.
5. Zeichne zwei ungleiche Winkel und dann einen dritten, der so groß ist als a) ihre Summe, b) ihr Unterschied.
6. Zeichne einen Winkel und dann einen zweiten, welcher a) 2mal, b) 3mal, c) 4mal so groß ist.
7. Zeichne einen Winkel AOB (Fig. 12) und ziehe vom Scheitel eine Gerade, welche den Winkel halbiert.

Fig. 12.



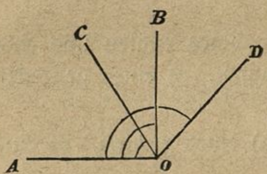
Mache OM = ON, zeichne MC parallel zu OB und NC parallel zu OA und ziehe OC, dann ist der Winkel AOC = BOC = $^1/_2$ AOB. Wenn die Zeichnung richtig ist, müssen die Strecken CM und CN sowohl unter sich als mit jeder der Strecken OM und ON gleich lang sein.

8. Zeichne einen rechten Winkel und halbiere ihn.
9. Theile einen Winkel in 4, 8 gleiche Theile.
10. Theile einen Winkel nach dem Augenmaße in 3, 5, 6 gleiche Theile.

2.

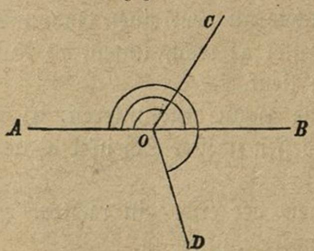
Dreht sich eine Gerade um einen Punkt in einer Ebene, bis sie den vierten Theil einer vollen Umdrehung gemacht hat, so entsteht ein rechter Winkel.

Fig. 13.



Ein Winkel, zu dessen Entstehung weniger als eine Viertelדrehung erforderlich ist, heißt ein spitzer, und ein Winkel, zu dessen Entstehung mehr als eine Viertel-, aber weniger als die halbe Umdrehung erforderlich ist, ein stumpfer Winkel. Ein spitzer Winkel ist also kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter; beide heißen auch schiefe Winkel. AOB (Fig. 13) ist ein rechter, AOC ein spitzer, AOD ein stumpfer Winkel.

Fig. 14.



Nach einer halben Umdrehung kommt die Gerade in eine Richtung, welche ihrer anfänglichen Richtung gerade entgegengesetzt ist. Der Winkel, welcher durch diese Drehung entsteht, heißt ein gestreckter Winkel. Seine Schenkel bilden eine gerade Linie. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei rechten. Ein Winkel, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler, und ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, ein erhabener Winkel. In Fig. 14 ist AOB ein gestreckter, AOC ein hohler, AOD ein erhabener Winkel.

Nach einer ganzen Umdrehung gelangt die Gerade wieder in ihre ursprüngliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein **voller** Winkel. Seine Schenkel fallen zusammen. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

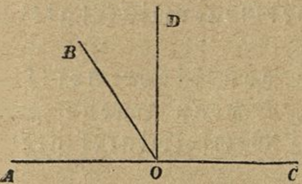
Übungsstoff.

1. Was für Winkel kommen a) am Würfel, b) am senkrechten dreiseitigen Prisma, c) am senkrechten sechsseitigen Prisma vor?
2. Nenne Gegenstände im Lehrzimmer und außerhalb desselben, an denen a) rechte, b) spitze, c) stumpfe Winkel vorkommen.
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich a) von Nord nach Süd, b) von Ost nach Süd, c) von Süd durch West und Nord nach Ost, d) von Ost nach Südwest dreht?
4. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten, in einer Stunde?
5. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr a) um 6, 3, 9 Uhr, b) um 2, 5, 10 Uhr?
6. Was für ein Winkel ist die Summe a) eines rechten und eines spitzen, b) eines rechten und eines stumpfen, c) eines gestreckten und eines hohlen Winkels?
7. Was für ein Winkel ist das Doppelte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten Winkels?
8. Was für ein Winkel ist die Hälfte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten, d) eines erhabenen, e) eines vollen Winkels?
9. Ziehe eine wagrechte Gerade und zeichne an dem einen Endpunkte einen rechten Winkel so, dass der Scheitel a) rechts unten, b) links unten, c) rechts oben, d) links oben liegt.
10. Ziehe eine schräge Gerade, und zeichne a) an dem unteren, b) an dem oberen Endpunkte einen Winkel, dessen zweiter Schenkel c) nach aufwärts, d) nach abwärts liegt.
11. Zeichne drei hohle Winkel, von denen der erste ein rechter, der zweite ein spitzer, der dritte ein stumpfer Winkel ist.
12. Zeichne a) einen gestreckten, b) einen erhabenen, c) einen vollen Winkel.

3.

a) Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein **Nebenwinkel**. Zwei Nebenwinkel haben also

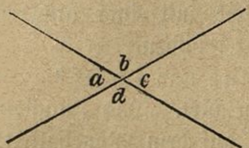
Fig. 15.



den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich, und ihre beiden anderen Schenkel liegen in einer Geraden. AOB (Fig. 15) ist ein Nebenwinkel von BOC; ebenso sind AOD und DOC Nebenwinkel.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten. Bildet eine Gerade mit einer andern zwei gleiche Nebenwinkel, so stehen die beiden Geraden auf einander *senkrecht*. Bildet eine Gerade mit einer andern zwei ungleiche Nebenwinkel, so stehen die zwei Geraden *schief* auf einander.

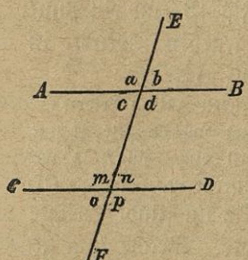
Fig. 16.



b) Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein *Scheitelwinkel*. Zwei Scheitelwinkel haben also den Scheitel gemeinschaftlich, und ihre Schenkel liegen in zwei sich schneidenden Geraden. In Fig. 16 sind a und c, ebenso b und d Scheitelwinkel.

Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 17.



c) Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten 8 Winkel. (Fig. 17.)

Die Winkel a, b, o, p sind *äußere*, die Winkel c, d, m, n sind *innere* Winkel.

Ein äußerer und innerer Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden und an verschiedenen Scheiteln heißen *Gegenwinkel*; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der schneidenden Geraden und an verschiedenen Scheiteln heißen *Wechselwinkel*; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Bewegt sich die Gerade AB längs der EF so fort, dass sie stets zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so bildet sie, da sich dabei ihre Richtung gegen die EF nicht ändert, mit dieser in jeder Lage dieselben vier Winkel; es fallen daher, wenn AB in die Lage CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander, sind also einander gleich; je zwei Wechselwinkel gehen in Scheitelwinkel über, sind also auch einander gleich.

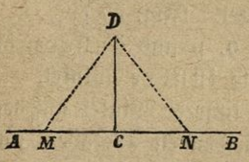
Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so sind 1. je zwei Gegenwinkel gleich, 2. je zwei Wechselwinkel gleich.

Umgekehrt: Zwei Gerade, die von einer dritten geschnitten werden, sind parallel, 1. wenn irgend zwei Gegenwinkel, 2. wenn irgend zwei Wechselwinkel gleich sind.

Übungsstoff.

1. Bilde mit zwei Stäbchen a) Nebenwinkel, b) Scheitelwinkel.
2. Welcher Winkel ist seinem Nebenwinkel gleich?
3. Was für einen Nebenwinkel hat a) ein rechter, b) ein spitzer, c) ein stumpfer Winkel?
4. Suche an Gegenständen Gerade auf, welche mit einer anderen Geraden a) gleiche, b) ungleiche Nebenwinkel bilden.
5. Was für ein Unterschied ist zwischen schräge und schief?
6. Die Schalen einer Wage sind ungleich belastet. Das Zünglein hat eine schräge Lage; steht es auch schief auf dem Wagebalken? Die Schere steht schief auf dem Wagebalken; ist sie auch schräge?
7. Zeichne einen Winkel und zu demselben a) den Nebenwinkel, b) den Scheitelwinkel.

Fig. 18.

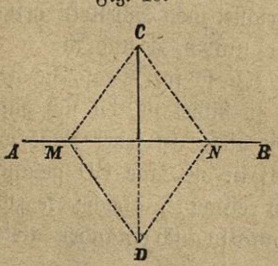


8. Eine Gerade AB (Fig. 18) und ein Punkt C in derselben sind gegeben; errichte in C eine Senkrechte auf AB.

Bestimme in den Geraden AB zu beiden Seiten von C in gleicher Entfernung zwei Punkte M und N, dann außerhalb der Geraden einen Punkt D, welcher von M und N gleichweit entfernt ist, und ziehe CD.

9. Zeichne eine Gerade, nimm darin 5 Punkte an und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte. Welche Lage gegen einander haben diese Senkrechten?

Fig. 19.



10. Eine Gerade AB (Fig. 19) und ein Punkt C außerhalb derselben sind gegeben; fälle von C eine Senkrechte auf AB.

Suche in den Geraden AB zwei Punkte M und N, welche von C gleichweit abstehen, bestimme dann außerhalb der AB einen Punkt D, welcher von M und N gleichweit entfernt ist, und ziehe die CD.

11. Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen 5 Punkte an und fälle

von jedem derselben auf die andere Gerade eine Senkrechte. Wie verhalten sich diese Senkrechten in Bezug auf ihre Länge?

12. Ziehe zwei parallele Gerade und eine dritte sie schief schneidende Gerade. Bezeichne die dadurch entstehenden acht Winkel mit Buchstaben und gib zu jedem Winkel a) die beiden Nebenwinkel, b) den Scheitelwinkel, c) den Gegenwinkel, d) den Wechselwinkel an.
13. Welche Richtungen haben die Schenkel a) zweier gleicher Gegenwinkel, b) zweier gleicher Wechselwinkel?

§. 10. Geradlinige Figuren.

Eine von geraden Linien begrenzte Ebene heißt eine geradlinige Figur. Die Strecken, welche die Figur begrenzen, heißen Seiten.

Jede geradlinige Figur hat so viele Winkel und so viele Eckpunkte, als sie Seiten hat.

Nach der Zahl der Seiten oder der Eckpunkte wird die Figur ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, . . . Vieleck genannt. Unter Vieleck versteht man gewöhnlich eine Figur, welche mehr als vier Seiten hat.

Ein Vieleck, dessen alle Seiten gleich sind, heißt gleichseitig; ein Vieleck, dessen alle Winkel gleich sind, heißt gleichwinklig; ein Vieleck, das gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt regelmäßig.

Eine Strecke, welche zwei Eckpunkte verbindet, die nicht an einer Seite liegen, heißt Diagonale.

Zwei Figuren heißen gleich, wenn sie dieselbe Größe haben; ähnlich, wenn sie dieselbe Gestalt haben; congruent, wenn sie dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben. Congruente Figuren müssen über einander gelegt sich vollständig decken.

Übungsstoff.

1. Zeichne a) ein Dreieck, b) ein Viereck, c) ein Fünfeck, d) ein Sechseck, und ziehe von einem Eckpunkte aus alle möglichen Diagonalen.
2. Ist in einem Dreiecke eine Diagonale möglich?
3. Wie viele Diagonalen können in einem a) Vierecke, b) Fünfecke, c) Sechsecke, d) Zehnecke von einem Eckpunkte aus gezogen werden?
4. Wie viele Diagonalen sind in einer geradlinigen Figur überhaupt möglich?

Im Vierecke sind 2,
„ Fünfecke „ $2 + 3 = 5$,
„ Sechsecke „ $2 + 3 + 4 = 9$,
„ Siebenecke $2 + 3 + 4 + 5 = 14$,
„ Achtecke „ $2 + 3 + 4 + 5 + 6$ oder $8 \times {}^5/_2 = 20$ Diagonalen möglich.

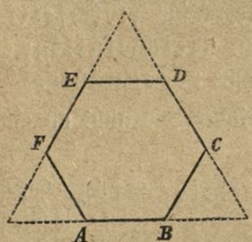
Die anschauliche Entwicklung wie im §. 5, Absatz 2, Übungsst 8.

5. Zeichne eine Strecke AB, bestimme genau über der Mitte einen Punkt C so, dass er von A und von B um die Strecke AB entfernt ist und ziehe AC und BC. Was für ein Dreieck erhältst du?

6. Zeichne einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel wagrecht und der andere lothrecht ist, mache den lothrechten Schenkel länger als den wagrechten, und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche zu den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck erhältst du?

7. Zeichne drei solche Rechtecke so neben einander, dass je zwei Rechtecke eine gemeinschaftliche Seite haben, und dann über und unter einem dieser Rechtecke je ein gleichseitiges Dreieck. Dadurch erhältst du das Netz eines senkrechten dreiseitigen Prisma.

Fig. 20.



8. Zeichne über einer Strecke ein regelmäßiges Sechseck.

Zeichne eine Strecke AB (Fig. 20), verlängere sie nach beiden Seiten um ihre eigene Länge, zeichne dann über der ganzen Strecke ein gleichseitiges Dreieck, theile jede Seite in drei gleiche Theile und verbinde je zwei nächstliegende Theilungspunkte durch eine Gerade. Die dadurch erhaltene Figur ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck.

9. Zeichne sechs congruente Rechtecke so neben einander, dass je zwei Rechtecke eine gemeinschaftliche Seite haben und dann über und unter einem dieser Rechtecke je ein regelmäßiges Sechseck. (Netz eines senkrechten sechsseitigen Prisma.)

III. Das Tetraeder.

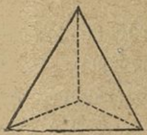
§. 11. Betrachtung des Tetraeders.

Das Tetraeder wird so aufgestellt, dass eine Fläche wagrecht und eine Fläche den Schülern zugewendet ist.

1.

Der Körper (Fig. 21) hat vier Flächen. Er heißt darum Vierflächner oder Tetraeder. Die Flächen sind: die untere, vordere, hintere rechte, hintere linke. Alle Flächen sind ebene Flächen.

Fig. 21.



Die untere ist die Grundfläche, die übrigen sind Seitenflächen Die Grundfläche ist wagrecht, die Seitenflächen sind schräge. Keine der Flächen ist zu einer andern parallel. Jede Fläche steht zu jeder andern schief.

Die Oberfläche des Tetraeders ist eine gebrochene Fläche.

2.

Das Tetraeder hat sechs Kanten: die vordere, die hintere rechte und hintere linke Grundkante, die rechte, linke und hintere Seitenkante. Alle Kanten sind gerade Linien und gleich lang.

Die Grundkanten sind wagrecht, die Seitenkanten schräge. Keine Kante ist zu einer andern parallel. Jede Kante steht zu den Kanten, die sie trifft, schief.

Der Umfang jeder Fläche ist eine gebrochene Linie.

3.

Das Tetraeder hat vier Eckpunkte. Diese sind: der obere, der untere rechte, der untere linke und der untere hintere.

Jede Fläche hat drei Eckpunkte; sie ist ein Dreieck, und zwar, weil alle Kanten gleich sind, ein gleichseitiges Dreieck.

4.

Jede Fläche des Tetraeders hat drei Winkel. Am ganzen Tetraeder kommen daher 12 Winkel vor. Alle Winkel sind spitze Winkel und untereinander gleich.

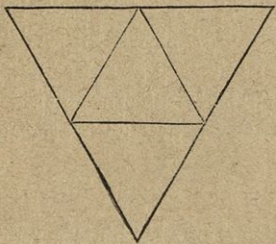
Die Dreiecke am Tetraeder sind gleichseitig und gleichwinklig; sie sind regelmäßig. Legt man sie auf einander, so decken sie sich; sie sind congruent. Das Tetraeder ist also von vier congruenten und regelmäßigen Figuren begrenzt; es in ein regelmäßiger Körper.

Die Seitenflächen des Tetraeders treffen in einem gemeinschaftlichen Punkte, den man Spitze nennt, zusammen. Das Tetraeder heißt darum Spitzsäule oder Pyramide. Da die Pyramide drei Seitenflächen hat, heißt sie dreiseitig; da sie gleiche Seitenkanten hat, heißt sie senkrecht.

5.

Denkt man sich die drei Seitenflächen um ihre unteren Kanten gedreht, bis sie mit der Grundfläche in dieselbe Ebene zu liegen kommen, so erhält man das **Netz** des Tetraeders. (Fig. 22.)

Fig. 22.



Da drei Winkel des Tetraeders zusammen einen gestreckten Winkel bilden, so ist der Umfang des Netzes dieses Körpers ein gleichseitiges Dreieck, dessen jede Seite doppelt so groß ist als eine Kante des Tetraeders.

6.

Vergleichung des Tetraeders mit dem Würfel.

In ähnlicher Weise wie die Vergleichung des dreiseitigen Prisma mit dem Würfel.

§. 12. Das Dreieck.

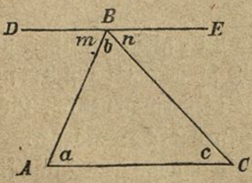
a) Ein **Dreieck** hat drei Seiten und drei Winkel.

Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen, und die dritte liegt ihm gegenüber.

In jedem Dreiecke ist die **Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.**

Um zu erfahren, wie groß die **Summe der Winkel** a, b, c eines beliebigen Dreieckes ABC (Fig. 23) sei, wird man sie alle um den gemeinschaftlichen Scheitel B neben einander darstellen. Zu diesem Ende zieht man durch B eine Gerade DE parallel zu AC, wodurch man die neuen Winkel m und n erhält; der Winkel m ist dann als Wechselwinkel gleich a, und der Winkel n als Wechselwinkel gleich c. Die Summe der drei Dreieckswinkel a, b, c ist daher so groß als die Summe der Winkel m, b, n. Die letzteren drei Winkel aber bilden zusammen einen gestreckten, ihre Summe ist also gleich zwei Rechten; folglich muss auch die Summe der Winkel a, b, c zwei Rechte betragen. In jedem Dreiecke ist also die **Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.**

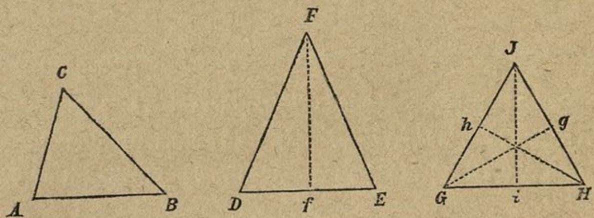
Fig. 23.



In einem Dreiecke kann nur ein rechter und nur ein stumpfer Winkel vorkommen; zwei Winkel müssen spitz sein.

b) Nach der Länge der Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke. (Fig. 24.)

Fig. 24.



Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn in demselben keine Seite einer andern gleich ist, wie ABC; gleichschenklig, wenn zwei Seiten einander gleich sind, wie DEF; und gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleich sind, wie GHJ.

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie und den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt den Scheitel des Dreieckes. In den anderen Dreiecken kann man jede Seite als Grundlinie annehmen. Die Senkrechte vom Scheitel auf die Grundlinie heißt die Höhe des Dreieckes.

Das gleichschenklige Dreieck DEF in Fig. 24 hat folgende Eigenschaften:

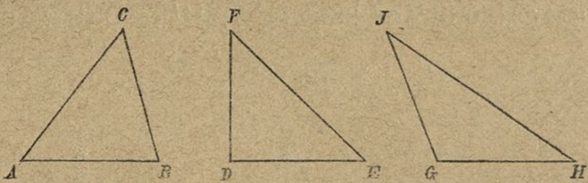
1. Die Winkel an der Grundlinie sind einander gleich.
2. Die Höhe halbiert die Grundlinie und den Winkel am Scheitel.

Das gleichseitige Dreieck GHJ in Fig. 24 hat folgende Eigenschaften:

1. Alle drei Winkel sind einander gleich, also ist jeder Winkel $\frac{1}{3}$ von zwei Rechten.
2. Die drei Höhen sind einander gleich.
3. Jede Höhe halbiert die entsprechende Grundlinie und den Winkel am entsprechenden Scheitel.

c) Nach der Größe der Winkel unterscheidet man spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. (Fig. 25.)

