Rešitve matematičnih nalog s Plemljeve mature

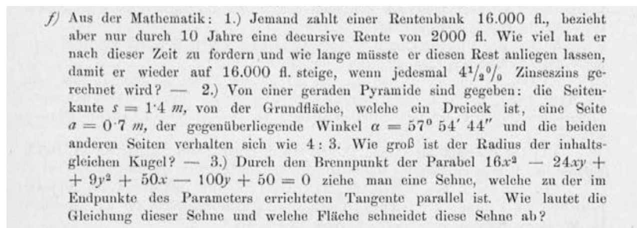
Marko Razpet

Josip Plemelj je obiskoval osemrazredno državno gimnazijo v Ljubljani in na njej uspešno maturiral v šolskem letu 1893/94. Pot do njegove mature pa ni bila gladka, ker se v zadnji razred zaradi neke neumnosti ni mogel vpisati. Več o tem lahko preberemo v [3]. Kot privatist je opravljal izpite za prvo polletje osmega razreda na gimnaziji v Novem mestu, za drugo polletje pa na gimnaziji v Ljubljani, kjer je tudi maturiral. V prispevku bomo predstavili rešitve maturitetnih nalog, ki so jih reševali takratni gimnazijci.

Gimnazije so na koncu šolskega leta objavile poročilo o svojem delu. Letna poročila ljubljanske državne gimnazije, ki jo je obiskoval Plemelj, so bila tiskana. Njihov osnovni jezik je bila nemščina. V teh poročilih so bili objavljeni seznami profesorjev in dijakov po razredih, seznami vsebin predmetov, potrebnih učbenikov, učil, poljudnih predavanj, šolska statistika in drugo, pa tudi maturitetne naloge s prejšnjih rokov. Na začetku poročil je bil po navadi daljši znanstveni prispevek kakega profesorja. Matematike je bilo povprečno tri ure tedensko v vseh razredih. Uporabljali so Močnikove in Hočevarjeve učbenike.

Kot je razvidno iz letnih poročil ljubljanske državne gimnazije (o tem več v [1, 2]), so potekali pisni maturiteni izpiti v poletnem roku od 11. do 16. junija, ustni izpiti pa so se začeli 9. julija in končali 14. julija 1894. Za ta rok je bilo prijavljenih 41 rednih dijakov, en privatist osmega razreda in trije eksternisti. Privatist ni bil nihče drug kot Josip Plemelj, eksternisti pa so bili dijaki iz drugih šol.

Da si bomo bolje predstavljali takratno maturo, zlasti njen matematični del, navajamo teme pri pisnih izpitih: prevod iz nemščine v latinščino, prevod iz latinščine v nemščino, prevod iz grščine v nemščino, nemški prosti spis, prosti spis iz zgodovine slovenskega jezika za tiste dijake, ki so obiskovali obvezen pouk slovenščine, in spis na temo neke starogrške drame.



f) Aus der Mathematik: 1.) Jemand zahlt einer Rentenbank 16.000 fl., bezieht aber nur durch 10 Jahre eine decursive Rente von 2000 fl. Wie viel hat er nach dieser Zeit zu fordern und wie lange müsste er diesen Rest anliegen lassen, damit er wieder auf 16.000 fl. steige, wenn jedesmal $4^1/_2\,{}^0/_0$ Zinseszins gerechnet wird? — 2.) Von einer geraden Pyramide sind gegeben: die Seitenkante $s = 1{\cdot}4\ m$, von der Grundfläche, welche ein Dreieck ist, eine Seite $a = 0{\cdot}7\ m$, der gegenüberliegende Winkel $\alpha = 57^0\,54'\,44''$ und die beiden anderen Seiten verhalten sich wie 4 : 3. Wie groß ist der Radius der inhaltsgleichen Kugel? — 3.) Durch den Brennpunkt der Parabel $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ ziehe man eine Sehne, welche zu der im Endpunkte des Parameters errichteten Tangente parallel ist. Wie lautet die Gleichung dieser Sehne und welche Fläche schneidet diese Sehne ab?

