ARITMETIKA DVOJIŠKIH KONČNIH OBSEGOV

JERNEJ TONEJC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11T{06, 22, 55, 71}, 12E{05, 20, 30}, 68R05

V članku predstavimo končne obsege in aritmetiko v končnih obsegih karakteristike 2. Ti imajo pomembno vlogo v implementaciji številnih kriptosistemov in kod za odpravljanje napak. Opišemo učinkovite algoritme za računanje v polinomskih bazah končnih obsegov, ki se pogosto uporabljajo v kriptografskih aplikacijah.

ARITHMETIC OF BINARY FINITE FIELDS

We introduce finite fields and arithmetic in finite fields of characteristic 2 which play an important role in implementation of many cryptosystems and error-correcting codes. We describe efficient arithmetic algorithms in polynomial bases for finite fields which are often used in cryptographic applications.

Uvod

S končnimi obsegi so se ukvarjali ugledni matematiki, kot so Fermat, Euler, Lagrange in Legendre, ki so prispevali k razvoju teorije praštevilskih obsegov $\mathbb{Z}_p$. Splošno teorijo končnih obsegov sta začela graditi Gauss in Galois. Vendar pa se je le-ta uveljavila v uporabni matematiki šele s prihodom računalnikov, kjer ne gre brez diskretnih matematičnih struktur. Spomnimo se, da je obseg najpreprostejša algebraična struktura, v kateri lahko izvajamo vse elementarne aritmetične operacije, tj. seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (v resnici množimo z multiplikativnim inverzom). Z razvojem teorije kodiranja, kriptografije in številnih kriptosistemov, ki uporabljajo končne obsege, se je pokazala potreba po izboljšavi algoritmov za aritmetiko nad končnimi obsegi. Pri izvajanju kriptografskih aplikacij se osnovne aritmetične operacije v obsegih izvršijo zelo velikokrat, zato je hitrost ključnega pomena. Seštevanje elementov je običajno hitro, zato pa sta množenje in še posebej računanje inverza časovno zahtevnejši operaciji.

Računalniki skoraj vedno računajo s števili, predstavljenimi v dvojiškem sistemu. Naravno število $k \in [2^n, 2^{n+1})$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, lahko zapišemo kot

$$k = 2^n k_n + 2^{n-1} k_{n-1} + \cdots + 2k_1 + k_0\,, \quad \text{kjer je } k_i \in \mathbb{Z}_2 \ \text{ in } \ k_n \neq 0\,. \quad (1)$$

Slika 1. Če bi nam bankomat odvrnil, da po njegovem izračunu morda le ni gotovo, da smo pravi lastnik bančne kartice, bi bili najbrž nejevoljni. Pričakujemo natančen odgovor DA oziroma NE.

V računalniku shranimo le $(n+1)$-terico $k_n k_{n-1} \ldots k_1 k_0$. Če je $\mathbf{s} = s_{n+1} s_n \ldots s_1 s_0$ vsota števil $\mathbf{a} = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ in $\mathbf{b} = b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$, manjših od 2^{n+1}, potem za $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ velja

$$d_i = a_i + b_i + c_{i-1}\,, \quad s_i = d_i \bmod 2\,, \quad c_i = d_i \operatorname{div} 2 \quad \text{in} \quad s_{n+1} = c_n\,. \tag{2}$$

Z div smo označili celoštevilsko deljenje, c_i pa je seveda prenos pri seštevanju. Pri tem privzamemo $c_{-1} = 0$ in opomnimo, da je število s_{n+1} lahko tudi enako 0.

Tudi polinom $p(x)$ stopnje n s koeficienti iz $\mathbb{Z}_2$ je primeren za hranjenje v računalniškem pomnilniku, saj za

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i, \qquad \text{kjer } p_i \in \mathbb{Z}_2 \ \text{ in } \ p_n \neq 0\,, \tag{3}$$

spet shranimo samo $(n+1)$-terico $p_n p_{n-1} \ldots p_1 p_0$. Če predstavlja $s_n s_{n-1} \ldots s_1 s_0$ vsoto polinomov stopnje kvečjemu n, predstavljenih z $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ in $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$, za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ velja

$$s_i = a_i + b_i \bmod 2\,. \tag{4}$$

Med zapisoma (1) in (3) na prvi pogled ni velike razlike, le število „2“ zamenjamo s spremenljivko „x“. Vendar pa računalniško vezje za seštevanje, ki ga predstavlja enačba (4), sestavlja en sam „ekskluzivni ali“ (XOR), za

izračun izrazov v (2) pa potrebujemo zaradi morebitnega prenosa dvakrat toliko vezja. V namenskih tiskanih vezjih se tako namesto praštevilskih obsegov večinoma uporabljajo razširitve dvojiškega obsega. Drugi razlog za njihovo uporabo izhaja iz vprašanja:

Ali je lahko kvadriranje bistveno hitrejše od množenja?

Naslednja identiteta

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

nakazuje, da je odgovor najbrž NE. Kajti če bi znali „zelo“ hitro kvadrirati, potem bi kvečjemu dvakrat počasneje lahko izračunali tudi produkt. Ta enačba seveda velja le, če karakteristika obsega ni enaka 2. V razširitvah dvojiških obsegov pa je nekoliko drugače. V tem primeru namreč obstajajo t. i. normalne baze, v katerih je kvadriranje povsem enostavno. Izvedemo ga le s cikličnim zamikom, množenje pa ostane težko (kvadratne zahtevnosti glede na dolžino zapisa). Zato se bomo osredotočili na aritmetiko dvojiških obsegov, na katere bodo vezani tudi vsi naši primeri.

V nadaljevanju najprej predstavimo osnove končnih obsegov, nato pa se posvetimo aritmetiki v razširitvah dvojiškega obsega. Seštevanje je običajno relativno hitra operacija (linearna glede na dolžino zapisa podatkov), kar potem ne velja za množenje. Obstaja pa tudi takšna predstavitev elementov, da je množenje hitro in seštevanje počasno, kot bomo videli v naslednjem razdelku. Nato vpeljemo polinomske baze in opišemo metode množenja, kvadriranja in redukcije v njih. Posebej obravnavamo deljenje, ki ga izvajamo s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma. Opišemo tudi elegantno Berlekampovo izvedbo razširjenega Evklidovega algoritma, ki je še posebej uporabna za računalnike z zelo malo pomnilnika. Na koncu predstavimo vlogo končnih obsegov v kriptografiji, kjer je učinkovita aritmetika pogosto ključnega pomena pri reševanju računsko zahtevnih problemov.