Fig. 25.



Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat, wie ABC; rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat, wie DEF; und stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat, wie GHJ.

Im rechtwinkligen Dreiecke nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse, die beiden anderen Seiten Katheten.

Übungsstoff.

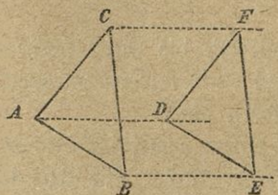
1. Zeichne ein ungleichseitiges Dreieck ABC und gib a) zu jeder Seite den gegenüberliegenden und die anliegenden Winkel, b) zu jedem Winkel die gegenüberliegende und die ihn einschließenden Seiten an.
2. Zeichne eine Strecke AB, bestimme genau über der Mitte einen beliebigen Punkt C und ziehe AC und BC. Was für ein Dreieck erhältst du? Nenne die Schenkel, die Grundlinie, den Scheitel, die Winkel an der Grundlinie und den Winkel am Scheitel.
3. Zeichne eine Strecke AB und über derselben ein gleichseitiges Dreieck. (§. 10, Aufg. 5.)
4. Zeichne über der Strecke 2 *cm* 5 *mm* ein gleichseitiges Dreieck.
5. Trage auf einer Geraden eine Strecke zweimal neben einander auf, beschreibe über der doppelten Strecke ein gleichseitiges Dreieck und verbinde die Mitten der drei Seiten durch Gerade. (Netz des Tetraeders.)
6. Zeichne a) einen spitzen, b) einen rechten, c) einen stumpfen Winkel, schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine Gerade. Was für ein Dreieck erhältst du?
7. Zeichne a) ein spitzwinkliges, b) ein rechtwinkliges, c) ein stumpfwinkliges Dreieck, ziehe in jedem die drei Höhen und gib dann alle Fälle in Beziehung auf die Lage der Höhe an.

8. In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Höhen eines Dreieckes?
9. Ziehe von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Gerade, welche den Winkel an jenem Eckpunkte halbiert — eine Winkelhalbierungslinie. In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Winkelhalbierungslinien?
10. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und ziehe von jeder Mitte eine Gerade zu dem gegenüberliegenden Eckpunkte — eine Mittellinie. In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Mittellinien?
11. Halbiere jede Seite und errichte darauf in der Mitte eine Senkrechte — ein Mittelloth. In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Mittellothe?

§. 13. Congruente Dreiecke.

Zwei Dreiecke sind congruent, d. i. sie haben gleiche Größe und gleiche Gestalt, wenn sie auf einander gelegt sich vollständig decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Bestandstücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel, paarweise gleich sein.

Fig. 26.



Ist z. B. in den Dreiecken ABC und DEF (Fig 26) die Seite

$$AB = DE,\ AC = DF,\ BC = EF,$$

und der Winkel

$$ACB = DFE,\ ABC = DEF,\ BAC = EDF,$$

so sind die beiden Dreiecke congruent.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Übungsstoff.

1. Wie sind die zwei Dreiecke beschaffen, in welche a) ein gleichseitiges, b) ein gleichschenkliges Dreieck durch die Höhe getheilt wird?
2. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC (Fig. 26), und dann ein zweites Dreieck, welches mit dem ersten congruent ist.

Ziehe durch A, B, C parallele Gerade, schneide von denselben gleiche Stücke AD, BE, CF ab und verbinde die Endpunkte durch Gerade; dann ist das Dreieck DEF congruent mit ABC. Ist die Zeichnung richtig, so müssen die Seiten DE, DF, EF folgeweise mit AB, AC, BC parallel sein.

3. Zeichne ein Dreieck, verlängere eine Seite desselben und trage auf der Verlängerung die Länge dieser Seite auf; durch die Endpunkte ziehe Parallele mit den beiden andern Seiten des Dreieckes. Wie verhält sich das dadurch entstehende Dreieck zu dem ersteren?
4. Zeichne zwei congruente rechtwinklige Dreiecke.

IV. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

§. 14. Betrachtung einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat ist.

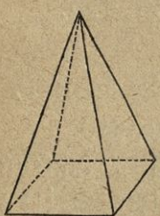
(Eine Seitenkante ist doppelt so groß als eine Grundkante.)

Die senkrechte vierseitige Pyramide wird so aufgestellt, daſs die Grundfläche wagrecht und daſs eine Seitenfläche sichtbar ist.

1.

Der Körper (Fig. 27) hat fünf Flächen. Die untere ist die Grundfläche, die vordere, die rechte, die linke und die hintere sind die Seitenflächen. Alle Flächen sind eben.

Fig. 27.



Die Grundfläche ist wagrecht, die Seitenflächen sind schräge. Keine Fläche ist zu einer andern parallel. Jede Fläche steht zu jeder andern schief.

Da alle Seitenflächen in einem gemeinschaftlichen Punkte zusammentreffen, heißt der Körper eine Pyramide. Da die Pyramide vier Seitenflächen hat, heißt sie vierseitig.

2.

Die vierseitige Pyramide hat acht Kanten. Die vier Grundkanten sind: die vordere, die rechte, die linke und die hintere. Die vier Seitenkanten sind: die vordere rechte, die vordere linke, die hintere rechte und die hintere linke. Die Pyramide hat also doppelt so viele Kanten als Seitenflächen. Alle Kanten sind gerade Linien.

Die Grundkanten sind wagrecht, die Seitenkanten schräge. Je zwei gegenüberstehende Grundkanten sind parallel. Die Grundkanten stehen senkrecht auf einander; die Seitenflächen sind schief zu einander und zu den Grundkanten.

Alle Grundkanten sind einander gleich; alle Seitenkanten sind einander gleich. Die Seitenkanten sind den Grundkanten nicht gleich; eine Seitenkante ist doppelt so groß als eine Grundkante.

Weil alle Seitenkanten der Pyramide gleich sind, heißt sie eine senkrechte Pyramide.

3.

Die vierseitige Pyramide hat fünf Eckpunkte. Diese sind: der obere, der untere vordere rechte, der untere vordere linke, der untere hintere rechte und der untere hintere linke. Der obere Eckpunkt, in welchem alle vier Seitenflächen zusammentreffen, heißt die Spitze der Pyramide.

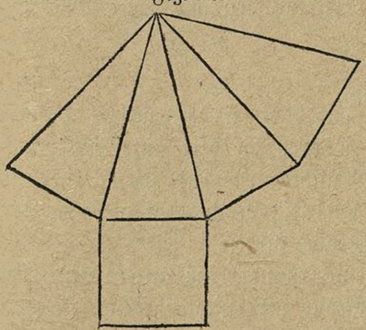
Die Grundfläche hat vier Eckpunkte, sie ist ein Viereck; jede Seitenfläche hat drei Eckpunkte, sie ist ein Dreieck, und zwar, weil je zwei Seitenkanten gleich sind, ein gleichschenkliges Dreieck. Je zwei Seitenflächen haben alle drei Seiten paarweise gleich; sie sind congruent.

4.

Die senkrechte vierseitige Pyramide hat 16 Winkel, welche in drei Gruppen zerfallen. Zur ersten Gruppe gehören die vier Winkel der Grundfläche; sie sind rechte Winkel. Zur zweiten Gruppe gehören die acht unteren Winkel der Seitenflächen; sie sind spitz und einander gleich. Zur dritten Gruppe gehören die vier oberen Winkel der Seitenflächen; sie sind auch spitz und unter sich gleich, jedoch kleiner als die unteren Winkel der Seitenflächen.

Die Grundfläche ist ein Viereck, das gleichseitig und rechtwinklig ist, also ein Quadrat.

Fig. 28.



5.

Werden die Seitenflächen der vierseitigen Pyramide neben einander in eine Ebene ausgebreitet und wird dann unter einer Grundkante auch die Grundfläche in dieselbe Ebene gebracht, so erhält man das Netz der senkrechten vierseitigen Pyramide. (Fig. 28.)

6.

Vergleichung der vierseitigen Pyramide mit dem Tetraeder.

§. 15. Betrachtung eines senkrechten Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen gleichseitige Dreiecke sind.

(Eine Seitenkante ist gleich einer Grundkante.)

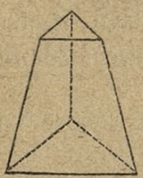
Schneidet man eine Pyramide durch eine Ebene, welche zu der Grundfläche parallel ist, so wird dieselbe in zwei Körper getheilt; der Körper zwischen der Schnittfläche und der Spitze bildet wieder eine Pyramide; der Körper aber zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche heißt eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf.

Zur Veranschaulichung dieses Schnittes bedient sich der Lehrer einer dreiseitigen Pyramide aus Holz, an der die Seitenkante doppelt so groß ist als die Grundkante, und deren oberer Theil (mit der Hälfte einer Seitenkante) abgenommen und durch einen hölzernen Stift wieder fest aufgesetzt werden kann. Der Pyramidenstumpf, an den sich die folgenden unterrichtlichen Betrachtungen zu knüpfen haben, wird dann so aufgestellt, dass die Grundflächen wagrecht sind und dass eine Seitenfläche den Schülern zugewendet ist.

1.

Der Pyramidenstumpf (Fig. 29) hat fünf Flächen: die untere und die obere Grundfläche, die vordere, rechte und linke Seitenfläche. Alle Flächen sind ebene Flächen.

Fig. 29.



Die beiden Grundflächen sind wagrecht, daher auch parallel; die Seitenflächen sind schräge. Je zwei Flächen, die sich schneiden, sind zu einander schief.

Die zwei Grundflächen haben verschiedene Größe, die obere ist kleiner als die untere; sie haben aber dieselbe Gestalt. Die beiden Grundflächen sind nicht congruent, sie sind ähnlich.

Weil der Pyramidenstumpf drei Seitenflächen hat, heißt er dreiseitig.

2.

Der dreiseitige Pyramidenstumpf hat 9 Kanten, welche in drei Gruppen zerfallen. Zur ersten Gruppe gehören die drei unteren Grundkanten, zur zweiten die drei oberen Grundkanten, zur dritten die drei Seitenkanten. Der Pyramidenstumpf hat also dreimal so viele Kanten als Seitenflächen. Alle Kanten sind gerade Linien.

Die Grundkanten sind wagrecht, und immer eine untere und eine obere parallel; die Seitenkanten sind schräge und nicht parallel. Je zwei Kanten, die sich treffen, stehen zu einander schief.

Die Kanten jeder Gruppe sind einander gleich. Es sind also die drei unteren Kanten gleich, die drei oberen gleich, und die Seitenkanten gleich; dagegen ist eine obere Kante nur halb so groß als eine untere.

Weil alle Seitenkanten gleich sind, heißt der Pyramidenstumpf senkrecht.

3.

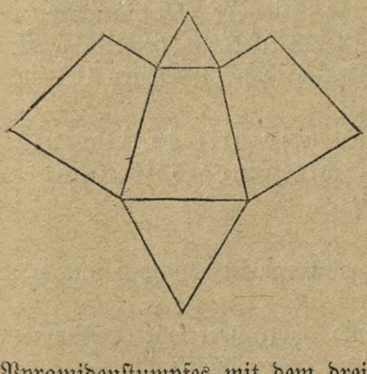
Der dreiseitige Pyramidenstumpf hat sechs Eckpunkte: den unteren rechten, den unteren linken, den unteren vorderen, den oberen rechten u. s. w.

Jede Grundfläche hat drei Eckpunkte; sie ist ein Dreieck, und zwar, weil alle drei Seiten gleich sind, ein gleichseitiges Dreieck. Jede Seitenfläche hat vier Eckpunkte; sie ist ein Viereck, und zwar, weil in demselben zwei Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nicht parallel sind, ein Trapez. Weil die zwei nicht parallelen Seiten gleich sind, heißt das Trapez gleichschenklig.

4.

Der senkrechte dreiseitige Pyramidenstumpf hat 18 Winkel, welche in drei Gruppen zerfallen. Zur ersten Gruppe gehören die sechs Winkel der beiden Grundflächen; sie sind spitz und einander gleich. Zur zweiten Gruppe gehören die sechs unteren Winkel der Seitenflächen; sie sind auch spitz und unter sich gleich. Zur dritten Gruppe gehören die sechs oberen Winkel der Seitenflächen; sie sind stumpf und einander gleich.

Fig. 30.



5.

Werden die Seitenflächen des dreiseitigen Pyramidenstumpfes neben einander in einer Ebene ausgebreitet und dann über und unter einer Seitenfläche auch die Grundflächen in dieselbe Ebene gebracht, so erhält man das Netz des senkrechten dreiseitigen Pyramidenstumpfes. (Fig. 30.)

6.

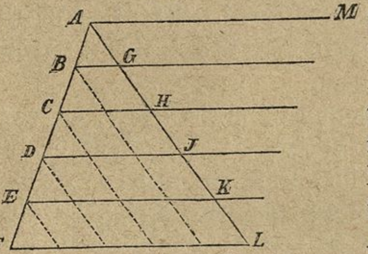
Vergleichung des dreiseitigen Pyramidenstumpfes mit dem dreiseitigen Prisma.

§. 16. Ähnliche Dreiecke.

Zwei Dreiecke, welche dieselbe Gestalt haben und sich nur durch die Größe unterscheiden, heißen ähnlich. Die Grundflächen eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes sind ähnliche Dreiecke.

Um die Merkmale zweier ähnlicher Dreiecke anschaulich darzustellen, lasse man eine Gerade AM (Fig. 31) auf einem Schenkel AF des Winkels FAL parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreiten, dass sie auf jenem Schenkel gleiche Stücke AB, BC, CD, DE, EF abschneidet; dann werden auch die Abschnitte des zweiten Schenkels AG, GH, HJ, JK, KL unter einander gleich, und es entstehen die Dreiecke ABG, ACH, ADJ, AEK, AFL, welche zwar verschiedene Größe haben, in der Gestalt aber übereinstimmen, somit ähnlich sind.

Fig. 31.



Betrachtet man nun irgend zwei dieser Dreiecke, z. B. ACH und AFL, und vergleicht zunächst ihre Winkel, so findet man, dass die zwei Dreiecke paarweise gleiche Winkel haben; denn der Winkel am Scheitel A ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die anderen zwei Winkel aber sind als Gegenwinkel paarweise gleich. Vergleicht man ferner die Seiten der beiden Dreiecke, so sieht man, dass AC 2 solche Theile enthält, als deren auf AF 5 kommen; die Seiten AH und AF haben also das Verhältnis 2 : 5. Ebenso enthält AH 2 solche Theile, von denen AL 5 enthält; es haben also auch die Seiten AG und AL das Verhältnis 2 : 5. Dasselbe Verhältnis haben auch die Seiten CH und FL; denn zieht man durch jeden Theilungspunkt der Seite AF eine Parallele mit AL, so wird dadurch CH in 2, und FL in 5 Theile getheilt, welche alle unter einander gleich sind, so dass sich auch die Seiten CH und FL so verhalten wie 2 : 5.

In ähnlichen Dreiecken sind also alle drei Winkel paarweise gleich und je zwei gleichliegende Seiten haben dasselbe Verhältnis zu einander.

Übungsstoff.

1. Was für ein Unterschied besteht zwischen zwei ähnlichen und zwei congruenten Dreiecken?
2. Zeichne ein beliebiges Dreieck, und dann über einer bestimmten Strecke ein zweites Dreieck, das dem ersten ähnlich ist.

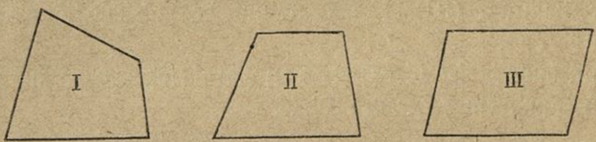
§. 17. Das Viereck.

Ein Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Zieht man im Vierecke eine Diagonale, so zerfällt dasselbe in zwei Dreiecke, deren sechs Winkel zusammen die vier Winkel des Viereckes geben. Da nun die Winkelsumme in jedem Dreiecke zwei Rechte, also in beiden Dreiecken vier Rechte beträgt, so folgt: In jedem Vierecke ist die Summe der vier Winkel gleich vier Rechten.

Nach der Lage der Seiten unterscheidet man die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Ein Viereck heißt ein Trapezoid, wenn kein Paar von Seiten parallel ist, wie in I; ein Trapez, wenn ein Paar von Seiten parallel ist, wie in II; ein Parallelogramm, wenn beide Paare von Seiten parallel sind, wie in III.

Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig.

In einem Parallelogramme kann man irgend eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, welche auf die Grundlinie von der gegenüberliegenden Seite gezogen wird, ist dann die Höhe.

Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte von der einen parallelen Seite auf die andere.

Ein Parallelogramm kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich eine gerade Linie in einer Ebene mit ihrer ursprünglichen Lage parallel in unveränderter Länge so fortbewegt, dass ihre Endpunkte gerade und mit einander parallele Linien beschreiben.

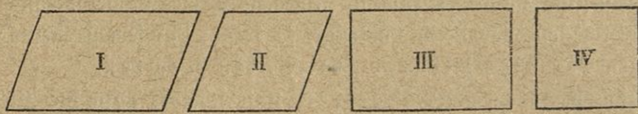
In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, und ebenso je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten einander gleich, so sind alle Seiten gleich und das Parallelogramm heißt gleichseitig. Jedes andere Parallelogramm heißt ungleichseitig.

Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind alle Winkel rechte und das Parallelogramm heißt rechtwinklig. Jedes andere Parallelogramm heißt schiefwinklig. Ein schiefwinkliges Parallelogramm hat zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe Winkel.

Mit Rücksicht auf die Größe der Seiten und der Winkel ergeben sich daher vier Arten von Parallelogrammen. (Fig. 33.)

Fig. 33.



Das ungleichseitige schiefwinklige Parallelogramm (I) heißt Rhomboid, das gleichseitige schiefwinklige (II) Rhombus, das ungleichseitige rechtwinklige (III) Rechteck, und das gleichseitige rechtwinklige (IV) Quadrat.

Entstehung dieser vier Arten von Parallelogrammen aus der parallelen Bewegung einer geraden Linie.

Übungsstoff.

1. Vergleiche die verschiedenen Arten der Vierecke mit einander.
2. Nenne Gegenstände, an denen Vierecke vorkommen.
3. Zeichne zwei parallele AB und CD von ungleicher Länge und ziehe AC und BD. Was für ein Viereck erhältst du?
4. Zeichne zwei Parallele, dann ebenso zwei andere Parallele, welche die früheren schneiden. Was für ein Viereck erhältst du?
5. Zeichne einen spitzen oder stumpfen Winkel a) mit ungleichen, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche zu den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht dadurch?
6. Zeichne einen rechten Winkel a) mit ungleichen, b mit gleichen Schenkeln und ziehe in den Endpunkten auf die Schenkel Senkrechte, welche sich schneiden. Was für ein Viereck entsteht dadurch?
7. Ziehe in einem Parallelogramme eine Diagonale. In was für zwei Dreiecke theilt diese das Parallelogramm?
8. Ziehe in einem Parallelogramme zwei Diagonalen. Wie verhalten sich die Theile jeder Diagonale in Bezug auf ihre Länge?
9. Ziehe in einem a) Rhomboide, b) Rhombus, c) Rechtecke, d) Quadrate zwei Diagonalen. Wie verhalten sich dieselben m) in Bezug auf ihre Länge, n) in Bezug auf ihre gegenseitige Lage?
10. Zeichne vier gleichschenklige Dreiecke so, dass alle denselben Scheitel und je zwei einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und dann

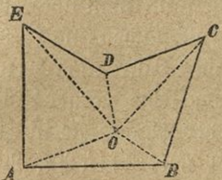
unter der Grundlinie eines dieser Dreiecke ein Quadrat. Dadurch erhältst du das Netz einer senkrechten vierseitigen Pyramide.

