Jez

Johann K.

Accademie Thurm = 30° 1' 10''
Steiger = Wange = 18
Radius des Zirkels beim Steiger = 4 1

513

~~Wintenfeld~~
~~Edl~~

Raunovich

~~Latrow~~

Johañ
Primel

E8 | F

E6 | F 1
3 | 5
5
11

E8 | F
5 | 6
1 | 1
11

F7 | E4
7 |
3 | 4
7
12

INSTITUTIONUM GEOMETRICARUM
PARS SECUNDA
SIVE
TRIGONOMETRIA PLANA,

CONSCRIPTA
IN USUM TIRONUM
A
P. CAROLO SCHERFFER,
E SOC. JESU.
ANNO MDCCLXX.

VINDOBONÆ,
TYPIS JOANNIS THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,
SAC. CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

MONITUM AD LECTOREM.

Orenus

Vix alia Geometriæ applicatio frequentiorem in vita civili uſum habet, quam quæ triangulorum dimenſionem docet, & propterea *Trigonometriæ* nomen tulit. Agimus autem tantummodo de plana, ad quam triangulorum ſphæricorum conſideratio non pertinet.

Sanctus

Univerſum argumentum tribus Capitibus complectimur, quorum primum Theoriam exponit, & principia Geometrica, quibus tanquam fundamento cetera innituntur. Alterum agit de praxi, ſeu executione, cum dimenſiones in campo faciendæ ſunt, eſtque priore amplius, magiſque diffuſum, tum quod & inſtrumenta ipſa, eorum uſum, & examen conſideret, tum etiam quod, quantum methodus elementaris ſinit, tirones majoribus aliquando menſurationibus ſuſcipiendis præparet. Neque ſejungendam putavimus *Libellationem*, quæ methodum explorandi declivitates in leniore ex uno in alterum locum deſcenſu proponit; & cum præclara commoda præſtet, non ita levi manu pertractanda fuit, ut plerumque in elementis tironum inſtitutioni ſcriptis habetur. Poſtremum denique Caput perbreve, neque in Articulos diſtinctum, ut cetera, unam alteramve applicationem Algebræ

Joh. [illegible]

ad Theoriam ſinuum, uſumque viciſſim horum in ſolvendis certi generis æquationibus exhibet, quem nomine celebris Theorematis Coteſii Geometræ non ignorant.

Etſi vero in parte practica perſpicuitati plurimum ſtuduerimus, fieri tamen haud facile poſſe exiſtimamus, ut non multa tironi obſcura ſint, niſi eidem & ipſa inſtrumenta, quæ adhibenda ſunt, ſaltem magis uſitata, exhibeantur, & exercitationis cauſa tractanda præbeantur. Procul dubio major ex uſu, quam meditatione, lux affundetur. Bate

INSTITUTIONUM GEOMETRICARUM PARS SECUNDA,

SIVE

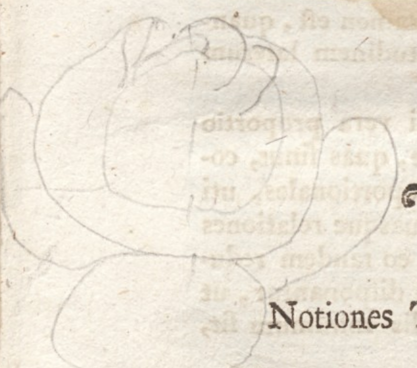
TRIGONOMETRIA PLANA.

CAPUT I.

Theoria Trigonometriæ planæ.

ARTICULUS I.

Notiones Trigonometriæ planæ, & partium triangulorum.



1.

Moliter

Trigonometria triangulorum partes calculo ſubjicere nos docet, aliasque ex aliis datis reperire. Et ea quidem, qua de agimus in præſens, non alia conſiderat triangula, quam in plano deſcripta, atque rectilinea: nam quæ reſolutionem triangulorum in ſuperficie ſphæræ per arcus circulares efformatorum tradit, ſphæricaque propterea dicitur, alteri tractationi reſervatur.

Fig. 1 Tab. I

2. Triangulum quodlibet, præter aream (cujus menſura a ſitu, ac magnitudine partium petitur), ſex partes offert, tria ſcilicet latera, totidemque angulos, quos concurſus binorum quorumvis laterum efficit. Vidimus vero in Geometria, angulorum magnitudinem, ſive inclinationem laterum, haudquaquam ab eorum longitudine pendere, verum a numero graduum in arcu quovis ſimili circulari contentorum, qui ex vertice inter crura deſcribi poteſt. Et quamvis etiam demonſtraverimus, in quovis triangulo latera majora opponi majoribus angulis, non tamen utrorumque incrementa, vel decrementa iisdem legibus ſubjacent. Sit (Fig. 1 Tab. I) angulus ACB, quem metitur arcus AB radio CA deſcriptus, comparandus angulo ECF, cujus menſura eſt arcus EF deſcriptus radio CE. Deſcribatur radio CE arcus concentricus arcui AB, & dicatur angulus ECF $= p$, angulus BCA $= P$, erit ob æquales radios arcus FE : arc. ED $= p : P$. Et quia arcus DE, AB ſimiles ſunt, erit quoque arc. DE : arc. AB $=$ EC : BC, & compoſitis rationibus arc. FE : arc. AB $= p \times EC : P \times BC$, multiplicatis mediis & extremis habetur arc. FE $\times P \times BC =$ arc. AB $\times p \times EC$, adeoque $p : P =$ arc. FE $\times$ BC : arc. AB $\times$ EC, vel $p : P = \frac{\text{arc. FE}}{EC} : \frac{\text{arc. AB}}{BC}$. Ex hac Analogia habetur ſequens Theorema: *anguli ſunt inter ſe in ratione compoſita e directa arcuum, qui eos metiuntur, & reciproca radiorum, quibus iidem arcus deſcripti ſunt.* Hinc generaliter ſi dicatur angulus $= P$, radius $= R$, arcus $= A$, eſt $P = \frac{A}{R}$. Cum itaque hanc angulorum expreſſionem non ingrediantur latera trianguli, etſi aliquid relationis habeant ad eadem, manifeſtum tamen eſt, quantitates haſce analogas non eſſe, neque determinatam magnitudinem laterum e determinata angulorum magnitudine erui poſſe.

3. Ut igitur ad inveniendam partem ignotam trianguli vera proportio Geometrica haberi poſſet, angulis ſubſtitutæ ſunt lineæ rectæ, quas ſinus, coſinus, tangentes &c dicimus, lateribus trianguli ex vero proportionales, uti demonſtrabimus. Harum porro rectarum definitiones, mutuasque relationes probe norit, oportet, qui Trigonometria uti cupit, quoniam eo tandem reducitur totum artificium, ut eæ cum lateribus ita in Analogiam diſponantur, ut quartus terminus partem trianguli quæſitam exhibeat, aut talis minimum ſit, ex qua reperiri poſſit.

Fig. 2 Tab. I

4. Sit radio quovis CA (Fig. 2 Tab. I) deſcriptus circulus ABDE, & diameter BCE ad diametrum ACD perpendicularis: agatur per A tangens MAO indefinita, uti etiam per B altera dBX. Sumatur quivis arcus, initio circuli in A ſtatuto, AF; erit FB complementum ejusdem, & FBD ſupplementum (ſive complementum ad 2 rectos) & FBDEA ejus complementum ad 4 rectos. Demittatur ex F ad radium AC perpendiculum FI, dicetur id *ſinus* anguli FCA, vel arcus AF; & ſi FH ducatur ad AC parallela, eſt FH $=$ IC, & dicitur *ſinus complementi*, vel *coſinus* arcus AF. Sinus enim nil aliud eſt, quam perpendiculum ex extremo arcus in radium de-

miſ-

miſſum, adeoque eſt FH ſinus arcus FB, qui complet arcum AF ad rectum. Si radius CF producatur, donec e tangente in A abſcindat partem AG, dicitur AG *tangens* anguli ACF (vel arcus AF), & GC ejusdem *ſecans*. Hinc etiam B*f* appellatur *cotangens* anguli ACF, utpote tangens complementi FB; & C*f* ejusdem anguli vel arcus AF *coſecans*, ſive *ſecans* complementi BF.

5. His denominationibus rite notatis, præterea advertendum, ſinus arcuum, qui poſſunt accipi in tota peripheria circuli, ſi ſemel initium ſtatuatur in A, omnes referri ad diametrum ACD, & qui ſunt ſupra hanc lineam, haberi pro poſitivis; qui vero habebunt ſitum oppoſitum, ſeu futuri ſunt infra eam diametrum, dicentur negativi. *2do.* Coſinus (ſive ſinus complementorum ad rectum) omnes referri ad diametrum BCE, & proinde illi, qui jacent verſus A, circuli initium, cenſentur poſitivi; qui vero ultra BE verſus D, negativi. *3tio.* Tangentes omnes ſumuntur in MAO; quæ accipiuntur in AM ſupra ACD, poſitivæ ſunt; quæ in AO infra AD, negativæ. *4to.* Eodem modo cotangentes ſumuntur in *d*BX; & quidem poſitivæ in parte B*d*, verſus circuli initium reſpectu diametri BE; negativæ autem in BX.

Itaque evidens eſt 1*mo*, in ipſo circuli initio A, ubi graduum numerus eſt 0^{v}, ſinum etiam eſſe = 0; in arcubus autem finitis, velut AF ſinus pariter finitæ magnitudinis eſt, uti FI; creſcentibus arcubus AK, ſinus KL quoque creſcit, donec ſumatur arcus AB = 90^{v}, cujus ſinus congruit cum radio BC, qui propterea *ſinus totus* appellatur. Si ultra B progrediamur, & accipiamus arcum ABN; evidens eſt, non poſſe ad AC demitti perpendiculum, niſi AC producatur; & hinc ſinus hujus arcus alius eſſe nequit, quam NQ; ſi longius adhuc progrediamur, majoris arcus ABS ſinus fiet ST; ſed omnes inter B & D ſemper decreſcent, donec veniatur ad D, ſive ſemicirculum ABD, cujus ſinus fit = 0, aut potius = $\frac{1}{\infty}$. Interim inde ab A usque ad D omnes ſinus ſunt ſupra AD, conſequenter poſitivi. Verum ſi accipiatur arcus ABDY, perpendiculum Y*g* in radium AC productum demiſſum jam eſt quantitatis finitæ, & infra AD, hoc eſt, ſinus arcus majoris 180 gradibus ſunt negativi. Patet autem, creſcente adhuc arcu ABDY usque ad E ſive usque ad tres quadrantes, vel 270^{v}, creſcere itidem ſinum negativum, donec in E congruat radio EC, ultra quem creſcere nequit. At vero ſi inde ab E verſus A progrediaris, velut ſi accipias arcum ABDE*a*, ſinus rurſus decreſcunt, uti *ah*, licet adhuc maneant negativi; idque verum erit, usque dum redeas ad initium, ſumasque integram circuli peripheriam, ubi ſinus evadit = $\frac{1}{\infty}$. Ex his evidens eſt I*mo*: ſinum arcuum = 0^{v}, = 180^{v}, & = 360^{v}, eſſe infinite parvum. II*do*; ſinus usque ad 90^{v} inde a 0^{v} creſcere, poſtea usque ad 180^{v} decreſcere, & eſſe poſitivos: at a 180^{v} usque ad 270^{v} creſcere, & a 270^{v} usque ad 360^{v} decreſcere, eſſeque negativos. III*tio*. Arcum 90^{v} eſſe terminum, in quo ſinus poſitivi perveniunt ad maximum, ultra quod augeri nequeunt; & arcum 270^{v} eſſe alterum terminum, in quo ſinus negativi ſuum maximum attingunt.

6. Con-

6. Conſideremus jam eodem modo progreſſum coſinuum per integram circuli peripheriam. Et primo quidem in ipſo initio A, ubi arcus $= 0^v$, ejus complementum eſt AB, ſive integer quadrans, cujus ſinus (5), eſt ipſe radius, vel ſinus totus, AC; creſcentibus vero arcubus AF, AK, complementa FB, KB, uti etiam eorum ſinus FH vel IC, KP, vel LC, id eſt coſinus arcuum AF, AK, perpetuo decreſcunt, usque in B, ubi AB $= 90^v$, & ejus complementum $= 0^v$, cujus proinde ſinus, aut coſinus arcus AB, evaneſcit. Quod ſi ultra B usque in N progrediaris, arcusque ABN fiat 90^v major, is jam complementum *negativum* habeat, oportet, cum non addi, ſed demi ab eo debeat arcus NB, ut rectum angulum metiatur; & reipſa ſinus arcus BN ex altera diametri BE parte jacet, cum prius verſus initium A ſitus eſſet. Quare coſinus arcus quadrante majoris NP negativus fit, inde a B verſus D, ſemperque magis creſcit, creſcente arcu ABS, cujus coſinus SV, usque ad D. Manifeſtum eſt, ex hoc puncto demiſſum in radium BC perpendiculum congruere cum DC, ſive ſinu toto, ſed eſſe negativum. Si ulterius usque in Y progrediaris, arcus ABDY coſinus YZ $= g$C rurſus decreſcit, at per totum adhuc quadrantem DYE negativus manet, in E fit $= \frac{1}{\infty}$. Inter E & A, veluti ſi ſumas arcum ABDE*a*, coſinus *ab* $=$ *h*C rurſus inde a $\frac{1}{\infty}$ creſcit, & redit ad primum ſitum reſpectu diametri BE, id eſt, fit poſitivus, donec in A iterum æquetur ſinui toti AC. Intelliges ex his I*mo*, coſinus arcuum a 0^v usque ad 90^v eſſe poſitivos; uti etiam arcuum 270^v majorum usque ad 360^v. II*do*. Coſinus arcuum 90^v majorum, & minorum 270^v, eſſe negativos. III*tio*; coſinus in primo & tertio quadrante a maximo, ſeu magnitudine ſinus totius, usque ad $\frac{1}{\infty}$ decreſcere. IV*to*, eosdem in ſecundo, & quarto quadrante a $\frac{1}{\infty}$ usque ad magnitudinem ſinus totius creſcere.

7. Quod ad tangentes pertinet, conſimili ratione intelligitur, eas in arcus initio A eſſe infinite parvas; tum inde ab A ſemper creſcere, velut AG, AM, creſcentibus arcubus AF, AK. Quando ad B (quadrantem ſcilicet) perventum eſt, CB radius fit parallelus cum AM, ideoque non niſi in diſtantia infinita concurrere cum AM intelligi poteſt, angulo ſcilicet ad M trianguli AMC evadente infinite parvo. Sed quamprimum arcus AB concipitur recto major, radius BC non amplius cum AM, ſed cum AO (ex parte ſcilicet ea, qua anguli ſunt duobus rectis minores (147 Geomet.) concurrere poteſt. Quare tum tangentes fient negativæ, velut tangens arcus ABN accipienda erit AO, arcus vero ABS erit A*e*.

Liquet hinc, dici poſſe, ſi fuerit arcus AB $= 90 + \frac{1}{\infty}$, ejus tangentem eſſe ∞, ſed negativam, indeque a B usque ad D tangentes negativas decreſcere, dum illic fiant $= \frac{1}{\infty}$, radio CD cum AO in A concurrente. Ultra

D cre-

D creſcente arcu, uti ABDY, tangens A*m* denuo fit poſitiva, & ab $\frac{1}{\infty}$ creſcit usque ad ∞, quando ad E pervenitur. Denique ſumpto arcu tribus quadrantibus majore, ABDE*a*, radius C*a* definit tangentem negativam AO, quæ ex infinite magna inde ab E usque ad A in infinitum decreſcit.

Facile hinc colligitur I*mo*, tangentes poſt ſingulos quadrantes mutare ſignum, in primo & tertio eſſe poſitivas, in ſecundo & quarto negativas. II*do*. Easdem, dum poſitivæ ſunt, creſcere ab $\frac{1}{\infty}$ usque ad ∞, donec ſignum mutent; quando autem negativæ ſunt, ab ∞ usque ad $\frac{1}{\infty}$ decreſcere, ubi denuo contrarium acquirunt ſignum.