Končni obsegi

Spomnimo se, da je obseg tak kolobar z enoto za množenje, v katerem je vsak neničeln element obrnljiv. Podobseg pa je podmnožica obsega, ki je za isti operaciji tudi obseg. Za vsak končen obseg obstaja tako najmanjše naravno število p, za katero velja $a+a+\cdots+a = p \cdot a = 0$, kjer je a poljuben element danega obsega. Tako število p imenujemo *karakteristika* končnega

obsega in mora biti zaradi minimalnosti praštevilo. Množica ostankov pri deljenju s praštevilom p, skupaj z običajnim seštevanjem in množenjem po modulu p, tvori obseg $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, ki mu pravimo *praobseg* in ga spoznamo že pri študiju deljivosti naravnih števil. Le-ta nima prav nobenega netrivialnega podobsega!

Izrek 1. *Moč poljubnega končnega obsega je enaka p^n, kjer je p neko praštevilo in n neko naravno število.*

Skica dokaza. Naj bo $\mathbb{F}$ poljuben končen obseg in p njegova karakteristika. V tem obsegu enota za množenje generira podobseg, ki je izomorfen praobsegu $\mathbb{Z}_p$. Obseg $\mathbb{F}$ je vektorski prostor nad tem podobsegom $\mathbb{Z}_p$, saj je za seštevanje komutativna grupa, skalarno množenje vektorjev pa je kar običajno množenje v $\mathbb{F}$. Ker je obseg končen, ima kot vektorski prostor tudi končno razsežnost. Označimo jo z n. Število elementov tega obsega je torej enako p^n. ∎

V nadaljevanju bomo videli, kako konstruiramo končni obseg s p^n elementi za poljubno praštevilo p in poljubno naravno število n. Krajši uvod v grupe in končne obsege najdemo v [6], bolj obširen pa v [12]. Končni obsegi so podrobno predstavljeni v [8], s kriptografskega stališča pa v [9] in [10].

Pišimo $q = p^n$. Ker so vsi končni obsegi z enakim številom elementov med seboj izomorfni, bomo obseg s q elementi označili z $\mathrm{GF}(q)$, kjer je GF okrajšava za Galoisov obseg (angl. *Galois field*), in ga obravnavali kot vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Z}_p$. Če so elementi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ baza prostora $\mathrm{GF}(q)$ nad obsegom $\mathbb{Z}_p$, lahko vsak element obsega $\mathrm{GF}(q)$ zapišemo v obliki vsote

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_i, \quad \text{kjer} \quad a_i \in \mathbb{Z}_p \,,$$

ali krajše kot vektor $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0)$.

Množica neničelnih elementov obsega $\mathrm{GF}(q)$ tvori za množenje grupo moči $q-1$, ki jo označimo z $\mathrm{GF}(q)^*$ in imenujemo *multiplikativna grupa* končnega obsega. Lagrangeev izrek nam pove, da red poljubnega elementa končne grupe deli moč te grupe (glej npr. [12, str. 57]), od koder takoj sledi, da vsak element grupe $\mathrm{GF}(q)^*$ reši enačbo

$$x^{q-1} = 1 \,. \tag{5}$$

Izrek 2. *Multiplikativna grupa* $\mathrm{GF}(q)^*$ *končnega obsega* $\mathrm{GF}(q)$ *je ciklična.*

Kot je bralec verjetno že uganil, bo enačba (5) v dokazu izreka imela ključno vlogo. Preden se lotimo dokaza izreka, potrebujemo še dve lemi.

Lema 3. *Označimo s* φ *Eulerjevo funkcijo, tj.* $\varphi(n)$ *je število naravnih števil, manjših od* n*, ki so si tuja z* n*. Potem za vsako naravno število* m *velja*

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m\,. \tag{6}$$

Dokaz. Oglejmo si množice $A(d) = \big\{k \in \{1,\ldots,m\}\colon \mathrm{D}(k,m) = d\big\}$. Očitno velja $A(d) = \emptyset$, če $d \nmid m$ in $A(d_1) \cap A(d_2) = \emptyset$, če $d_1 \neq d_2$. Ker za vsako naravno število $k \leqslant m$ obstaja d, za katerega je $\mathrm{D}(k,m) = d$, velja

$$\{1,\ldots,m\} = \bigcup_{d|m} A(d)\,,$$

kjer vzamemo unijo po vseh deliteljih števila m. Koliko elementov pa ima $A(d)$? Vsak $k \in A(d)$ je večkratnik števila d, torej velja $A(d) \subseteq \big\{d, 2d, \ldots, \frac{m}{d}d\big\}$. Ker velja še

$$\mathrm{D}(\ell d, m) = d \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{D}\left(\ell d, \frac{m}{d}d\right) = d \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{D}\left(\ell, \frac{m}{d}\right) = 1\,,$$

je moč množice $A(d)$ natanko $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$. Če upoštevamo, da so množice $A(d)$ med seboj disjunktne, vidimo, da smo dokazali naslednje:

$$\sum_{d|m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) = m\,.$$

Ko d preteče vse delitelje števila m, tudi $\frac{m}{d}$ preteče vse delitelje (v obratnem vrstnem redu), torej lahko zgornjo enakost zapišemo kot

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m\,,$$

kar smo želeli dokazati. ∎

Lema 4. *Naj bo $\mathbb{F}$ poljuben komutativen obseg in m poljubno naravno število. Če ima enačba*

$$x^m = 1 \tag{7}$$

v $\mathbb{F}$ natanko m rešitev, potem obstaja taka rešitev $g \in \mathbb{F}$, da velja $g^k \neq 1$ za vsa naravna števila $k < m$.

Dokaz. Preprosto je videti, da je množica vseh rešitev te enačbe v $\mathbb{F}$ grupa za množenje, saj je po predpostavki $\mathbb{F}$ komutativen. Naj bo $a \in \mathbb{F}$ poljubna rešitev enačbe (7). Potem obstaja najmanjše naravno število $d \leqslant m$, da velja $a^d = 1$, imenujmo ga *minimalna stopnja* elementa a. Očitno d deli m, sicer pridemo v protislovje z minimalnostjo. Elementi $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ so zaradi minimalnosti d med seboj različni, rešijo enačbo (7), hkrati pa zadoščajo enačbi $x^d = 1$, saj za $k \in \mathbb{Z}$ velja

$$(a^k)^m = a^{km} = (a^m)^k = 1^k = 1\,, \qquad (a^k)^d = a^{kd} = (a^d)^k = 1^k = 1\,.$$

Ker ima enačba $x^d = 1$ kvečjemu d rešitev, so to natanko vse možne rešitve. Torej je poljuben element z minimalno stopnjo d v množici $\{a, a^2, \ldots, a^{d-1}\}$. Zanimajo nas torej tisti elementi a^k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, katerih minimalna stopnja je prav tako d. To se zgodi takrat, ko je k tuj proti d. Takih je natanko $\varphi(d)$.