11. Zeichne drei gleichschenklige Dreiecke so, dass alle denselben Scheitel und je zwei einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, schneide vom Scheitel aus auf allen Schenkeln gleiche Stücke ab und verbinde je zwei dieser Endpunkte durch eine Gerade; dadurch erhältst du drei gleichschenklige Trapeze. Zeichne dann noch an den gegenüberliegenden parallelen Seiten eines dieser Trapeze zwei gleichseitige Dreiecke. (Netz des senkrechten dreiseitigen Pyramidenstumpfes.)

§. 18. Das Vieleck.

Ein **Vieleck** hat gleich viele Seiten und Winkel. Die Winkel in einem Vielecke können spitz, recht, stumpf und auch erhaben sein.

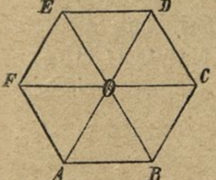
Fig. 34.



Zieht man (Fig. 34) von einem Punkte O innerhalb eines Vieleckes zu allen Eckpunkten Gerade, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Die Winkelsumme jedes Dreieckes beträgt zwei Rechte, daher die Winkelsumme aller Dreiecke so vielmal zwei Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Die Winkel aller dieser Dreiecke zusammen geben aber nicht nur alle Vieleckswinkel, sondern auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und die zusammen vier Rechte betragen. In jedem Vielecke ist also die **Summe aller Winkel gleich so vielmal zwei Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechte.**

Ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heißt **regelmäßig.**

Fig. 35.



Wenn man in einem **regelmäßigen Vielecke** ABCDEF (Fig. 35) zwei unmittelbar auf einander folgende Winkel halbiert, so hat der Durchschnittspunkt O der Halbierungslinien die Eigenschaft, dass er von allen Eckpunkten, wie auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist. Der Punkt O heißt darum der **Mittelpunkt** des regelmäßigen Vieleckes.

Zieht man vom Mittelpunkte eines regelmäßigen Vieleckes zu allen Eckpunkten Gerade, so zerfällt das Vieleck in so viele gleichschenklige und congruente Dreiecke, als es Seiten hat.

Übungsstoff.

1. Wie viel Rechte betragen die Winkel eines a) Fünfeckes, b) Sechseckes, c) Siebeneckes, d) Achteckes, e) Zehneckes?
2. Ein regelmäßiges Achteck ist gegeben; bestimme den Mittelpunkt desselben.

V. Der Cylinder.

§. 19. Betrachtung des senkrechten Cylinders.

Die Grundfläche des betrachteten Cylinders erhält eine wagrechte Lage.

1.

Fig. 36.

Der Körper (Fig. 36) wird von drei Flächen begrenzt. In jeder der beiden Grundflächen kann man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen; die Grundflächen sind ebene Flächen. In der Seitenfläche kann man nur nach einer Richtung, von oben nach unten oder umgekehrt, gerade Linien ziehen; die Seitenfläche ist eine krumme Fläche; sie ist einseitig gekrümmt und heißt auch Mantelfläche. Weil der Körper eine krumme Seitenfläche hat, heißt er ein runder Körper.

Versinnlichung durch das Anlegen eines Lineals.

In jeder der beiden Grundflächen gibt es einen Punkt, welcher von allen Punkten des Umfanges gleich weit entfernt ist. Eine solche Fläche heißt Kreisfläche.

Die Grundflächen sind wagrecht, also parallel. Legt man sie auf einander, so findet man, dass sie sich decken; sie sind congruent. Die Seitenfläche ist lothrecht und steht senkrecht auf den Grundflächen.

Weil der Körper zwei congruente Grundflächen hat, ist er eine Säule; weil er rund ist, heißt er Rundsäule oder Cylinder.

Die beiden Kreisflächen und die Mantelfläche zusammen bilden die Oberfläche des Cylinders.

2.

Der Cylinder hat nur zwei Kanten; diese sind in keinem Theile gerade, sie sind krumme Linien. Jede dieser krummen Linien ist die Grenze einer Kreisfläche; sie heißt darum Kreislinie. Die beiden Kreislinien sind parallel und gleich lang.

Stellt man den Cylinder mit der Mantelfläche auf eine ebene Fläche (die Tischfläche), so berührt er diese in einer geraden Linie. Eine solche Gerade nennt man eine Seite des Cylinders.

An dem betrachteten Cylinder steht jede Seite senkrecht auf den Grundflächen. Der Cylinder heißt deshalb ein senkrechter Cylinder.

3.

Eckpunkte und Winkel kommen am Cylinder nicht vor.

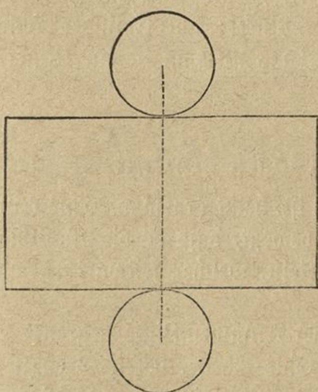
4.

Wird die Mantelfläche des senkrechten Cylinders durch eine Ebene geschnitten, welche zu der Grundfläche parallel ist, so ist der Schnitt eine Kreislinie.

Wird dagegen die Mantelfläche des senkrechten Cylinders durch eine Ebene geschnitten, welche zu der Grundfläche nicht parallel ist, so ist der Schnitt keine Kreislinie, sondern eine länglich krumme Linie, welche Ellipse heißt.

Versinnlichung entweder an einem zerlegbaren Cylinder, dessen Theile durch hölzerne Stifte zusammengefügt sind, oder mittels eines zur Hälfte mit Wasser gefüllten cylindrischen Glases. Steht das Glas senkrecht auf einer horizontalen Fläche, so erscheint der Schnitt der horizontalen Wasserfläche mit der Mantelfläche des Glases als Kreislinie; wird aber das Glas geneigt, so erscheint der Schnitt als Ellipse.

Fig. 37.



5.

Denkt man sich den Mantel des senkrechten Cylinders nach der Richtung einer Seite aufgeschnitten und auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint derselbe als ein Rechteck; wird dann noch die untere Grundfläche nach unten und die obere Grundfläche nach oben gedreht, bis sie mit dem Rechtecke in derselben Ebene liegen, so hat man das Netz des Cylinders. (Fig. 37.)

Versinnlichung durch ein aus Pappe gefertigtes Netz, mit dem man den Cylinder umschließt.

6.

Vergleichung des Cylinders mit den Prismen.

1. Jedes Prisma hat zwei ebene, parallele und congruente Grundflächen; der Cylinder auch. Die Grundflächen der betrachteten Prismen sind gleichseitige Dreiecke, Quadrate und regelmäßige Sechsecke;

die Grundflächen des Cylinders sind Kreisflächen. Ein Prisma hat so viele Seitenflächen, als eine Grundfläche Seiten hat; der Cylinder hat eine einzige Seitenfläche. Die Seitenflächen des Prisma sind ebene Flächen; die Seitenfläche des Cylinders ist krumm. Die Seitenflächen des senkrechten Prisma sind Rechtecke; die Seitenfläche des senkrechten Cylinders bildet, auf eine Ebene ausgebreitet, auch ein Rechteck. Die Seitenflächen des senkrechten Prisma stehen auf den Grundflächen senkrecht; am senkrechten Cylinder steht auch die Mantelfläche auf den Grundflächen senkrecht.

Denkt man sich an einem Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke sind, in den letzteren die Zahl der Seiten ohne Ende vermehrt, so nähert sich jedes dieser Vielecke immer mehr einer Kreisfläche, und das Prisma selbst einem Cylinder. Man sagt darum auch: der Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen Kreisflächen sind.

2. Ein Prisma hat dreimal so viele Kanten als Seitenflächen; der Cylinder hat nur zwei Kanten. Die Kanten des Prisma sind gerade Linien, die des Cylinders Kreislinien. Am Prisma sind je zwei Kanten der unteren und der oberen Grundfläche parallel und gleich; am Cylinder sind auch beide Kanten parallel und gleich.

3. Das Prisma hat Eckpunkte und Winkel; am Cylinder kommen weder Eckpunkte noch Winkel vor. Das Prisma ist ein eckiger, der Cylinder ein runder Körper.

§. 20. Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

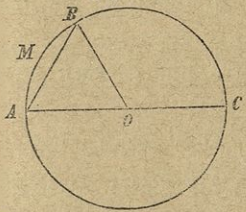
Eine Linie, deren kein Theil gerade ist, heißt krumm. Eine krumme Linie entsteht, wenn sich ein Punkt so bewegt, dass er die Richtung der Bewegung fortwährend ändert. Ein Stein, welcher seitwärts geworfen wird, beschreibt eine krumme Linie.

Eine ebene Fläche, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, heißt eine krummlinige Figur. Eine Ebene, deren Grenzen aus geraden und krummen Linien bestehen, heißt eine gemischtlinige Figur.

1. Der Kreis.

Dreht sich in einer Ebene eine Strecke OA (Fig. 38) um den einen Endpunkt O nach derselben Richtung so lange, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der andere Endpunkt A eine krumme Linie, welche *Kreislinie* heißt, und die Strecke OA selbst eine krummlinige Figur, welche *Kreisfläche* heißt. Die Kreislinie sowohl als auch die Kreisfläche nennt man auch bloß *Kreis*.

Fig. 38.



Aus der Entstehung der Kreislinie geht hervor, dass alle ihre Punkte von dem innerhalb liegenden Punkte O gleich weit entfernt sind. Dieser Punkt heißt darum der *Mittelpunkt* oder das *Centrum* des Kreises.

Die ganze Kreislinie wird auch der *Umfang* oder die *Peripherie* des Kreises genannt. Jeder Theil des Umfanges, wie AB, heißt ein *Kreisbogen*, auch bloß *Bogen*.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein *Halbmesser* des Kreises, wie OA, OB, OC. Da alle Punkte des Umfanges vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind *alle Halbmesser eines Kreises einander gleich*.

Eine Gerade AB, welche die Endpunkte eines Kreisbogens verbindet, heißt *Sehne*. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wie AC, so heißt sie *Durchmesser*. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß, als der Halbmesser; daher sind auch *alle Durchmesser eines Kreises einander gleich*.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, heißt ein *Kreisausschnitt*, wie AOBMA. Der Kreisausschnitt ist eine gemischtlinige Figur.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein *Kreisabschnitt*, wie ABMA. Der Kreisabschnitt ist auch eine gemischtlinige Figur.

Um einen Kreisbogen zu messen, nimmt man einen *Bogengrad*, d. i. den 360sten Theil des Kreisumfanges, als *Einheit des Bogenmaßes* an und untersucht, wie oft diese Einheit in dem zu messenden Bogen enthalten ist. Um auch kleinere Bogen messen zu können, wird ein Bogengrad in 60 *Bogenminuten* ('), und eine Bogenminute in 60 *Bogensecunden* ('') eingetheilt.

Übungsstoff.

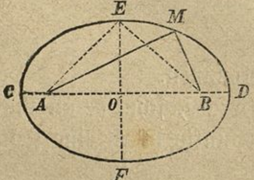
1. Nenne Gegenstände, an denen Kreise vorkommen.
2. Ziehe von einem Punkte aus sehr viele Gerade, schneide an ihnen gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine stetige Linie. Was für eine Linie erhältst du?

3. Zeichne a) aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis von beliebiger Größe, b) mit dem Halbmesser 2*cm* einen Kreis in beliebiger Lage, c) aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis mit dem Halbmesser 2*cm* 6*mm*. Wodurch ist die Lage und die Größe eines Kreises vollkommen bestimmt?
4. Ein Kreis und die Länge seines Halbmessers sind gegeben; wie findet man den Mittelpunkt?
5. Zeichne über der Strecke 3*cm* 4*mm* als Durchmesser einen Halbkreis.
6. Ziehe in einem Kreise zwei Halbmesser; was für Theile der Kreisfläche entstehen dadurch?
7. Ziehe in einem Kreise einen Durchmesser und auf jeder Seite zwei zu ihm parallele Sehnen.
8. Zeichne einen Kreis mit dem Halbmesser 1*cm* 7*mm* und trage in demselben eine Sehne von 2*cm* ein.
9. Ziehe in einem Kreise zwei auf einander senkrechte Durchmesser; in wie viele gleiche Theile zerfällt dadurch der Kreis?
10. Wie viele Bogengrade kommen auf den Halbkreis, wie viele auf den 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 10ten Theil des Kreises?
11. Zeichne ein Rechteck und an zwei gegenüberliegenden Seiten je einen Kreis mit einem Halbmesser, welcher nahe den 6ten Theil einer dieser Seiten beträgt. (Netz eines senkrechten Cylinders.)

2. Die Ellipse.

Befestiget man in den Punkten A und B (Fig. 39) die Enden einer Schnur, spannt sodann die Schnur mittels eines Stiftes M und fährt mit diesem um die beiden Punkte so herum, dass die Schnur immer gespannt bleibt, so beschreibt der Stift eine krumme Linie, welche **Ellipse** heißt.

Fig. 39.



Die Punkte A und B nennt man die **Brennpunkte** der Ellipse. Die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, d. i. die Geraden AM und BM, heißen die **Leitstrahlen** dieses Punktes.

Die Strecke CD, welche durch die Brennpunkte geht, heißt die **große Achse**; die Endpunkte C und D derselben heißen die **Scheitel**, und der Halbierungspunkt O der **Mittelpunkt** der Ellipse.

Die Strecke EF, welche im Mittelpunkte auf der großen Achse senkrecht steht, heißt die **kleine Achse**.

Aus der Entstehung der Ellipse geht hervor, dass sich die Längen der beiden Leitstrahlen AM und BM von Punkt zu Punkt verändern, dass aber ihre Summe stets dieselbe bleibt. Diese Summe stellt die große Achse dar. In der Ellipse ist also **die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der großen Achse gleich**. Auch folgt daraus: **die Entfernung AE eines Endpunktes der kleinen Achse von einem Brennpunkte ist der halben großen Achse gleich**.

Eine Strecke, welche zwei Punkte der Ellipse verbindet, heißt eine **Sehne** derselben. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie **Durchmesser**. Die beiden Achsen sind Durchmesser der Ellipse. Alle Durchmesser werden durch den Mittelpunkt halbiert.

Je kleiner die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte, oder je kleiner der Unterschied zwischen der großen und der kleinen Achse ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise.

Übungsstoff.

1. Nenne Gegenstände, an denen die Form der Ellipse vorkommt.

   Manche Gartenbeete, die Böden von Badewannen, manche Gewölbe. Ein schräge vor das Auge gehaltener Kreis erscheint als Ellipse.

   Die Bahnen, in denen sich unsere Erde und die übrigen Planeten um die Sonne bewegen, sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.

2. In ein gegebenes Rechteck soll eine Ellipse eingezeichnet werden. Wie findet man die große Achse, die kleine Achse und die beiden Brennpunkte?
3. Vergleiche die Ellipse mit dem Kreise.

§. 21. Winkelmessung.

Die Schüler haben bisher die Winkel nur mit dem rechten Winkel verglichen. Nachdem sie aber durch die Betrachtung des Cylinders die Kreislinie kennen gelernt haben, können sie nun auch mit der genaueren Messung der Winkel bekannt gemacht werden.

1.

Theilt man den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Theile, so dass jeder Theil ein Bogengrad ist, und zieht von dem Mittelpunkte zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt herum 360 Winkel, welche zusammen einen vollen Winkel betragen.

Diese Winkel sind unter einander gleich, da bei je zweien, wenn man sie gehörig auf einander legt, die Schenkel zusammenfallen. Jeder solche Winkel, der zu einem Bogengrade gehört, wird auch ein Grad, und zwar ein Winkelgrad genannt. Ein Winkelgrad, d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels, bildet nun die Einheit des Winkelmaßes; er wird in 60 Winkelminuten, und jede Winkelminute in 60 Winkelsecunden eingetheilt. Um einen Winkel zu messen, sollte man eigentlich untersuchen, wie oft ein Winkelgrad in dem zu messenden Winkel enthalten ist. In der That aber geschieht diese Untersuchung nicht unmitelbar, sondern es werden die Winkel mittelbar durch die zugehörigen Kreisbogen gemessen, indem man dabei schließt: Jeder Winkel hat eben so viele Winkelgrade, Winkelminuten und Winkelsecunden, als der aus seinem Scheitel beschriebene Kreisbogen Bogengrade, Bogenminuten und Bogensecunden enthält. Die Grade, Minuten und Secunden der Winkel werden so wie die der Bogen durch ^{0}, $'$, $''$ bezeichnet.

Hieraus folgt:

a) Ein voller Winkel hat 360°, ein gestreckter Winkel 180°, ein hohler weniger als 180°, ein erhabener mehr als 180°, ferner ein rechter Winkel 90°, ein spitzer weniger als 90°, ein stumpfer mehr als 90° aber weniger als 180°.

b) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.

c) Die Winkelsumme eines Dreieckes beträgt 180°.

Übungsstoff.

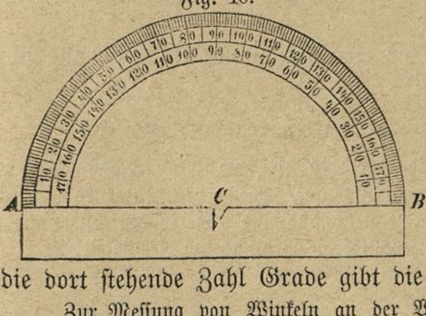
1. Wie viel Grade hat der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 3, 5, 8, 10 Stunden beschreibt?
2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1, 4, 15, 34, 48 Zeitminuten beschreibt?
3. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 4, 7, 9, 11 Uhr bilden?
4. Wie groß ist der Nebenwinkel von 54°, 71°, 27°, 45′, 18° 20′ 58″?
5. Zwei Winkel eines Dreieckes betragen a) 49° und 62°, b) 102° und 29°, c) 17° 28′ und 65° 41′, d) 72° 35′ 50″ und 53° 18′ 44″; wie groß ist der dritte Winkel?

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist ein spitzer Winkel a) 59°, b) 38° 38′, c) 15° 27′ 51″; wie groß ist der andere spitze Winkel?
7. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
8. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie 37° 12′ ist?
9. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel 59° 19′ 42″ beträgt?
10. Wie groß ist jeder spitze Winkel in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke?
11. In einem Parallelogramme beträgt ein Winkel a) 37°, b) 95° 15′ c) 66° 19′ 8″; wie groß sind die übrigen drei Winkel?
12. Wie viel Grade beträgt die Summe aller Winkel in einem a) Fünfecke, b) Sechsecke, c) Achtecke, d) Neunecke, e) Zehnecke?
13. Wie groß ist jeder Winkel eines regelmäßigen a) Fünfeckes, b) Sechseckes, c) Achteckes, d) Zehneckes?
14. Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck; suche den Mittelpunkt, verbinde ihn mit allen Eckpunkten und bestimme die drei Winkel in einem der dadurch entstehenden congruenten Dreiecke.

2.

Zum Messen und Auftragen der Winkel bedient man sich des **Winkelmessers** oder **Transporteurs** (Fig. 40). Dieser ist ein in 180 Grade eingetheilter Halbkreis aus Holz, Messing oder Pappe, bei welchem die Kante AB den Durchmesser und der Punkt C am Einschnitte den Mittelpunkt vorstellt.

Fig. 40.



Will man einen Winkel messen, so legt man den Mittelpunkt des Transporteurs so auf den Scheitel des Winkels, dass der Halbmesser über den einen Schenkel zu liegen kommt; dann zählt man von diesem Halbmesser aus die Grade bis zu dem Theilstriche, durch welchen der zweite Schenkel geht; die dort stehende Zahl Grade gibt die Größe des Winkels an.