8. Tangentes complementorum, ſive cotangentes, qua lege mutentur, ex eadem conſideratione haud difficulter intelligitur. In circuli initio A, complementum AB eſt $= 90^{\mathrm{v}}$, cotangens proinde arcus A $= 0^{\mathrm{v}}$ ex parte B*d* accepta ∞, quod CA cum parallela illa non niſi in diſtantia infinita concurrere cogitari poſſit. Sed arcu AF ad finitam magnitudinem veniente, cotangens B*f* decreſcit, eoque magis, quo ad B propius acceditur, ubi cotangens arcus AB $= 90^{\mathrm{v}}$ fit $\frac{1}{\infty}$. Aucto arcu, velut ABN, jam cotangens ſumenda eſt BR ex oppoſita reſpectu diametri BE parte, proinde negativa, creſcitque hæc inde ab $\frac{1}{\infty}$ in B usque in ∞ in D, ubi radius CD fit parallelus cum BX. Sed ultra D creſcente arcu ABDY, radius YC rurſus ſecat tangentem in B ex altera parte, velut in *d*, ut adeo in tertio quadrante cotangentes evadant poſitivæ, & ex ∞ usque ad $\frac{1}{\infty}$ decreſcant, quando tertius quadrans ABDE abſolvitur. Sed ultra E, velut in *a*, radius *a*C productus ſecat BX in R, & cotangentes denuo fiunt negativæ, augendæ per ultimum quadrantem in ∞, quando ad A reditur. Unde concluditur I*mo*, cotangentes itidem ſingulis quadrantibus mutare ſigna; eſſe poſitivas in primo, & tertio; negativas in ſecundo & quarto. II*do*, easdem, dum poſitivæ ſunt, decreſcere ex ∞ usque ad $\frac{1}{\infty}$; at dum negativæ ſunt, creſcere ab $\frac{1}{\infty}$ usque ad ∞, prout arcus augentur, donec ſignum mutent.

9. Ex hiſce definitionibus ſequentia Corollaria deducuntur. COROLL. I. Sinus anguli eſt dimidia chorda arcus dupli illius, qui angulum metitur. Et de angulis quidem acutis, qualis FCA, id evidens eſt ex Num. 74 Geomet. Nam ſi FI produceretur, occurreret arcui AE in puncto tantundem ab A remoto, quantum diſtat F. Sed nec minus clarum eſt de obtuſis, qualis ACN, cum NQ producta abſcindat ex AED verſus D arcum arcui ABN æqualem.

10. COROLL. II. Anguli obtuſi ACN, qui tantundem excedit rectum, quantum acutus ACK ab eodem deficit, (ſi obtuſus non excedat 180^{v}) eſt idem

idem ſinus poſitivus NQ = KL; coſinus magnitudine quidem æquantur NP, KP; uti etiam tangentes AM, AO, nec non cotangentes RB, *n*B, attamen ſignis differunt. Et quoniam in tabulis (de quibus poſtea) ſinus & coſinus pro angulis obtuſis non habentur, ut ii reperiantur, obtuſus angulus ex 180° auferendus eſt, & reſidui ſinus accipiendus. Si enim arcum ABN ex ABD tollas, remanet ND = AK.

11. COROLL. III. Nullius anguli ſinus major eſſe poteſt radio, ſive ſinu toto.

12. COROLL. IV. In omni triangulo rectangulo ſi hypotenuſa ſumatur pro ſinu toto, ſive radio, cathetus altera, velut FI, eſt ſinus anguli oppoſiti; altera vero, ut IC, ejusdem coſinus.

13. COROLL. V. Si angulus FCA ſit $= 45^{v}$, tangens AG erit æqualis radio AC. Eſt enim tum triangulum iſoſceles.

14. COROLL. VI. Omnium dimidiorum angulorum ad centrum polygonorum regularium, quæ Geometrice conſtrui poſſunt, ratio ſinus ad radium exprimi poteſt accurate, ſaltem per radicalia. Patet ex Problemate VII Cap. 4 Geomet. Sic ſi FCA ſit $= 45^{v}$, eſt FI = IC, eſtque ad FC, ut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ad 1; ſi idem angulus ponatur $= 30^{v}$, eſt FI = ½FC, & IC : AC = $\sqrt{3}$: 2 &c.

Fig. 3 Tab. I 15. COROLL. VII. Si angulo FCA recto minori (Fig. 3 Tab. I) addatur quadrans FBN, ſinus anguli aucti NQ æquatur coſinui non aucti; & coſinus aucti fit negativus, & magnitudine æqualis ſinui non aucti anguli. Item tangens aucti fit negativa, & magnitudine æqualis cotangenti non aucti; cotangens vero anguli aucti æquatur tangenti non aucti, niſi quod negativa ſit.

Facilis eſt hujus rei ratio. Cum enim FCN ſit rectus per hypotheſin, etiam anguli FCA, NCQ ſimul efficiunt rectum, cum hi tres ſimul conſtituant duos rectos. Igitur erit anguli FCA complementum ad rectum angulus NCQ; ſed etiam CFI eundem angulum FCA ad rectum complet; quare neceſſe eſt, ut ſit CFI = NCQ; & quia etiam recti ad Q & I, nec non latera FC, NC æquantur, tota triangula æqualia & ſimilia ſunt; ideoque NQ = IC, CQ = NP = FI.

Eodem modo clarum eſt, eſſe NCQ + BCN $= 90^{v}$ = BCN + BCF, & ablatis æqualibus NCQ = BCF = ACO. Et quoniam in triangulis ACO, BC*f* præterea anguli ad A & B recti, & latera BC, AC æqualia ſunt, eſt OA = B*f*; ſed tangens anguli ACN eſt AO, adeoque æqualis B*f*, ſive cotangenti anguli FCA. Patet denique eſſe BR = AG.

16. COROLL. VIII. Si angulo acuto FCA addatur ſemicirculus FBY, ſinus & coſinus anguli ita aucti iidem manent magnitudine, attamen ſignum mutant; tangens vero & cotangens nequidem ſignum mutant. Angulus enim ABDY habet ſinum Y*g*, & coſinum *g*C; tangentem AG, cotangentem

Bſ. Quod $Yg = FI$, & $gC = IC$ patet ex ſimilitudine & æqualitate triangulorum IFC, CYg.

17. COROLL. IX. Anguli ACF integro circulo aucti manent idem ſinus, coſinus, tangens, cotangens. Cum enim integer circulus haſce lineas easdem habeat, quas arcus $= 0^v$, ut manifeſtum eſt e Num. 5, 6, 7, 8; attendendus eſt tantummodo arcus AF, proinde omnia manent ſine ulla mutatione. Immo addere licet duas, tres, quatuor &c integras peripherias, quanquam id genus additio in Trigonometria plana uſum non habeat.

18. COROLL. X. Sinus dimidii anguli FCA (Fig. 4 Tab. I) æquatur coſinui dimidii ſupplementi; & coſinus dimidii FCA ſinui dimidii ſupplementi; denique tangens dimidii FCA cotangenti dimidii ſupplementi. Sit $FCE = \frac{1}{2}FCA$, & $FCG = \frac{1}{2}FCD$. Cum $FCA + FCD = 180^v$, erit $\frac{1}{2}FCA + \frac{1}{2}FCD = FCE + FCG = 90^v$. Hinc $HCG = IFC$, cum utervis compleat angulum FCE ad rectum, & proinde triangula IFC, HCG æqualia & ſimilia ſunt ob latera etiam CF, CG æqualia, ac proinde $CH = FI$, & $GH = IC$. Et quia ponitur, quod ACF ſit angulus poſitivus, & major nihilo, eſt FCD ſemper minor 2 rectis, & conſequenter ejus dimidium FCG acutus. Competit ergo utrivis angulo HCG, & HGC tangens, ſinus, & coſinus poſitivus. Patet hinc aſſertum. Fig. 4 Tab. I

19. DEFINITIO. Anguli acuti FCA (Fig. 2 Tab. I) *ſinus verſus* eſt AI, differentia inter ſinum totum AC, & coſinum IC; *coſinus verſus* vero eſt HB, ſive ſinus verſus complementi FB. Anguli obtuſi ACN ſinus verſus eſt AQ, ſumma e ſinu toto, & ejusdem coſinu PN vel CQ, ſed poſitive accepto. Fig. 2 Tab. I

20. COROLL. Dato coſinu datur ſinus verſus, & ex oppoſito; & quoniam dato ſinu FI datur coſinus $IC = \sqrt{FC^2 - IF^2}$, ac dato coſinu datur ſinus $IF = \sqrt{FC^2 - IC^2}$, dato ſinu verſo datur ſinus & coſinus; ac dato ſinu datur coſinus, & ſinus verſus; vel dato coſinu datur ſinus, & ſinus verſus. Eodem modo data tangente AG datur ſecans, cum radius ſemper detur, & ſit $AG = \sqrt{CG^2 - AC^2}$, & $CG = \sqrt{AG^2 + AC^2}$. Porro eſt $GC : FC = AG : FI$. Data ergo tangente datur ſinus.

21. OBSERVA. Vocibus ſinus, coſinus, tangens, cotangens, ſinus verſus, coſinus verſus, ſecans, coſecans ſubſtituemus deinceps in Analogiis vel literas initiales, *ſ. c. t. cot.*, *ſ. v.*, *coſ. v. ſec. coſec.*, vel etiam dimidiatas voces *ſin.*, *coſ.*, *tang.*, *cotang.*, *ſin. v.*, *coſ. v.*, *ſec.*, *coſec.* Pro ſinu toto, vel radio adhibebimus v [illegible] R, vel 1.

ARTICULUS II.

Variæ Analogiæ, & formulæ.

22. Uſus formularum, quas hoc loco damus, non modo in diſquiſitionibus Algebraicis, ſed etiam in conſtructione tabularum ſinuum eſt, ut ſciatur, quid, cui ſurrogari, quidve quo dato reperiri poſſit. Angulum, dum de unico agitur, dicemus A; dum de duobus, alterum B vocabimus. Quadratum ſinus, vel coſinus exprimemus $\textit{ſin.}^2$ vel $\textit{coſ.}^2$, & poſtquam omnia demonſtraverimus, ipſas formulas in ordinem redactas ſubjiciemus.

23. Ex Coroll. X (18) ſuper. Art. patet, eſſe *ſin.* ½A = *coſ.* ½ *ſupplem.* A; *coſ.* ½A = *ſin.* ½ *ſuppl.* A; *tang.* ½A = *cotang.* ½ *ſuppl.* A; *cotang.* ½A = *tang.* ½ *ſuppl.* A. Pro his nova haud opus eſt demonſtratione.

Fig. 3 Tab. I 24. (Fig. 3 Tab. I) ponatur angulus FCA = A; erit *primo* AC : AG = CI : IF; id eſt R : *tang.* A = *coſ.* A : *ſin.* A; & hinc $\textit{ſin.}\ A = \frac{\textit{coſ.}\ A \times \textit{tang}\ A}{R}$, vel poſito R = 1, *ſin.* A = *coſ.* A × *tang.* A.

Secundo. Triangula *f*BC, FHC ob parallelas B*f*, HF ſimilia dant B*f* : FH = BC : HC vel FI, id eſt *cot.* A : *coſ.* A = R : *ſin.* A, proinde poſito R radio æquali unitati, erit $\textit{ſin.}\ A = \frac{\textit{coſ.}\ A}{\textit{cot.}\ A}$.

Tertio. Quia parallelæ ſunt GA, FI, erit GC : GA = FC : FI, ſive *ſec.* A : *tang.* A = R (= 1) : $\textit{ſin.}\ A = \frac{\textit{tang.}\ A}{\textit{ſec.}\ A}$.

25. Ex triangulorum *f*BC, FHC ſimilitudine habetur BC : B*f* = CH (vel FI) : FH, ſeu R (= 1) : *cot.* A = *ſin.* A : *coſ.* A = *ſin.* A × *cot.* A.

Triangula item GAC, FIC dant Analogiam GA : AC = FI : IC, vel *tang.* A : R (= 1) = *ſin.* A : $\textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{tang.}\ A}$.

Fig. 5 Tab. I Ponatur in Fig. 5 Tab. I angulus FCA = A; FI ejus ſinus producatur, ut fiat AF = AG; erit FG = 2FI; FH ad CG perpendicularis = *ſin.* 2A. Evidens eſt primo, triangulum CIG eſſe æquale & ſimile triangulo FIC; ſecundo triangula FGH, CIG eſſe ſimilia, ob communem angulum ad G, & rectos ad H & I. Hinc FG : FH = CG : CI, ſive 2 *ſin.* A : *ſin.* 2A = R (= 1) : $\textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ 2A}{2\,\textit{ſin.}\ A}$. Si 2A foret $> 90^{\circ}$, nihilominus Analogia ſubſiſtit: ſit enim *f*C*a* = A, *fi* = *ſin.* A, *fg* = 2 *ſin.* A, ſitque *gh* = *ſin.* 2A; erit adhuc *fg* : *gh* = *f*C : C*i*, cum triangula *f*C*i*, *fgh*, ad *i* & *h* rectangula, habeant angulum *f* communem.

Ponatur in eadem figura angulus FCG = A, FH = *ſin.* A; fiat FCA = ½FCG = ½A, erit FI = *ſin.* ½A, FG = 2 *ſin.* ½A, HC = *coſ.* A. Ex ſimimilitudine triangulorum FGH, CGI jam demonſtrata habetur Analogia $CG : GI = FG : GH$, id eſt, $R\ (= 1) : \textit{ſin.}\ \frac{1}{2}A = 2\,\textit{ſin.}\ \frac{1}{2}A : GH = 2\,\textit{ſin.}^2\ \frac{1}{2}A$; quod ſi GH ſubtrahatur e $CG = R$, relinquitur $HC = \textit{coſ.}\ A = R - 2\,\textit{ſin.}^2\ \frac{1}{2}A$.

26. (Fig. 3 Tab. I) habetur $CI : IF = CA : AG$, id eſt, poſito $FCA = A$, $\textit{coſ.}\ A : \textit{ſin.}\ A = R\ (= 1) : \textit{tang.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{coſ.}\ A}$. Fig. 3 Tab. I

Et quia ob parallelas Bf, AC; item BC, AG triangula fBC, GAC ſimilia, habetur quoque $fB : BC = AC : AG$, vel $\textit{cot.}\ A : R\ (= 1) = R : \textit{tang.}\ A = \frac{R^2}{\textit{cot.}\ A} = \frac{1}{\textit{cot.}\ A}$; quæ formula ſignificat ſimul, tangentes eſſe in ratione reciproca cotangentium.

Denique in eadem Figura eſt $FC : FI = GC : GA$, hoc eſt: $R\ (= 1) : \textit{ſin.}\ A = \textit{ſec.}\ A : \textit{tang.}\ A = \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſec.}\ A$.

27. Præcedente Num. habuimus $\textit{tang.}\ A = \frac{R^2}{\textit{cot.}\ A}$; erit igitur etiam $\textit{cot.}\ A = \frac{R^2}{\textit{tang.}\ A}$. Item Num. 25 fuit $\textit{coſ.}\ A = \textit{ſin.}\ A \times \textit{cot.}\ A$; hinc $\frac{\textit{coſ.}\ A}{\textit{ſin.}\ A} = \textit{cot.}\ A$. Denique ob $\textit{tang.}\ A = \frac{R^2}{\textit{cot.}\ A}$ fiet $\textit{tang.}\ A \times \textit{cot.}\ A = R^2$.

28. Invenimus (25) $\textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ 2A}{2\,\textit{ſin.}\ A}$; ſi utrumque ducatur in ſin. A, fit $\frac{1}{2}\textit{ſin.}\ 2A = \textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ A$. Præterea eodem numero habuimus $\textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{tang.}\ A} = \textit{ſin.}\ A \times \textit{cot.}\ A$; ſi uterque valor de coſ. A ſubſtituatur, obtinetur $\frac{1}{2}\textit{ſin.}\ 2A = \frac{\textit{ſin.}^2\ A}{\textit{tang.}\ A} = \textit{ſin.}^2\ A \times \textit{cot.}\ A$.