Za vsako rešitev enačbe (7) obstaja neki delitelj števila m, ki je minimalna stopnja te rešitve. Za poljubna različna delitelja d_1, d_2 števila m sta množici rešitev z minimalnima stopnjama d_1 in d_2 disjunktni. Pravkar smo videli, da imamo natanko $\varphi(d)$ rešitev z minimalno stopnjo d, kakor hitro imamo vsaj eno. Torej imamo natanko

$$\sum \varphi(d) \tag{8}$$

rešitev, kjer seštevamo po vseh tistih deliteljih števila m, za katere obstaja vsaj ena rešitev z minimalno stopnjo d. Primerjajmo ta izraz z lemo 3. Ker smo predpostavili, da ima enačba (7) m rešitev, hkrati pa velja (6), moramo v vsoti (8) seštevati po vseh deliteljih števila m. Torej je v njej tudi člen $\varphi(m)$, kar pomeni, da obstaja vsaj en element $g \in \mathbb{F}$, ki reši enačbo (7), katerega minimalna stopnja je m, kar je ravno to, kar smo želeli dokazati.∎

Element g iz leme imenujemo *primitivni m-ti koren enote* v obsegu $\mathbb{F}$. Sedaj imamo vse, kar potrebujemo za dokaz izreka.

Dokaz izreka 2. Wedderburnov izrek [12, str. 288] nam pove, da je vsak končen obseg komutativen, torej lahko za $\mathrm{GF}(q)$ uporabimo rezultat, ki smo ga pravkar dokazali. Videli smo, da ima enačba (5) natanko $q-1$ rešitev v $\mathrm{GF}(q)$, zato v $\mathrm{GF}(q)$ obstaja primitivni $(q-1)$-vi koren enote. To pa je ravno generator $\mathrm{GF}(q)^*$, torej je multiplikativna grupa končnega obsega res ciklična. ∎

Obseg $\mathrm{GF}(q)$ torej sestavljajo elementi $0, z, z^2, \ldots, z^{q-1}$, kjer je z primitivni $(q-1)$-vi koren enote. Pri takem načinu predstavitve elementov obsega je množenje hitro, saj v pomnilnik namesto elementa z^k zapišemo le eksponent k. Ker velja $z^{k_1} \cdot z^{k_2} = z^{k_1+k_2}$, produkta ni težko izračunati. Vendar v tej predstavitvi ne znamo hitro in enostavno izračunati vsote. Za $k_1 \leqslant k_2$ je $z^{k_1} + z^{k_2} = z^{k_1}(1 + z^{k_2-k_1})$, zato zadošča, da za vsak $k \in \mathbb{Z}_q$ poznamo eksponent $\ell \in \mathbb{Z}_q$, za katerega velja $z^\ell = z^k + 1$. Tabela vseh takih parov je poznana pod imenom ZechLog tabela. Medtem ko za majhne q taka tabela poenostavi računanje, pa za velike končne obsege izračun vseh parov (k, ℓ) ni enostaven, njihovo hranjene pa zavzame tudi veliko računalniškega pomnilnika. Za primer navedimo, da bi že za $\mathrm{GF}(2^{40})$ bila potrebna količina pomnilnika za hranjenje tabele kar 5 terabajtov, medtem ko se v praksi uporabljajo končni obsegi velikosti vsaj 2^{160}.

Najbolj znana konstrukcija razširitev končnih obsegov sloni na nerazcepnih polinomih. Iskanje nerazcepnega polinoma stopnje m iz kolobarja $\mathrm{GF}(q)[x]$ v splošnem ni tako enostavno, saj ne obstaja dokazano deterministično algoritem s polinomsko časovno zahtevnostjo (tj. število operacij v $\mathrm{GF}(q)$, ki jih algoritem opravi, je omejeno z nekim polinomom v m in n, kjer je $q = p^n$). Trenutno znani dokazi namreč temeljijo na veljavnosti posplošene Riemannove hipoteze. Da problem kljub vsemu ni brezupen, nas prepriča dejstvo, da obstajajo precej učinkoviti verjetnostni algoritmi. Konkretne konstrukcije nerazcepnih polinomov lahko bralec najde v [10, pogl. 3].

Izrek 5. *Naj bo $m \in \mathbb{N}$ in $\mathrm{GF}(q^m)$ končen obseg, ki vsebuje podobseg $\mathrm{GF}(q)$. Potem v kolobarju polinomov $\mathrm{GF}(q)[x]$ obstaja nerazcepen polinom $f(x)$ sto-*

pnje m, za katerega je

$$\mathrm{GF}(q^m) \cong \mathrm{GF}(q)[x]/(f(x))\,,$$

kjer je $\mathrm{GF}(q)[x]/(f(x))$ *obseg polinomov nad* $\mathrm{GF}(q)$*, reduciranih po modulu polinoma* $f(x)$*. Velja še* $\mathrm{GF}(q^m) \cong \mathrm{GF}(q)(\alpha)$*, kjer je* α *ničla polinoma* $f(x)$*.*

Skica dokaza. Ker je $f(x)$ nerazcepen, je $\mathrm{GF}(q)[x]/(f(x))$ obseg z natanko q^m elementi. Že prej smo videli, da vsak neničeln element $a \in \mathrm{GF}(q^m)$ reši enačbo $x^{q^m-1} = 1$. Če to enačbo pomnožimo z x, potem je njena rešitev tudi 0, od koder takoj sledi, da je vsak obseg s q^m elementi razpadni obseg polinoma $x^{q^m} - x$. Ker so vsi razpadni obsegi istega polinoma med seboj izomorfni, velja $\mathrm{GF}(q)[x]/(f(x)) \cong \mathrm{GF}(q^m)$. Dokazati moramo torej obstoj nerazcepnega polinoma $f(x) \in \mathrm{GF}(q)[x]$ stopnje m. Označimo z N_q število nerazcepnih polinomov v $\mathrm{GF}(q)[x]$ stopnje m z vodilnim koeficientom 1, ki delijo $x^{q^m} - x$. Velja ocena

$$\frac{1}{2m} \leqslant \frac{N_q}{q^m} \leqslant \frac{1}{m}\,,$$

od koder sledi, da nerazcepen polinom $f(x) \in \mathrm{GF}(q)[x]$ stopnje m mora obstajati. Za dokaz zadnje trditve v izreku si oglejmo naravno projekcijo

$$\pi\colon \mathrm{GF}(q)[x] \to \mathrm{GF}(q)[x]/(f(x))\,, \qquad \pi\colon g(x) \mapsto g(x) \bmod f(x)\,.$$