Zur Messung von Winkeln an der Wandtafel dient ein Transporteur aus Holz oder Pappe von etwa 3 Decimeter Durchmesser. Die Schüler sind mit kleineren Transporteuren aus Messing oder steifem Papier versehen; die letzteren können sie sich unter Beihilfe des Lehrers selbst anfertigen.

Übungsstoff.

1. An der Wandtafel stehen mehrere Winkel. Schätze sie mit freiem Auge nach Graden ab und prüfe dann die Richtigkeit der Angaben durch Messung mit dem Transporteur.
2. Wie misst man mit dem Transporteur einen erhabenen Winkel?
3. Zeichne auf deine Schreibtafel verschiedene spitze, stumpfe und erhabene Winkel, gib ihre Größe durch Abschätzung an und miss sie sodann mit dem Transporteur.
4. Ziehe von einem Punkte einer Geraden auf einer Seite derselben mehrere Gerade, miss die dadurch entstehenden neben einander liegenden Winkel und addiere sie. Wie groß ist die Summe? Wie groß muss die richtige Summe sein?
5. Ziehe von einem Punkte aus mehrere Gerade, miss alle rings um den Punkt gelegenen Winkel und bestimme ihre Summe.
6. Zeichne zwei parallele und eine dritte sie schneidende Gerade und miss die dadurch entstehenden acht Winkel.
7. Zeichne an der Wandtafel nach dem Augenmaße mit freier Hand einen Winkel von 90°, 45°, 30°, 60°, 10°.
8. Wie trägt man mit dem Transporteur einen erhabenen Winkel auf?
9. Zeichne auf die Schreibtafel a) nach dem Augenmaße, b) mit dem Transporteur einen Winkel von 19°, 37°, 88°, 92°, 137°, 206°, 300°.
10. Ein Winkel ist gezeichnet; miss denselben und zeichne einen zweiten Winkel von gleicher Größe.
11. Zeichne ein Trapezoid, miss die vier Winkel und trage sie alle um denselben Scheitel herum auf.
12. Zeichne über einer gegebenen Strecke ein regelmäßiges Fünfeck.

Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes ist $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Trage daher in den Endpunkten der Strecke zwei Winkel von 108° auf, schneide von den neuen Schenkeln Stücke ab, welche der gegebenen Strecke gleich sind, und trage in den Endpunkten wieder zwei Winkel von 108° auf. Wie geschieht die Prüfung der Richtigkeit?

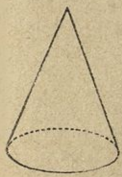
VI. Der Kegel und der Kegelstumpf.

§. 22. Betrachtung des senkrechten Kegels.

1.

Der Kegel (Fig. 41) hat zwei Flächen; eine Grundfläche und eine Seitenfläche.

Fig. 41.



Die Grundfläche ist eine ebene Fläche, und zwar ein Kreis. Die Seitenfläche ist eine krumme Fläche; sie heißt auch der Mantel des Kegels. Die Mantelfläche läuft in einen Punkt aus, welcher die Spitze des Kegels heißt. Durch jeden Punkt der Mantelfläche läſst sich nur in einer Richtung, nämlich in derjenigen, welche durch die Spitze geht, eine gerade Linie ziehen; der Mantel des Kegels ist daher einseitig gekrümmt.

Weil der Kegel eine krumme Seitenfläche hat, heißt er ein runder Körper.

Die Kreisfläche und die Mantelfläche zusammen bilden die Oberfläche des Kegels.

2.

Der Kegel hat nur eine Kante; sie ist eine Kreislinie.

Stellt man den Kegel mit der Mantelfläche auf die ebene Tischfläche, so berührt er diese in einer geraden Linie, welche man eine Seite des Kegels nennt.

An dem betrachteten Kegel sind alle Seiten gleich lang; er heißt deshalb ein senkrechter Kegel.

3.

Der Kegel hat nur einen Eckpunkt: die Spitze. Winkel kommen am Kegel nicht vor.

4.

Wird die Mantelfläche eines senkrechten Kegels durch eine Ebene geschnitten, welche zu der Grundfläche parallel ist, so ist der Schnitt eine Kreislinie.

Wird die Mantelfläche eines senkrechten Kegels durch eine Ebene geschnitten, welche zu der Grundfläche schief ist, welche jedoch alle Seiten des Mantels trifft, so ist der Schnitt eine Ellipse.

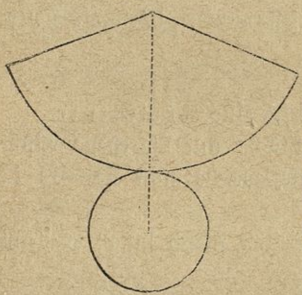
Wird die Mantelfläche eines senkrechten Kegels durch eine Ebene geschnitten, welche zu einer Seite desselben parallel ist, so ist der Schnitt eine krumme Linie, welche Parabel heißt.

Wird endlich die Mantelfläche eines senkrechten Kegels durch eine Ebene geschnitten, welche nicht alle Seiten des Mantels trifft und auch zu keiner Seite des Kegels parallel ist, so ist der Schnitt eine krumme Linie, welche Hyperbel heißt.

Der Kreis, die Ellipse, Parabel und Hyperbel heißen deshalb auch Kegelschnittslinien. Die Parabel und die Hyperbel sind für das gewöhnliche Leben von geringer Bedeutung.

Die Versinnlichung geschieht mittels eines zerlegbaren Kegels. Auch kann dazu ein kegelförmig zugespitztes Trinkglas, das etwa bis zur Mitte mit Wasser gefüllt wird, benützt werden. Steht das Glas senkrecht auf einer horizontalen Fläche, so schneidet die horizontale Wasserfläche den Mantel des Kegels in einem Kreise. Wird das Glas oben geschlossen, damit das Wasser nicht herausfließen kann, und dann so weit geneigt, bis die Wasserfläche zu einer Seite des Kegels parallel wird, so ist der Schnitt eine Parabel; neigt man das Glas weniger, so ist der Schnitt eine Ellipse; neigt man es mehr, so ist der Schnitt eine Hyperbel.

Fig. 42.



5.

Denkt man sich den Mantel des senkrechten Kegels nach der Richtung einer Seite aufgeschnitten und auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint er als ein Kreisausschnitt; wird dann noch die Grundfläche nach unten gedreht, bis sie mit dem Kreisausschnitte in derselben Ebene liegt, so hat man das Netz des senkrechten Kegels. (Fig. 42.)

Versinnlichung durch Umschließen des Kegels mit einem aus Pappe gefertigten Netze.

6.

Vergleichung des Kegels mit den Pyramiden.

In ähnlicher Weise wie die Vergleichung des Cylinders mit den Prismen. Dabei ist insbesondere der Sinn der Ausdruckweise: Der Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, klar zu legen.

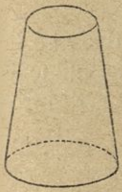
§. 23. Betrachtung des senkrechten Kegelstumpfes.

Schneidet man einen Kegel durch eine Ebene, welche zu der Grundfläche parallel ist, so wird derselbe in zwei Körper getheilt; der Körper zwischen der Schnittfläche und der Spitze ist wieder ein Kegel; der Körper aber zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche heißt ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf.

1.

Der Kegelstumpf (Fig. 43) hat drei Flächen: die untere und die obere Grundfläche und eine Seitenfläche.

Fig. 43.



Die beiden Grundflächen sind ebene Flächen, und zwar Kreisflächen. Die Seitenfläche ist krumm, und zwar einseitig gekrümmt; sie heißt auch die Mantelfläche des Kegelstumpfes.

Weil die Seitenfläche eines Kegelstumpfes krumm ist, heißt er ein runder Körper.

Die beiden Grundflächen sind parallel. Die obere Grundfläche ist kleiner als die untere. Zwei Kreise haben immer dieselbe Gestalt; sind sie daher nicht congruent, d. i. haben sie nicht auch dieselbe Größe, so sind sie ähnlich. Die Grundflächen des Kegelstumpfes sind also ähnliche Kreise.

Die beiden Grundflächen und der Mantel zusammen bilden die Oberfläche des Kegelstumpfes.

2.

Der Kegelstumpf hat zwei Kanten; sie sind Kreislinien und einander parallel.

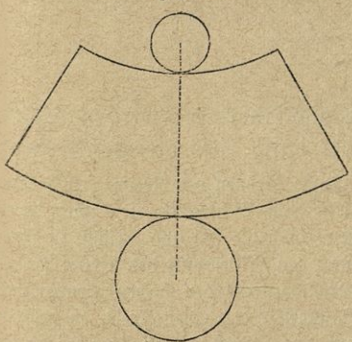
Stellt man den Kegelstumpf mit der Mantelfläche auf eine Ebene, so berührt er diese in einer geraden Linie, welche man eine Seite des Kegelstumpfes nennt.

An dem betrachteten Kegelstumpfe sind alle Seiten gleich lang; er heißt deshalb ein senkrechter Kegelstumpf.

3.

Eckpunkte und Winkel kommen am Kegelstumpfe nicht vor.

Fig. 44.



4.

Denkt man sich den Mantel des senkrechten Kegelstumpfes nach der Richtung einer Seite aufgeschnitten und auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint er als eine gemischtlinige Figur, welche von zwei parallelen Kreisbogen und von zwei Geraden begrenzt wird; wird dann noch die untere Grundfläche nach unten und die obere Grundfläche nach oben gedreht, bis sie mit der früheren Figur in derselben Ebene liegen, so hat man das Netz des Kegelstumpfes. (Fig. 44.)

§. 24. Beziehungen des Kreises zu den einzelnen Gebilden in der Ebene.

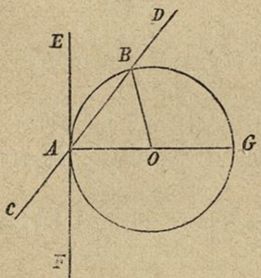
1. Der Kreis und der Punkt.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, oder in dem Umfange desselben, oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte des Kreises kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser.

2. Der Kreis und die Gerade.

Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser.

Fig. 45.



Eine Gerade, welche mit der Kreislinie zwei Punkte gemeinschaftlich hat, heißt Sehne, wenn sie ganz innerhalb des Kreises liegt, und Secante, wenn sie aus dem Kreise heraustritt. AB (Fig. 45) ist eine Sehne, CD eine Secante.

Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, während alle anderen Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, heißt Tangente.

Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf ihn eine Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Übungsstoff.

1. Drei Punkte A, B und C, welche nicht in einer Geraden liegen, sind gegeben; zeichne einen Kreis, der durch diese drei Punkte geht.

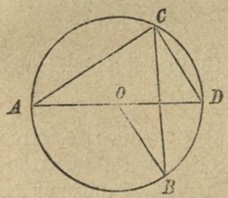
Ziehe die Geraden AB und BC, welche Sehnen des Kreises sein sollen; halbiere die AB und errichte in ihrer Mitte eine Senkrechte, diese muss durch den Mittelpunkt des Kreises gehen; halbiere auch die BC und errichte in ihrer Mitte eine Senkrechte, diese muss auch durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Der Mittelpunkt liegt also in dem Durchschnitte O der beiden Senkrechten. Beschreibst du daher aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so geht er auch durch die Punkte B und C. Durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

2. Ein Kreisbogen ist gegeben; suche den Mittelpunkt desselben.
3. Zeichne über einer Strecke als Durchmesser einen Kreis.
4. Zeichne in einen Kreis mehrere parallele Sehnen; in welcher Beziehung steht ihre Länge zu ihrer Entfernung vom Mittelpunkte?
5. Bestimme in einem Kreise zwei gleiche Bogen und zeichne ihre Sehnen; wie müssen auch diese bezüglich ihrer Länge beschaffen sein?
6. Nimm in dem Umfange eines Kreises einen Punkt an und ziehe durch denselben eine Tangente an den Kreis.

3. Der Kreis und der Winkel.

Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises liegt, dessen Schenkel daher Halbmesser des Kreises sind, heißt ein *Mittelpunktswinkel*. Ein Winkel, dessen Scheitel in dem Umfange eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein *Umfangswinkel* des Kreises.

Fig. 46.



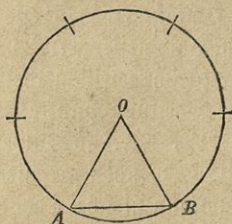
AOB (Fig. 46) ist ein Mittelpunktswinkel, ACB ein Umfangswinkel.

Gehen die Schenkel eines Umfangswinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers, so heißt derselbe ein *Winkel im Halbkreise*. ACD ist ein Winkel im Halbkreise.

Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Es sei (Fig. 47) O der Mittelpunkt eines Kreises und die Sehne AB = AO.

Fig. 47.



Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60°. Der Mittelpunktswinkel AOB beträgt also 60°, und der dazu gehörige Bogen AB ist der sechste Theil des Kreisumfanges. *Trägt man also in einen Kreis den Halbmesser als Sehne ein, so ist der dazu gehörige Bogen der sechste Theil des Kreisumfanges.*

Übungsstoff.

1. Zeichne einen Kreisbogen und halbiere ihn.

   Bestimme in dem Kreisbogen einen Punkt so, dass er von den Endpunkten des Bogens gleich weit absteht, und verbinde ihn mit dem Mittelpunkte des Kreises durch eine Gerade.

2. Theile den Umfang eines Kreises in 2 gleiche Theile.
3. Theile den Kreisumfang in 4, 8 gleiche Theile.
4. Theile den Kreisumfag in 6, 12 gleiche Theile.
5. Theile den Kreisumfang in 3 gleiche Theile.

Nimm von 6 gleichen Theilen immer 2 zusammen für einen Theil.

6. Wenn man den Kreisumfang in 5, 9, 10, 15 gleiche Theile theilt und zu den Theilungspunkten Halbmesser zieht, wie viel Grade enthält jeder Mittelpunktswinkel?
7. Zeichne mit dem Transporteur den 5. Theil von 360°, d. i. einen Winkel von 72° als Mittelpunktswinkel und trage die entsprechende Sehne in dem Umfange herum; in wie viele gleiche Theile wird dadurch der Umfang getheilt?
8. Theile ebenso den Kreisumfang in 9, 10 gleiche Theile.
9. Zeichne über einer Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck.

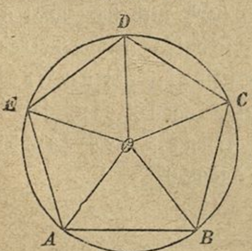
Beschreibe über der Strecke als Durchmesser einen Halbkreis und verbinde einen Punkt desselben mit den Endpunkten der Strecke durch Gerade.

10. Gegeben ist ein Kreis und ein Punkt außerhalb desselben; ziehe von dem Punkte zwei Tangenten an den Kreis.

Ziehe von dem Punkte zu dem Mittelpunkte des Kreises eine Gerade, schreibe über ihr als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, und ziehe von den beiden Durchschnittspunkten zu dem gegeben Punkte Gerade; diese sind Tangenten des gegebenen Kreises. Warum?

4. Der Kreis und das regelmäßige Vieleck.

Fig. 48.



Ist (Fig. 48) der Umfang eines Kreises, welcher aus O mit dem Halbmesser OA beschrieben wird, in mehrere gleiche Theile getheilt und zieht man durch die Theilungspunkte die Sehnen AB, BC, CD, DE, EA, so bilden diese ein Vieleck ABCDE, welches so viele Seiten hat als der Kreisumfang gleiche Theile. Die Seiten dieses Vieleckes sind als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, einander gleich; das Vieleck ist also gleichwinklig.

Da ferner die Dreiecke ABO, BCO, CDO, ... gleichschenklig und congruent sind, so sind in denselben alle Winkel an den Grundlinien einander gleich; zwei solche Winkel zusammen bilden aber einen Umfangswinkel des Vieleckes; also sind auch alle Umfangswinkel des Vieleckes einander gleich. Das Vieleck ABCDE ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig. Daraus folgt der Satz:

Theilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile und zieht durch je zwei auf einander folgende Theilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

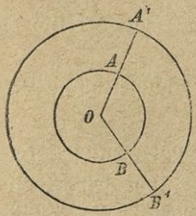
Der Mittelpunkt des Kreises ist zugleich der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes.

Übungsstoff.

1. Zeichne mit Hilfe der Kreistheilung a) ein Quadrat, b) ein regelmäßiges Achteck.
2. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 2 *cm*.
3. Zeichne ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Zehneck.

5. Lage zweier Kreise gegen einander.

Fig. 49.

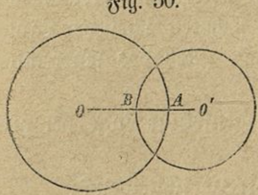


Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise (Fig. 49). Die zwischen ihren Umfängen liegende Fläche heißt Kreisring. Ein Theil des Kreisringes, welcher von zwei Halbmessern abgeschnitten wird, heißt ein Ringausschnitt, wie AA′BB′.

Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, heißen excentrische Kreise. Die Gerade, welche die Mittelpunkte zweier excentrischen Kreise verbindet, heißt die Centrale der beiden Kreise.

Zwei excentrische Kreislinien können zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

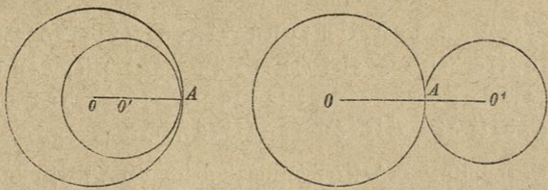
Fig. 50.



a) Haben die beiden Kreislinien zwei Punkte gemeinschaftlich (Fig. 50), so durchschneiden sie sich in diesen Punkten. Das gemeinschaftliche Stück der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

b) Haben die beiden Kreislinien nur einen Punkt gemeinschaftlich, so berühren sie sich von innen (Fig. 51, I.) oder von außen (Fig. 51, II.).

I. Fig. 51. II.



Bei der inneren Berührung zweier Kreise ist die Centrale OO′ gleich dem Unterschiede der Halbmesser AO — AO′; bei der äußeren Berührung ist die Centrale OO′ gleich der Summe der Halbmesser AO+AO′. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

c) Haben die beiden Kreislinien keinen Punkt gemeinschaftlich, so liegt entweder die eine ganz innerhalb der andern, oder es liegt jede ganz außerhalb der andern.

Übungsstoff.

1. Zeichne mit den Halbmessern 2*cm*, 25*mm* und 3*cm* drei concentrische Kreise.
2. Zeichne mit den Halbmessern 32*mm* und 19*mm* zwei Kreise, die sich a) von innen, b) von außen berühren.
3. Können sich zwei Kreise, welche gleiche Halbmesser haben, von innen berühren?
4. Zeichne einen Kreisausschnitt und an dessen Bogen einen Kreis, welcher den Bogen berührt, und dessen Halbmesser nahe den sechsten Theil der ganzen Länge jenes Bogens beträgt. (Netz des senkrechten Kegels.)
5. Zeichne einen Kreisausschnitt und schneide davon durch einen aus dem Mittelpunkte beschriebenen Bogen einen Theil ab; der übrige Theil ist ein Ringausschnitt. Zeiche dann auf den entgegengesetzten Seiten der Bogen dieses Ringausschnittes zwei Kreise, welche die Bogen berühren, und deren jeder nahe den sechsten Theil der Länge des bezüglichen Bogens zum Halbmesser hat. (Netz des senkrechten Kegelstumpfes.)
6. Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich?
7. In wie vielen Punkten können sich drei Kreise schneiden?

8. Zeichne einen Kreis und beschreibe in denselben zwei gleiche Kreise so, dass sie den ersten Kreis von innen und sich selbst von außen berühren.
9. Beschreibe drei gleiche Kreise, welche sich von außen berühren.
10. Beschreibe mit den Halbmessern 28*mm*, 24*mm* und 2*cm* drei Kreise, welche sich von außen berühren.