29. Sit (Fig. 6 Tab. I) $FCA = A$, ducatur FD, erit angulus ad peripheriam $FDA = \frac{1}{2}FCA$ (cum inſiſtant eidem arcui); adeoque $HD = \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A$, ſi nempe ſit CH perpendicularis ad chordam FD, & $FD = 2\,\textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A$, $FI = \textit{ſin.}\ A$, CK ad FI parallela, $= \textit{tang.}\ \frac{1}{2}A$. Jam ob triangula ſimilia CHD, FID habetur: $CD : HD = FD : IC$, ſeu $R\ (= 1) : \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A = 2\,\textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A : ID = 2\,\textit{coſ.}^2\ \frac{1}{2}A$. Eſt vero $ID = CD + IC = R + \textit{coſ.}\ A$, conſequenter $R + \textit{coſ.}\ A = 2\,\textit{coſ.}^2\ \frac{1}{2}A$. Quodſi $fCA = A$ fuerit obtuſus, nihilominus triangula ifD, ChD ſimilia ſunt, & $CD : hD = fD : iD$, ſeu $R : \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A = 2\,\textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A : iD = 2\,\textit{coſ.}^2\ \frac{1}{2}A$; at in hoc caſu eſt $iD = CD - Ci = R - \textit{coſ.}\ A$ (10). Fig. 6 Tab. I

Præterea eſt in triangulis DCK, DIF, $CK : FI = CD : DI$, ſeu $\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A : \textit{ſin.}\ A = R : R + \textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A}$. Si fuerit $ACf > 90^{\circ}$, erit $Ck : fi = CD : iD$, id eſt: $\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A : \textit{ſin.}\ A = R : R - \textit{coſ.}\ A = \frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A}$.

Fig. 6 Tab. I 30. Nam. 25 erat $\textit{coſ.}\ A = R - 2\,\textit{ſin.}^2\,\frac{1}{2}A$; igitur $2\,\textit{ſin.}^2\,\frac{1}{2}A = R - \textit{coſ.}\ A$. Deinde (Fig. 6 Tab. I) cum $CK = \textit{tang.}\ \frac{1}{2}A$, & $DC : DA = CK : AG$, ſeu $1 : 2 = \textit{tang.}\ \frac{1}{2}A : AG$, erit $AG = 2\,\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A$. Præterea triangula AFI, IFD (ob rectum AFD in ſemicirculo, & IF ad AD perpendicularem), GAD ſimilia ſunt. Hinc $FI : AI = AD : AG$, ſeu $\textit{ſin.}\ A : R - \textit{coſ.}\ A = 2R : 2\,\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A$, quæ Analogia præbet $R - \textit{coſ.}\ A = \frac{2\,\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A \times \textit{ſin.}\ A}{2R}$ $= \textit{ſin.}\ A \times \textit{tang.}\ \frac{1}{2}A$.

31. In eodem Schemate *6to* eſt $DI : FI = FI : IA$, proinde $DI : IA = DI^2 : IF^2 = CD^2 : CK^2 = R^2 : \textit{tang.}^2\,\frac{1}{2}A$. Eſt vero $DI = R + \textit{coſ.}\ A$, & $IA = R - \textit{coſ.}\ A$. Hinc $R + \textit{coſ.}\ A : R - \textit{coſ.}\ A = R^2\ (= 1) : \textit{tang.}^2\,\frac{1}{2}A = \frac{R - \textit{coſ.}\ A}{R + \textit{coſ.}\ A}$. Porro (26) $\textit{tang.}\ \frac{1}{2}A = \frac{1}{\textit{cot.}\ \frac{1}{2}A}$, conſequenter $\textit{tang.}^2\,\frac{1}{2}A = \frac{1}{\textit{cot.}^2\,\frac{1}{2}A}$; quare etiam eſt $\frac{R - \textit{coſ.}\ A}{R + \textit{coſ}\ A} = \frac{1}{\textit{cot.}^2\,\frac{1}{2}A}$, & $\frac{R + \textit{coſ.}\ A}{R - \textit{coſ.}\ A} = \textit{cot.}^2\,\frac{1}{2}A$.

Fig. 7 N. 1. Tab. I 32. Sit angulus $GCA < 45^v$ (Fig. 7 N. 1 Tab. I), radius $= AC$, tangens $= AG$. Deſcribatur centro A, radio AG, circulus DGE; erit $DC = AG + AC = R + \textit{tang.}\ A$, & $EC = AC - AG = R - \textit{tang.}\ A$. Præterea eſt $DGE = 90^v$, & $GEA = 45^v$; & ſi fiat CBH ad GE parallela, erit etiam $DHC = 90^v$, & $HCA = 45^v$, nec non $HC = HD$, & $BC = AC = BK\ (13) = \textit{tang.}\ 45^v$; & $BI = \textit{tang.}\ ICB$. Eſt autem $ICB = EGC$, & ob $GEA = 45^v$ & externum reſpectu ECI, EGC, eſt $BI = \textit{tang.}\ (45^v - A)$. Eſt $EC : CD = HG : HD = BI : BK$ (vel BC, vel AC) & hinc etiam $EC : CD = BI : AC$, ſive $R - \textit{tang.}\ A : R + \textit{tang.}\ A = \textit{tang.}\ (45^v - A) : R$ $(= 1)$, adeoque $\frac{R + \textit{tang.}\ A}{R - \textit{tang.}\ A} = \frac{R}{\textit{tang.}\ (45^v - A)} = \frac{1}{\textit{tang.}\ (45^v - A)}$. Cotangens arcus $(45^v - A)$ eſt tangens arcus $(45^v + A)$, hi enim additi efficiunt 90^v; præterea ſunt tangentes in ratione reciproca cotangentium, ideoque $\frac{1}{\textit{tang.}\ (45^v - A)} = \textit{tang.}\ (45^v + A)$, & conſequenter $\frac{R + \textit{tang.}\ A}{R - \textit{tang.}\ A}$ $= \textit{tang.}\ (45^v + A)$.

Fig. 7 N. 2 Tab. I Eſto dein (Fig. 7 N. 2 Tab. I) angulus GAC major ſemirecto. Si rurſus centro A, radio $AG = \textit{tang.}\ A$ deſcribatur circulus DGE, & agatur GE, eique CH parallela, nec non per B ad DG parallela KBI, evidens eſt, fore $CE = \textit{tang.}\ A - R$, $CD = \textit{tang.}\ A + R$, $BK = \textit{tang.}\ 45^v = AC$, $BI = \textit{tang.}\ (A - 45^v)$, & denuo eſt $CE : CD = GH : HD = BI : BK$ vel AC, id eſt $\textit{tang.}\ A - R : \textit{tang.}\ A + R = \textit{tang.}\ (A - 45^v) : R$, ut adeo ſit

$$\frac{\textit{tang.}\ A + R}{\textit{tang.}\ A - R} = \frac{1}{\textit{tang.}\ (A - 45^v)}.$$

33. Cum

33. Cum habuerimus (26) $\textit{tang.}\,A = \frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A}$, & (poſito $A < 45^v$) $\frac{R + \textit{tang.}\,A}{R - \textit{tang.}\,A} = \frac{1}{\textit{tang.}\,(45^v - A)} = \textit{tang.}\,(A + 45^v)$, ſi pro *tang.* A ſubſtituatur $\frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A}$, fit

$$\frac{R + \frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A}}{R - \frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A}} = \frac{R \times \textit{coſ.}\,A + \textit{ſin.}\,A}{R \times \textit{coſ.}\,A - \textit{ſin.}\,A} = (\text{ob } R = 1)$$

$$\frac{\textit{coſ.}\,A + \textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A - \textit{ſin.}\,A} = \frac{1}{\textit{tang.}\,(45^v - A)} \quad \text{vel} \quad \frac{\textit{coſ.}\,A - \textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A + \textit{ſin.}\,A} = \textit{tang.}\,(45^v - A).$$

Eodem modo, quando $A > 45^v$, formula $\frac{\textit{tang.}\,A + R}{\textit{tang.}\,A - R} = \frac{1}{\textit{tang.}\,(A - 45^v)}$ per eandem ſubſtitutionem fit

$$\frac{\frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A} + R}{\frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{coſ.}\,A} - R} = \frac{\textit{ſin.}\,A + \textit{coſ.}\,A}{\textit{ſin.}\,A - \textit{coſ.}\,A} = \frac{1}{\textit{tang.}\,(A - 45^v)},$$

vel $\frac{\textit{ſin.}\,A - \textit{coſ.}\,A}{\textit{ſin.}\,A + \textit{coſ.}\,A} = \textit{tang.}\,(A - 45^v)$.

34. E N. 29, ſi $A > 90^v$, eſt $R + \textit{coſ.}\,A = \frac{\textit{ſin.}\,A}{\textit{tang.}\,\frac{1}{2}A}$; hinc $\frac{\textit{ſin.}\,A}{R + \textit{coſ.}\,A} = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}A$. Et e Num. 30 habemus $R - \textit{coſ.}\,A = \textit{ſin.}\,A \times \textit{tang.}\,\frac{1}{2}A$: quare etiam eſt $\frac{R - \textit{coſ.}\,A}{\textit{ſin.}\,A} = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}A$.

35. Sit (Fig. 8 Tab. I) angulus $DCA = A$, $DCB = B$, datis $DF = \textit{ſin.}\,A$, $FC = \textit{coſ.}\,A$, $BI = \textit{ſin.}\,B$, $IC = \textit{coſ.}\,B$, oportet invenire $BH = \textit{ſin.}\,(A + B)$, & $HC = \textit{coſ.}\,(A + B)$. Ducatur IG ad DF, & IO ad AC parallela, erunt triangula DCF, ICG ſimilia; item BIO, IOR, RCH, DCF. Hinc $DC : IC = DF : IG = OH$, hoc eſt $R\,(= 1) : \textit{coſ.}\,B = \textit{ſin.}\,A : OH = \textit{ſin.}\,A \times \textit{coſ.}\,B$. Dein $DC : FC = BI : BO$, vel $R\,(= 1) : \textit{coſ.}\,A = \textit{ſin.}\,B : OB = \textit{ſin.}\,B \times \textit{coſ.}\,A$. Eſt autem $OH + OB = BH = \textit{ſin.}\,(A + B) = \textit{ſin.}\,A \times \textit{coſ.}\,B + \textit{ſin.}\,B \times \textit{coſ.}\,A$. Q. E. Unum. Fig. 8 Tab. I

Præterea eſt $DC : FC = IC : GC$, ſeu $R\,(= 1) : \textit{coſ.}\,A = \textit{coſ.}\,B : GC = \textit{coſ.}\,A \times \textit{coſ.}\,B$. Item $DC : DF = IB : IO$, vel $R\,(= 1) : \textit{ſin.}\,A = \textit{ſin.}\,B : IO = \textit{ſin.}\,A \times \textit{ſin.}\,B$. Jam $IO = GH$, & $GC - GH = HC = \textit{coſ.}\,(A + B) = \textit{coſ.}\,A \times \textit{coſ.}\,B - \textit{ſin.}\,A \times \textit{ſin.}\,B$. Q. E. alterum.

36. Datis (Fig. 9 Tab. I) $DF = \textit{ſin.}\,DCA = \textit{ſin.}\,A$, $FC = \textit{coſ.}\,A$, $BI = \textit{ſin.}\,BCA = \textit{ſin.}\,B$, $IC = \textit{coſ.}\,B$, invenire $\textit{ſin.}\,BCD = BH = \textit{ſin.}\,(A - B)$, & $HC = \textit{coſ.}\,(A - B)$. Fiat IG ad BH, & BO ad DC parallela; erit ob triangula IGC, DFC rectangula, & habentia angulum C communem, $DC : DF = IC : IG$, vel $R\,(= 1) : \textit{ſin.}\,A = \textit{coſ.}\,B : IG = \textit{ſin.}\,A \times \textit{coſ.}\,B$. Præterea ſimilia ſunt triangula rectangula BOI, DFC, quia BI ad DF, & BO ad Fig. 9 Tab. I

DC

DC parallela; hinc $DC : FC = BI : IO$, vel $R : \text{coſ. } A = \text{ſin. } B : IO = \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$; jam $OG = IG - IO = BH = \text{ſin. } (A - B) = \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B - \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$. Q. E. Un.

In iisdem triangulis eſt $DC : FC = IC : GC$, id eſt, $R\,(=1) : \text{coſ. } A = \text{coſ. } B : GC = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B$. Deinde $DC : DF = BI : BO$, vel $R\,(=1) : \text{ſin. } A = \text{ſin. } B : BO = \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$. Eſt autem $CG + BO\,(= CG + GH) = CH = \text{coſ. } DCB = \text{coſ. } (A - B) = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B + \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$. Q. E. alterum.

37. Superius (35) habuimus $\text{ſin. } (A + B) = \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B + \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$, & præcedente $\text{ſin. } (A - B) = \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B - \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$; erit ergo $\text{ſin. } (A + B) : \text{ſin. } (A - B) = \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B + \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A : \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B - \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$; dividatur ſecunda ratio per $\text{coſ. } A \times \text{coſ. } B$, habebitur $\text{ſin. } (A + B) : \text{ſin. } (A - B) = \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} + \frac{\text{ſin. } B}{\text{coſ. } B} : \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} - \frac{\text{ſin. } B}{\text{coſ. } B}$; atqui per Num. 26 eſt $\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} = \text{tang. } A$ (idem eſt de B) proinde fit $\text{ſin. } (A + B) : \text{ſin. } (A - B) = \text{tang. } A + \text{tang. } B : \text{tang. } A - \text{tang. } B$. Unde $\frac{\text{ſin. } (A + B)}{\text{ſin. } (A - B)} = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{\text{tang. } A - \text{tang. } B}$.

38. Ex iisdem numeris modo adductis eſt $\text{coſ. } (A + B) = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B - \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$, & $\text{coſ. } (A - B) = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B + \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$, adeoque $\text{coſ. } (A + B) : \text{coſ. } (A - B) = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B - \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B : \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B + \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$. Dividatur ſecunda ratio per $\text{ſin. } A \times \text{coſ. } B$, fiet $\text{coſ. } (A + B) : \text{coſ. } (A - B) = \frac{\text{coſ. } A}{\text{ſin. } A} - \frac{\text{ſin. } B}{\text{coſ. } B} : \frac{\text{coſ. } A}{\text{ſin. } A} + \frac{\text{ſin. } B}{\text{coſ. } B}$; ſed (26) eſt $\frac{\text{ſin.}}{\text{coſ.}} = \text{tang.}$ & (27) $\frac{\text{coſ.}}{\text{ſin.}} = \text{cotang.}$; hinc $\text{coſ. } (A + B) : \text{coſ. } (A - B) = \text{cotang. } A - \text{tang. } B : \text{cotang. } A + \text{tang. } B$, & $\frac{\text{coſ. } (A + B)}{\text{coſ. } (A - B)} = \frac{\text{cotang. } A - \text{tang. } B}{\text{cotang. } A + \text{tang. } B}$.

Si ejuſdem Analogiæ ratio ſecunda per $\text{coſ. } A \times \text{ſin. } B$ dividatur, fit $\text{coſ. } (A + B) : \text{coſ. } (A - B) = \frac{\text{coſ. } B}{\text{ſin. } B} - \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} : \frac{\text{coſ. } B}{\text{ſin. } B} + \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A}$ & factis iisdem ſubſtitutionibus $\frac{\text{coſ. } (A + B)}{\text{coſ. } (A - B)} = \frac{\text{cot. } B - \text{tang. } A}{\text{cot. } B + \text{tang. } A}$.