SLIKA 1.

Maturitetne naloge iz matematike.

Naloge iz matematike (slika 1) pa so bile take:

1. Nekdo vplača na banki 16 000 gld, nato pa 10 let prejema dekurzivno rento v višini 2 000 gld. Koliko ima po tem času še na računu in koliko časa mora čakati, da mu znesek spet naraste na prvotnih 16 000 gld? Vselej se računa z obrestno mero 4,5 %.
2. Pokončna piramida ima stranski rob $s = 1,4$ m in za osnovno ploskev trikotnik s stranico $a = 0,7$ m, kateri je nasproten kot $\alpha = 57^\circ\,54'\,44''$, preostali stranici pa sta v razmerju 4 : 3. Kako velik je polmer krogle, ki ima enako prostornino kot piramida?
3. Skozi gorišče parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ poteka tetiva, ki je vzporedna tangenti skozi krajišče parametra. Poišči enačbo nosilke tetive in ploščino odseka, ki ga ta tetiva odreže od parabole.

Opombe

1. Goldinar (gld) je bila stara avstrijska denarna enota (slika 2). V nemških besedilih so uporabljali za goldinar besedo Gulden in kratico fl (Florin). Leta 1892 so uvedli krone (K) in je veljalo 1 gld = 2 K. Goldinarji so bili v obtoku vse do leta 1900.
2. Dekurzivno rento se izplačuje ob koncu leta. Verjetno je v nalogi mišljeno, da je bil znesek 16 000 gld vplačan na začetku leta.
3. Pokončna tristrana piramida ima vse tri stranske robove enako dolge, tako da je pravokotna projekcija njenega vrha na osnovno ploskev v središču njej očrtanega kroga.
4. Od 5. do 8. razreda so pri geometriji in algebri uporabljali Močnikova učbenika. Učbenik za geometrijo med drugim obravnava tudi zasuk koordinatnega sistema in krivulje drugega reda, zato naloga tedanjim dijakom načeloma ne bi smela delati težav, čeprav je računsko kar zahtevna. *Parameter* parabole je v Močnikovem učbeniku tista njena tetiva, ki je vzporedna vodnici parabole in poteka skozi njeno gorišče (slika 5). Danes pomeni parameter parabole polovico te tetive.

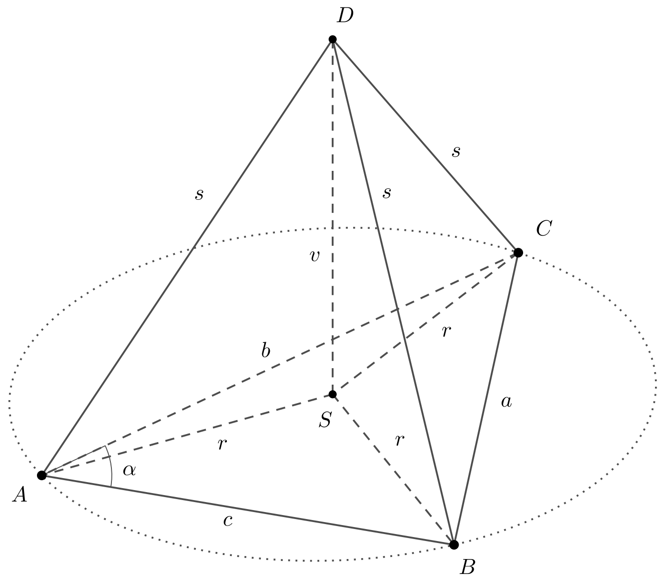
Rešitve Plemljevih maturitetnih nalog

1. Naj bo $a = 16\,000$ gld, $b = 2\,000$ gld in $p = 4{,}5$ %. Obrestovalni faktor je $r = 1 + p = 1 + 4,5/100 = 1,045$. Če je oseba vložila na banki znesek a na začetku leta, ima na koncu prvega leta $ar - b$ kapitala, na koncu drugega leta $(ar - b)r - b = ar^2 - b(r + 1)$ kapitala, na koncu desetega leta pa

$$A = ar^{10} - b(r^9 + r^8 + \ldots + r + 1)$$
$$= ar^{10} - b\frac{r^{10} - 1}{r - 1}.$$