VII. Die Kugel.

§. 25. Betrachtung der Kugel.

1.

Die Kugel wird von einer einzigen Fläche begrenzt. Diese Fläche ist krumm, und zwar allseitig gekrümmt, weil man auf ihr nach keiner Richtung hin eine gerade Linie ziehen kann; sie hat ferner die Eigenschaft, dass alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkte gleichweit entfernt sind.

Die krumme Fläche der Kugel heißt ihre Oberfläche. Weil die Kugel eine krumme Oberfläche hat, ist sie ein runder Körper.

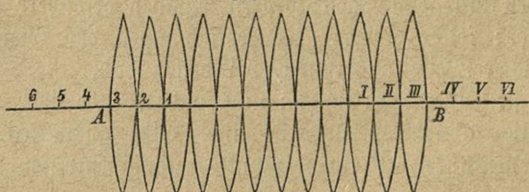
2.

Kanten, Eckpunkte und Winkel kommen an der Kugel nicht vor.

3.

Da sich auf der Oberfläche der Kugel keine gerade Linie ziehen läst, so kann dieselbe nicht in eine Ebene ausgebreitet werden; daher läst sich auch von ihr kein vollkommen genaues Netz construieren. Ein angenähertes Netz erhält man auf folgende Art:

Fig. 52.



Man theile eine Gerade AB (Fig. 52) in 12 gleiche Theile und trage auf deren Verlängerungen über A und B hinaus noch 9 solche Theile auf. Beschreibt man nun mit einem Halbmesser von 10 solchen

Theilen aus den Punkten 1, 2, 3, . . ., und ebenso aus den Punkten I, II, III, . . . Kreisbogen, welche die Gerade AB durchschneiden, so erhält man 12 gleiche linsenförmige Figuren, welche sorgfältig zusammengebogen ziemlich genau die Kugeloberfläche geben.

§. 26. Die Körper und ihre Entstehung aus der Bewegung einer Fläche.

1. Eintheilung der Körper.

Ein Körper ist ein von allen Seiten begrenzter Raum. Die Grenzen des Körpers heißen Flächen. Alle Grenzflächen zusammen bilden die Oberfläche des Körpers.

Man unterscheidet eckige und runde Körper. Ein Körper, welcher von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, heißt ein eckiger Körper. Ein Körper, welcher entweder bloß von krummen, oder theils von ebenen theils von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein runder Körper.

Nenne a) die eckigen, b) die runden Körper, die du kennen gelernt hast.

Wenn der Körper mit einer Grenzfläche auf einer Ebene aufliegt, so heißt diese die Grundfläche, und wenn er noch eine zweite mit dieser parallele Fläche hat, so sagt man: der Körper hat zwei parallele Grundflächen. Die übrigen Flächen des Körpers heißen Seitenflächen. Alle Seitenflächen zusammen nennt man die Seitenoberfläche.

Die Durchschnittslinie zweier Grenzflächen heißt eine Kante des Körpers.

Die eckigen Körper werden in regelmäßige und unregelmäßige eingetheilt. Regelmäßige Körper heißen diejenigen, deren sämmtliche Grenzflächen regelmäßige und congruente Figuren sind; alle übrigen Körper heißen unregelmäßig.

Welche regelmäßige Körper hast du kennen gelernt?

Unter den unregelmäßigen Körpern kommen besonders zwei Arten sehr häufig vor: solche Körper, welche sich über der Grundfläche in durchaus gleicher Weise ausdehnen, bei denen daher die Seitenkanten parallel sind, sie heißen Prismen; und solche, welche über der Grundfläche allmählich abnehmen und in eine Spitze auslaufen, bei denen daher alle Seitenkanten in einem Punkte zusammentreffen, sie heißen Pyramiden.

2. Das Prisma.

Wenn sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und mit einander parallele Linien beschreiben, so entsteht ein Körper, welcher Ecksäule oder Prisma heißt.

Aus der Entstehung des Prisma folgt:

1. Das Prisma hat zwei parallele und congruente Grundflächen.
2. Die Seitenflächen sind Parallelogramme.
3. Die Seitenkanten sind parallel und einander gleich.
4. Wird das Prisma durch eine Ebene geschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Schnittfigur mit der Grundfläche congruent.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man dreiseitige, vierseitige oder mehrseitige Prismen.

Nach der Lage der Seitenkanten gegen die Grundfläche unterscheidet man senkrechte und schiefe Prismen. Senkrecht heißt ein Prisma, wenn die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen; jedes andere Prisma heißt schief. In einem senkrechten Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke, und die Höhe ist gleich einer Seitenkante.

Ein senkrechtes Prisma, in welchem auch die Grundflächen Rechtecke sind, heißt rechtwinklig. Ein rechtwinkliges Prisma wird von sechs Rechtecken begrenzt. Drei Kanten, die in einer Ecke zusammentreffen, bestimmen die drei Ausdehnungen des rechtwinkligen Prisma: die Länge, Breite und Höhe.

Sind alle drei Ausdehnungen eines rechtwinkligen Prisma einander gleich, so heißt es Würfel, Cubus oder Hexaeder.

Ein Würfel wird von sechs Quadraten begrenzt.

Nenne verschiedene Gegenstände, welche die Gestalt eines Prisma haben. (Der Kasten, die Wandtafel, das Lesebuch, das Schulzimmer, — ein behauener Balken, eine Mauer, eine Kiste u. s. w.)

3. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

a) Wenn sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und in einem Punkte zusammentreffende Linien beschreiben, so entsteht ein Körper, welcher Spitzsäule oder Pyramide heißt.

Aus dieser Entstehungsweise einer Pyramide folgt:

1. Die Grundfläche einer Pyramide ist irgend ein Vieleck.
2. Die Seitenflächen sind Dreiecke.
3. Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene schneidet, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Schnittfigur mit der Grundfläche ähnlich.

Der Punkt, in welchem die Seitenkanten zusammentreffen, heißt die Spitze, und die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Je nachdem eine Pyramide drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat, heißt sie dreiseitig, vierseitig oder mehrseitig.

Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, und trifft die Höhe in den Mittelpunkt der Grundfläche, so heißt die Pyramide senkrecht; jede andere heißt schief. In einer senkrechten Pyramide sind alle Seitenkanten gleich, und alle Seitenflächen sind congruente Dreiecke. In einer senkrechten Pyramide heißt die Senkrechte von der Spitze auf eine Grundkante die Seitenhöhe.

Nenne Gegenstände, welche die Gestalt einer Pyramide haben. (Das Dach eines Thurmes oder Zeltes, Denksäulen, ein Lattennagel ohne Kopf u. dgl.)

b) Wird die Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so heißt der untere Theil eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf, der obere Theil die Ergänzungspyramide des Stumpfes.

Die zwei Grundflächen eines Pyramidenstumpfes sind ähnliche Vielecke, die Seitenflächen sind Trapeze.

Der Abstand der beiden Grundflächen eines Pyramidenstumpfes heißt die Höhe des Stumpfes.

Ist die durchschnittene Pyramide senkrecht, so heißt auch der Pyramidenstumpf senkrecht. In einem senkrechten Pyramidenstumpfe sind die Seitenkanten gleich, und die Seitenflächen sind congruente Trapeze. Unter der Seitenhöhe eines senkrechten Pyramidenstumpfes versteht man den Abstand zweier Grundkanten einer Seitenfläche.

Nenne Gegenstände, welche die Gestalt eines Pyramidenstumpfes haben. (Ein vierkantiger Balken, der an beiden Enden ungleiche Dicke hat, eine Grube, die Füße eines Tisches, u. dgl.)

4. Regelmäßige Körper.

Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

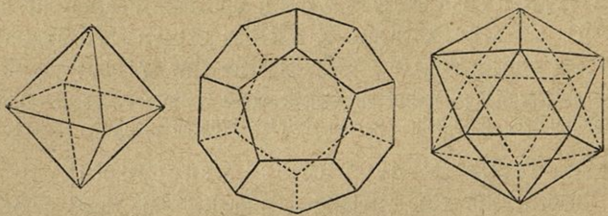
Zwei derselben sind schon betrachtet worden, nämlich:

1. Das Hexaeder (Würfel oder Cubus).
2. Das Tetraeder.

Außer diesen sind noch regelmäßig:

Fig. 53.

I. II. III.



3. Das Oktaeder (Fig. 53, I). Dasselbe hat 8 Flächen, welche gleichseitige Dreiecke sind, und von denen je vier in einem Eckpunkte zusammentreffen; es hat 12 Kanten und 6 Eckpunkte.
4. Das Dodekaeder (Fig. 53, II) mit 12 Flächen, welche regelmäßige Fünfecke sind, und von denen je drei in einem Eckpunkte zusammentreffen; es hat 30 Kanten und 20 Eckpunkte.
5. Das Ikosaeder (Fig. 53, III.) mit 20 Flächen, welche gleichseitige Dreiecke sind, und von denen je fünf in einem Eckpunkte zusammentreffen; es hat 30 Kanten und 12 Eckpunkte.

5. Der Cylinder.

Bewegt sich eine Kreisfläche parallel mit ihrer ursprünglichen Lage und in unveränderter Größe so fort, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt, so entsteht ein Körper, welcher Cylinder heißt.

Die Grundflächen des Cylinders sind demnach zwei parallele und congruente Kreise; die Seitenfläche ist krumm und heißt auch der Mantel des Cylinders. Auf der Mantelfläche des Cylinders kann man nur nach einer Richtung gerade Linien ziehen. Eine solche Gerade heißt eine Seite des Cylinders.

Ein Cylinder kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundflächen Kreise sind.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe, und die Gerade, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, die Achse des Cylinders.

Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Rechteck um eine seiner Seiten dreht. In einem senkrechten Cylinder sind alle Seiten gleich, und die Achse stellt zugleich die Höhe vor.

Wird ein senkrechter Cylinder durch eine Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur ein Rechteck, wenn die Schnittebene mit der Achse parallel ist; ein Kreis, wenn sie mit der Grundfläche parallel ist; und für jede andere Lage der Schnittebene eine Ellipse.

Nenne Gegenstände, welche die Gestalt eines Cylinders haben. (Büchsen, Bleistifte, Baumstämme, Mühlsteine, Kerzen, Gläser, Röhren u. dgl.)

6. Der Kegel und der Kegelstumpf.

a) Bewegt sich eine Kreisfläche parallel mit ihrer ursprünglichen Lage in stetig bis zu einem Punkte abnehmender Größe so fort, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt, so entsteht ein Körper, welcher Kegel heißt.

Die Grundfläche des Kegels ist demnach ein Kreis; die Seitenfläche ist krumm und heißt der Mantel des Kegels. Der Punkt, in welchen die Mantelfläche ausläuft, heißt die Spitze des Kegels. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche nennt man die Höhe, und die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, die Achse des Kegels. Eine Gerade, welche von der Spitze zum Umfange der Grundfläche gezogen wird, heißt eine Seite.

Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten dreht. In einem senkrechten Kegel sind alle Seiten gleich, und die Achse ist zugleich die Höhe.

Wird ein senkrechter Kegel durch die Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur ein gleichschenkliges Dreieck, wenn die Schnittebene durch die Achse geht; ein Kreis, wenn sie mit der Grundfläche parallel ist; und für jede andere Lage der Schnittebene entweder eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel.

Nenne Gegenstände, welche die Gestalt eines Kegels haben. (Ein Zuckerhut, ein Trichter, manche Thurmspitzen, ausgeästete Tannenstämme, Möhren u. dgl.)

b) Wird ein Kegel durch eine Ebene, welche mit der Grundfläche parallel ist, durchschnitten, so heißt der untere Theil ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf, der obere Theil der Ergänzungskegel des Stumpfes.

Die Grundflächen des Kegelstumpfes sind ähnliche Kreise, die Mantelfläche ist krumm.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe, die Gerade, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, die Achse, und eine Gerade, welche von einem Punkte der oberen Kreislinie längs der Mantelfläche bis zur unteren Kreislinie gezogen wird, eine Seite des Kegelstumpfes.

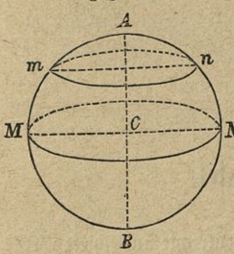
Ist der durchschnittene Kegel senkrecht, so heißt auch der Kegelstumpf ein senkrechter. In einem senkrechten Kegelstumpfe sind alle Seiten gleich, und die Achse ist zugleich die Höhe.

Nenne Gegenstände, welche die Gestalt eines Kegelstumpfes haben. (Runde Baumstämme ohne die Spitze, Blumentöpfe, viele Gefäße, Gläser u. dgl.)

7. Die Kugel.

Dreht sich ein Halbkreis AMB (Fig. 54) um seinen Durchmesser AB, so entsteht ein Körper, welcher Kugel heißt. Den Durchmesser AB nennt man die Achse, ihre Mitte C den Mittelpunkt und ihre Endpunkte A und B die Pole der Kugel.

Fig. 54.



Die Kugel wird demnach von einer einzigen so gekrümmten Fläche begrenzt, dass alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit entfernt sind.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser, und eine Gerade, welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zu dem entgegengesetzten Punkte der Oberfläche geht, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; ebenso alle Durchmesser.

Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Schnittfigur ein Kreis. Dieser ist um so größer, je näher am Mittelpunkte die Schnittebene liegt. Am größten wird ein solcher Kreis, wenn die Schnittebene durch den Mittelpunkt geht; er hat mit der Kugel denselben

Mittelpunkt und denselben Halbmesser und heißt ein größter Kreis der Kugel.

Jede Ebene, welche die Kugel schneidet, theilt diese in zwei Körper, welche Kugelabschnitte heißen. Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt, so ist jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel. Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes heißt Kugelmütze.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so sind diese Schnitte zwei Parallelkreise. Der zwischen ihnen befindliche Theil der Kugeloberfläche heißt Zone oder Gürtel. Der Bogen Mm in Fig. 54 beschreibt während der Umdrehung des Halbkreises AMB eine Zone.

VIII. Wiederholende Zusammenstellung des gewonnenen Lehrstoffes.

Damit die aus der Betrachtung der Körper gewonnenen Anschauungen der geometrischen Gebilde befestiget und zum unverlierbaren Eigenthume der Schüler gebracht werden, wird der Lehrer zum Schlusse eine geordnete Wiederholung des gesammten Lehrstoffes folgen lassen. Dabei kann ihm folgende Zusammenstellung als Leitfaden dienen.

§. 27.

I. Die geometrischen Grundvorstellungen.

1. Der Punkt.
2. Die Linie.
   Gerade, gebrochene und krumme Linien.
3. Die Fläche.
   Ebene, gebrochene und krumme Flächen.
4. Der Körper.
   Eckige und runde Körper.

II. Gerade Linien und Winkel.

1. Richtung der Geraden.
   Lothrechte, wagrechte und schräge Gerade. Parallele, senkrechte und schiefe Gerade.
2. Größe der Geraden.
   Gleiche und ungleiche Gerade. Messen der Geraden.
3. Winkel und ihre Arten.
   Spitze, rechte, stumpfe; hohle, gestreckte, erhabene, volle Winkel.
   Neben- und Scheitelwinkel. Gegen- und Wechselwinkel.
4. Größe der Winkel.
   Gleiche und ungleiche Winkel. Winkelmessung.

III. Geradlinige Figuren.

1. Das Dreieck.

Seiten und Winkel des Dreieckes.

Ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke. Spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke. Grundlinie und Höhe.

2. Das Viereck.

Seiten, Winkel und Diagonalen des Viereckes.

Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme. Rhomboide, Rhomben, Rechtecke und Quadrate.

Grundlinie und Höhe.

3. Das Vieleck.

Seiten, Winkel und Diagonalen des Vieleckes.

Regelmäßige und unregelmäßige Vielecke.

4. Vergleichung der geradlinigen Figuren.

Gleiche, ähnliche, congruente Figuren.

IV. Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

1. Der Kreis.

a) Der Kreis und der Punkt.

b) Der Kreis und die Gerade.

Halbmesser, Durchmesser, Sehne, Tangente, Secante. Bogen. Kreisabschnitt und Kreisausschnitt.

c) Der Kreis und der Winkel.

Mittelpunkts- und Umfangswinkel, Winkel im Halbkreise.

d) Der Kreis und das regelmäßige Vieleck.

e) Gegenseitige Lage zweier Kreise.

Kreisring, Ringausschnitt, Linse, Mond.

2. Die Ellipse.

Brennpunkte, große und kleine Achse, Scheitel der Ellipse.

V. Flächen.

1. Ebene Flächen.

a) Die Ebene und die Gerade.

Die Gerade ist zu einer Ebene parallel, senkrecht oder schief.

b) Lage der Ebenen.

Lothrechte, wagrechte und schräge Ebenen.

Parallele, senkrechte und schiefe Ebenen.

2. Krumme Flächen.

Einseitig und allseitig gekrümmte Flächen.

Cylinderfläche, Kegelfläche und Kugelfläche.

VI. Körper.

1. Eckige Körper.

a) Das Prisma.

Grundflächen, Seitenflächen und Höhe.
Senkrechte und schiefe Prismen. Rechtwinkliges Prisma. Würfel.
Schnitt und Netz.

b) Die Pyramide.

Grundfläche, Seitenflächen, Spitze, Höhe und Seitenhöhe.
Senkrechte und schiefe Pyramiden.
Schnitt und Netz.
Pyramidenstumpf.

c) Die regelmäßigen Körper.

Tetraeder, Octaeder, Ikosaeder, Hexaeder, Dodekaeder.

2. Runde Körper.

a) Der Cylinder.

Grundflächen, Mantel, Achse, Höhe, Seite.
Senkrechte und schiefe Cylinder.
Schnitte und Netz.

b) Der Kegel.

Grundfläche, Mantel, Spitze, Achse, Höhe, Seite.
Senkrechte und schiefe Kegel.
Schnitte und Netz.
Kegelstumpf.

c) Die Kugel.

Oberfläche, Halbmesser, Durchmesser.
Schnitt und Netz.
Kugelabschnitt, Kugelmütze, Zone.

Zweiter Theil.

Berechnen der Flächen und Körper.

---

§. 28. Allgemeine Bemerkungen.

Einen sehr wichtigen Theil des geometrischen Unterrichtes in der Volksschule bildet die Größenbestimmung der Flächen und Körper. Sie beruht auf Sätzen, welche angeben, wie aus gewissen Dimensionen, welche die Größe einer Fläche oder eines Körpers bestimmen, diese selbst durch Rechnung gefunden wird. Diese Sätze dürfen den Schülern nicht als etwas Gegebenes einfach mitgetheilt, sie müssen vielmehr aus den Eigenschaften der betrachteten Figuren und Körper unter der anregenden Leitung des Lehrers von den Schülern selbst gefunden und dann an zahlreichen Aufgaben sorgfältig eingeübt werden. Nur das, was die Schüler auf dem Wege der anschaulichen Entwickelung selbst gefunden haben, und was ihnen durch vielseitige Übung zur möglichsten Klarheit gebracht worden ist, wird lebendiges und bleibendes Eigenthum derselben.

Die Übungsaufgaben werden theils in der Schule ausgearbeitet, theils zur häuslichen Wiederholung aufgegeben; sie sind aus dem Leben zu entnehmen, dann führen sie auch in das Verständnis des Lebens ein. Für die Hand der Schüler bietet mein „fünftes Rechenbuch für Volksschulen" im achten Abschnitte eine reichhaltige und methodisch geordnete Sammlung geometrischer Übungsaufgaben, auf welche auch in der vorliegenden Anleitung Bezug genommen wird. Insofern diesen Aufgaben meistens bereits gegebene Ausdehnungen zu Grunde gelegt sind, wird dem Lehrer empfohlen, überall auch einige Aufgaben vorauszuschicken, für welche der Schüler selbst die vor der Berechnung nöthigen Messungen vorzunehmen hat. Dadurch wird die Anwendung des Gelernten im späteren Leben vorbereitet.