Fig. 10 Tab. I

39. Sit (Fig. 10 Tab. I) angulus $DCK = A$, & $RCK = B$, erit $DR = A - B$, & $RP = DP = \frac{1}{2}DR = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$, $DE = \text{ſin. } A$, $RF = \text{ſin. } B$. Fiat CX ad chordam RH (parallelam diametro KV) perpendicularis, erit $XI = CE = \text{coſ. } A$, $XR = CF = \text{coſ. } B$, $RH = 2\,\text{coſ. } B$, $RI = EF = \text{coſ. } B - \text{coſ } A$; $ID = DE - RF = \text{ſin. } A - \text{ſin. } B$. Producatur DE in G, erit $KCG = A$, $RKG = A + B$; $IG = \text{ſin. } A + \text{ſin. } B$. Dividatur RKG bifariam in S, & ducantur radii CS, CP, & ad R tangens, erit RM =

tang.

tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $RL =$ *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, $RQ = DQ =$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; $ST =$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $CT =$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $QC =$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Præterea eſt $HV = RK = B$, & $GV = VGK - KG = 180^{\circ} - A$, & $HVG = 180^{\circ} - A + B$; eſt vero $A - B = DR$, ergo $HVG = 180^{\circ} - DR$, id eſt HVG eſt ſupplementum arcus DR; ſuperius (18) vidimus, eſſe coſinum dimidii anguli æqualem ſinui dimidii ſupplementi, ideoque erit $QC =$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) =$ *ſin.* $\frac{1}{2}HVG$; eſt autem HG, chorda arcus $HVG = 2$ *ſin.* $\frac{1}{2}HVG$; igitur erit $HG = 2$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

Triangula CST, GHI ad I & T rectangula habent angulos SCT, GHI æquales, cum ille inſiſtat arcui $RS = \frac{1}{2}RG$, hic vero arcui RG, & præterea hic ſit angulus ad peripheriam, ille ad centrum. Quare eſt $IG : HG = ST : CS$, id eſt, *ſin.* $A +$ *ſin.* $B : 2$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) =$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\ (= 1)$; multiplicatis mediis & extremis fit *ſin.* $A +$ *ſin.* $B = 2 \times$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

40. Triangula DIR, CST ad I & T rectangula ſimilia ſunt, cum angulus ad peripheriam IDR inſiſtat arcui RG, & SCT ejus dimidio SR. Unde $DI : DR = CT : CS$, vel *ſin.* $A -$ *ſin.* $B : 2$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) =$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\ (= 1)$. Mediis & extremis inter ſe multiplicatis habetur *ſin.* $A -$ *ſin.* $B = 2 \times$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

41. E triangulis DIR, CST per Num. 40 ſimilibus habetur $RI : DR = ST : CS$, ſeu *coſ.* $B -$ *coſ.* $A : 2$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) =$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\ (= 1)$. Quæ Analogia dat *coſ.* $B -$ *coſ.* $A = 2 \times$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Ex CST, GHI ſimilibus (39) etiam habetur $HI : HG = CT : CS$, id eſt *coſ.* $A +$ *coſ.* $B : 2$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) =$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\ (= 1)$ multiplicatis mediis & extremis obtinetur *coſ.* $A +$ *coſ.* $B = 2 \times$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

42. Triangula DHI, LCR ſimilia ſunt, cum ſint rectangula ad I, & R, & DHI inſiſtat arcui duplo DPR, LCR vero ſimplo PR. Unde $DI : IH = LR : CR$. Præterea ſunt etiam ſimilia triangula MCR, GHI ad R & I rectangula, ob angulos GHI (qui inſiſtit arcui duplo RG) & RCM (qui ejus dimidio RS inſiſtit) æquales; conſequenter eſt $IH : IG = RC : RM$, cum igitur prius fuerit. . . . . $DI : IH = LR : CR$, erit rationibus compoſitis $DI : IG = LR : RM$, vel *ſin.* $A -$ *ſin.* $B :$ *ſin.* $A +$ *ſin.* $B =$ *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) :$ *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ & $\frac{\textit{sin.}\,A + \textit{sin.}\,B}{\textit{sin.}\,A - \textit{sin.}\,B} = \frac{\textit{tang.}\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\textit{tang.}\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$.

Eſt autem etiam (26) *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \frac{1}{\textit{cot.}\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$; quare erit quoque $\frac{\textit{sin.}\,A + \textit{sin.}\,B}{\textit{sin.}\,A - \textit{sin.}\,B} =$ *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *cot.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

43. Superiore numero habuimus $IH : IG = RC : RM$, vel *coſ.* $A +$ *coſ.* $B :$ *ſin.* $A +$ *ſin.* $B = R\ (= 1) :$ *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$; quare $\frac{\textit{sin.}\,A + \textit{sin.}\,B}{\textit{cos.}\,A + \textit{cos.}\,B} =$ *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.

44. Quia $RP = \frac{1}{2}DR$, eſt $LCR = IGR$; præterea ad I & R ſunt recti, adeoque triangula LCR, RGI ſimilia, & $IG : IR = CR : LR$, id eſt, $\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B : \textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A = R\ (= 1) : \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Hinc $\frac{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A} = \frac{1}{\textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \textit{cotang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ (26).

45. Triangula DIH, LRC ſimilia (42) dant Analogiam $IH : ID = CR : LR$, ſeu $\textit{coſ.}\ A + \textit{coſ.}\ B : \textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B = R\ (= 1) : \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Unde $\frac{\textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ A + \textit{coſ.}\ B} = \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

46. Quoniam in triangulis DIR, CRM ad I & R rectangulis angulus IDR inſiſtit duplo arcui RG, & angulus RCM ad centrum ſimplo RS, hi anguli æquales, & triangula ſimilia ſunt, ac $IR : ID = RM : RC$, ſeu $\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A : \textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B = \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\ (= 1)$. Unde eſt $\frac{\textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A} = \frac{1}{\textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)} = \textit{cot.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ per Num. 26.

47. Habuimus (43) $\frac{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ A + \textit{coſ.}\ B} = \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, & (44) $\frac{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A} = \frac{1}{\textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$; erit igitur $\frac{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ A + \textit{coſ.}\ B} : \frac{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A} = \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \frac{1}{\textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$, & diviſis antecedentibus per conſequentia $\frac{\textit{coſ.}\ B - \textit{coſ.}\ A}{\textit{coſ.}\ A + \textit{coſ.}\ B} = \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \textit{tang.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

48. Invenimus (35) $\textit{coſ.}\ (A + B) = \textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B - \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B$, & (36) $\textit{coſ.}\ (A - B) = \textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B + \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B$. Quare erit $\textit{coſ.}\ (A - B) - \textit{coſ.}\ (A + B) = \textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B + \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B - \textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B + \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B = 2\,\textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B$, & $\textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B = \frac{1}{2}\textit{coſ.}\ (A - B) - \frac{1}{2}\textit{coſ.}\ (A + B)$.

49. Iisdem numeris reperimus $\textit{ſin.}\ (A + B) = \textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B + \textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A$, & $\textit{ſin.}\ (A - B) = \textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B - \textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A$. Quare habetur $\textit{ſin.}\ (A + B) + \textit{ſin.}\ (A - B) = 2\,\textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B$, & $\textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B = \frac{1}{2}\textit{ſin.}\ (A + B) + \frac{1}{2}\textit{ſin.}\ (A - B)$.

50. Ex iisdem etiam eruitur $\textit{ſin.}\ (A + B) - \textit{ſin.}\ (A - B) = 2\,\textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A$, aut $\textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A = \frac{1}{2}\textit{ſin.}\ (A + B) - \frac{1}{2}\textit{ſin.}\ (A - B)$.

51. Item reperitur ex iisdem numeris $\textit{coſ.}\ (A + B) + \textit{coſ.}\ (A - B) = 2\,\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B$, vel $\frac{1}{2}\textit{coſ.}\ (A + B) + \frac{1}{2}\textit{coſ.}\ (A - B) = \textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B$.

Redigamus jam haſce formulas in ordinem.

52.
$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & \textit{ſin.}\ \frac{1}{2}A = \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}\ \text{ſupplem. A} \\
\text{II.} & \textit{coſ.}\ \frac{1}{2}A = \textit{ſin.}\ \frac{1}{2}\ \text{ſupplem. A} \\
\text{III.} & \textit{tang.}\ \frac{1}{2}A = \textit{cotang.}\ \frac{1}{2}\ \text{ſupplem. A} \\
\text{IV.} & \textit{cotang.}\ \frac{1}{2}A = \textit{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{ſupplem. A}
\end{array}\right\}\ (23).$$

V. $\text{ſin. } A = \text{coſ. } A \times \text{tang. } A = \frac{\text{coſ. } A}{\text{cot. } A} = \frac{\text{tang. } A}{\text{ſec. } A}$ (24).

VI. $\text{coſ. } A = \text{ſin. } A \times \text{cot. } A = \frac{\text{ſin. } A}{\text{tang. } A} = \frac{\text{ſin. } 2A}{2\,\text{ſin. } A} = R - 2\,\text{ſin.}^2\,\tfrac{1}{2}A$ (25).

VII. $\text{tang. } A = \frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} = \frac{R^2}{\text{cot. } A} = \text{ſin. } A \times \text{ſec. } A$ (26).

VIII. $\text{cot. } A = \frac{\text{coſ. } A}{\text{ſin. } A} = \frac{R^2}{\text{tang. } A}$ (27).

IX. $\text{cot. } A \times \text{tang. } A = R^2$ (27).

X. $\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. } 2A = \text{coſ. } A \times \text{ſin. } A = \frac{\text{ſin.}^2\,A}{\text{tang. } A} = \text{ſin.}^2\,A \times \text{cot. } A$ (28)

XI. $R \pm \text{coſ. } A = 2\,\text{coſ.}^2\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{ſin. } A}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}A}$ (29).

XII. $R - \text{coſ. } A = 2\,\text{ſin.}^2\,\tfrac{1}{2}A = \text{ſin. } A \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}A$ (30).

XIII. $\frac{R - \text{coſ. } A}{R + \text{coſ. } A} = \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}A$ (31).

XIV. $\frac{R + \text{coſ. } A}{R - \text{coſ. } A} = \text{cot.}^2\,\tfrac{1}{2}A$ (31).

XV. $\frac{R + \text{tang. } A}{R - \text{tang. } A} = \frac{R}{\text{tang. } (45^v - A)} = \text{tang. } (A + 45^v)$, quando A $< 45^v$; ſi vero A $> 45^v$, erit $\frac{\text{tang. } A + R}{\text{tang. } A - R} = \frac{R}{\text{tang. } (A - 45^v)}$ (32)

XVI. $\frac{\text{coſ. } A - \text{ſin. } A}{\text{coſ. } A + \text{ſin. } A} = \text{tang. } (45^v - A)$ ſi A $< 45^v$; ſi autem A $> 45^v$, erit $\frac{\text{ſin. } A - \text{coſ. } A}{\text{ſin. } A + \text{coſ. } A} = \text{tang. } (A - 45^v)$ (33).

XVII. $\frac{\text{ſin. } A}{R + \text{coſ. } A} = \frac{R - \text{coſ. } A}{\text{ſin. } A} = \text{tang. } \tfrac{1}{2}A$ (34).

XVIII. $\text{ſin. } (A \pm B) = \text{ſin. } A \times \text{coſ. } B \pm \text{ſin. } B \times \text{coſ. } A$ (35 & 36).

XIX. $\text{coſ. } (A \pm B) = \text{coſ. } A \times \text{coſ. } B \mp \text{ſin. } A \times \text{ſin. } B$ (35 & 36).

XX. $\frac{\text{ſin. } (A + B)}{\text{ſin. } (A - B)} = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{\text{tang. } A - \text{tang. } B}$ (37).

XXI. $\frac{\text{coſ. } (A + B)}{\text{coſ. } (A - B)} = \frac{\text{cot. } A - \text{tang. } B}{\text{cot. } A + \text{tang. } B} = \frac{\text{cot. } B - \text{tang. } A}{\text{cot. } B + \text{tang. } A}$ (38).

XXII. $\text{ſin. } A + \text{ſin. } B = 2 \times \text{ſin. } (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{coſ. } (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$ (39).

XXIII. $\text{ſin. } A - \text{ſin. } B = 2 \times \text{ſin. } (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) \times \text{coſ. } (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)$ (40).

XXIV. $\text{coſ. } A + \text{coſ. } B = 2 \times \text{coſ. } (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{coſ. } (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$ (41).

XXV. $\text{coſ. } B - \text{coſ. } A = 2 \times \text{ſin. } (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{ſin. } (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$ (41).

XXVI. $\frac{\text{ſin. A} + \text{ſin. B}}{\text{ſin. A} - \text{ſin. B}} = \text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{cot.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \frac{\text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)}{\text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}$ (42).

XXVII. $\frac{\text{ſin. A} + \text{ſin. B}}{\text{coſ. A} + \text{coſ. B}} = \text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)$ (43).

XXVIII. $\frac{\text{ſin. A} + \text{ſin. B}}{\text{coſ. B} - \text{coſ. A}} = \text{cot.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \frac{R}{\text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}$ (44).

XXIX. $\frac{\text{ſin. A} - \text{ſin. B}}{\text{coſ. A} + \text{coſ. B}} = \text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$ (45).

XXX. $\frac{\text{ſin. A} - \text{ſin. B}}{\text{coſ. B} - \text{coſ. A}} = \text{cot.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) = \frac{R}{\text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)}$ (46).

XXXI. $\frac{\text{coſ. B} - \text{coſ. A}}{\text{coſ. B} + \text{coſ. A}} = \text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \frac{\text{tang.}\, (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)}{\text{cot.}\, (\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}$ (47).

XXXII. $\text{ſin. A} \times \text{ſin. B} = \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, (A - B) - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, (A + B)$ (48).

XXXIII. $\text{ſin. A} \times \text{coſ. B} = \tfrac{1}{2}\text{ſin.}\, (A + B) + \tfrac{1}{2}\text{ſin.}\, (A - B)$ (49).

XXXIV. $\text{coſ. A} \times \text{ſin. B} = \tfrac{1}{2}\text{ſin.}\, (A + B) - \tfrac{1}{2}\text{ſin.}\, (A - B)$ (50).

XXXV. $\text{coſ. A} \times \text{coſ. B} = \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, (A + B) + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\, (A - B)$ (51).

53. In omnibus hiſce formulis notet Tiro, poni angulum A majorem, quam B. Quod ſi quid dubii de ſignis occurrat, conſulat numeros ſingulis formulis annexos, atque ex ipſa demonſtratione facile intelliget, quale ſignum adhibendum ſit.

ARTICULUS III.

De conſtructione tabularum, & uſu Logarithmorum.

54. E Corollario Num. 20 manifeſtum, ſi detur ratio radii, qui pro 1 in formulis ſuperioris Articuli ſumptus fuit, ad ſinum vel coſinum alicujus anguli, poſſe inde reliqua, quæ ad talem angulum, vel arcum referuntur, reperiri, præcipue ſi adhibeantur formulæ expoſitæ. Dato enim ſinu datur coſinus $= \sqrt{R^2 - \text{ſin.}^2}$; dato ſinu & coſinu datur tangens $= \frac{\text{ſin. A} \times R}{\text{coſ. A}}$, & *cotang.* $= \frac{\text{coſ. A} \times R}{\text{ſin. A}}$ (Form. VII & VIII 52).

55. Ope earundem formularum datis iis, quæ pertinent ad arcum aliquem ſimplum, reperiri etiam poſſunt omnia, quæ ſpectant ad duplum arcum. Cum enim fuerit (Form. XVIII 52) $\text{ſin.}\, (A + B) = \text{ſin. A} \times \text{ſin. B} + \text{ſin. B} \times$

$\text{coſ.}\ A$, tantummodo opus eſt, ut ponatur $A = B$, fietque $\text{ſin.}\ 2A = \frac{2\,\text{ſin.}\ A \times \text{coſ.}\ A}{R}$; & eadem facta poſitione e formula XIX eruitur $\text{coſ.}\ 2A = \frac{\text{coſ.}\ A^2}{R} - \frac{\text{ſin.}\ A^2}{R}$. Ubi obſervet Tiro, calculum ſinuum tabularum & coſinuum fieri tantummodo pro angulis acutis (10); hinc A nunquam eſt $> 45^v$, (quippe ſi $A = 45^v$, eſt $\text{coſ.}\ A = \text{ſin.}\ A$ ob triangulum iſoſceles & $\text{coſ.}\ 2A = \text{coſ.}\ 90^v = 0$) ſed ſemper $A < 45^v$.

56. Eodem modo datis, quæ pertinent ad arcum quempiam A, earundem formularum ſubſidio invenire poteris omnia, quæ ad dimidium arcum ſpectant. Non enim alia re opus eſt, quam utaris Formula XI, in qua fuit $R + \text{coſ.}\ A = 2\ \text{coſ.}^2\ \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{ſin.}\ A}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}A}$; hinc $\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{ſin.}\ A}{R + \text{coſ.}\ A}$. Data tangente per Num. 20, ſinum, coſinum &c invenies. Idem poterat haberi e Formula XVIII, poſito $A = 2B$, ſumpto ſigno —. His adjungimus adhuc ſequentia duo Theoremata.