Verjetno so dijaki računali z logaritemskimi tablicami. Danes s pomočjo žepnega računala dobimo: $A = 271,09$ gld. Po naslednjih n letih se kapital A obrestno obrestuje. Da naraste kapital na a, mora veljati enačba $Ar^n = a$. Za rešitev dobimo $n = \log a / \log A = n = 92,64$ leta. Oseba zelo verjetno tega ne bi dočakala, morda sinovi ali hčere ali pa celo vnuki in pravnuki.

SLIKA 2.
Goldinar s cesarjevo podobo in dvoglavim orlom.



SLIKA 3.
Tristrana piramida v nalogi.

2. Polmer r osnovni ploskvi piramide očrtanega kroga dobimo s formulo $a/\sin\alpha = 2r$. Višina v piramide je po Pitagorovem izreku $v = \sqrt{s^2 - r^2}$. Ploščina p osnovne ploskve je $p = bc\sin\alpha/2$. Prostornina V piramide je $pv/3$.

   Iz $b : c = 4 : 3$ dobimo $b = 4c/3$ in s kosinusnim izrekom $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

   - $$\begin{aligned} a^2 &= 16c^2/9 + c^2 - 2\cdot(4c/3)c\cos\alpha \\ &= c^2(25 - 24\cos\alpha)/9, \\ c &= \frac{3a}{\sqrt{25 - 24\cos\alpha}}. \end{aligned}$$

   Iz znanih podatkov lahko izračunamo

   - $$\begin{aligned} &c = 0{,}6\ \text{m},\quad b = 0{,}8\ \text{m}, \\ &p = 0{,}2033\ \text{m}^2,\quad r = 0{,}4131\ \text{m}, \\ &v = 1{,}3377\ \text{m},\quad V = 0{,}0906652\ \text{m}^3. \end{aligned}$$

   Prostornina V piramide je enaka prostornini krogle s polmerom R, če je $V = 4\pi R^3/3$. Iz tega dobimo

   - $$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}2787\ \text{m}.$$

3. Nalogo je najlaže rešiti z zasukom in vzporednim premikom koordinatnega sistema, da s tem parabolo prevedemo na kanonsko obliko. Homogeni del enačbe parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ je popoln kvadrat:

   - $$16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x - 3y)^2.$$

   Vpeljemo novi spremenljivki u in v z izrazoma

   - $$u = (4x - 3y)/5,\quad v = (3x + 4y)/5,$$

   ki predstavljata zasuk ravnine Oxy v ravnino Ouv. Obratna transformacija je dana z izrazoma

   - $$x = (4u + 3v)/5,\quad y = (-3u + 4v)/5.$$

   Enačba parabole preide z zasukom v enačbo

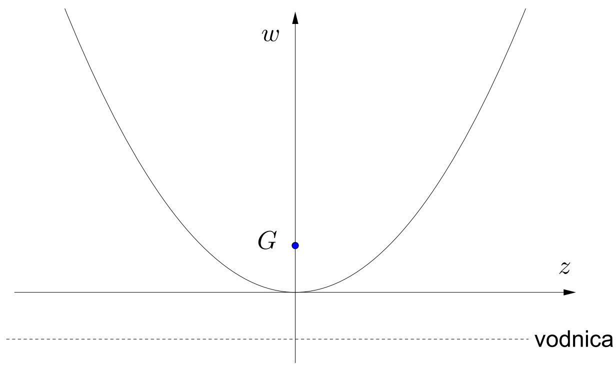
   - $$u^2 + 4u - 2v + 2 = (u + 2)^2 - 2(v + 1) = 0.$$

   Nato vpeljemo

   - $$z = u + 2,\quad w = v + 1,$$

   kar predstavlja vzporedni premik ravnine Ouv v
   ravnino Ozw. Obraten premik predstavljata izraza

   - $$u = z - 2,\quad v = w - 1.$$



SLIKA 4.
Parabola v klasični legi.