Enostavno je videti, da je $\pi(x)$ ničla polinoma $f(x)$, od koder trditev takoj sledi. ∎

Elementi obsega $\mathrm{GF}(q^m)$ tako ustrezajo polinomom nad $\mathrm{GF}(q)$ stopnje manj kot m. Seštevanje polinomov iz kolobarja $\mathrm{GF}(q)[x]$ stopnje manj kot m se enostavno prevede v kvečjemu m seštevanj elementov obsega $\mathrm{GF}(q)$, kot smo videli že v uvodu. Pri množenju pa ne gre tako zlahka, saj lahko stopnja produkta dveh polinomov doseže oz. preseže stopnjo nerazcepnega polinoma $f(x)$ in je zato potrebna redukcija po modulu polinoma $f(x)$.

Primer 1. Konstruirajmo obseg $\mathrm{GF}(2^3)$. Najprej moramo najti nerazcepen polinom stopnje 3 nad $\mathbb{Z}_2$. Najbolj preprosto bi bilo poskusiti kar z binomom. Vendar pa za polinom $f(x)$ s sodo mnogo neničelnimi členi nad $\mathbb{Z}_2$ velja $f(1) = 0$, kar pomeni, da je $f(x)$ razcepen. Zato mora imeti nerazcepen polinom iz kolobarja $\mathbb{Z}_2[x]$ liho število neničelnih členov. Njegov

konstantni člen je neničeln, sicer bi bil polinom deljiv z x. Tako sta edina kandidata $f_1(x) = x^3 + x + 1$ in $f_2(x) = x^3 + x^2 + 1$. Oba sta nerazcepna nad $\mathbb{Z}_2$, saj 0 in 1 nista ničli nobenega izmed njiju. Naj bo μ ničla polinoma $f_1(x)$. Potem je $\mu^3 = \mu + 1$ in elementi obsega $\mathrm{GF}(2^3)$ so

$$0\,,\mu\,,\mu^2\,,\mu^3 = \mu + 1\,,\mu^4 = \mu^2 + \mu\,,\mu^5 = \mu^2 + \mu + 1\,,\mu^6 = \mu^2 + 1\,,\mu^7 = 1\,.$$

Za ničlo ν polinoma $f_2(x)$ pa velja $\nu^3 = \nu^2 + 1$ in dobimo naslednjo upodobitev:

$$0\,,\nu\,,\nu^2\,,\nu^3 = \nu^2 + 1\,,\nu^4 = \nu^2 + \nu + 1\,,\nu^5 = \nu + 1\,,\nu^6 = \nu^2 + \nu\,,\nu^7 = 1\,.$$

V obeh primerih lahko to zapišemo kot trojice $a_2a_1a_0$, kjer $a_i \in \mathbb{Z}_2$ ustreza koeficientu pri μ^i oz. ν^i na desni strani enačaja. V primeru ν tako dobimo

$$000, 010, 100, 101, 111, 011, 110, 001\,. \quad \diamond$$

Polinomske baze

Naj bo $f(x)$ nerazcepen polinom stopnje m iz kolobarja $\mathrm{GF}(q)[x]$ in naj bo α njegova ničla. *Minimalni polinom* elementa α je tak polinom $r(x)$, za katerega velja $r(\alpha) = 0$, ima vodilni koeficient enak 1 in ima med vsemi polinomi s pravkar omenjenima lastnostma najmanjšo stopnjo. Vsak polinom $g(x) \in \mathrm{GF}(q)[x]$, ki ima element α za ničlo, je zato deljiv z minimalnim polinomom $r(x)$ elementa α. Ker pa je polinom $f(x)$ nerazcepen, mora biti kar enak skalarnemu večkratniku minimalnega polinoma $r(x)$. Zato element α ni ničla nobenega neničelnega polinoma iz kolobarja $\mathrm{GF}(q)[x]$ stopnje manjše od m. Sledi, da morajo biti elementi $1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$ linearno neodvisni nad $\mathrm{GF}(q)$ in zato sestavljajo bazo. Imenujemo jo *polinomska baza* vektorskega prostora $\mathrm{GF}(q^m)$ nad obsegom $\mathrm{GF}(q)$. Torej vsaka ničla nerazcepnega polinoma stopnje m iz kolobarja $\mathrm{GF}(q)[x]$ določa polinomsko bazo v $\mathrm{GF}(q^m)$. Pri zapisu elementov končnega obsega $\mathrm{GF}(2^m)$ v polinomski bazi pogosto namesto ničle α polinoma $f(x)$ pišemo kar x. Za različne nerazcepne polinome dobimo različne baze istega vektorskega prostora.

Primer 2. Že v prejšnjem primeru smo se prepričali, da je polinom $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ nerazcepen nad $\mathbb{Z}_2$. Torej je $\mathrm{GF}(2^3) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(f(x)) \cong \mathbb{Z}_2(\nu)$, kjer

je ν ničla polinoma $f(x)$, množica $\{\nu^2, \nu, 1\}$ pa je polinomska baza obsega $\mathrm{GF}(2^3)$. Vsak element zapišemo kot $a_2\nu^2+a_1\nu+a_0$, kar tako kot v prejšnjem primeru okrajšamo v trojico $a_2a_1a_0$. Tabela 1 prikazuje produkte elementov v $\mathrm{GF}(2^3)$.

·	000	001	010	011	100	101	110	111
000	000	000	000	000	000	000	000	000
001	000	001	010	011	100	101	110	111
010	000	010	100	110	101	111	001	011
011	000	011	110	101	001	010	111	100
100	000	100	101	001	111	011	010	110
101	000	101	111	010	011	110	100	001
110	000	110	001	111	010	100	011	101
111	000	111	011	100	110	001	101	010

Tabela 1. Množenje v obsegu $\mathrm{GF}(2^3)$.