57. THEOREMA I. Summa ex ſinu KM (Fig. 11 Tab. I) arcus KA minoris 30 gradibus, & facto ex $\sqrt{3}$ in KI, ſinum differentiæ arcus KA a triginta gradibus, eſt æqualis ſinui FN arcus FA, qui tantundem excedit 30 gradus, quantum arcus KA ab iis deficit. Fig. 11 Tab. I

DEMONSTRATIO. Sit arcus $AB = 30^v$, & $BF = BK$; ob triangula rectangula SIF, SGQ ſimilia, eſt angulus $IFS = GQS = BCA = 30^v$; unde cum $KFS = 30^v$, eſt $GK = \tfrac{1}{2}FK$ (14) $= IK = FI$. Eſt autem $FK^2 - GK^2 = FG^2$, ſeu $4IK^2 - KI^2 = 3KI^2 = FG^2$, & proinde $IK \times \sqrt{3} = FG$. Jam vero $FG + GN = FG + KM = FN = KM + IK \times \sqrt{3}$. Q. E. D.

58. THEOREMA II. Summa ex ſinu FT, arcus HF minoris 60 gradibus, & ſinu FI, differentiæ arcus HF a 60^v, æqualis eſt ſinui KO arcus HK, qui tantum excedit 60^v, quantum arcus HF ab iiſdem deficit.

DEMONST. Nam e demonſtratione prioris patet, eſſe $FI = GK$, & manifeſtum eſt, eſſe $TF + GK = KO$. Quare patet propoſitum. Sic ex. cauſ. $\text{ſin.}\ 55^v + \text{ſin.}\ 5^v = \text{ſin.}\ 65^v$.

59. His ita conſtitutis patet (56) dato ſinu arcus 30^v (quem poſito radio $= 1$ ſcimus æquari $\tfrac{1}{2}$), poſſe dividendo ſemper per 2, inveniri ſinus, & coſinus arcuum dimidiorum, puta 15^v, $7^v\ 30'$, $3^v\ 45'$, $1^v\ 52'\ 30''$, $56'\ 15''$ &c usque ad duodecimam diviſionem, qua acquiritur arcus $52''\ 44'''\ 3\tfrac{3}{4}''''$, qui citra errorem ſenſibilem pro ipſo arcu haberi poteſt, & cenſeri, quod arcus admodum parvi ſint proportionales ſinubus ſuis; quare ſi ſinus inventus pro arcu $52''\ 44'''\ 3\tfrac{3}{4}''''$ dicatur $= m$, fieri poteſt $52''\ 44'''\ 3\tfrac{3}{4}'''' : 1' = m$: ſinum unius minuti. Habito ſinu $1'$, licebit (55) invenire ſinum arcus $2'$, tum $3'$, (facto $A = 2'$, $B = 1'$), $4'$, $5'$ &c usque ad 30^v. Notis jam omnium arcuum 30^v minorum ſinubus (per Num. 57) reperientur ſinus arcuum, qui tantundem excedunt 30^v, usque ad ſinum arcus 60^v (quem novimus ex Geo-

metria eſſe $= \frac{\sqrt{3}}{2}$). Denique ope Num. 58 inveniri poſſunt ſinus arcuum 60^{v} gradibus majorum usque ad 90^{v}. Coſinus, tangentes, cotangentes &c ope formularum citra difficultatem reperientur.

60. OBSERVA. In tabulis uſitatis minoribus Vlacquianis ſinus totus, ſive radius aſſumitur 100000,00; ſed in Algebra præcipue multo commodius eſt, ſi ponatur R = 1. Unde ſi velis ſinus adhibere pro radio = 1, tantummodo opus eſt, ut integrorum loco fractiones decimales adhibeas. V. g. ſi pro ſinu $60^{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quæras radicis quadratæ de 3 dimidium, invenies 0,8660254; ſi tabulas conſulas, reperies in iis ſinum 60^{v} = 8660254. Ex quo apparet, eſſe eaſdem notas numericas, niſi quod in tabulis ſint notæ integrorum numerorum. Hinc ſinui minoris anguli, quam 90^{v}, in tabulis reperto præfigatur nota 0 cum interjecta lineola, ut fractio decimalis indicetur. Attendendum tamen, cum in ſinu toto 100000,00, vel 10000000 ſint 7 zeri, ſi quis ſinus conſtet notis paucioribus, quam 7, iis tot adhuc ante virgulam præfigendi ſint zeri, quot ad ſeptenarium conficiendum requiruntur. Exemplo ſit ſinus $2^{v}\,30'$, qui in tabulis eſt 4361,94, vel 436194; quia conſtat tantummodo 6 notis, ſi ejusdem arcus ſinum deſideres pro radio = 1, ponendum erit 0,0436194. Pariter pro ſinu $0^{v}\,30' = 87265$ ſcribendum erit 0,0087265.

Sed quia tangentes angulorum 45^{v} majorum excedunt ſinum totum, ut eas radio = 1 accommodes, quas in tabulis reperis, illud tenendum, inde ab interpoſita virgula (nam poſtrema, vel poſtremæ duæ verſus dexteram notæ in tabulis decimales ſunt) numerando verſus ſiniſtram, quinque notæ abſcindendæ ſunt interjecta lineola, quæ hanc verſus ſiniſtram ſequuntur, integræ erunt. Exemplum tangens 89^{v} in tabulis eſt 5728996,2, ut eandem habeas pro ſinu toto = 1, ſcribe 57,289962, ubi ſunt 57 integræ unitates, reliquæ ſunt notæ decimales. Similiter tangens tabularis arcus $66^{v}\,10'$ eſt 226373,57; pro radio = 1 eadem fit 2,2637357. Quod de ſinubus dictum eſt, applicari debet etiam coſinubus; quemadmodum dicta de tangentibus etiam intelligenda ſunt de ſecantibus.

61. Quoniam autem operationes Arithmeticæ in tot notarum numeris, quot ſinubus, coſinubus &c tribuuntur, nimis moleſtæ eſſent, ſimili artificio, quod in Algebra expoſuimus, reperti ſunt Logarithmi pro iisdem, hoc modo diſcrimine, quod pro ſinu toto aſſumpta fuerit characteriſtica 10, & proinde Logarithmus ſinus totius ſit 10,0000000.

62. In operationibus, & Problematis Trigonometricis ſecantes hodie non adhibentur, ideoque in pleriſque tabulis non extant. Quod ſi tamen Fig. 2 Tab. I uſus earum occurrat, facile reperiuntur. Eſt enim (Fig. 2 Tab. I) CI : CF = CA : CG, hoc eſt, $\textit{coſ.} : R = R : \textit{ſec.} = \frac{R^2}{\textit{coſ.}}$. Quod ſi etiam Logarithmus ſecantis deſideretur, is habebitur (ut indicat hæc ipſa ſecantis expreſſio)

ſi

ſi a duplo Logarithmo ſinus totius (ſive a 20,0000000) ſubtrahas Logarithmum coſinus. V. g. ſi petas Logarithmum ſecantis arcus 60^{v}, quære Logarithmum coſinus de 60^{v}, id eſt, Logarithmum arcus 30^{v}, quem in tabulis invenies 9,6989700; ſubtrahe hunc ex 20,0000000, relinquetur 10,3010300 pro Logarithmo ſecantis 60^{v}. Coſecans reperitur ex Analogia (cum triangula IFC, C*f*B ſint ſimilia) $IF : FC = BC : Bf$; ſeu $\text{ſin.} : R = R : \text{coſec.} = \frac{R^2}{\text{ſin.}}$

63. Quantitatem quampiam dividere per *ſin.*, vel *coſ.*, vel *tang.*, vel *cotang.* alicujus anguli, idem eſt, ac eandem multiplicare per $\frac{1}{\text{ſin.}}$, vel $\frac{1}{\text{coſ.}}$, vel $\frac{1}{\text{tang.}}$, vel $\frac{1}{\text{cot.}}$; atqui poſito radio $= 1$, eſt $\text{coſec.} = \frac{1}{\text{ſin.}}$, $\text{ſec.} = \frac{1}{\text{coſ.}}$, $\text{tang.} = \frac{1}{\text{cot.}}$, $\text{cot.} = \frac{1}{\text{tang.}}$ (Form. IX 52); igitur licebit multiplicationem ſubſtituere diviſioni, & conſequenter ſi Logarithmis utamur, ſubtractioni additionem, modo loco Logarithmorum ſinus, coſinus, tangentis, cotangentis adhibeantur eorum complementa Arithmetica. At illud probe notandum, cum in hisce formulis $\text{coſec.} = \frac{1}{\text{ſin.}}$ &c unitas ſit quadratum radii, cujus Logarithmus eſt 10,0000000, eſt Logarithmus quadrati 20,0000000. Unde Logarithmorum ſinuum, coſinuum, tangentium &c ſubtractio mutari poteſt in additionem complementi Arithmetici, modo Logarithmus ſinus, coſinus &c ſubtrahatur ex 20,0000000. Uſus ergo complementi Arithmetici non modo in Logarithmis numerorum naturalium, ſed etiam in Logarithmis ſinuum, coſinuum &c locum habet.

64. Tabulæ uſitatæ plerumque exhibent tantummodo ſinus, coſinus &c pro ſingulis minutis; in majoribus etiam habentur pro denis quibusque ſecundis. Hinc ſi Logarithmis utaris, & cupias pro arcu, qui in tabulis accurate non extat, Logarithmum, uſui erunt eadem Problemata, quæ in Algebra, cum de Logarithmis ageremus, expoſuimus; nempe accipe Logarithmum arcus proxime minoris dato, & exſcribe differentiam ejus a proxime majore; quia differentia arcuum in tabulis eſt $1'$, vel $60''$, fac hanc proportionem: $60''$ dant inventam differentiam Logarithmorum tabularium, quid dant ſecunda gradibus, & minutis primis adjuncta in arcu dato, pro quo quæris Logarithmum? quartum terminum ex hac Analogia repertum adde Logarithmo tabulari minori, habebis Logarithmum multo accuratiorem pro arcu dato.

Exem-

Exemplum, quærendus ſit Logarithmus coſinus arcus $9^{v}\ 31'\ 7''$: ſubtrahe hunc arcum ex 90^{v}, ut habeas ejus complementum $80^{v}\ 28'\ 53''$, & hujus ſinus Logarithmum quære.
Reperies reſpondere $80^{v}\ 29'$ Logarithmum 9,9939815
$80^{v}\ 28'$ - - - - - 9,9939603, horum differentia eſt 212; igitur $60'' : 212 = 53'' : x$; invenies 187; has notas adde ad 9,9939603, ſumma 9,9939790 erit Logarithmus coſinus quæſitus.

Eodem modo ſi detur Logarithmus alicujus ſinus, vel coſinus, qui accurate in tabulis non extat, & quæras, quis arcus eidem reſpondeat, operationis prioris ordo permutandus erit. Scilicet quære inter Logarithmos ſinuum dato proxime majorem & minorem, eorumque differentiam exſcribe; tum ſubtrahe etiam proxime minorem a Logarithmo dato, & pone: differentia Logarithmorum tabularium dato proxime majoris & minoris ſe habet ad differentiam proxime minoris a dato, ſicut ſe habent $60''$ ad numerum ſecundorum addendorum gradibus & minutis integris, quæ in tabulis reſpondent Logarithmo proxime minori, quam ſit datus.

Exemplum. Datur Logarithmus 9,3901763, quæritur, cujus arcus ſinus huic Logarithmo reſpondeat? in tabulis inter Logarithmos ſinuum invenies proxime majorem 9,3902696
minorem 9,3897106 cujus ſinui competunt $14^{v}\ 12'$. Horum Logarithmorum differentia eſt 5590; proxime minoris autem differentia a dato eſt 4657, unde habebitur Analogia: $5590 : 4657 = 60'' : x$. Reperitur x proxime $50''$. Quare Logarithmus datus competit ſinui anguli $14^{v}\ 12'\ 50''$ proxime.

65. *Verum eſt adhuc alius uſus Formularum XXII & XXIII (52) in productis calculis ſubinde commodus, quem hoc loco indicare viſum eſt.* Dantur Logarithmi duorum numerorum naturalium, quæritur Logarithmus ſummæ earundem, quin ipſos numeros, quibus dati Logarithmi competunt, quærere neceſſe ſit. Adhibeatur in hunc finem Formula XXII $\mathit{ſin.}\ A + \mathit{ſin.}\ B = 2 \times \mathit{ſin.}\ (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ.}\ (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, fingaturque, majorem Logarithmum eſſe alicujus anguli A Logarithmum ſinus, & minorem anguli minoris B. Propterea addantur characteriſticis Logarithmorum tot unitates, quot requiruntur, ut majoris characteriſtica fiat 9, & ſub ea quæratur angulus, cujus ſinui competit ille Logarithmus. Si minoris characteriſtica fuerit eadem, quæratur ſub eadem itidem angulus competens. Horum angulorum quæratur ſemiſumma $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, & complementum ſemidifferentiæ $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$, ſinuumque horum angulorum ſummæ addatur Logarithmus binarii, nova ſumma erit Log. $(2 \times \mathit{ſin.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{coſ.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B))$. Sed quoniam haberi debet Logarithmus numeri naturalis, ex characteriſtica abjiciantur præter decadem tot unitates, quot additæ fuerunt characteriſticis Logarithmorum datorum; reſiduum erit Logarithmus ſummæ quæſitus.

Exemplum. Sit Logarithmus major $= 3,6047659$, ſcribatur $9,6047659$,
minor $= 2,9116902$, - - $8,9116902$,
his quærantur inter Logarithmos ſinuum competentes arcus; reperietur
majori proxime convenire ſinum anguli A $23^{v}\,44'\,4''$
minori - - - - - - B $\underline{4\;40\;50}$

$A + B = 28\;24\;54$ $((\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 14^{v}\,12'\,27''$.
$A - B = 19\;\;3\;14$ $((\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 9\;31\;37$

$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ ſubtrahatur e 90^{v}, relinquetur $80^{v}\,28'\,23''$. Horum angulorum (nempe $14^{v}\,12'\,27''$, & $80^{v}\,28'\,23''$) ſinuum quærantur Logarithmi, invenietur pro *ſin.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 9,3899351$
pro *coſ.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 9,9939684$
Log. 2 $= \underline{0,3010300}$, addantur in unam ſummam
$19,6849335$

quia additæ ſunt ſex unitates, abjiciantur e characteriſtica ſummæ 16, manebit Logarithmus quæſitus 3,6849335, cui proxime convenit numerus 4841, eſtque tantum in poſtremis duabus notis aliquid diſcriminis. Reipſa eſt Logarithmus primus datus numeri 4025, & ſecundus numeri 816, quorum ſumma accurate 4841.

Ex his intelligitur, quid agendum ſit, ſi petatur Logarithmus differentiæ. Nam Formula *ſin.* A — *ſin.* B $= 2 \times$ *coſ.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ *ſin.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ eodem modo adhibita dabit Logarithmum quæſitum. Sed enim ſi his formulis utaris, duplex angulus A & B quærendus eſt, præter ſinus & coſinus ſemiſummæ & ſemidifferentiæ Logarithmos; inferius poſtquam principia calculi triangulorum rectangulorum expoſuerimus, dabimus aliam formulam, in qua unicus tantummodo quærendus eſt angulus, ejus complementi ſinus, & tangens dimidii, ut propterea quærendi labor minuatur.

ARTICULUS IV.

De principiis reſolutionis triangulorum.

66. THEOREMA I. In omni triangulo plano latera ſunt ad ſeſe invicem, ut ſinus angulorum iis lateribus oppoſitorum.

DEMONST. Omni triangulo poteſt circumſcribi circulus, quo facto latera erunt chordæ arcuum, quorum dimidii metiuntur angulos oppoſitos, utpote ad peripheriam; ſunt igitur latera dupli ſinus angulorum iis lateribus oppoſitorum: jam vero duplorum eadem eſt ratio, ac ſimplorum, quare latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum. Q. E. D.

67. COROLL. I. Quia triangula ſimilia habent latera homologa proportionalia, & triangulum quodpiam in campo deſignatum, ſi habeat eosdem angulos, quos alterum inſcriptum circulo, ad cujus radium computati ſunt ſinus tabularum, ſimile eſt triangulo inſcripto huic circulo; evidens eſt, eſſe la-

latera trianguli in campo deſignati ad ſeſe invicem, ut ſunt ſinus tabulares, pertinentes ad angulos æquales illis, quibus latera trianguli veri opponuntur.