Obe transformaciji ohranjata razdalje, kote, ploščine ter orientacijo. Enačba parabole je v ravnini Ozw preprosta: $z^2 = 2w$ (slika 4). Iz nje preberemo enačbo vodnice in položaj gorišča G v ravnini Ozw:

- $w = -1/2, \quad G(0, 1/2)$.

Tetiva skozi G, vzporedna vodnici, je po Močniku parameter parabole. Krajišči parametra sta presečišči E in F premice $w = 1/2$ s parabolo $z^2 = 2w$. Brez težav dobimo $E(-1, 1/2)$ in $F(1, 1/2)$ (slika 5).

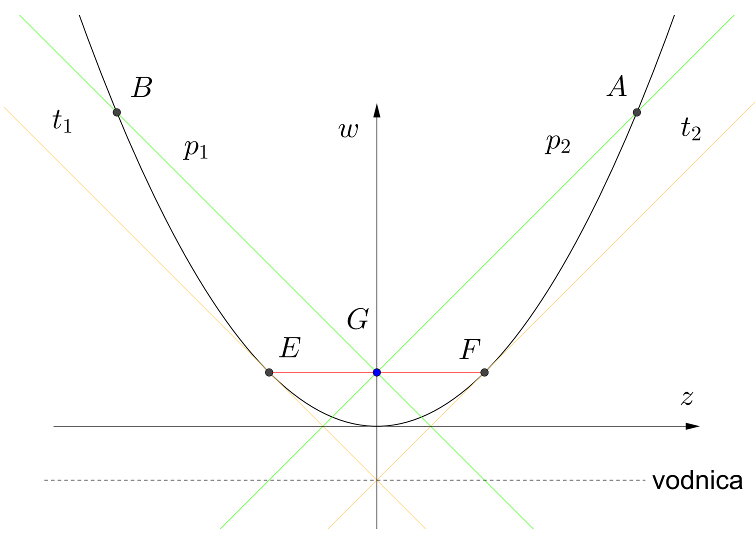
Kot je znano, dobimo enačbo tangente na parabolo $z^2 = 2w$ v točki $T(z_0, w_0)$ z enačbo $zz_0 = w + w_0$. V našem primeru je enačba tangente t_1 v $E(-1, 1/2)$ enaka $-z = w + 1/2$, enačba tangente t_2 v $F(1, 1/2)$ pa $z = w + 1/2$. Enačbi premic p_1 in p_2 skozi $G(0, 1/2)$, ki sta ustrezno vzporedni tangentama t_1 in t_2, sta $-z = w - 1/2$ in $z = w - 1/2$ oziroma $z + w - 1/2 = 0$ in $-z + w - 1/2 = 0$.

Ploščina odseka parabole, ki jo od nje odreže p_1, je zaradi simetrije enaka ploščini odseka parabole, ki jo od nje odreže p_2, zato je dovolj obravnavati primer s p_2. Dijaki niso še uporabljali integralskega računa, so pa vedeli, da je ploščina odseka parabole enaka $2/3$ ploščine polarnega trikotnika, ki ga omejujejo tangenti na parabolo in premica skozi njuni dotikališči (slika 6).