Z. B. Bei der Größenbestimmung des Dreieckes: Hier an der Wandtafel ist ein Dreieck gezeichnet; wie groß ist sein Umfang, wie groß sein Inhalt? — Welche

Längen müssen dir bekannt sein, damit du den Umfang bestimmen kannst? Schätze die drei Seiten zuerst nach dem Augenmaße ab, miss sie dann genau mit dem Maßstabe und berechne den Umfang. — Welche Längen müssen gegeben sein, damit du den Flächeninhalt des Dreieckes bestimmen kannst? Welche Seite nimmst du als Grundlinie an? Ziehe zu derselben die Höhe. Schätze nun Grundlinie und Höhe ab, miss sie dann wirklich und berechne den Flächeninhalt.

I. Flächenberechnung.

§. 29. Berechnung der geradlinigen Figuren.

1. Umfang und Flächeninhalt.

Bei der Größenbestimmung der ebenen Flächen handelt es sich um die Berechnung des Umfanges und des Flächeninhaltes.

1. Unter dem Umfange einer Figur versteht man die Summe aller Linien, welche die Figur begrenzen. Der Umfang ist daher auch eine Linie und wird durch das Längenmaß gemessen.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Längen ihrer Seiten addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist ihr Umfang gleich der Länge einer Seite multipliciert mit der Anzahl der Seiten. Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt demnach keiner weiteren Schwierigkeit.

2. Unter dem Flächeninhalte einer Figur versteht man die Größe der von ihr begrenzten Fläche. Um eine Fläche zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese in der ersten Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit in einer begrenzten Fläche enthalten ist, nennt man die Maßzahl der Fläche.

Als Flächeneinheit nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite die Längeneinheit ist. Die Einheit des österreichischen Flächenmaßes ist das Quadratmeter, d. i. ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter ist. 1 Quadratmeter ($\square m$) hat 100 Quadratdecimeter ($\square dm$) à 100 Quadratcentimeter ($\square cm$) à 100 Quadratmillimeter ($\square mm$); 1 Quadratkilometer ($\square Km$) $=$ 1000000 $\square m$, 1 Quadratmyriameter ($\square Mm$) $=$ 100 $\square Km$. Die Einheit des Bodenflächenmaßes ist das Ar $=$ 100 $\square$ Meter; 100 Ar sind 1 Hektar.

Die Flächenmaße sind den Schülern zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Das Quadratmeter wird an die Schultafel gezeichnet, das Quadratdecimeter sowie das Quadratcentimeter aus starker Pappe ausgeschnitten und an allen drei Maßen die

Untertheilung veranschaulicht. Auch werden die Schüler angeleitet, sich ein Quadratdecimeter und ein Quadratcentimeter sammt Eintheilung aus steifem Papier selbst anzufertigen.

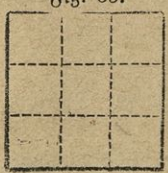
Um den Schülern die Vorstellung eines Ar beizubringen, misst der Lehrer im Freien mit dem Bandmaße ein Quadrat ab, das 10 Meter lang und 10 Meter breit ist, läßt in den vier Eckpunkten Pflöcke einschlagen und um dieselben eine Schnur spannen. Die so begrenzte Quadratfläche ist ein Ar.

In den meisten Fällen ist es wegen der Form der zu messenden Fläche unmöglich, immer aber unbequem, durch unmittelbares Auftragen der Flächenmaße zu bestimmen, wie oft die Flächeneinheit in der Figur enthalten ist. Man pflegt daher den Flächeninhalt der Figuren mittelbar zu bestimmen, indem man diejenigen Linien misst, von denen die Größe der Fläche abhängt, und aus diesen Längenmaßzahlen durch einfache Schlüsse den Flächeninhalt berechnet.

2. Das Quadrat.

Der Umfang eines Quadrates ist gleich der vierfachen Maßzahl einer Seite.

Fig. 55.



Um den Schülern die Bestimmung des Flächeninhaltes anschaulich zu erläutern, zeichnet man auf die Schultafel ein Quadrat (Fig. 55), dessen Seite z. B. 3 Decimeter beträgt. Die Fläche dieses Quadrates wird gemessen, indem man untersucht, wie oft 1 □ Decimeter in derselben enthalten ist. Der Lehrer legt daher das □ Decimeter (das aus steifem Papier ausgeschnitten wird) genau an zwei zusammenstoßende Seiten des Quadrates an und macht durch feine Linien ersichtlich, wie weit es die Quadratfläche deckt; dann trägt er das □ Decimeter ebenso auf die weiteren Theile des Quadrates derart auf, dass jedesmal eine andere Stelle bedeckt wird. Die Schüler sehen, dass sich 1 □ Decimeter auf der ganzen Fläche 9mal auftragen läßt, dass also die Quadratfläche 9 □ Decimeter enthält.

Nun bemerke der Lehrer, dass ein solches unmittelbares Auflegen des Flächenmaßes unbequem und bei manchen Figuren auch unausführbar, dass es übrigens auch nicht nohwendig sei, da sich ein ganz einfacher Satz aufstellen läßt, nach welchem man den Flächeninhalt des Quadrates sofort durch die Rechnung findet. Um diesen Satz abzuleiten, theile man jede Seite in 3 gleiche Theile, so dass jeder Theil 1 Decimeter ist. Zieht man durch die Theilungspunkte gerade Linien, welche mit der unteren Seite parallel sind, so wird die Quadratfläche in 3 gleiche Parallelstreifen zerlegt; zieht man ferner durch die Theilungspunkte gerade Linien, welche auf die untere Seite senkrecht stehen, so zerfällt jeder dieser Parallelstreifen in 3 Quadrate, deren jedes 1 Decimeter zur Seite hat, somit 1 □ Decimeter ist. Das Quadrat enthält also 3 Parallelstreifen und in jedem 3 □ Decimeter; folglich ist der Flächeninhalt des Quadrates gleich $3 \times 3\ \square dm = 9\ \square dm$.

Den Flächeninhalt eines Quadrates findet man, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliciert (zum Quadrat erhebt).

Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $2m\ 6dm$ beträgt.

Umfang $= 4 \times 2m\ 6dm = 10m\ 4dm$.

Flächeninhalt $= 2{\cdot}6 \times 2{\cdot}6 = 6{\cdot}76\ \square m = 6\ \square m\ 76\ \square dm$.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben und die Seite zu suchen, so zieht man aus der Maßzahl des Flächeninhaltes die Quadratwurzel aus.

Z. B. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist $1{\cdot}9321\ \square m$; wie groß ist eine Seite?

$$\sqrt{1{\cdot}9321} = 1{\cdot}39\ m \text{ Seite.}$$

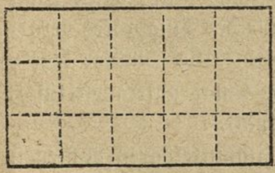
Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 155.

3. Das Rechteck.

Der Umfang eines Rechteckes ist gleich der doppelten Summe aus der Länge und der Breite.

Sind die Grundlinie und die Höhe eines Rechteckes durch dieselbe Längeneinheit gemessen, so kann aus den Maßzahlen der Flächeninhalt des Rechteckes berechnet werden.

Fig. 56.



Es sei z. B. (Fig. 56) die Grundlinie $= 5m$, die Höhe $= 3m$. Man theile die Grundlinie in 5, die Höhe in 3 gleiche Theile, so dass jeder Theil $1m$ ist. Zieht man dann durch jeden Theilungspunkt der Höhe eine Gerade, welche mit der Grundlinie parallel ist, so zerfällt das Rechteck in 3 gleiche Parallelstreifen. Zieht man ferner durch jeden Theilungspunkt der Grundlinie eine Gerade, welche mit der Höhe parallel ist, so wird dadurch jeder Parallelstreifen in 5 Quadrate getheilt, deren jedes $1m$ zur Seite hat, somit $1\ \square m$ ist. Das Rechteck hat also 3 Parallelstreifen und in jedem $5\ \square m$, daher zusammen $5 \times 3 = 15\ \square m$.

Den Flächeninhalt eines Rechteckes findet man, indem man die Maßzahl der Grundlinie (Länge) mit der Maßzahl der Höhe (Breite) multipliciert.

Man pflegt den Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Wenn man das Product zweier Factoren durch den einen Factor dividiert, so erhält man den andern. Daraus folgt:

Die $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ eines Rechteckes findet man, indem man den Flächeninhalt durch die $\left\{\begin{matrix}\text{Höhe}\\ \text{Grundlinie}\end{matrix}\right\}$ dividiert.

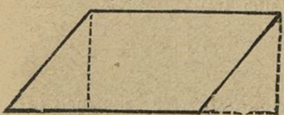
Z. B. Der Inhalt eines Rechteckes ist 17·28 □*m*, die Höhe 3·6*m*; wie groß ist die Grundlinie?

17·28 : 3·6 = 4·8*m* Höhe.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 156—158.

4. Das schiefwinklige Parallelogramm.

Fig. 57.



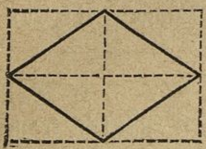
a) Wenn man (Fig. 57) in einem schiefwinkligen Parallelogramm die Höhe zieht und das dadurch auf der einen Seite abgeschnittene Dreieck auf der andern Seite hinzufügt, so bleibt die Fläche ungeändert, und ihre Form geht von einem schiefwinkligen Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe über. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist daher gleich dem Flächeninhalte eines Rechteckes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Daraus folgt:

Den Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms findet man, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Ist z. B. die Grundlinie 6*m*, die Höhe 3*m*, so ist der Flächeninhalt = 6 × 3 = 18 □*m*.

b) Der Flächeninhalt eines Rhombus kann so wie der Inhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms überhaupt bestimmt, er kann aber auch aus den beiden Diagonalen, welche im Rhombus auf einander senkrecht stehen, berechnet werden.

Fig. 58.



Zieht man nämlich (Fig. 58) in einem Rhombus die beiden Diagonalen und sodann durch die Eckpunkte gerade Linien, welche mit den Diagonalen parallel sind, so erhält man ein Rechteck, dessen Grundlinie und Höhe den Diagonalen des Rhombus gleich sind. Der Rhombus besteht nun aus 4 solchen Dreiecken, wie deren auf das Rechteck 8 kommen, er ist also genau die Hälfte von der Fläche des Rechteckes.

Den Flächeninhalt eines Rhombus findet man daher auch, indem man die Maßzahlen der beiden Diagonalen desselben multipliciert und das Product durch 2 dividiert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen 6·5*dm* und 4·4*dm* lang sind?

$$\frac{6{\cdot}5 \times 4{\cdot}4}{2} = 14{\cdot}3 \,\square dm.$$

Ebenso folgt auch:

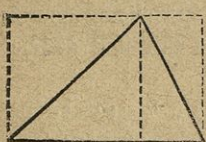
Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der beiden Diagonalen.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 158 und 159.

5. Das Dreieck.

Jedes Dreieck (Fig. 59) ist die Hälfte eines Rechteckes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 59.



Den Flächeninhalt eines Dreieckes findet man also, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliciert und das Product durch 2 dividiert, oder, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der halben Maßzahl der Höhe multipliciert.

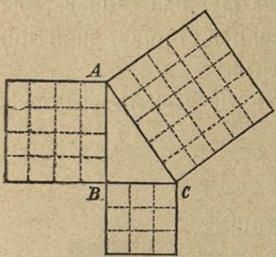
In einem rechtwinkligen Dreiecke kann man die eine Kathete als Grundlinie, die andere als Höhe betrachten.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen der beiden Katheten.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 159 und 160.

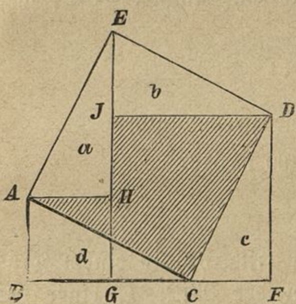
An gehobenen Volksschulen werden die Schüler hier auch mit dem Pythagoräischen Lehrsatze bekannt gemacht.

Fig. 60.



Zeichnet man (Fig. 60) ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in welchem die eine Kathete AB = 4*cm*, die andere BC = 3*cm* enthält, so hat die Hypotenuse AC genau 5*cm*. Beschreibt man dann über den drei Seiten Quadrate und theilt sie durch Parallele in kleinere Quadrate, welche 1*cm* zur Seite haben, so enthält das Quadrat über der Kathete AB 16□*cm*, das Quadrat über der Kathete BC 9□*cm*, beide zusammen enthalten also 25□*cm*; das Quadrat über der Hypotenuse AC enthält ebenfalls 25□*cm*. Es ist daher für das obige Dreieck das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die beiden Quadrate der Katheten zusammengenommen.

Fig. 61.



Dieser Satz gilt auch für jedes andere rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 61).

Beschreibt man über der Hypotenuse AC das Quadrat ACDE, zieht von D und E auf die verlängerte Kathete BC die Senkrechten DF und EG, dann von A und D auf die EG die Senkrechten AH und DJ, so entstehen vier congruente Dreiecke a, b, c und d, und es stellt ABGH das Quadrat über der Kathete AB, und GFDJ das Quadrat über der Kathete BC vor.

Das Quadrat ACDE über der Hypotenuse besteht nun aus der Figur ACDJH und den Dreiecken a und b; die zwei Quadrate ABGH und GFDJ über den Katheten bestehen aus derselben Figur ACDJH und den gleichen Dreiecken c und d; das erste Quadrat hat also denselben Flächeninhalt, wie die zwei letzteren Quadrate zusammengenommen. Daraus folgt:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Dieser Satz heißt nach seinem Entdecker **Pythagoras** der **Pythagoräische Lehrsatz.**

Mit Hilfe dieses Lehrsatzes kann man aus zwei gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes durch Rechnung die dritte finden.

1. Sind die beiden Katheten gegeben, so erhebt man sie zum Quadrat und addiert die Quadrate, die Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse; um die Hypotenuse selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Z. B. Die Katheten sind 84*cm* und 13*cm*; wie groß ist die Hypotenuse?

$$84^2 = 7056$$
$$13^2 = 169$$
$$\sqrt{7225} = 85cm \text{ Hypotenuse.}$$

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete gegeben, so erhebt man beide zum Quadrat und subtrahiert von dem Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der gegebenen Kathete, die Differenz ist das Quadrat der zweiten Kathete; um diese selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Differenz die Quadratwurzel auszuziehen.

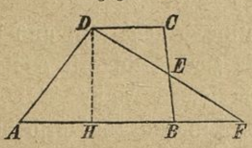
Es sei z. B. die Hypotenuse 1·64*m*, die eine Kathete 1·6*m*; wie groß ist die andere Kathete?

$$1{\cdot}64^2 = 2{\cdot}6896$$
$$1{\cdot}6^2 = 2{\cdot}56$$
$$\sqrt{0{\cdot}1296} = 0{\cdot}36m \text{ die zweite Kathete.}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 160 und 161.

6. Das Trapez.

Fig. 62.



Zieht man (Fig. 62) in einem Trapeze ABCD von der Mitte E einer der nicht parallelen Seiten BC zu einem gegenüberliegenden Eckpunkte D eine gerade Linie, so wird durch entsprechendes Übertragen des dadurch abgeschnittenen Dreieckes ECD das gegebene Trapez in ein flächengleiches Dreieck AFD verwandelt, dessen Grundlinie gleich ist der Summe der beiden Parallelseiten des Trapezes, und welches mit dem Trapeze gleiche Höhe DH hat.

Den Flächeninhalt eines Trapezes findet man also, indem man die Summe der Maßzahlen der beiden Parallelseiten mit der halben Maßzahl der Höhe multipliciert.

Sind z. B. die parallelen Seiten des Trapezes 12*m* und 6*m* und die Höhe 8*m*, so ist der

$$\text{Flächeninhalt} = (12 + 6) \times 8/2 = 72 \square m.$$

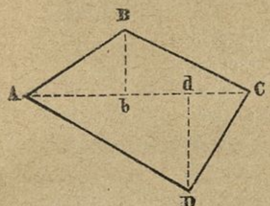
Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 161 und 162.

7. Das Trapezoid.

Um den Flächeninhalt eines Trapezoids zu finden, zerlege man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, suche die Flächen dieser Dreiecke und addiere dieselben.

Z. B. Es sei (Fig. 63) in dem Trapezoide ABCD die Diagonale AC = 16*m*, die darauf Senkrechte Bb = 4*m*, und die ebenfalls darauf Senkrechte Dd = 6*m*; so hat man

Fig. 63.



$$\text{Dreieck ABC} = \frac{16 \times 4}{2} = 32 \square m$$

$$\text{„ ACD} = \frac{16 \times 6}{2} = 48 \square m$$

$$\text{Trapezoid ABCD} \quad = 80 \square m.$$

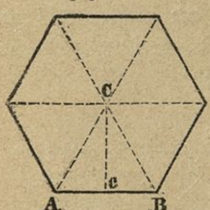
Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 162.

8. Das Vieleck.

a) Regelmäßige Vielecke.

Der Umfang eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich der Maßzahl einer Seite multipliciert mit der Anzahl der Seiten.

Fig. 64.



Zieht man (Fig. 64) in einem regelmäßigen Vielecke von dem Mittelpunkte gerade Linien zu allen Eckpunkten, so zerfällt dasselbe in lauter gleiche Dreiecke, deren Grundlinien die Vielecksseiten sind, und deren Höhe der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite ist. Um daher die Fläche des Vieleckes zu erhalten, berechnet man alle Dreiecksflächen und faßt diese in eine Summe zusammen; man multipliciert zu diesem Ende jede Seite des Vieleckes mit der halben Höhe und addiert die Producte, oder was einerlei ist, man addiert sogleich alle Vielecksseiten und multipliciert ihre Summe, d. i. den Umfang des Vieleckes mit der halben Höhe der Dreiecke, d. i. mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges mit der halben Maßzahl des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite multipliciert.

Ist z. B. die Seite eines regelmäßigen Sechseckes $5m$ und der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite $4{\cdot}33m$, so hat man

$$\text{Umfang} = 6\text{mal } 5m = 30m,$$

$$\text{Flächeninhalt} = 30 \times \frac{4{\cdot}33}{2} = 64{\cdot}95 \,\square m.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muss man die gegebene Seite

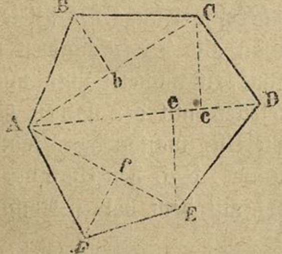
in einem	gleichseitigen	Dreiecke	mit	0·28868,
„ „	„	Quadrate	„	0·50000,
„ „	regelmäßigen	Fünfecke	„	0·68819,
„ „	„	Sechsecke	„	0·86603,
„ „	„	Achtecke	„	1·20611,
„ „	„	Zehnecke	„	1·53884,
„ „	„	Zwölfecke	„	1·86603 multiplicieren.

b) Unregelmäßige Vielecke.

Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes zu erhalten, zerlege man das Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne den Inhalt jedes dieser Dreiecke und addiere alle Dreiecksflächen.

Z. B. Das unregelmäßige Sechseck ABCDEF (Fig. 65) wird durch Diagonalen in 4 Dreiecke zerlegt, in denen man durch Messung für die Grundlinien und Höhen folgende Längen findet: AC $= 12{\cdot}2m$, AD $= 14{\cdot}5m$, AE $= 10{\cdot}6m$, Bb $= 4m$, Cc $= 5{\cdot}6m$, Ee $= 5{\cdot}8m$, Ff $= 3{\cdot}9m$; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes?