Za zgled zmnožimo npr. elementa $\nu + 1$ in $\nu^2 + \nu$:

$$(\nu + 1)(\nu^2 + \nu) = \nu^3 + \nu^2 + \nu^2 + \nu = \nu^3 + \nu = (\nu^2 + 1) + \nu = \nu^2 + \nu + 1\,.\diamond$$

Preprosta metoda množenja elementov obsega $\mathrm{GF}(2^m)$, predstavljenih v polinomski bazi $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, 1\}$ z nerazcepnim polinomom $f(x)$ stopnje m, temelji na zvezi

$$a(x) \cdot b(x) = a_0\, b(x) + a_1\, xb(x) + \cdots + a_{m-1}\, x^{m-1}b(x)\,.$$

Po vrsti rekurzivno računamo $x^i b(x) \pmod{f(x)}$ za $i \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ in prištevamo tiste člene, pri katerih je a_i enak 1. Produkt $x \cdot b(x) \pmod{f(x)}$ izračunamo z zamikom koordinat vektorja $b(x)$. Spravimo ga kar v $b(x)$ ter mu na vsakem koraku prištejemo polinom $f(x)$, če je pred zamikom b_{m-1} enak 1. Tak pristop se dobro obnese v strojni opremi, kjer delamo na bitnem nivoju in lahko izvedemo zamik vektorja v enem ciklu. V programski implementaciji pa elemente običajno shranjujemo kot vektorje w-bitnih besed $A = (A[t - 1], \ldots, A[1], A[0])$, kjer je $t = \lceil m/w \rceil$, zato pri takem pristopu potrebujemo $m - 1$ zamikov besed. Množenje lahko izvedemo hitreje, če najprej zmnožimo elemente brez sprotnega reduciranja (kot običajno množimo polinome) in na koncu napravimo redukcijo

po modulu nerazcepnega polinoma $f(x)$. Pri tem izračunanemu $x^k b(x)$ za $k \in \{0, 1, \ldots, w-1\}$ dodamo na konec j ničelnih besed in dobimo element $x^{wj+k} b(x)$. Tako za množenje porabimo samo $w-1$ vektorskih zamikov (množenj z x). Podrobnejši opis algoritma za množenje in njegovih izboljšav je v [4, pogl. 2].

Posebej omenimo kvadriranje polinomov v obsegih karakteristike 2, ki je mnogo hitrejše od množenja dveh različnih polinomov. Kvadriranje dvojiških polinomov je linearna operacija, kvadrat polinoma $a(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ je namreč kar $a(x)^2 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{2i}$. Kvadrat elementa dobimo z vstavitvijo ničelnih bitov med bite elementa $a(x)$:

$$(a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a_0) \longmapsto (a_{m-1}, 0, a_{m-2}, 0, \ldots, 0, a_1, 0, a_0)\,.$$

Računanje v polinomskih bazah je bolj učinkovito, če je nerazcepni polinom $f(x)$ iz izreka 5 enostavnejši. V praksi izberemo take $f(x)$, ki imajo malo neničelnih koeficientov, saj to poenostavi modularno redukcijo s polinomom $f(x)$. Polinome s tremi neničelnimi členi imenujemo *trinomi*. Le-ti omogočajo hitrejšo implementacijo aritmetike končnih obsegov. V tabeli 2 so našteti nerazcepni trinomi nad obsegom $\mathbb{Z}_2$ stopnje $m \in (150, 500)$, ki se pogosto uporabljajo v kriptosistemih z eliptičnimi krivuljami. V tabeli je zapisano število m, za katero nerazcepen trinom obstaja, ter najmanjše število k, za katero je polinom $x^m + x^k + 1$ nerazcepen nad $\mathbb{Z}_2$.

Tako pri množenju kot tudi pri kvadriranju polinomov lahko stopnja produkta $c(x)$ doseže ali preseže stopnjo m izbranega nerazcepnega polinoma $f(x)$. Stopnja produkta je lahko največ $2m-2$, zmanjšamo pa jo z redukcijo po modulu nerazcepnega polinoma $f(x)$. Vzemimo vektor w-bitnih besed $C = (C[n], C[n-1], \ldots, C[1], C[0])$ in opišimo algoritem, ki temelji na dejstvu, da za $i \geq m$ velja $x^i = x^{i-m} f_1(x) \pmod{f(x)}$, kjer je $f_1(x) = f(x) - x^m$.

Če je $f(x)$ trinom, potem je $x^m = x^k + 1$ in je redukcija učinkovitejša, saj moramo pri reduciranju člena x^i za $i \geq m$ popraviti vektor C le na dveh mestih: pri $x^{i-(m-k)}$ in x^{i-m}. Ob redukciji naslednjega člena x^{i-1} popravljamo sosednje bite prej omenjenih mest. Zato lahko redukcijo izvajamo nad besedami namesto nad biti in s tem pohitrimo algoritem.

m	k	m	k	m	k	m	k	m	k	m	k	m	k
151	3	153	1	154	15	155	62	156	9	159	31	161	18
162	27	166	37	167	6	169	34	170	11	172	1	174	13
175	6	177	8	178	31	180	3	182	81	183	56	185	24
186	11	191	9	193	15	196	3	198	9	199	34	201	14
202	55	204	27	207	43	209	6	210	7	212	105	214	73
215	23	217	45	218	11	220	7	223	33	225	32	228	113
231	26	233	74	234	31	236	5	238	73	239	36	241	70
242	95	244	111	247	82	249	35	250	103	252	15	253	46
255	52	257	12	258	71	260	15	263	93	265	42	266	47
268	25	270	53	271	58	273	23	274	67	276	63	278	5
279	5	281	93	282	35	284	53	286	69	287	71	289	21
292	37	294	33	295	48	297	5	300	5	302	41	303	1
305	102	308	15	310	93	313	79	314	15	316	63	318	45
319	36	321	31	322	67	324	51	327	34	329	50	330	99
332	89	333	2	337	55	340	45	342	125	343	75	345	22
346	63	348	103	350	53	351	34	353	69	354	99	358	57
359	68	362	63	364	9	366	29	367	21	369	91	370	139
372	111	375	16	377	41	378	43	380	47	382	81	383	90
385	6	386	83	388	159	390	9	391	28	393	7	394	135
396	25	399	26	401	152	402	171	404	65	406	141	407	71
409	87	412	147	414	13	415	102	417	107	418	199	420	7
422	149	423	25	425	12	426	63	428	105	431	120	433	33
436	165	438	65	439	49	441	7	444	81	446	105	447	73
449	134	450	47	455	38	457	16	458	203	460	19	462	73
463	93	465	31	468	27	470	9	471	1	473	200	474	191
476	9	478	121	479	104	481	138	484	105	486	81	487	94
489	83	490	219	492	7	494	17	495	76	497	78	498	155