Fig. 12 Tab. I 68. COROLL. II. In triangulo rectangulo ABC (Fig. 12 Tab. I) vel poteſt concipi radio CB, ſeu hypotenuſa, deſcriptus arcus DB; vel radio CA arcus AE, vel radio AB arcus AF. In primo caſu patet, ſinum totum fore ut BC, ſinum anguli C ut latus BA, & coſinum C (vel ſinum B) ut latus AC. In ſecundo manifeſtum eſt, ſinum totum fore ut AC, & tangentem anguli C ut AB. In tertio denique ſinum totum eſſe ut BA, & AC ut tangentem anguli B. Quare conſtat, *in triangulo rectangulo quodvis latus ſumi poſſe pro radio. Et ſiquidem ſumatur hypotenuſa, erunt catheti ſinus angulorum oppoſitorum; ſi autem ſumatur cathetus pro radio* (vel ſinu toto), *altera erit tangens anguli oppoſiti.*

69. COROLL. III. Hinc patet, veras eſſe ſequentes Analogias.
ut latus BC : latus AC = R : *ſin.* B = R : *coſ.* C.
ut latus AC : latus AB = R : *tang.* C.
ut latus BA : latus AC = R : *tang.* B.

70. COROLL. IV. Si dentur in triangulo quovis tantummodo tres anguli, cum diverſiſſimæ magnitudinis triangula ſimilia eſſe poſſint, tantummodo ratio laterum ad ſeſe invicem, non autem eorum magnitudo abſoluta reperiri poteſt. Hinc, ut triangulum reſolvatur, ſaltem magnitudo abſoluta unius lateris dari debet.

71. Sequentis Theorematis demonſtrationem jam quidem dedimus in Geometria (438); at quia ejus uſus magnus eſt in reſolutione triangulorum, quorum tria latera ſine angulo dantur, juvat eam hoc loco rurſus in memoriam revocare.

Fig. 13 Tab. I 72. THEOREMA II. Si in latus maximum AB (Fig. 13 Tab. I) ex angulo oppoſito C demiſſo perpendiculo CE, idem latus AB dividatur in duo ſegmenta AE, EB, erit latus maximum AB ad ſummam reliquorum duorum AC + CB, ut eorundem differentia CB — AC ad differentiam ſegmentorum lateris maximi EB — AE.

DEMONST. Latere minore AC ex iis, quæ angulum C maximo lateri oppoſitum comprehendunt, deſcribatur centro C circulus, & producatur BC in D, ut ſit DC = CA = CG; erit DB = AC + CB, GB = CB — AC. Quia CE e centro in chordam AH perpendicularis, eam in E ſecat bifariam, eſtque AE = EH, & hinc HB = EB — AE. Jam cum duæ ſecantes BD, BA ex eodem puncto B ducantur, erunt eæ partibus extra circulum, & punctum B interceptis proportionales reciproce, & proinde AB : BD = GB : HB, hoc eſt, AB : AC + CB = CB — AC : EB — AE. Q. E. D.

73. Si latera AC, CB forent æqualia, fieret AB chorda, & ſegmenta eſſent æqualia, ut manifeſtum eſt.

Fig. 14 Tab. I 74. THEOREMA III. In omni triangulo plano (Fig. 14 Tab. I) CBA eſt ſumma laterum angulum B comprehendentium CB + BA, ad eorundem differentiam, ut tangens ſemiſummæ reliquorum duorum angulorum, ad tangentem ſemidifferentiæ eorundem.

DEMONST. Deſcribatur centro B, radio æquali minori lateri BC circulus, & producatur AB in G; erit GA = CB + BA, PA = BA — BC; conjungantur puncta G, C, P chordis GC, CP; agatur item PD chordæ GC parallela. Erit angulus GCP in ſemicirculo rectus, & hinc etiam CPD, ejus alternus internus, rectus. Præterea eſt GBC externus æqualis ſummæ angulorum BAC + BCA, & proinde angulus ad peripheriam GPC, prioris ad centrum dimidius, ſemiſumma eorundem.

Manifeſtum eſt, cum GPC = BAC + PCA, ſitque GPC ſemiſumma, BAC minor reliquorum angulorum, eſſe PCA ſemidifferentiam angulorum BCA, BAC, cum additus minori efficiat ſemiſummam, & additus ſemiſummæ BPC, vel BCP, det angulum majorem BCA. Cum GCP, & CPD ſint rectangula, (68) licebit CP in utroque ſumere pro ſinu toto (vel radio), & erit CG tangens anguli GPC, ſemiſummæ angulorum A & C, & PD tangens ſemidifferentiæ eorundem; & quia in triangulo GCA eſt PD ex conſtructione ad GC parallela, erit GA : PA = GC : PD, hoc eſt, CB + BA : BA — BC = *tangens* ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C) : *tang.* ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$A). Q. E. D.

75. SCHOL. Hæc Analogia ad alias duas ſequentes reduci poteſt: ut eſt latus BC ad latus majus AB, ita eſt radius ad tangentem alicujus anguli, a quo ſubtrahantur 45^v (erit enim ſemper major, cum AB ſit majus quam BC). Dein: ut eſt radius ad tangentem anguli reſidui, ita eſt tangens ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C) ad tangentem ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$A).

Nam producta BA fiat PT = BP = BC, & PM = BA, erit TM = BA — BC. Fiat item angulus NBM = 45^v; e punctis T, M demittantur in BN perpendicula TK, MN, & jungatur PK. Patet, triangula BKP, BKT, BNM eſſe rectangula, iſoſcelia, & ſimilia, ideoque BK = KT, BP = KP = PT = BC, & BN = MN. Eſt igitur in triangulo PKM, PK (vel BC) : PM (vel BA) = R : *tang.* PKM (68). Ab hoc angulo ſubtractis 45^v = PKT, manet TKM = KMN (ob KT, NM parallelas). Porro eſt (68) R : *tang.* KMN = MN (vel BN) : NK; eſt autem BN : NK = BM : MT = CB + BA : BA — CB; quare cum oſtenderimus eſſe CB + BA : BA — CB = *tang.* ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$A) : *tang.* ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$A), erit quoque R : *tang.* KMN = *tang.* ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$A) : *tang.* ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$A).

76. Hæc pauca ſatis ſunt, ut reſolutio cujusvis trianguli, cujus tres partes dantur, haberi poſſit, ſcilicet vel tria latera, vel duo latera cum uno angulo, vel duo anguli cum uno latere. Videndum modo, quomodo ſingulis caſibus expoſita principia applicari poſſint, quod ſequente Articulo præſtabimus. In præſens ſupereſt, ut fidem ſuperius (65) datam liberemus, ubi promiſimus formulam, ope cujus datis Logarithmis duorum numerorum reperiri poſſit Logarithmus ſummæ vel differentiæ, quin neceſſe ſit duos diverſos angulos quærere.

77. Repræſentet (Fig. 15 Tab. I) AB numerum majorem, competentem Logarithmo majori, & AC minorem, cui convenit Logarithmus minor, ut nempe AB ſit diameter, AC chorda ſemicirculi. Producatur AC in E, ut ſit AE = AB, erit CE differentia. Quia angulus in ſemicirculo BCA rectus, Fig. 15 Tab. I

ctus, ſumi poteſt (68) BA pro radio, eritque $BA : AC = R : \text{ſin.}\ ABC$. Hujus ſinus igitur, aut potius arcus ei competens invenietur in tabulis, ideoque habebitur etiam ejus complementum BAC, & hujus dimidium BAD. Si enim ad D ex A ducatur recta AD, evidens eſt, ob angulum in ſemicirculo ad D rectum, in triangulo iſoſceli BAE biſecari baſin BE in D. Excerpatur jam e tabulis Logarithmus ſinus BAC, & Logarithmus *tang.* ½BAC, ſive *tang.* BAD.

Evidens eſt, triangula BCE, ADE, BAD ſimilia eſſe; poſtrema quidem propter $AB = AE$, & $BD = DE$, rectosque ad D; priora vero ob rectos ad D & C, angulumque ad E communem. Hinc habebuntur ſequentes Analogiæ.

$$R : \text{ſin.}\ BAC = AB : BC = \frac{AB \times \text{ſin.}\ BAC}{R}.$$

$$R : \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}BAC = AB : BD = \frac{AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{R}.$$

$$BD : BF = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}BAC : R;\ \text{hinc}\ BF = \frac{BD \times R}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}BAC} = \frac{AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}BAC}.$$

$BF : BC = AB : AB + AC$, ob angulum BAC per AF biſectum; ſive

$$\frac{AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}BAC} : \frac{AB \times \text{ſin.}\ BAC}{R} = AB : AB + AC = \frac{AB \times \text{ſin.}\ BAC \times \text{coſ.}\ \frac{1}{2}BAC}{R \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}.$$

Eſt vero $\frac{R \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}BAC} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}BAC$. Hinc $AB + AC = \frac{AB \times \text{ſin.}\ BAC}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}BAC}$: & ſi adhibeantur Logarithmi, erit $\text{Log.}\ (AB + AC) = \text{Log.}\ \text{ſin.}\ BAC + \text{Log.}\ AB - \text{Log.}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}BAC$.

78. Pro Logarithmo differentiæ CE; fiat rurſus $AB : AC = R : \text{ſin.}\ ABC$, qui quæratur, atque ſumatur hujus complementi Logarithmus ſinus, & Logarithmus dimidii complementi tangentis, uti prius. Manente eadem conſtructione locum rurſus habent ſequentes Analogiæ

$$R : \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}BAC = AB : BD = \frac{AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{R},\ \&\ 2BD = BE = \frac{2AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{R}.$$

$AE : DE = AB : BD = BE : CE = BE : AB - AC$, hoc eſt

$$AB : \frac{BD \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{R} = \frac{2AB \times \text{ſin.}\ \frac{1}{2}BAC}{R} : AB - AC = \frac{2AB \times \text{ſin.}^2\ \frac{1}{2}BAC}{R^2}.$$

Eſt autem (52 Form. XII) $2\ \text{ſin.}^2\ \tfrac{1}{2}BAC = \text{ſin.}\ BAC \times \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}BAC$; quare hoc valore ſubſtituto fit $AB - BC = AB \times \text{ſin.}\ BAC \times \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}BAC$; & adhibitis Logarithmis, $\text{Log.}\ (AB - AC) = \text{Log.}\ AB + \text{Log.}\ \text{ſin.}\ BAC + \text{Log.}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}BAC - 2\ \text{Log.}\ R$.

Exemplum. Ponantur dari iidem Logarithmi, quos ſuperius (65) adhibuimus: nempe $\text{Log.}\ AB = 3{,}6047659$, & $\text{Log.}\ AC = 2{,}9116902$. Si fiat $AB : AC = R : \text{ſin.}\ ABC$, & adhibeantur Logarithmi, erit proportio Arithmetica Log. AB. Log. AC : Log. R. Log. *ſin.* ABC, & $\text{Log.}\ \text{ſin.}\ ABC = \text{Log.}\ AC + \text{Log.}\ R - \text{Log.}\ AB$.

No-

Notum eſt, Log. R eſſe 10,0000000; unde dum Logarithmus radii addendus eſt Logarithmo alteri, ſatis eſt, ſi hujus characteriſtica augeatur decade; proinde Log. AC + Log. R = 12,9116902
Log. AB = 3,6047659

Diff. = Log. *ſin.* ABC = 9,3069243, huic reperientur convenire $11^{v}\ 41'\ 48''$, ſed quia in proportione ineunda juxta Num. 64, plus quam $\frac{1}{2}$ remanet, rectius accipietur $11^{v}\ 41'\ 49^{v}$, cujus complementum, ſeu BAC = $78^{v}\ 18'\ 11''$; & $\frac{1}{2}$BAC = $39^{v}\ 9'\ 5''$. Porro Log. *ſin.* BAC invenitur (64) = 9,9908863, & Logarithmus tangentis $\frac{1}{2}$BAC = 9,9107142; quare

Log. AB = 3,6047659
Log. *ſin.* BAC = 9,9908863
Compl. Arith. *tang.* $\frac{1}{2}$BAC = 10,0892858

Summa = 23,6849380

Quia uſi ſumus complemento Arithmetico tangentis, & Logarithmus unitatis in ſinubus eſt 10, abjiciendæ ſunt duæ decades ex ſummæ characteriſtica, ut Log. (AB + AC) ſit = 3,6849380, qui convenit cum Logarithmo prius (65) invento usque ad poſtremas duas notas, ut adeo eadem ſumma obtineatur in integris.

Si quæras Log. (AB — AC) uſui erunt iidem Logarithmi, nempe

Log. AB = 3,6047659
Log. *ſin.* BAC = 9,9908863
Log. *tang.* $\frac{1}{2}$BAC = 9,9107142

Summa = 23,5063664, abjectis duabus decadibus, ſeu ſubtracto Logarithmo duplo radii habetur Logarithmus differentiæ = 3,5063664, qui a Logarithmo numeri 3209 = 3,5063697 non differt, niſi poſtremis duabus notis, ut proinde vera differentia in integris reperta ſit.

79. Plures ſuppeterent methodi idem inveniendi. Sed enim operæ pretium non eſt. Illud univerſe tirones notent, ſi anguli obtineantur admodum exigui, Logarithmorum differentiæ nimis magnæ ſunt in tabulis minoribus, quam ut termini proportionales, qui juxta Num. 64 adhibentur, ſatis accurati ſint. Unde univerſe in Trigonometria, quantum licet, evitandi ſunt parvi anguli, quemadmodum etiam deinceps dicemus.

ARTICULUS V.

Applicatio principiorum expoſitorum ad reſolutionem triangulorum.

80. Jam (3) diximus, totum Trigonometriæ artificium in eo poſitum eſſe, ut angulorum datorum ſinus (quos angulis ſubſtitui vidimus) cum datis lateribus ita in Analogiam diſponantur, ut quartus terminus vel latus, vel ſinum (aut coſinum, vel tangentem) anguli quæſiti exhibeat. Hæ Analogiæ

logiæ porro in triangulis rectangulis maxime expedite fiunt, cum fere ſemper unus e proportionis terminis ſit ſinus totus, ſeu radius, cujus Logarithmi additio, & ſubtractio inter operationes Arithmeticas vix cenſenda eſt, utpote cum decadis additione, vel ſubtractione abſolvatur. Subjiciemus itaque ſequente laterculo omnes caſus, qui in triangulis rectangulis emergere poſſunt, ponemusque angulum rectum deſignari per A, reliquos per B & C. Prima columna oſtendet, quæ præter rectum angulum A, qui ſemper notus eſt, dari ponantur; ſecunda exhibebit partes quæſitas; tertia Analogias pro ſingulis adhibendas, quæ proinde adhibitis terminorum ſingulorum Logarithmis in proportionem Arithmeticam convertitur.

81.

	Data	Quæſita.	Analogiæ
I	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$, vel AB : AC = R : *tang.* B. Dein *ſin.* B : R = AC : BC.
II		B	AB : AC = R : *tang.* B
III		C	AC : AB = R : *tang.* C.
IV	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$, vel Log. AC $= \frac{1}{2}$Log. (BC + AB) + $\frac{1}{2}$Log. (BC − AB).
V		B	BC : AB = R : *coſ.* B
VI		C	BC : AB = R : *ſin.* C.
VII	AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$, vel Log. AB $= \frac{1}{2}$Log. (BC + AC) + $\frac{1}{2}$Log. (BC − AC).
VIII		B	BC : AC = R : *ſin.* B.
IX		C	BC : AC = R : *coſ.* C.
X	AB, B	AC	R : *tang.* B = AB : AC.
XI		BC	*coſ.* B : R = AB : BC.
XII	AB, C	AC	R : *cot.* C = AB : AC.
XIII		BC	*ſin.* C : R = AB : BC.
XIV	AC, B	AB	R : *cot.* B = AC : AB.
XV		BC	*ſin.* B : R = AC : BC.
XVI	AC, C	AB	R : *tang.* C = AC : AB.
XVII		BC	*coſ.* C : R = AC : BC.
XVIII	BC, B	AB	R : *coſ.* B = BC : AB.
XIX		AC	R : *ſin.* B = BC : AC.
XX	BC, C	AB	R : *ſin.* C = BC : AB.
XXI		AC	R : *coſ.* C = BC : AC.