Fig. 65.



$$\text{Dreieck ABC} = \frac{12{\cdot}2 \times 4}{2} = 24{\cdot}4 \,\square m$$

$$\text{„ ACD} = \frac{14{\cdot}5 \times 5{\cdot}6}{2} = 40{\cdot}6 \text{ „}$$

$$\text{„ ADE} = \frac{14{\cdot}5 \times 5{\cdot}8}{2} = 42{\cdot}05 \text{ „}$$

$$\text{„ AEF} = \frac{10{\cdot}6 \times 3{\cdot}9}{2} = 20{\cdot}67 \text{ „}$$

$$\text{Sechseck ABCDEF} = 127{\cdot}72 \,\square m$$

Ein zweites Verfahren, den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes zu bestimmen, besteht darin, dass man durch die zwei entferntesten Eckpunkte eine Gerade und auf diese von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte fällt; dadurch zerfällt das Vieleck in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addiert werden.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 162 und 163.

---

§. 30. Berechnung der krummlinigen Figuren.

1. Der Kreis.

a) Umfang des Kreises.

Die genauere Ableitung der Verhältniszahl zwischen dem Umfange und dem Durchmesser eines Kreises überschreitet die Grenzen des Volksschulunterrichtes. Hier genügt es, den Schülern die Wahrheit auf anschaulichem Wege nahe zu legen. Der Lehrer bedient sich zu diesem Ende eines aus Holz oder Pappe gefertigten Kreises, welcher $^1/_2$ Decimeter im Halbmesser, also 1 Decimeter im Durchmesser hat, und bemerkt: Der Umfang dieses Kreises ist eine krumme Linie, wir können sie nicht, wie eine gerade Linie, mit dem Maßstabe messen; wir können aber an den Umfang ringsherum einen Faden anlegen und dann die Länge dieses Fadens messen. Der Lehrer umspannt nun den Umfang möglichst genau mit einem Faden und lässt dann die Länge desselben von den Schülern mit dem Maßstabe messen; sie finden, dass er 3 Decimeter und beiläufig 14 Millimeter, oder 3·14 Decimeter lang ist, und schließen, dass der Umfang des Kreises nahe 3·14mal so groß ist als der Durchmesser. Statt 3·14 kann auch $3^1/_7$ gesetzt werden. Diese Zahl, oder genauer 3·14159 nennt man die Ludolfische Zahl.

Den Umfang eines Kreises findet man also, indem man die Maßzahl des Durchmessers mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Z. B. Der Durchmesser eines Kreises ist $18m$; wie groß ist dessen Umfang?

$18 \times 3^1/_7$	$18 \times 3·14$	$18 \times 3·14159$
54	2512	2513272
$2^4/_7$	$56·52m$	$56·54862m$
$56^4/_7 m$		

Die Multiplication mit $3\frac{1}{7}$ ist bequemer und auch genauer als die Multiplication mit 3·14; sie genügt auch für die meisten Rechnungen des praktischen Lebens.

Für sehr genaue Rechnungen, insbesondere dann, wenn die Maßzahl des Durchmessers 4 oder mehrere Ziffern hat, ist die Zahl 3·14159 als die Ludolfische Zahl anzuwenden

Aus dem Producte zweier Factoren erhält man den einen Factor, indem man das Product durch den andern Factor dividiert. **Der Durchmesser eines Kreises ist also gleich dem Umfange dividiert durch die Ludolfische Zahl.**

Z. B. Der Umfang eines Kreises ist 44*m*; wie groß ist der Durchmesser?

$$44 : 3\tfrac{1}{7} = 44 \times \tfrac{7}{22} = 14m \text{ Durchmesser.}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 163—165.

b) Länge eines Kreisbogens.

Die **Länge eines Kreisbogens** hängt von der Anzahl der Bogengrade und von der Länge des Halbmessers ab. Sie wird aus dem Umfange des Kreises durch die Schlussrechnung gefunden.

Z. B. Ein Kreis hat 5·8*m* im Durchmesser; wie lang ist in diesem Kreise ein Bogen von 65°?

$$\text{Umfang} = 5{\cdot}8 \times 3\tfrac{1}{7}$$

$$\begin{array}{r} 17{\cdot}4 \\ 0{\cdot}829 \\ \hline 18{\cdot}229m \end{array}$$

360° haben eine Länge von 18·229*m*

$$1^\circ \text{ hat } \quad " \quad " \quad " \quad \frac{18{\cdot}229m}{360}$$

$$65^\circ \text{ haben } \quad " \quad " \quad " \quad \frac{18{\cdot}229m}{360} \times 65 = 3{\cdot}291m.$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 165.

c) Flächeninhalt des Kreises.

Der Kreis kann als regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Den Flächeninhalt eines Kreises findet man daher, indem man die Maßzahl des Umfanges mit der halben Maßzahl des Halbmessers multipliciert.

Ist z. B. der Halbmesser des Kreises 6*m*, so hat man

$$\text{Umfang} = 2 \times 6 \times 3^1/_7 m,$$

$$\text{Flächeninhalt} = 2 \times 6 \times 3^1/_7 \times {}^6/_2 \square m$$

$$= 6 \times 6 \times 3^1/_7 = 113^1/_7 \square m.$$

Man kann daher auch sagen:

Der Flächeninhalt eines Kreises wird gefunden, indem man das Quadrat des Halbmessers mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises gegeben und der Halbmesser zu suchen, so dividiert man den Flächeninhalt durch die Ludolfische Zahl, der Quotient ist das Quadrat des Halbmessers; zieht man aus diesem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst.

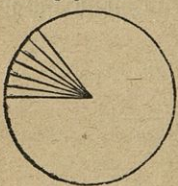
Z. B. Der Flächeninhalt eines Kreises sei 48 □*dm*; dann ist

$$48 : 3{\cdot}14 = 15{\cdot}28;\ \sqrt{15{\cdot}28} = 3{\cdot}9\,dm \text{ Halbmesser.}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 165 und 166.

d) Flächeninhalt eines Kreisausschnittes.

Fig. 66.



Ist (Fig. 66) der Bogen AB des Kreisausschnittes im Längenmaße gegeben, so denkt man sich zu dem Bogen unzählig viele Halbmesser gezogen, durch welche der Kreisausschnitt in unzählig viele kleine Ausschnitte zerfällt; diese kann man als Dreiecke ansehen, deren Grundlinien zusammen die ganze Bogenlänge geben, und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes findet man also, indem man die Maßzahl der Bogenlänge mit der halben Maßzahl des Halbmessers multipliciert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes von 1*m* Bogenlänge, wenn der Halbmesser des Kreises 3*m* beträgt?

$$1 \times {}^3/_2 = 1{\cdot}5 \square m.$$

Ist dagegen der Bogen im Gradmaße gegeben, so wird der Flächeninhalt des Kreisausschnittes aus dem Flächeninhalte des Kreises durch die Schlussrechnung gefunden.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes von 54°, wenn der Halbmesser des Kreises 2*m* ist?

Inhalt des Kreises $= 2 \times 2 \times 3^1/_7 = 12^4/_7\ \square m.$

Zu 360^0 gehört eine Kreisfläche von $12{\cdot}571\ \square m,$

1^0 " " " " $\dfrac{12{\cdot}571\ \square m,}{360}$

54^0 " " " " $\dfrac{12{\cdot}571\ \square m \times 54}{360}$

$= 1{\cdot}886\ \square m.$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 166 und 167.

e) Flächeninhalt eines Kreisringes.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahiert. — Man kann übrigens den Kreisring auch in sehr viele Vierecke zerlegt denken, die man als Trapeze berechnet und addiert, woraus dann folgt: Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich der Summe der beiden Peripherien mit ihrem halben Abstande d. i. mit dem halben Unterschiede der beiden Halbmesser.

Sind z. B. $5dm$ und $3dm$ die Halbmesser der beiden concentrischen Kreise, so hat man

größerer Kreis $= 5^2 \times 3^1/_7 = 25 \times 3^1/_7\ \square dm$

kleinerer " $= 3^2 \times 3^1/_7 = \ \ 9 \times 3^1/_7$ "

Kreisring $= 16 \times 3^1/_7\ \square dm$

$= 50^2/_7\ \square dm.$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 167.

2. Die Ellipse.

Man hat gefunden, dass eine Ellipse eben so viel Flächeninhalt hat als ein Kreis, dessen Halbmesser mit sich selbst multipliciert dem Producte der beiden halben Achsen der Ellipse gleich ist.

Den Flächeninhalt einer Ellipse findet man daher, indem man das Product aus den beiden halben Achsen mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen $20m$ und $12{\cdot}6m$ sind?

$$10 \times 6{\cdot}3 \times 3^1/_7 = 198\ \square m.$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 167 und 168.

Wiederholungsaufgaben S. 168—170.

II. Körperberechnungen.

§. 31. Berechnung der Prismen und Cylinder.

1. Oberfläche und Cubikinhalt.

Bei der Größenbestimmung der Körper handelt es sich um die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller seiner Grenzflächen; sie wird durch das Flächenmaß bestimmt.

Unter dem Cubikinhalte (Volumen) eines Körpers versteht man die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes. Um einen Körper zu messen, nimmt man einen andern bekannten Körper als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese Einheit in dem ersten Körper enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft die Körpereinheit in einem Körper enthalten ist, heißt die Maßzahl seines Cubikinhaltes.

Als Einheit des Körpermaßes nimmt man einen Würfel oder Cubus an, dessen Kante die Längeneinheit ist. Die Einheit des österreichischen Körpermaßes ist das Cubikmeter d. i. Würfel, dessen Kante ein Meter ist. 1 Cubikmeter (Cub. *m*) hat 1000 Cubikdecimeter (Cub. *dm*) à 1000 Cubikcentimeter (Cub. *cm*) à 1000 Cubikmillimeter (Cubik. *mm*). Zum Cubikmaße gehört auch das Hohlmaß zur Messung trockener und flüssiger Gegenstände. Die Einheit des Hohlmaßes ist das Liter = 1 Cubikdecimeter; ein Liter hat 10 Deciliter à 10 Centiliter; 100 Liter sind ein Hektoliter.

Zur Versinnlichung der Körpermaße ist erforderlich: ein Cubikcentimeter und ein Cubikdecimeter, beide aus Holz oder Pappe, und ein allenfalls aus 12 meterlangen Holzstäben gefertigtes Cubikmeter.

Diese Maße werden den Schülern vorgezeigt. Hier ist ein Würfel; jede Seite ist 1 Centimeter lang. Wie groß ist jede Seitenfläche? Dieser Würfel heißt ein Cubikcentimeter. — Hier sehet ihr einen größeren Würfel; jede Seite ist 1 Decimeter lang. Wie groß ist jede Seitenfläche? Ein solcher Würfel heißt ein Cubikdecimeter. — Was ist dann ein Cubikmeter? — Alle diese Maße heißen Körpermaße.

Um die Eintheilung der Körpermaße zu veranschaulichen, nehme der Lehrer ein Cubikdecimeter, dessen untere Fläche in $10 \times 10 = 100$ □Centimeter und dessen Höhe in 10 Centimeter eingetheilt ist. Auf der unteren Fläche lassen sich 100 Cubikcentimeter auflegen. Diese Schichte reicht aber nur 1 Centimeter hoch. Um das ganze Cubikdecimeter auszufüllen, muss man 10 solche Schichten über einander legen; ein Cubikdecimeter enthält also 10mal 100 Cubikcentimeter = 1000 Cubikcentimeter.

Die Veranschaulichung kann auch so geschehen. Man theilt an einem Cubikdecimeter, das aus Holz gefertiget wird, jede Seite in 10 Centimeter und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch eingeritzte Linien; jede der sechs Würfelflächen erscheint dadurch in 100 □Centimeter getheilt. Dieser Würfel wird parallel mit der Grundfläche in 10 gleiche Platten durchschnitten; eine dieser Platten wird wieder in 10 gleiche Säulen, und eine dieser Säulen in 10 gleiche Würfel, deren jeder 1 Cubikcentimeter ist, durchschnitten. Stellt man nun diese 10 Würfel neben einander, so bilden sie eine Säule, welche 10 Cubikcentimeter enthält; legt man daran die übrigen Säulen, so stellen alle 10 Säulen eine Platte vor, welche 10 × 10 = 100 Cubikcentimeter enthält; trägt man darüber auch die übrigen unzerlegten Platten auf, so hat man das ganze Cubikdecimeter, welches daher 10 × 100 = 1000 Cubikcentimeter enthält.

Durch diese Veranschaulichung und durch Anwendung ähnlicher Schlüsse wird den Schülern auch klar gemacht, dass 1 Cubikmeter = 1000 Cubikdecimeter, und 1 Cubikcentimeter = 1000 Cubikmillimeter ist.

Hier soll auch der Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Körpermaße und dem Hohlmaße anschaulich dargestellt werden. Der Lehrer füllt zu diesem Zwecke einen hohlen Würfel von Blech, der inwendig 1 Decimeter lang, 1 Decimeter breit und 1 Decimeter tief ist, also 1 Cubikdecimeter, mit Wasser und gießt dieses in ein Litergefäß über; die Schüler ersehen daraus, dass ein Liter denselben Rauminhalt wie ein Cubikdecimeter hat, dass also die Einheit des Hohlmaßes das Cubikdecimeter unter dem Namen Liter ist, welches jedoch wegen des bequemeren Gebrauches eine runde Form erhält. Sollte dem Lehrer nur ein hohler Würfel von Pappe zu Gebote stehen, so würde er denselben mit Sand füllen und durch Umschütten in das Litergefäß nachweisen, dass Liter und Cubikdecimeter denselben Inhalt haben.

In den meisten Fällen ist es wegen der Gestalt des zu messenden Körpers nicht möglich, unmittelbar zu untersuchen, wie oft die Cubikeinheit in ihm enthalten ist; man nimmt daher auch hier, wie bei der Flächenbestimmung zu einem mittelbaren Verfahren Zuflucht, indem man durch Schlüsse Sätze ableitet, nach denen der Cubikinhalt aus den Maßzahlen der Linien und Flächen, welche die Größe eines Körpers unzweideutig bestimmen, durch Rechnung gefunden wird.

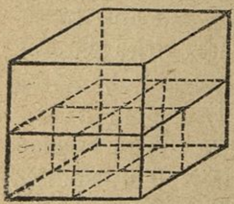
2. Der Würfel.

Die Oberfläche eines Würfels findet man, indem man den Flächeninhalt einer Grenzfläche — eines Quadrates — mit 6 multipliciert.

Beträgt z. B. die Kante eines Würfels 2·5m, so ist der Flächeninhalt einer Grenzfläche = 2·5 × 2·5 = 6·25 □m, daher die Oberfläche des Würfels = 6mal 6·25 □m = 37·5 □m.

Es sei ferner der Cubikinhalt eines Würfels zu bestimmen. Ist z. B. $2m$ die Länge einer Kante, so läfst sich (Fig. 67) die Grundfläche in $2 \times 2 = 4$ □Meter eintheilen und auf jedem □Meter der Grundfläche 1 Cubikmeter auflegen; man erhält also über der Grundlinie eine Schichte von 4 Cub.m, und zwar bis $1m$ Höhe; da nun der Würfel $2m$ hoch ist, so enthält er zwei solche Schichten von je 4 Cub.m; der Cubikinhalt ist also gleich 2mal 4 Cub.m, oder $2 \times 2 \times 2 =$ 8 Cub.m.

Fig. 67.



Den Cubikinhalt eines Würfels findet man also, indem man die Maßzahl seiner Kante dreimal als Factor setzt (zum Cubus erhebt).

Ist umgekehrt der Cubikinhalt eines Würfels gegeben und die Länge einer Kante zu suchen, so zieht man aus der Maßzahl des Cubikinhaltes die Cubikwurzel aus.

Z. B. der Cubikinhalt eines Würfels ist 21·952 Cubikdecimeter; wie groß ist eine Kante?

$$\sqrt[3]{21{\cdot}952} = 2{\cdot}8dm \text{ eine Kante.}$$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 171.

3. Das Prisma.

Die Oberfläche eines Prisma ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche und der Seitenoberfläche.

Für das senkrechte Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn sie in einer Ebene ausgebreitet wird, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Prisma, und dessen Höhe der Höhe des Prisma gleich ist.

In jedem senkrechten Prisma ist also die Seitenoberfläche gleich dem Umfange der Grundfläche multipliciert mit der Höhe des Prisma.

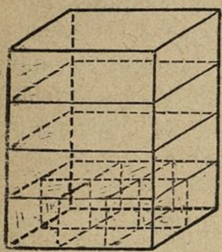
Ist z. B. (Fig. 68) ein rechtwinkliges Prisma $3m$ lang, $2m$ breit und $4m$ hoch, so hat man:

Grundfläche	$= 3 \times 2 = 6$ □m
doppelte Grundfläche	$= 12$ □m
Seitenoberfläche	$= 10 \times 4 = 40$ „
ganze Oberfläche	$= 52$ □m.

Es sei nun der Cubikinhalt desselben Prisma zu bestimmen. Man theile die Länge in 3, die Breite in 2 und die Höhe in 4 gleiche

Theile, deren jeder 1m ist. Legt man nun durch die Theilungspunkte der Höhe Ebenen, welche mit der Grundfläche parallel sind, so zerfällt das Prisma in 4 gleiche Parallelschichten. Legt man dann auch durch die Theilungspunkte der Länge und der Breite Ebenen, welche mit den Seitenflächen parallel sind, so wird jede dieser Parallelschichten in so viele Cubikmeter zerlegt, als die Grundfläche □ Meter enthält, also in $3 \times 2 = 6$ Cubikmeter. Das Prisma enthält demnach 4 Parallelschichten, und in jeder 6 Cubikmeter, also zusammen 4mal 6 Cubikmeter, oder $3 \times 2 \times 4 = 24$ Cubikmeter.

Fig. 68.



Den Cubikinhalt eines rechtwinkligen Prisma findet man daher, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert, oder, was gleichviel ist, indem man die Maßzahlen der Länge, Breite und Höhe mit einander multipliciert.

Auch in jedem andern Prisma gibt die Maßzahl der Grundfläche an, wie viel Cubikeinheiten auf derselben stehen können; diese Cubikeinheiten bilden eine Parallelschichte. Die Maßzahl der Höhe aber gibt an, in wie viele solche Schichten das Prisma zerlegt werden kann. Daraus folgt:

Den Cubikinhalt eines jeden Prisma findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Wird der Cubikinhalt eines Prisma durch die Grundfläche dividiert, so erhält man die Höhe; wird der Cubikinhalt durch die Höhe dividiert, so erhält man die Grundfläche.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 172—174.

4 Der Cylinder.

Die Oberfläche eines Cylinders ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche und der Mantelfläche.

Für den senkrechten Cylinder bildet die Mantelfläche, wenn sie auf eine Ebene abgewickelt wird, ein Rechteck, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie, und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann auch der Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, angesehen werden.

Den Cubikinhalt eines Cylinders findet man daher, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Z. B. Die Höhe eines senkrechten Cylinders ist 12*dm*, der Durchmesser der Grundfläche 8*dm*; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt des Cylinders?

Umfang der Grundfläche $= 8 \times 3^1/_7 = 25{\cdot}14\,dm$

Flächeninhalt der Grundfläche $= 25{\cdot}14 \times 2 = 50{\cdot}28 \,\square dm$

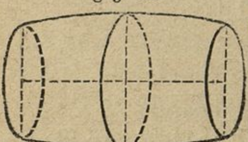
Doppelte Grundfläche		$= 100{\cdot}56 \,\square dm$
Mantelfläche des Cylinders	$= 25{\cdot}14 \times 12$	$= 301{\cdot}68$ „
Oberfläche des Cylinders		$= 402{\cdot}24 \,\square dm$
Cubikinhalt des Cylinders	$= 50{\cdot}28 \times 12$	$= 603{\cdot}36$ Cub.$\square dm$.