Tabela 2. Nerazcepni trinomi nad $\mathbb{Z}_2$. Do te tabele lahko pridemo na požrešen način (podobno kot npr. pri Eratostenovem rešetu) tako, da najprej zmnožimo vse nerazcepne linearne polinome, tj. x in $x+1$. Njihovi produkti x^2, x^2+x, x^2+1 očitno ne „pokrijejo“ vseh (štirih) polinomov stopnje 2. Zato je polinom x^2+x+1 nerazcepen. Sedaj množimo x in $x+1$ s polinomi stopnje 2 in ugotovimo, da pri stopnji 3 tudi ne „pokrijemo“ vseh polinomov. Z nadaljevanjem tega postopka lahko poiščemo vse nerazcepne polinome želene stopnje. Kadar za neki m ne obstaja nerazcepen trinom, iščemo nerazcepen pentanom ali heptanom. Za vse $m \leqslant 10\,000$ obstaja vsaj nerazcepen pentanom, kolikor ni že nerazcepnega trinoma stopnje m, glej [11].

Invertiranje in razširjeni Evklidov algoritem

Za invertiranje elementov obsega $\mathrm{GF}(2^m)$ lahko uporabimo razširjeni Evklidov algoritem [1, razdelek 2.1], ki ga bomo podrobneje opisali v nadaljevanju.

Slika 2. Evklid

Morda je sicer na prvi pogled bolj naravna metoda potenciranja, saj za vsak $\alpha \in \mathrm{GF}(2^m)$ velja $\alpha^{2^m} = \alpha$, od koder za $\alpha \neq 0$ sledi $\alpha^{-1} = \alpha^{2^m-2}$. Tak pristop se dobro obnese v teoriji, vendar pa se razširjeni Evklidov algoritem v praksi izkaže za dosti hitrejšega. Za $m = 173$ pri računanju inverza s potenciranjem porabimo 10 množenj, medtem ko lahko z razširjenim Evklidovim algoritmom inverzni element dobimo s 3–4 množenji.

Za dani polinom $a(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ stopnje manj od m iščemo tak polinom $p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ stopnje manj od m, da velja $a(x)p(x) \equiv 1 \pmod{f(x)}$. To pomeni, da obstaja tak polinom $q(x)$, da v kolobarju polinomov $\mathbb{Z}_2[x]$ velja

$$a(x)\,p(x) + q(x)\,f(x) = 1\,. \tag{9}$$

Ker je polinom $f(x)$ nerazcepen, je največji skupni delitelj polinomov $f(x)$ in $a(x)$ enak 1. V splošnem je enačbo (9) težko rešiti, zato si pomagamo z enostavnejšimi primeri. Poznamo namreč rešitev enačbe (9), kadar na desni strani stoji bodisi $f(x)$ ali $a(x)$. V prvem primeru je rešitev kar $p(x) = 0$ in $q(x) = 1$. V drugem primeru, ko je na desni $a(x)$, pa enačbo reši par $p(x) = 1$ in $q(x) = 0$. Zdaj lahko z iterativno metodo poiščemo zaporedji polinomov p_i in q_i, za kateri velja $ap_i + fq_i = r_i$. Upoštevamo omenjena posebna primera in začnemo z $r_{-2} = f$, $r_{-1} = a$, $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$ in $q_{-1} = 0$. Na vsakem koraku iščemo taka polinoma s_i in r_i, da velja

$$r_{i-2} = s_i r_{i-1} + r_i\,,$$

pri čemer je stopnja polinoma r_i manjša od stopnje polinoma r_{i-1}. Postavimo še

$$q_i = s_i q_{i-1} + q_{i-2} \quad \text{in} \quad p_i = s_i p_{i-1} + p_{i-2}$$

ter ponavljamo postopek, dokler na nekem koraku ne dobimo $r_k = 0$. Iskana rešitev je potem $q(x) = q_{k-1}$ in $p(x) = p_{k-1}$, kjer je stopnja q manjša od stopnje a, stopnja p pa manjša od stopnje f. Potrebujemo le polinom $p(x)$, zato zaporedja q_i sploh ne računamo. Za lažjo predstavo si oglejmo primer.

Primer 3. Naj bo $a(x) = x^4+x+1$ in $f(x) = x^5+x^2+1$. Poiščimo inverz polinoma $a(x)$.

$$\begin{aligned} r_{-2} = x^5+x^2+1 &= x(x^4+x+1)+x+1 \\ r_{-1} = x^4+x+1 &= (x^3+x^2+x)\cdot(x+1)+1 \\ r_0 = x+1 &= (x+1)\cdot 1+0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\cdot 1+0 &= x = p_0(x) \\ (x^3+x^2+x)\cdot x+1 &= x^4+x^3+x^2+1 = p_1(x) \\ (x+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+1)+x &= x^5+x^2+1 = p_2(x)\,. \end{aligned}$$

V zadnji vrstici postane ostanek r_2 enak 0, zato je inverz polinoma $a(x)$ enak $p_1(x)$. Podrobneje si oglejmo ta postopek z vidika računalnikov. Računalnik polinome deli postopoma, tako da množi polinom nižje stopnje z ustrezno potenco elementa x. To pomeni, da izvaja ciklični zamik, vse dokler nimata oba polinoma enake stopnje. Nato zamenja polinom, ki je na začetku višje stopnje, z njuno razliko. Postopek ponavlja, vse dokler se stopnja tistega polinoma, ki ima višjo ali enako stopnjo, ne zmanjša pod stopnjo drugega polinoma. Tako se po delih izračuna vsak polinom s_i. Oglejmo si pravkar opisani postopek na našem primeru. Za $i = 0$ se v prvem koraku r_{-1} najprej pomnoži z elementom x. Razlika med r_{-2} in $x \cdot r_{-1}$ je linearni polinom $r_0 = x+1$ in takoj se lahko izračuna $p_0 = s_0 \cdot p_{-1}+p_{-2} = x\cdot 1+0 = x$. Nato se za $i = 1$ (pri deljenju polinoma r_{-1} z r_0) ostanek iz prejšnjega koraka r_0 najprej množi z ustrezno potenco elementa x, kar predstavlja prvi sumand v s_1, recimo mu s_{11}:

$$r_{-1} = x^4 + x + 1 = x^3 \cdot (x + 1) + x^3 + x + 1\,.$$

Razlika med r_{-1} in $x^3 \cdot r_0$ je polinom $x^3 + x + 1$, ki je višje stopnje od r_0. Zato se polinoma zamenja in postopek se ponovi. Pri tem se spet množi

z ustrezno potenco elementa x, ki zdaj predstavlja drugi del polinoma s_1, tj. s_{12}:

$$x^3 + x + 1 = x^2 \cdot (x + 1) + x^2 + x + 1\,.$$

Ker je razlika med $x^3 + x + 1$ in $x^2 \cdot r_0$ še vedno višje stopnje od r_0, se ju spet zamenja in množi r_0 z elementom x, kar ustreza tretjemu sumandu polinoma s_1, tj. s_{13}:

$$x^2 + x + 1 = x \cdot (x + 1) + 1\,.$$

Sedaj je ostanek enak 1 in je nižje stopnje od linearnega polinoma r_0. Tako se po delih izračuna $s_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13}$. Ob tem se vzporedno računa polinom $p_1 = s_1 p_0 + p_{-1}$ kot

$$((s_{11}p_0 + p_{-1}) + s_{12}p_0) + s_{13}p_0 = ((x^3 \cdot x + 1) + x^2 \cdot x) + x \cdot x = x^4 + x^3 + x^2 + 1\,.$$

Podobno v tretjem koraku ($i = 2$) iz $r_0 = x + 1 = (x + 1) \cdot 1 + 0$ sledi, da je $s_2 = x + 1$, $r_1 = 1$ in $r_2 = 0$. Potem pa polinoma p_2 sploh ni treba računati, saj je inverz elementa a enak polinomu p_1. $\diamond$

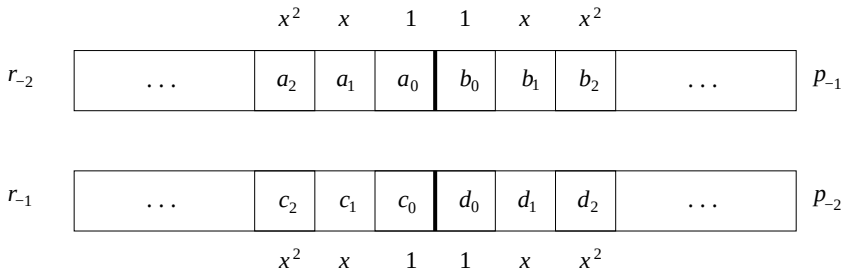
Berlekampov algoritem

Predstavimo Berlekampovo realizacijo razširjenega Evklidovega algoritma [1, razdelek 2.3], ki je posebej prilagojena za računalnike z zelo malo pomnilnika, kot so na primer pametne kartice. Potrebujemo namreč le dva

Slika 3. Elwyn Ralph Berlekamp

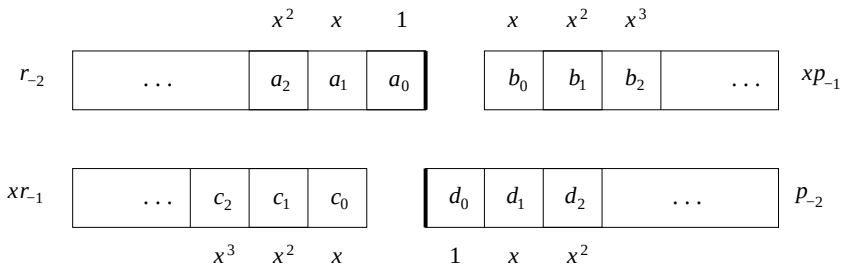
registra z $m+2$ biti, kjer je m stopnja nerazcepnega polinoma, opravimo pa najmanjše možno število logičnih operacij. Ideja je v zamikanju parov polinomov.

Koeficiente polinomov r in p postavimo skupaj tako, da najbolj levi bit predstavlja vodilni koeficient polinoma r, najbolj desni bit pa vodilni koeficient polinoma p. Na začetku so v zgornjem registru koeficienti polinoma r_{-2}, katerim sledi enica, ki predstavlja p_{-1}. V spodnji register pa na začetek zložimo koeficiente polinoma r_{-1}, katerim sledi p_{-2}. Takšen zapis je najprimernejši, saj polinomom r_i stopnja pada, polinomom p_i pa se veča. Začetno stanje prikazuje slika 4.



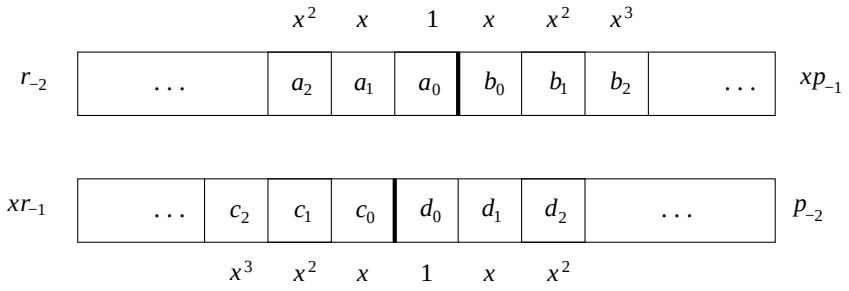
Slika 4. Začetno stanje registrov.

Če množimo polinom r_{-1} z elementom x, zaradi povezave med enačbama $r_{-2} = s_0 r_{-1} + r_0$ in $p_0 = s_0 p_{-1} + p_{-2}$ hkrati množimo tudi p_{-1} z elementom x. Pri tem se levi del spodnjega registra, v katerem so zapisani koeficienti polinoma r_{-1}, zamakne za eno mesto v levo. Desni del zgornjega registra pa se zaradi množenja p_{-1} z x zamakne za eno mesto v desno. Zamika sta prikazana na sliki 5.



Slika 5. Zamik registrov pri množenju z x.