82. Omnes hæ Analogiæ nil aliud ſunt, quam applicatio Coroll. II (68) Theorem. I. In prima, formula $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$, quando dantur duæ catheti & nullus angulus, reducta eſt ad duas Analogias, ut extractio radicis evitetur. IV Formula $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ applicata eſt Logarithmis. Cum enim ſit $(BC + AB)(BC - AB) = BC^2 - AB^2$, & $\sqrt{BC + AB} \times \sqrt{BC - AB}) = \sqrt{BC^2 - AB^2}$, adhiberi poſſunt Logarithmi, modo pro radicalibus ſumantur Logarithmorum dimidia, uti colligitur ex iis, quæ in Algebra de Logarithmis diximus. Idem eſt de Formula VII. Satis erit primam formulam ad Analogias reductam illuſtrare exemplo.

Sit latus $AB = 658{,}5$ ped. latus $AC = 983$ ped. & quæratur hypotenuſa BC.

Log. AC + Log. R = 12,9925535
Log. AB = 2,8185558
Log. *tang.* B = 10,1739977
Log. *tang.* prox. minor 10,1737408, cui competit angulus $56^{v}\ 10'$
Different. 2569

Differentia Log. *tang.* $56^{v}\ 11'$ & $56^{v}\ 10' = 2732$; hinc $2732 : 2569 = 60'' : x$; reperitur $x = 56''$; quare angulus $B = 56^{v}\ 10'\ 56''$. Ut habeatur Logarithmus ejus ſinus, ſcribatur

Log. $56^{v}\ 11' = 9{,}9195083$
Log. $56^{v}\ 10' = 9{,}9194237$

Different. 846; fiat $60'' : 846 = 56'' : x$; reperitur $x = 789$, & addita hæc quantitas ad Logarith. $56^{v}\ 10' = 9{,}9194237$, dat Log. *ſin.* B = 9,9195026.

Pro Analogia altera. Log. AC + Log. R = 12,9925535
Compl. Arith. Logarith. *ſin.* AB = 10,0804974
Summa = 23,0730509, abjectis 20, habetur Logarithmus lateris BC = 3,0730509, cui proxime competunt 1183,2. Quare latus BC proxime eſt 1183,2 ped.

83. Pro obliquangulis reliquis reſolvendis ſubjungimus ſequentia Problemata.

Problema I. Datis duobus angulis cum uno latere, invenire latera reliqua.

Resol. Cum ſumma angulorum in quovis triangulo ſit 180^{v}, datis duobus angulis, datur etiam tertius. Hinc fiat

Ut ſinus anguli oppoſiti lateri cognito ad latus cognitum, ita ſinus anguli oppoſiti lateri quæſito ad latus quæſitum. Habito uno latere, alterum eadem Analogia reperitur.

Fig. 13 Tab. I Exemplum. Sit in triangulo ABC (Fig. 13 Tab. I) latus AC = 684 ped. angulus A = 37^{v} 24′, B = 29^{v} 15′; & quæratur latus AB. Erit A + B = 66^{v} 39′, conſequenter angulus C = 180^{v} — 66^{v} 39^{v} = 113^{v} 21′; ſed quia ſinus obtuſi idem cum ſinu anguli deinceps poſiti = 66^{v} 39′, accipiendus erit ſinus anguli 66^{v} 39′, & Analogia erit *ſin.* B : AC = *ſin.* C (66^{v} 39′) : AB.

Log. AC = 2,8350561
Log. *ſin.* C = 9,9628904
Summa = 12,7979465
Log. *ſin.* B = 9,6889723
Differ. Log. AB = 3,1089742 cui competunt proxime 1285,2 ped.

84. PROBLEMA II. Datis duobus lateribus cum angulo uni eorum oppoſito, invenire angulum oppoſitum alteri lateri dato.

RESOL. Ut hoc Problema ſolvatur, conſtare debet, an angulus quæſitus ſit acutus, vel obtuſus, quod ex circumſtantiis plerumque ſcitur. Analogia: ut latus datum oppoſitum angulo dato ad ſinum anguli dati; ita latus alterum datum ad ſinum anguli oppoſiti quæſiti.

Exemplum. Detur in eodem triangulo ABC latus AC = 684 ped. Latus AB = 1285,2 ped. Angulus B = 29^{v} 15′, quæritur angulus C. Erit Analogia lat. AC : *ſin.* B = lat. AB : *ſin.* C.

Log. *ſin.* B = 9,6889723
Log. AB = 3,1089742
Complem. Log. AC = 7,1649439

Summa Log. *ſin.* C = 9,9628904 (abjecta ſcilicet decade) cui competunt 66^{v} 39′ ſi fuerit acutus; at ſi obtuſus, uti reapſe eſt, 113^{v} 21′.

85. PROBLEMA III. Datis duobus lateribus cum angulo uni eorum oppoſito, invenire latus tertium.

RESOL. Primo quæratur per Problema præcedens angulus oppoſitus alteri lateri dato; hoc habito quæratur ſecundo latus ex ſequente Analogia: ut *ſin.* anguli dati ad unum latus datum eidem oppoſitum, ita ſinus anguli tertii ad latus tertium.

Exemplum. Si in triangulo ABC datis angulo B, lateribus AC & AB quæratur latus tertium CB, per Problema præcedens inveniatur prius angulus C; dabitur jam etiam angulus A: hinc fiat *ſin.* B : latus AC = *ſin.* A: latus CB.

Log. AC = 2,8350561
Log *ſin.* A = 9,7834575
Summa = 12,6185136
Log. *ſin.* B = 9,6889723

Log. CB = 2,9295413, cui conveniunt proxime 850,2 ped.

86. PROBLEMA IV. Datis duobus lateribus cum angulo comprehenſo, invenire reliquos duos angulos.

RE-

RESOL. Fiat: ſumma laterum datorum eſt ad eorundem differentiam, ita tangens ſemiſummæ angulorum quæſitorum ad tangentem eorum ſemidifferentiæ. Dato uno angulo, datur reliquorum ſumma & ſemiſumma; & quia latus majus ſemper majori, minus minori angulo opponitur, ſcitur, uter e quæſitis angulis ſit major, uter minor. Addita autem ad ſemiſummam ſemidifferentia habetur angulus major; & minor, ſi ſemidifferentia a ſemiſumma ſubtrahatur. Quare reperitur uterque angulus.

Exemplum. In triangulo priore ACB, ſit $AC = 684$, $BC = 850,2$ ped. $C = 113^{v}\ 21'$, cujus ſupplementum $66^{v}\ 39'$.

$$\begin{array}{llll} BC = 850{,}2 & \text{erit}\ AC + BC = 1534{,}2 & \big| & A + B = 66^{v}\ 39' \\ AC = 684 & \phantom{\text{erit}}\ BC - AC = 166{,}2 & \big| & \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = 33^{v}\ 19'\ 30'' \end{array}$$

$$\text{Log.}\ (BC - AC) = 2{,}2206310$$

$$\text{Log.}\ \textit{tang.}\ (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) = \underline{9{,}8178971}$$

$$\text{Summa} = 12{,}0385281$$

$$\text{Log.}\ (AC + BC) = \underline{3{,}1858820}$$

Different. Log. *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 8{,}8526461$, cui proxime reſpondet angulus $4^{v}\ 4'\ 27''$. Hæc ſemidifferentia addita ſemiſummæ $33^{v}\ 19'\ 30''$ dat angulum majorem $A = 37^{v}\ 23'\ 57''$, & ſubtracta ab eadem ſemiſumma dat minorem angulum $B = 29^{v}\ 15'\ 3''$. Hi anguli ab aſſumptis ſuperius (83) tantummodo differunt $3''$.

87. SCHOL. Qui volet reducere reſolutionem hujus Problematis ad duas Analogias, quas Num. 75 expoſuimus, faciet imprimis latus minus AC : latus majus $BC = R$: *tang.* anguli 45^{v} multandi.

$$\text{Log.}\ R + \text{Log.}\ BC = 12{,}9295413$$

$$\text{Log.}\ AC = \underline{2{,}8350561}$$

Differ. Log. *tang.* $= 10{,}0944852$, cui competit arcus $51^{v}\ 11'\ 2''$; ſubtractis 45^{v}, manet angulus $6^{v}\ 11'\ 2''$. Altera dein Analogia erit: R : *tang.* $(6^{v}\ 11'\ 2'') =$ *tang.* $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$: *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

$$\text{Log.}\ \textit{tang.}\ (6^{v}\ 11'\ 2'') = 9{,}0348298$$

$$\text{Log.}\ \textit{tang.}\ (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) = \underline{9{,}8178971}$$

Summa — 10 = Log. *tang.* $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 8{,}8527269$, cui reſpondet $4^{v}\ 4'\ 29''$; proinde $A = 37^{v}\ 23'\ 29''$, $B = 29^{v}\ 15'\ 1''$, qui ab aſſumptis non niſi $1''$ diſcrepant.

88. PROBLEMA V. Datis duobus lateribus cum angulo comprehenſo, invenire latus tertium.

RESOL. Problema ſolvetur, ſi ope præcedentis prius quærantur reliqui duo anguli; tum enim reducetur ad Problema I, ut per ſe clarum eſt.

89. PROBLEMA VI. Datis tribus lateribus invenire angulos.

RESOL. Fiat: ut latus maximum ad ſummam reliquorum duorum; ita eorundem differentia, ad differentiam ſegmentorum lateris maximi, quæ fiunt ex angulo lateri maximo oppoſito demiſſa in latus maximum perpendiculari.

Fig. 13 Tab. I Habita differentia ſegmentorum (Fig. 13 Tab. I) HB, habentur ſingula ſegmenta $AE = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}HB$, & $EB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}HB$. Hac ratione reductum eſt triangulum ACB ad duo rectangula ACE, in quo datur AC, & AE, & ECB, in quo habetur CB, & EB. Hinc

(81) Form. V (ſi fingas loco E ſcribi A, & B loco A) AC : AE = R : *coſ.* A
Form. ead. CB : EB = R : *coſ.* B.

Habitis angulis A & B, notus eſt etiam tertius C.

90. OBSERVA. Superfluum fuit, demonſtrationem reſolutionum horum Problematum repetere, cum nihil in iis contineatur, niſi quod jam ſuperiore Articulo demonſtratum fuit. Ceterum advertet Tiro, eſſe diverſitatem in reſolutionibus diverſis, neque perveniri calculis Trigonometricis ad ſummam accurationem. Maxime autem, ſi licet, vitandæ ſunt illæ, in quibus adhibentur plures Logarithmi per terminos proportionales quæſiti, & Logarithmi exiguorum angulorum, licet non ſemper inde oriatur diſcrimen. Sic reſolutio directa Num. 86 Problematis IV tam accurata non fuit, quam altera Num. 87. Et cum in illa adhibiti fuerint Logarithmi numeri 1534,2 & tangentis $33^{\circ}\ 19'\ 30''$, quorum neuter in tabulis minoribus habetur, ſed per proportionem (64) inveniri debuit, videri poſſet, hinc pendere minorem accurationem. Verum nec ope majoris canonis (in quo dictarum quantitatum Logarithmi jam habentur), propius ad verum acceditur. In altera reſolutione, quamvis tangens exigui anguli ($6^{\circ}\ 11'\ 2''$ ſcilicet) adhibeatur, eſt tamen Logarithmus ſinus totius omnino accuratus, & vera quantitas proxime attingitur. E quo manifeſtum fit, eſſe diſcrimen in ipſis Logarithmis tabularibus.

CAPUT II.

Praxis Trigonometriæ planæ.

ARTICULUS I.

De dimenſione baſium.

91. Quoniam datis tantummodo angulis nil niſi ratio laterum erui poteſt; dum abſoluta magnitudo quæritur, unum ſaltem trianguli latus vel dari, vel actu menſurari debet. Contingit autem quandoque, ut ea ſit ſoli diſpoſitio, ut in quibuſdam locis intermediis inter terminos lateris metiendi ipſi termini conſpici non poſſint, veluti ſi (Fig. 16 Tab. II) ABCEF eſſet dimetiendum, itaque humus inter B, C, vel ad E, deprimeretur, ut inde termini A & F aſpectui ſubducerentur. Fig. 16 Tab. II

In ejuſmodi caſibus *expoſitis perticis* per eos locorum tractus *deſignanda erit prius linea recta.* Neceſſe eſt, ut termini ſaltem ex aliquibus locis intermediis velut C, D videri poſſint. Itaque laboris adjutorem jube cum pertica recta, tereti & inferne cuſpidata ex A verſus terminum F progredi, atque circa B (qui locus ex humiliore ſolo inter B & C ubivis videri poſſit) ſubſiſtere, ibique perticam defigere ad perpendiculum (quod applicata plumbagine exploratur) te infra A conſtituto, ut oculo verſus F directo, pertica B tibi terminum F tegat. Altera pertica, quæ itidem inter B & C videri queat, eodem modo te dirigente firmanda erit in C. Tum, ſi neceſſe ſit, aliæ in D, E &c ita, ut binæ ex omnibus intermediis locis cerni queant, te ſemper infra perticam recens fixam verſus alteram, alterumque terminum ſpectante, ne in alterutram partem exerret. Hujus rei quidem in minoribus diſtantiis raro eſt neceſſitas, verum dum ingentes baſes metiendæ ſunt, frequens uſus.

92. Menſuratio itaque ipſa facienda eſt, quæ variis modis inſtitui poteſt. Plerumque, dum non maxima accuratio requiritur, adhibentur catenæ in hunc finem paratæ, compoſitæ e fili ferrei craſſioris portionibus pedalibus, vel ſemipedalibus, atque annulis conſertis, poſt ſexos quoſque pedes interjecto annulo orichalcino, ut tum orgyæ, tum pedes ipſi expedite numerari poſſint. Primus catenæ annulus inſeritur clavo longiori ferreo in A defixo, vel paxillo firmo, & in terram fortiter adacto: laboris ſocius prehenſo altero catenæ extremo verſus E (Fig. 17 Tab. II) progreditur, te ad A remanente, atque catenam, quantum res ſinit, tendit, ſimili paxillo vel clavo alterum extremum annulum in B innectens, te interim ſemper verſus terminum F proſpectante, atque dirigente ſocium, ut tota catena in linea recta jaceat.

Fig. 17
Tab. II

Poſtquam ſocius extremum catenæ in B rite fixit, tu revulſo clavo, vel paxillo, verſus C progredieris, idemque illic præſtabis, quod ſocius in B egerat, qui verſus F directo oculo, te, ne a recta catena BC exerret, monebit. Eodem modo ſocius ex B in D transferet alterum extremum catenæ &c, donec ad F veniatur. Rarum erit, ut dum ad F pervenitur, catena non aliquantum verſus E excurrat, vel ab F deficiat, quin hoc diſcrimen vel pedem integrum, vel dimidium (qui in catena numerari poſſunt) contineat. Hinc alia menſura, v. g. pes in digitos, aut etiam dimidios, diviſus ad manum ſit, oportet, ut defectus, vel exceſſus ille FE menſurari poſſit. Si notetur, quoties catenæ alterum extremum translatum ſit, numerus hexapedarum, pedum, & digitorum diſtantiæ, vel baſis AF innoteſcet.

93. Longitudo catenarum menſoriarum raro 5, vel 6 hexapedas excedit, ne gravitate ſua, & pondere moleſtæ ſint.

In uſu attendi maxime debet *1mo*, ne ſi juſto minus tendatur, ſinus faciant notabiles, & flexus, qui ſi non attendantur, acquiritur diſtantia major, quam ſit vera. *2do.* Ne nimia tenſione vel paxilli, aut clavi ferrei, quibus alterum catenæ extremum innexum eſt, loco emoveantur, vel inclinentur; vel flexis annulis longitudo catenæ augeatur. Utrumque efficeret, ut baſis prodiret vera minor. *3tio.* Ante uſum examinanda eſt prima, & poſtrema catenæ hexapeda; utrum ſcilicet computandum ſit initum a media craſſitudine paxilli ultimo annulo inſerendi, an aliter. Primum ſi non ſit, in quavis translatione catenæ longitudini aliquid correctionis adhibendum erit, prout ſcilicet initium vel ab extimo annulo, vel ab interiore ejus ſuperficie &c ſumptum fuerit. 4*to*. Dum catena tenditur, examinandum, utrum annuli omnes rite ſint diſpoſiti, & in debito ſitu, cum ſæpe contingat, ut inter ſe implexi longitudinem catenæ minuant.