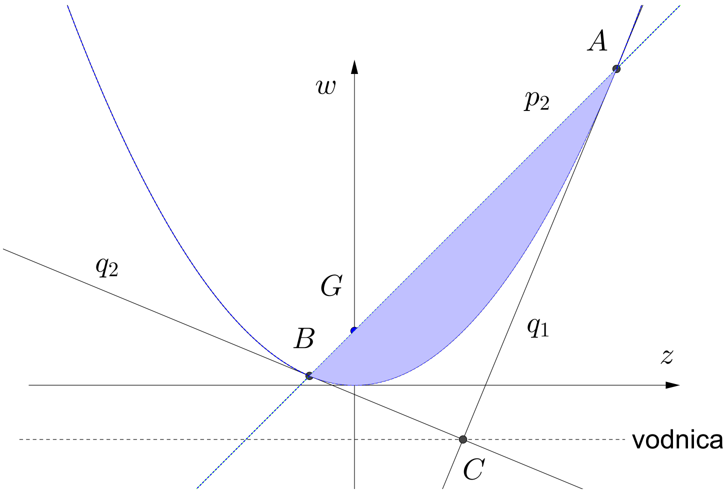
Poiščimo presečišči A in B parabole $z^2 = 2w$ s premico $-z + w - 1/2 = 0$. Dobimo $A(1 + \sqrt{2}, 3/2 + \sqrt{2})$ in $B(1 - \sqrt{2}, 3/2 - \sqrt{2})$. Sedaj je treba določiti enačbi tangent q_1 in q_2 na parabolo $z^2 = 2w$ v točkah A in B. Enačbi tangent sta

- $z(1 + \sqrt{2}) = w + 3/2 + \sqrt{2}, \; z(1 - \sqrt{2}) = w + 3/2 - \sqrt{2}$.

Tangenti se sekata pravokotno v točki $C(1, -1/2)$, ki leži na vodnici. Polarni trikotnik ABC je pravokoten s katetama $|AC| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$ in



SLIKA 5.
Parabola in tangenti v krajiščih parametra.



SLIKA 6.
Polarni trikotnik ABC in odsek parabole.

$|BC| = \sqrt{8-4\sqrt{2}}$. Ploščina p polarnega trikotnika ABC je potem

- $p = (1/2)\sqrt{8+4\sqrt{2}}\sqrt{8-4\sqrt{2}}$
  $= (1/2)\sqrt{64-32} = 2\sqrt{2}$,

ploščina P odseka parabole pa

- $P = 2p/3 = 4\sqrt{2}/3$.

Današnji maturanti lahko ta rezultat sami preverijo še z integracijo, a vstavljanje mej bo zaradi korenov nekoliko bolj zamudno.

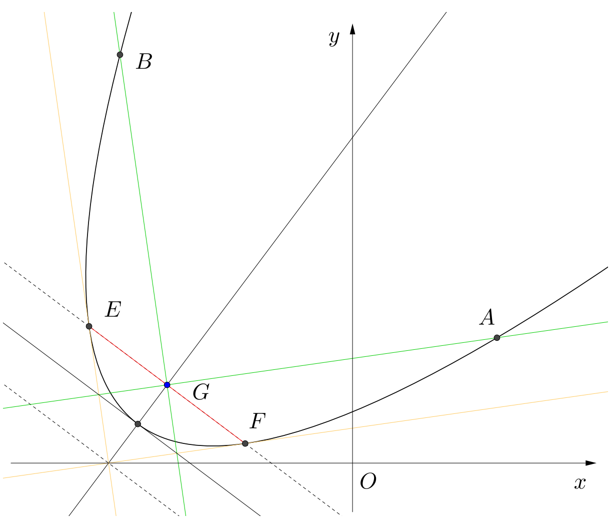
Zapisati moramo še enačbi premic p_1 in p_2 v ravnini Oxy. Najprej v ravnini Ouv:

- $z + w - 1/2 = u + 2 + v + 1 - 1/2$
  $= u + v + 5/2 = 0$,

- $-z + w - 1/2 = -u - 2 + v + 1 - 1/2$
  $= -u + v - 3/2 = 0$.

Končno pa še v ravnini Oxy:

- $u + v + 5/2 = (4x - 3y)/5 +$
  $+ (3x + 4y)/5 + 5/2$
  $= (14x + 2y + 25)/10 = 0$,



SLIKA 7.
Parabola v zasukani legi.

18
nadaljevanje na strani