Um den Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre oder hohlen Walze zu bestimmen, sucht man die Cubikinhalte der beiden Cylinder, von denen der kleinere aus dem größeren ausgeschnitten ist, und subtrahiert den Cubikinhalt des kleineren Cylinders von dem des größeren.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 174—177.

Ein Fass (Fig. 69) unterscheidet sich von einem Cylinder dadurch, dass sein Durchmesser am Spunde größer ist als jener der beiden Bodenflächen. Der Inhalt eines Fasses wird übrigens der Wahrheit sehr nahe kommend gefunden, indem man das Fass als einen Cylinder berechnet, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses und dessen Durchmesser der dritte Theil aus der Summe des Boden- und des doppelten Spunddurchmessers ist.

Fig. 69.



Bei dieser Berechnung sind selbstverständlich die inneren Maßlängen des Fasses zu nehmen.

Z. B. Wie groß ist der Inhalt eines Weinfasses von 9*dm* Länge, wenn der Durchmesser seiner Bodenfläche 4·8*dm* und die Spundtiefe 5·7*dm* beträgt?

Bodendurchmesser = 4·8*dm*
Doppelte Spundtiefe = 11·4*dm*
16·2 : 3
Durchmesser des Cylinders = 5·4*dm*
Grundfläche = $2{\cdot}7 \times 2{\cdot}7 \times 3\frac{1}{7}$ = 22·91 □*dm*
Inhalt = $22{\cdot}91 \times 9$ = 206·19 Cub.*dm* = 206·19 Liter.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 177.

---

§. 32. Berechnung der Pyramiden und Kegel.

1. Die Pyramide.

Die Oberfläche einer Pyramide ist gleich der Summe aus der Grundfläche und der Seitenoberfläche.

In der senkrechten Pyramide besteht die Seitenoberfläche aus lauter gleichen Dreiecken, deren Grundlinien den Umfang der Grundfläche der Pyramide bilden, und deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe der Pyramide ist.

Die Seitenoberfläche einer senkrechten Pyramide findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der halben Maßzahl der Seitenhöhe multipliciert.

Z. B. In einer senkrechten Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat von 6*dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt 12·37*dm*; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der Grundfläche = 24*dm*
Flächeninhalt der Grundfläche = 36 □*dm*,
Seitenoberfläche = $24 \times \frac{12{\cdot}37}{2}$ = 148·44 „
ganze Oberfläche = 184·44 □*dm*.

Um den Satz, nach welchem der Cubikinhalt einer Pyramide berechnet wird, zu begründen, müssen zwei andere Sätze vorausgesetzt werden.

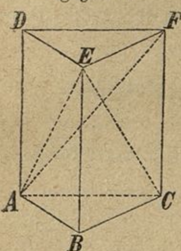
1. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Cubikinhalt.

Dies folgt unmittelbar aus der Entstehungsweise einer Pyramide durch die parallele Bewegung eines sich stetig verkleinernden Vieleckes. Haben nämlich zwei Pyramiden gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, so sind auch je zwei zur Grundfläche parallele Durchschnitte, welche von der Spitze gleichweit abstehen, einander gleich; daher müssen auch die Räume, welche die sich bewegenden gleichen Vielecke beschreiben, gleich sein.

2. Jedes dreiseitige Prisma läſst sich in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Es sei ABCDEF (Fig. 70) ein dreiseitiges Prisma. Durchschneidet man dasselbe durch die Ebene AEC, so zerfällt es in die dreiseitige Pyramide EABC und in die vierseitige EACFD. Durch die Ebene AEF wird die letztere wieder in zwei dreiseitige Pyramiden EACF und EADF zerlegt, so daſs das dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt erscheint. Es läſst sich nun zeigen, daſs diese drei Pyramiden einander gleich sind, da je zwei derselben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Fig. 70.



Diese Zerlegung des Prisma ist den Schülern an einem zerlegbaren Modelle anschaulich zu machen.

Jede dreiseitige Pyramide ist mithin der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Jede mehrseitige Pyramide läſst sich in dreiseitige zerlegen; es ist daher jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Da nun der Cubikinhalt eines Prisma gleich ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe, so folgt:

Den Cubikinhalt einer Pyramide findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Ist z. B. die Grundfläche einer 12*dm* hohen Pyramide ein Quadrat von 6*dm* Seitenlänge, so hat man

Grundfläche $= 36 \square dm$,

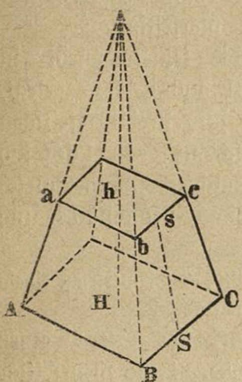
Cubikinhalt $= 36 \times {}^{12}/_{3} = 144$ Cub.*dm*.

Die Oberfläche eines Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe aus den beiden Grundflächen und der Seitenoberfläche.

In dem senkrechten Pyramidenstumpfe besteht die Seitenoberfläche aus lauter gleichen Trapezen, deren Parallelseiten zusammen die Umfänge der beiden Grundflächen des Pyramidenstupfes bilden und deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe des Stumpfes ist.

Die Seitenoberfläche eines senkrechten Pyramidenstumpfes findet man also, indem man die Summe aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Grundflächen mit der halben Maßzahl der Seitenhöhe multipliciert.

Fig. 71.



Es seien (Fig. 71) 9*dm* und 6*dm* zwei parallele Kanten der beiden Grundflächen und 7·16*dm* die Seitenhöhe eines senkrechten vierseitigen Pyramidenstumpfes; wie groß ist die Oberfläche?

Die Grundflächen des Stumpfes sind Quadrate.

Umfang der unteren Grundfl.	$= 36\,dm$,
„ „ oberen „	$= 24$ „
Flch. Inh. „ unteren „	$= 81\,\square dm$,
„ „ „ oberen „	$= 36$ „
beide Grundflächen	$= 117\,\square dm$.
Seitenoberfläche $= 60 \times \frac{7{\cdot}16}{2}$	$= 214{\cdot}8$ „
ganze Oberfläche	$= 331{\cdot}8\,\square dm$.

Den Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes findet man, indem man von dem Inhalte der vollständigen Pyramide den Inhalt der Ergänzungspyramide subtrahiert.

Es seien z. B. 9*dm* und 6*dm* zwei parallele Kanten der quadratischen Grundflächen eines 7*dm* hohen Pyramidenstumpfes; wie groß ist der Cubikinhalt desselben?

Zuerst muss die Höhe der ganzen Pyramide gesucht werden. Die Kanten Aa und Bb haben sich bei einer Höhe von 7*dm* um 9*dm* — 6*dm* = 3*dm* genähert; damit sie zusammentreffen, d. i. sich um 9 *dm* nähern, muss die Höhe so oftmal 7 *dm* betragen, als 3 *dm* in 9 *dm* enthalten sind, also 3mal 7 *dm* = 21 *dm*. Die Höhe der vollständigen Pyramide ist demnach 21 *dm*, die Höhe der Ergänzungspyramide 21 *dm* — 7 *dm* = 14 *dm*.

Inhalt der vollständigen Pyramide $= 81 \times 21/3 = 567$ Cub.*dm*
„ „ Ergänzungspyramide $= 36 \times 14/3 = 168$ „
„ „ abgekürzten Pyramide $= 399$ Cub.*dm*.

Annäherungsweise findet man den Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide, indem man diese als ein Prisma berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe aus den beiden Grundflächen des Pyramidenstutzes, und dessen Höhe die Höhe des Stutzes ist.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 178—180.

2. Der Kegel.

Die Oberfläche eines Kegels ist gleich der Summe aus der Grundfläche und der Mantelfläche.

Jeder Kegel kann als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden; die Seitenhöhe der senkrechten Pyramide stellt in dem senkrechten Kegel die Seite vor. Daraus folgt:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels findet man, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der halben Maßzahl der Seite multipliciert.

Den Cubikinhalt eines Kegels findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl der Höhe multipliciert.

In einem senkrechten Kegel beträgt der Durchmesser der Grundfläche 7 *dm*, die Höhe 12 *dm* und eine Seite 12·5 *dm*; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt des Kegels?

Umfang der Grundfläche $= 7 \times 3\frac{1}{7} = 22$ *dm*

Flächeninhalt der Grundfläche $= 22 \times 7/4 = 38{\cdot}5$ □*dm*

Mantelfläche $= 22 \times \frac{12{\cdot}5}{2} = 137{\cdot}5$ „

ganze Oberfläche $= 176$ □*dm*

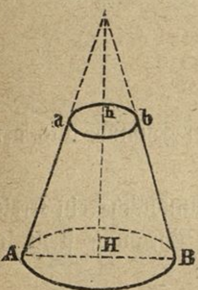
Cubikinhalt $= 38{\cdot}5 \times 12/3 = 154$ Cub.*dm*.

Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels ist gleich der Summe aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche.

Da ein abgekürzter Kegel als eine abgekürzte Pyramide, deren Grundflächen Kreise sind, angesehen werden kann, so folgt:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes findet man, indem man die Summe aus den Maßzahlen der Umfänge beider Grundflächen mit der halben Maßzahl der Seite multipliciert.

Fig. 72.



In einem abgekürzten senkrechten Kegel betragen (Fig. 72) die Durchmesser der Grundflächen 7 *dm* und 3 *dm*, und die Seite 6·76 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

Umf. der unt. Grundfl.	$=$	$7 \times 3\frac{1}{7}$	$= 22$ *dm*	
„ „ ob. „	$=$	$3 \times 3\frac{1}{7}$	$= 9{\cdot}43$ *dm*	
Inh. „ unt. „	$=$	$22 \times \frac{7}{4}$	$= 38{\cdot}5$ □*dm*	
„ „ ob. „	$=$	$9{\cdot}43 \times \frac{3}{4}$	$= 7{\cdot}07$ □*dm*	
beide Grundflächen			$= 45{\cdot}57$ □*dm*	
Mantelfläche	$=$	$31{\cdot}43 \times \frac{6{\cdot}76}{2}$	$= 106{\cdot}23$ □*dm*	
ganze Oberfläche			$= 151{\cdot}8$ □*dm*.	

Den Cubikinhalt eines Kegelstumpfes findet man, indem man von dem Inhalte des vollständigen Kegels den Inhalt des Ergänzungskegels subtrahiert.

Z. B. Wie groß ist der Cubikinhalt eines 6·4 *dm* hohen Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 7 *dm* und 3 *dm* zu Durchmessern haben?

Vor allem muss die Höhe des vollständigen Kegels gesucht werden. Die Seiten Aa und Bb haben sich bei einer Höhe von 6·4 *dm* um 7 *dm* — 3 *dm* = 4 *dm* genähert; damit sie zusammentreffen, d. i. sich um 7 *dm* nähern, muss die Höhe so oftmal 6·4 *dm* betragen, als 4 *dm* in 7 *dm* enthalten sind, also 1·75mal 6·4 *dm* = 11·2 *dm*. Die Höhe des ganzen Kegels ist demnach 11·2 *dm*, die Höhe des Ergänzungskegels 11·2 *dm* — 6·4 *dm* = 4·8 *dm*.

Inhalt des vollständ. Kegels $= 38{\cdot}5 \times \frac{11{\cdot}2}{3} = 143{\cdot}73$ Cub.*dm*

„ „ Ergänzungskegels $= 7{\cdot}07 \times \frac{4{\cdot}8}{3} = 11{\cdot}31$ „

Inhalt des Kegelstumpfes $= 132{\cdot}42$ Cub.*dm*.

In der Praxis begnügt man sich gewöhnlich mit einer angenäherten Bestimmung des Cubikinhaltes eines Kegelstumpfes, indem man diesen als einen Cylinder berechnet, welcher die halbe Summe aus den beiden Grundflächen des Stumpfes zur Grundfläche, und die Höhe des Stumpfes zur Höhe hat.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 180—184.

---

§. 33. Berechnung der Kugel.

Man hat gefunden, dass die Oberfläche einer Kugel 4mal so groß ist als eine größte Kreisfläche derselben, dass sie also gleich ist dem 4fachen Quadrate des Halbmessers multipliciert mit der Ludolfischen Zahl.

Z. B. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser 8 *dm* ist?

Größte Kreisfläche $= 4 \times 4 \times 3^1/_7 = 50{\cdot}285$ □*dm*,
Oberfläche der Kugel $= 50{\cdot}285 \times 4 = 201{\cdot}14$ „

Will man umgekehrt aus der Oberfläche der Kugel den Halbmesser finden, so darf man nur die Oberfläche durch die 4fache Ludolfische Zahl dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers dar; zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst.

Z. B. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 373·2526 □*cm*; wie groß ist der Halbmesser?

$$373{\cdot}2526 : 3{\cdot}1416 = 118{\cdot}81$$
$$\sqrt{118{\cdot}81} = 10{\cdot}9\,cm \text{ Halbmesser.}$$

Die Bestimmung des Cubikinhaltes einer Kugel wird auf die Inhaltsberechnung der Pyramide zurückgeführt.

Wenn man nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel sehr viele Ebenen legt, so zerfällt dadurch die Kugel in sehr viele kleine Pyramiden, die ihre Spitze im Mittelpunkte und daher zur gemeinschaftlichen Höhe den Halbmesser der Kugel haben und deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel bilden.

Den Cubikinhalt einer Kugel findet man also, indem man die Maßzahl der Oberfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl des Halbmessers multipliciert.

So findet man für die oben betrachtete Kugel

Cubikinhalt $= 201 \cdot 14 \times \frac{4}{3} = 268 \cdot 19$ Cub. *dm.*

Der Cubikinhalt einer Kugel läſst sich auch unmittelbar aus dem Halbmesser berechnen. Die Oberfläche ist nämlich gleich dem 4fachen Quadrate des Halbmessers multipliciert mit 3·1416. Multipliciert man diese mit dem dritten Theile des Halbmessers, so erhält man $\frac{4}{3}$ des Productes aus dem Cubus des Halbmessers und 3·1416, d. i. das Product aus dem Cubus des Halbmessers und 4·1888.

Der Cubikinhalt einer Kugel wird daher auch gefunden, indem man den Cubus des Halbmessers mit 4·1888 multipliciert.

Z. B. Wie groß ist der Cubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser 1·25 *m* beträgt?

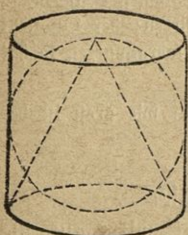
$1 \cdot 25 \times 1 \cdot 25 \times 1 \cdot 25 \times 4 \cdot 1888 = 8 \cdot 18125$ Cub. *m.*

Wenn man umgekehrt aus dem gegebenen Cubikinhalte einer Kugel den Halbmesser finden soll, darf man nur den Cubikinhalt durch 4·1888 dividieren; der Quotient ist der Cubus des gesuchten Halbmessers: zieht man daraus die Cubikwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst.

Z. B. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Cubikinhalt 6·370641 Cub. *dm* beträgt? $6 \cdot 370641 : 4 \cdot 1888 = 1 \cdot 520875$

$\sqrt[3]{1 \cdot 520875} = 1 \cdot 15$ *dm* Halbmesser.

Fig. 73.



Die Zusammenfassung der Inhaltsberechnung der runden Körper enthält folgende Aufgabe:

In einen Cylinder (Fig. 73) von 12 *cm* Durchmesser und 12 *cm* Höhe beschreibt man eine Kugel und einen senkrechten Kegel; a) wie groß ist der Cubikinhalt jedes dieser drei Körper, b) wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Cylinders zu einander?

Cylinder: Grundfl. $= 6 \times 6 \times 3\frac{1}{7} = 113\frac{1}{7}$ □*dm,*

Inh. $= 113\frac{1}{7} \times 12 = 1357\frac{5}{7}$ Cub. *dm.*

Kugel: Oberfl. $= 6 \times 6 \times 3\frac{1}{7} \times 4 = 452\frac{4}{7}$ □*dm,*

Inh. $= 452\frac{4}{7} \times \frac{6}{3} = 905\frac{1}{7}$ Cub. *dm.*

Kegel: Grundfl. $= 6 \times 6 \times 3\frac{1}{7} = 113\frac{1}{7}$ □*dm,*

Inhalt $= 113\frac{1}{7} \times \frac{12}{3} = 452\frac{4}{7}$ Cub. *dm.*

Kegel : Kugel : Cylinder =

$452\frac{4}{7} : 905\frac{1}{7} : 1357\frac{5}{7} = 1 : 2 : 3.$

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 184—186.

§. 34. Bestimmung des Cubikinhaltes eines Körpers aus dessen Gewichte.

Der Cubikinhalt (das Volumen) und das Gewicht eines Körpers stehen im innigen Zusammenhange.

Die Größe des Druckes, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt, heißt das Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das einem Körper ohne Rücksicht auf seine Größe (auf seinen Cubikinhalt) zukommt, ist das absolute Gewicht desselben. Das Gewicht, welches eine Cubikeinheit, z. B. ein Cubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen specifisches Gewicht. 1 Cub.*dm* Gold wiegt 19·36 Kilogramm; diese sind das specifische Gewicht des Goldes für 1 Cub.*dm* als Raumeinheit.

Da 1 Cub.*dm* reines Wasser 1 Kilogr. wiegt, so enthält das specifische Gewicht eines Körpers für 1 Cub.*dm* auch die Angabe, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumtheiles reinen Wassers das Gewicht eines so großen Raumtheiles des betreffenden Körpers ist.

Specifische Gewichte einiger Körper:

1 Cub. Decimeter

Alabaster	wiegt	2·70	Kil.	Korkholz	wiegt	0·24	Kil.
Bernstein	„	1·08	„	Kupfer, gehämmert	„	8·88	„
Blei	„	11·35	„	„ gegossen	„	8·79	„
Buchenholz	„	0·74	„	Marmor	„	2·72	„
Eichenholz	„	0·86	„	Messing (im Mittel)	„	8·40	„
Eisen, geschmiedet	„	7·79	„	Platin	„	21·45	„
„ gegossen	„	7·21	„	Quecksilber	„	13·60	„
Elfenbein	„	1·83	„	Silber	„	10·51	„
Fichtenholz	„	0·47	„	Steinkohle (im Mittel)	„	1·30	„
Gold	„	19·36	„	Stahl	„	7·82	„
Granit (im Mittel)	„	2·70	„	Tannenholz	„	0·48	„
Kalkstein	„	0·46	„	Zink	„	7·19	„
Kieferholz	„	0·52	„	Zinn	„	7·29	„

Welchen Cubikinhalt nehmen 1800 Kilogramm Steinkohlen ein?

Da 1 Cub.*dm* Steinkohle 1·3 Kilogr. wiegt, so nehmen 1800 Kilgr. Steinkohlen so viel Cub.*dm* Raum ein, als wie oft 1·3 Kilogr. in 1800 Kilogr. enthalten sind;

$$1800 : 1{\cdot}3 = 1384{\cdot}6 \text{ Cub.}dm.$$

Den Cubikinhalt eines Körpers in Cubikdecimeter findet man also, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogramm durch das specifische Gewicht dividiert.

Ein Schlauch fasst 18 Cub.*dm*; wie viel wiegt das darin enthaltene Quecksilber?

1 Cub.*dm* Quecksilber wiegt 13·6 Kilogr.; 18 Cub.*dm* wiegen daher 13·6 × 18 = 244·8 Kilogramm.

Das absolute Gewicht eines Körpers in Kilogramm findet man also, indem man dessen specifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Cub.*dm* ausgedrückten Cubikinhaltes multipliciert.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 209 und 210.