Ta dva zamika pa sta ekvivalentna temu, da le zgornji register zamaknemo za eno mesto v desno, kot prikazuje slika 6. Potem seveda ne moremo med seboj primerjati bitov, ki ležijo med obema odebeljenima črtama. Lahko pa primerjamo tiste, ki ležijo na levi strani bolj leve odebeljene črte, saj le-ti ustrezajo enakim potencam elementa x. Podobno lahko med seboj primerjamo bite, ki ležijo na desni strani bolj desne odebeljene črte in ustrezajo naraščajočim potencam elementa x.



Slika 6. Kompaktna oblika registrov.

Algoritem je sestavljen le iz zamikov in seštevanj. Skupno število zamikov (Z) je $2m + 1$. Ker vsakemu seštevanju (S) sledi zamik, ne more biti več kot $2m$ seštevanj in celoten algoritem ne zahteva več kot $4m + 1$ operacij. Oglejmo si postopek na primeru iz prejšnjega razdelka. Z rimskimi številkami so označene skupine operacij, ki ustrezajo posameznim vrsticam v primeru, vejica pa ima enako vlogo kot odebeljena črta na slikah.

Primer 4.

$$\textbf{I.} \quad \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,1, & 1 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{-2}, & p_{-1} \\ r_{-1}, & p_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x), 1 \\ a(x), 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Z}: \quad \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,1, & 1 \\ 1\,0\,0\,1\,1, & 0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{-2}, & xp_{-1} \\ xr_{-1}, & p_{-2} \end{pmatrix}$$

$$\text{S}: \quad \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,1\,1, & 1 \\ 1\,0\,0\,1\,1, & 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{-2} + xr_{-1}, & xp_{-1} \\ xr_{-1}, & p_{-2} + xp_{-1} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{II}.\ \ \mathrm{Z}: \quad \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,1,\ 1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,1,\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0,\ p_{-1} \\ r_{-1},\ p_0 \end{pmatrix}$$

$$3\times\mathrm{Z}: \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,1,\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3r_0,\ p_{-1} \\ r_{-1},\ x^3p_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1,\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3r_0,\ p_{-1}+x^3p_0 \\ r_{-1}+x^3r_0,\ x^3p_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1,\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2r_0,\ p_{-1}+x^3p_0 \\ r_{-1}+x^3r_0,\ x^2p_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,1,\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2r_0,\ p_{-1}+(x^3+x^2)p_0 \\ r_{-1}+(x^3+x^2)r_0,\ x^2p_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,1,\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr_0,\ p_{-1}+(x^3+x^2)p_0 \\ r_{-1}+(x^3+x^2)r_0,\ xp_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1,\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr_0,\ p_{-1}+(x^3+x^2+x)p_0 \\ r_{-1}+(x^3+x^2+x)r_0,\ xp_0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{III}.\ \ \mathrm{Z}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1,\ 0\,1\,0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0,\ p_1 \\ r_1,\ p_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Z}: \quad \begin{pmatrix} 1\,1,\ 1\,0\,1\,1\,1 \\ 1,\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0,\ xp_1 \\ xr_1,\ p_0 \end{pmatrix}$$

◇

Končni obsegi v kriptografiji

Področje končnih obsegov je polno raziskovalnih problemov, tako teoretičnih, kakor tudi tistih, ki so povezani z njihovo uporabo. Mnogo slednjih izvira iz kriptografije in teorije kodiranja, kjer je aritmetika končnih obsegov velikokrat bistvenega pomena. V algoritmih pogosto uporabljamo razširitve dvojiških obsegov ali praštevilske obsege. Prednost prvih je v prilagodljivosti dvojiškemu zapisu v računalnikih, prednost drugih pa v že vgrajeni aritmetiki v sodobnih procesorjih. Primeri kriptografskih shem, ki temeljijo na končnih obsegih, so

- klasični Diffie-Hellmanov protokol za dogovor o ključu [2], [5],
- ElGamalove sheme za digitalni podpis [3] ter

- kriptosistemi z javnimi ključi, ki uporabljajo eliptične krivulje [7].

Učinkovitost teh računsko zahtevnih shem je odvisna od hitrosti izvajanja aritmetičnih operacij, zahtevnost teh pa je odvisna od izbire baze. Idealno bi bilo, če bi lahko vsako operacijo opravili v tisti bazi, v kateri jo znamo najbolj učinkovito izvesti, saj bi potem lahko kombinirali najboljše iz različnih svetov. V praksi je izbor baze odvisen od tega, katere operacije z elementi najpogosteje izvajamo. V kriptografiji so najbolj uveljavljene polinomske in normalne baze in videli smo, da imajo polinomske baze pomembno vlogo že pri vpeljavi končnih obsegov. Njihova praktična prednost se pokaže predvsem v učinkovitem invertiranju, ki ga izvajamo z razširjenim Evklidovim algoritmom. Normalne baze pa so zanimive tako s stališča matematične teorije kot tudi zaradi praktične uporabe, zato si zaslužijo posebno obravnavo.

LITERATURA

[1] E. Berlekamp, *Algebraic Coding Theory*, Aegean Park Press; Revised edition, 1984.

[2] W. Diffie in M. E. Hellman, *New directions in Cryptography*, IEEE Transactions on Information Theory **IT-22**, (1976) 6, str. 644–654.

[3] ElGamal, *A public-key cryptosystem and signature scheme based on discrete logarithms*, IEEE Transactions on Information Theory **IT-21**, (1985) 4, str. 469–472.

[4] D. Hankerson, A. Menezes in S. Vanstone, *Guide to Elliptic Curve Cryptography*, Springer-Verlag, 2004.

[5] A. Jurišić, *Diffie-Hellmanov dogovor o ključu*, Presek **34**, (2006/2007) 1, str. 25–30.

[6] A. Jurišić, *Računala nove dobe*, Presek **30**, (2002/2003) 4 in 5, str. 226–231 in 290–296 .

[7] N. Koblitz, *Elliptic curve cryptosystems*, Mathematics of Computation **48**, (1987), str. 203–209 .

[8] R. Lidl in H. Niederreiter, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications: Finite Fields*, Cambridge University Press, 1987.

[9] A. J. Menezes, P. van Oorschot in S. Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, 1996.

[10] A. J. Menezes, I. F. Blake, S. Gao, R. C. Mullin, S. A. Vanstone in T. Yaghoobian, *Applications of Finite Fields*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[11] G. Seroussi, *Table of Low-Weight Binary Irreducible Polynomials*, Hewlett-Packard Laboratories Technical Report, HPL-98-135, 1998.

[12] I. Vidav, *Algebra*, DMFA–založništvo, 2003.