94. Dum magna accuratione opus eſt, uſus catenæ non eſt ſatis tutus. Raro enim habetur ſolum ita æquabile, ut catena in eo extenſa non faciat flexus, & ſinus notabiles. Accedit, quod fieri vix poſſit, ut fortiore tenſione, etſi annuli non flectantur, clavi ferrei, vel paxilli non aliquantum vel inclinentur, vel emoveantur e debito ſitu, ipſa humo cedente: Flexus, & ſinuatio (quam potiſſimum gravitas efficit) ne quidem in funibus oleo maceratis, & cera liquata tinctis (ne ſubrepente humore contrahantur) ſatis evitantur; multo minus paxillorum flexio, & inclinatio. Quare pro menſurandis baſibus tum quidem nec catenæ, nec funes adhiberi debent.

Fig. 18 Tab. II

95. Non nulli ad metiendas baſes adhibent unicam perticam velut ABCD (Fig. 18 Tab. II), eamque circa angulum D rotando (ut alterum extremum videatur deſcribere ſemicirculum) transferunt in *cdab*, & ita deinceps. Verum dum pertica hunc in modum adhibetur, evidens eſt, dum quadrans ab extremo EF deſcriptus eſt, DC applicari ſolo D*c*, & reliquum arcum deſcribi rotatione circa angulum alterum C, qui jam in loco *c* erit. Hinc ſingulis translationibus addenda eſt craſſitudo perticæ DC, vel AB. Sed enim nimis aberrari poteſt a vera directione verſus terminum, ſeu a ſitu rectilineo. Deinde ſperari nequit, dum pertica circa angulos D, C rotatur, humum non cedere, ut proinde nequaquam craſſitudo perticæ longitudini addi ſemper debeat, ſed vel plus, vel minus, prout vel in hanc, vel illam partem ſolum facilius cedit.

Fig. 17 Tab. II

96. Multo rectius adhibentur perticæ ejuſmodi teretes, non tamen nimis flexiles, longitudinis fere 10 pedum, tres ſaltem, aut quatuor, quæ (Fig. 17 Tab. II) inde ab A verſus F linea recta diſponuntur, binarum quarumvis extremis ſeſe accurate contingentibus, modo ſolum ſit ſatis æquabile, ut, dum exiguæ aſperitates aut hiatus occurrunt, ſuppoſitis cuneis, aſſerum ſegmentis &c perticarum ſitus judicio oculi horizontalis obtineri poſſit. Poſtquam tres, vel quatuor in AB, BC, CD &c ita diſpoſitæ fuerunt, ut ex A terminum F ſpectanti videantur omnes in recta, pertica AB verſus A aliquantum retracta (ne impactu in priorem BC eam loco dimoveat) transfertur in DE, & ne, dum diſponitur, perticæ CD ſitus mutetur, hujus extremum D manu tenetur. Tum ſecunda BC eodem modo translata priori DE in directum collocatur, & ſic deinceps usque ad terminum. Si quatuor adhibeantur perticæ, anteriores duæ verſus terminum, ad quem menſor tendit, relinqui ſemper poſſunt immotæ, & duæ poſteriores ſimul transferri. Illud jam intelligitur, debere vel ſeparatam menſuram minorem in pedes, digitos, aut etiam lineas diviſam adeſſe, vel eas diviſiones reperiri in una e perticis, ut defectus ab integris perticis, vel pedibus in longitudine totius baſis notari poſſit.

97. Men-

97. Menſuræ hunc in modum acceptæ multo accuratiores ſunt, quam quæ catenis accipiuntur, modo attendatur, ut perticæ accurate ſeſe contingant (nam error maxime notabilis ex defectu contactus naſcitur), & ut ſitus ad horizontalem proxime accedat, quod in ſolo declivi, aut aſpero, ut diximus, ſuppoſitis cuneis, variisque fulcris obtinetur, qua de re paullo poſt adhuc aliquid monebimus. Error, qui ex defectu directionis rectilineæ emergit, plerumque ita exiguus eſt, ut non niſi in magnis admodum diſtantiis notabilis fiat. Si enim ponas (Fig. 24 Tab. II) a vera directione ACD decempedam AB aberrare angulo BAC, cujus ſinus (ſumpto radio AB) ſit BC = 1 dig. (hic error autem omnino in oculos incurrit, ut non niſi negligentiæ adſcribi poſſit, ſi committatur) loco AC numeras decempedam, adeoque error erit AB — AC. Eſt autem AB (per hypotheſin) = 10 ped. = 120 digitis, & BC = 1 dig., hinc erit $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14400 - 1} = \sqrt{14399}$, quæ eſt proxime 119,995 dig. & differentia ab AB (= 120 dig.) $= \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$ digiti. Ex quo patet, ſi in ſingularum perticarum directione tantundem erretur, in diſtantia 200 decempedarum, ſeu 2000 pedum, errari defectu directionis unico digito, licet omnes errores in eandem partem conſpirent, hoc eſt, dent diſtantiam vera majorem, ut ipſa figura indicat. Quod ſi non tantum in directione (Fig. 25 Tab. II) a linea ACD aberretur, ſed etiam a ſitu horizontali, error totalis erit quidem aliquantum major, ſed tamen adhuc in ſe exiguus. Finge errorem a linea AD eſſe EC = 1 digito, & errorem a ſitu horizontali BE eſſe itidem = 1 digito, erit error directionis in una decempeda BC, hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus ſingulæ catheti BE, CE ſint unius *digiti*, adeoque 1 dig. $\times \sqrt{2}$, uti manifeſtum eſt. Quare in hac hypotheſi fiet $AC = \sqrt{14400 - 2} = \sqrt{14398} = 119{,}991$ proxime, & differentia ab 120 erit $\frac{9}{1000}$ digiti, id eſt, ſi in ſingulis decempedis is error admittatur, non niſi in diſtantia 111 decempedarum, ſive 1110 pedum, evadet uni digito proxime æqualis. Ex quibus manifeſtum eſt, ab hujusmodi erroribus haud admodum multum timendum eſſe.

Fig. 24
Tab. II

Fig. 25
Tab. II

98. Contingit ſubinde, ut ſolum alicubi (etſi ceterum æquabile ſit) per breve ſpatium repente ſubſidat, uti (Fig. 19 Tab. II) exhibet. In tali caſu, collocetur pertica AB in editiore ſoli parte (adhibito etiam, ſi opus ſit, fulcro ad E) in ſitu debito; vel ſi una nimis brevis ſit, colligentur duæ, ut pars B ultra illam declivitatem promineat. Tum ex extremo B demittatur perpendiculum, ſive plumbago BC, & eidem applicetur in humiliore ſoli parte pertica CD, ſuppoſito, ſi forte requiratur, fulcro ad F. Hac ratione longitudini perticarum AB & CD addenda erit craſſitudo fili BC, ſi notabilis ſit, idque toties, quoties ejusmodi perpendiculi applicatio repetitur, quod in longioribus intervallis ſæpius contingere poteſt. Verum quando ordinariæ fiunt baſium dimenſiones, & filum ſatis tenue eſt, neque ſæpius adhibetur perpendiculum, negligi poteſt, utpote cum in ejusmodi caſibus fere inevitabilis ſint

Fig. 19
Tab. II

alii errores ab inſtrumentorum imperfectione pendentes, qui tamen ſunt majoris momenti.

99. Atque hæ baſes metiendi methodi in operationibus Trigonometricis, quæ crebrioris uſus ſunt, plerumque ſatis ſunt. Verum ſi ſumma accuratio requiratur, uti dum baſes ingentes, quinque, aut ſex millium hexapedarum, ad inveniendam longitudinem gradus meridiani terreſtris, vel ad conſtruendam chartam accuratiorem Geographicam &c adhibentur, perticis aliis opus eſt, tres ſaltem hexapedas longis, craſſis, ne facile flectantur, & quam rectiſſimis. Parantur hæ e lignis ſicciſſimis, non e ſingulis fruſtis ſingulæ, ſed ſtipite eodem in plures partes ſecto, portiones duæ, tresve, clavis ligneis adictis, & optimo glutine in unam compaginantur, ita ut diverſarum portionum fibræ in partes oppoſitas porrigantur, quo nempe obtinetur, ne perticæ ita compoſitæ ſucceſſu temporis curventur, quod raro evitatur in illis, quæ ex eodem trunco edolantur integræ. Præterea, ne humore ſeſe in lignum inſinuante vitium faciant, colore oleaceo craſſo tinguntur. In uno e quatuor Fig. 20 Tab. II planis (Fig. 20 Tab. II) exiguæ lamellæ orichalcinæ ad intervalla ſingularum hexapedarum firmantur, velut ad B prope extremum, tum in C, & ita deinceps usque ad alterum extremum. Hexapedarum ſingularum diſtantiæ ope majoris circini micrometro inſtructi (de quo in Geometria mentionem fecimus) ex una in alteram lamellam transferuntur, notato in ſingulis exiguo puncto ope ſtyli acuti. Ipſæ perticæ a quibuſdam menſulis humilioribus, & firmis in hunc finem paratis imponuntur, quæ menſulæ ut res exigit, attolli, deprimique poſſint. Vel ſingulis perticis binæ menſulæ, vel extremis duarum perticarum vicinis ſingulæ menſulæ tribuuntur. Ut ſitus horizontalis Fig. 22 Tab. II accurate obtineatur, ſingulis perticis applicatur vel libella aquatica (Fig. 22 Tab. II), id eſt, tubus vitreus alteri orichalcino incluſus, ita, ut ſpatio DE vitrum videri poſſit. Tubus vitreus aquam cum bulla aeris majuſcula continet, & in medio tenui annulo I ambitur; tubus orichalcinus CDEF firmatur ſupra regulam itidem orichalcinam AB, additis in extremis dioptris GA, HB filis ſeſe decuſſantibus inſtructis. Bulla medium tubi vitrei occupante, regula AB ſitum horizontalem obtinet, adeoque etiam pertica, cui hæc regula congruit ſuo plano. Alii adhibent in eundem finem triangulum majus Fig. 23 Tab. II ligneum ABC, (Fig. 23 Tab. II) quod quam accuratiſſime ſit iſoſceles. Prope B ſuſpenditur plumbago capſæ ligneæ BF (cujus anterior pars vitro munita eſt) incluſa. In medio brachii transverſalis (debet itidem eſſe BD = BE) DE notatur punctum, quod a filo perpendiculi obtegitur, dum pedes trianguli A, C in ſitu horizontali ſunt. Ope hujus trianguli ſitus horizontalis perticis procuratur. Perticæ ſuper ſuis menſulis rite diſpoſitæ ſeſe non contingunt, ſed inter extremas duarum laminas A, B intervalli aliquid relinquitur, quod, quantum ſit, exploratur, applicatis cruribus circini minoris vel micrometrici, vel alterius accurati ad puncta in iiſdem lamellis deſignata, & inde in ſcalam transfertur. Itaque tribus, vel quatuor perticis debite diſpoſitis, inter binas quasque acceptum intervallum adſcribitur, ut dein integris orgyis connumeretur. Tum relictis anterioribus, quæ terminum propius

ſpe-

ſpectant, poſteriores transferuntur antrorſum, itaque menſuratio usque ad terminum continuatur.

100. Curandum, dum perticæ transferuntur, ne earum inverſio fiat, hoc eſt, extremum, quod prius ſpectabat terminum, ad quem acceditur, dein reſpiciat alterum, a quo receditur; ſed ut ſemper earundem perticarum eadem extrema verſus eosdem dirigantur terminos, verſus quos prima vice directa erant. Obtinetur id facile, ſi ſingula extrema perticarum ſuis literis notentur. Quoniam tota menſuratio non unico die peragi poteſt, & ſæpius ob alias etiam cauſas interrumpenda eſt, ut ſciatur, quousque perventum ſit, demittatur ex extremo perticæ ultimæ perpendiculum, & defigatur firmiter in terram vel paxillus, vel clavus ferreus major, ultra cujus Caput aliquantum excurrat lamina orichalcina, in cujus aciem lineola inciſa ſit, quam lineolam filum perpendiculi accurate contingat. Dum reſumitur menſuratio, ex primo primæ perticæ extremo demiſſum perpendiculum eandem rurſus lineolam attingere debet, ut per ſe patet. Ceterum uſus perpendiculi, dum ſoli declivitas, interjectæ foſſæ &c poſcunt, idem fere eſt, quem ſuperius (98) expoſuimus.

101. Quando perticæ adhuc majores, 5 vel 6 hexapedarum, quæ ſua gravitate, & pondere non tam facile fortuitis impulſibus obnoxiæ ſunt, adhibentur, eæ in ipſo ſolo diſponuntur. Et quia earum diſpoſitio in recta ab uno verſus alterum terminum admodum moleſta eſt, palo fortiter in terram adacto funis, quam haberi poteſt, longus tenditur juxta eam lineam, vel ope axis in peritrochio, vel alia machina facile parabili, & juxta funis ductum collocantur non ſine laboris compendio perticæ. Quod ad ſitum horizontalem, is ſuppoſitis cuneis, aſſerum ſegmentis, aliisve fulcris procuratur, adhibitis iterum libellis ad ſingulas perticas. Cum, ut dixi, ſuo pondere id genus perticæ firmius humo incumbant, quam ut levi impactu dimoveantur, non relinquitur inter binarum extrema aliquid intervalli ſeorſim ſemper menſurandi (quæ res multum temporis requirit, & computum difficiliorem reddit), ſed curatur, ut ſeſe accurate contingant. In hunc finem extremis perticarum inſeritur ferramentum parallelepipedæum, velut (Fig. 21 Tab. II) ad A, B videri poteſt, ſatis craſſum, & breve: baſes quadrangulares accurate ſint ad latera perpendiculares, & optime politæ, ut tota unius alterius totam citra hiatum contingat. Hunc in modum ſi baſis etiam 5 mille hexapedis longior iterato, vel a diverſis, menſuretur, diſcrimen vix paucarum linearum advertitur, modo debita diligentia adhibeatur. Fig. 21 Tab. II

102. Etſi qui id genus menſurationes ſuſcipiunt, pluribus ſubſidiis (& aliarum matheſeos partium notitia) inſtructi eſſe debeant, quam quæ a tironibus exigas, voluimus tamen iſta exponere, ut videant, unde adjumenta in rem ſuam, cum uſus exigit, petere poſſint. Nunquam accurationi nimium aſſueſcitur: ſi ſummam attingere non liceat, licebit tamen aliquo usque imitari. Interim velim, qui ſeſe praxi Trigonometricæ dant, experiantur iterato metiendo diſtantias duorum terminorum (ſeu catenis id fiat, ſeu decempedis, aliterve), vel etiam dum ſoli diſpoſitio iniquior eſt, tertio vel quarto, non

non modo quid diſcriminis inter unam & alteram menſurationem eodem inſtrumenti genere obtineant, ſed etiam quid interſit inter menſurationes diverſis inſtrumentis inſtitutas Primum eos docebit, quantum fidi poſſit ejusmodi dimenſionibus, quidque in iis incerti relinquatur, ne, ut ſæpe contingit, ſuas dimenſiones pro infallibilibus venditent. V. g. ſi dimenſus baſin per catenam, inveniſti remetiendo diſcrimen $\frac{1}{2}$ pedis, evidens eſt, incertam eam relinqui $\frac{1}{2}$ pede. Interim eam quarta parte pedis augere (ſi exceſſum præbuit ſecunda dimenſio), vel minuere, ſi a prima defecit, licebit in uſu, ut ſi prima vice inveniſti 228 pedes, ſecunda $228\frac{1}{2}$, aſſumere poteris medium, nempe 228 ped. 3 dig. Alterum, ut ſciatur diſcrimen, dum diverſa inſtrumenta adhibentur, vel illud utilitatis maximæ habet, quod inde diſcas ſelectum facere, & cum majore accuratione opus eſt, ea adhibeas, in quibus ſucceſſus major eſſe ſolet.

ARTICULUS II.

De inſtrumentis, quibus anguli accipi ſolent.

103. Ad metiendos angulos plerumque adhibetur *Aſtrolabium*, *Goniometricum*, aut ſemicirculus in gradus dimidios, vel etiam in dena minuta, diviſus, duplicibus dioptris filaribus inſtructus, quarum aliæ fixæ ſunt, atque diametro diſtant, aliæ regulæ mobili inſertæ, quæ acie ſua, dum accipitur angulus, gradus in limbo ſemicirculi inter dioptras fixas interceptos abſcindit.

Quoniam uſitatiſſimum eſt hoc inſtrumentum, in ejus deſcriptione nihil immoramur, ſed dicemus *primo*, qua ratione, antequam adhibetur, examinari poſſit; *ſecundo*, quantum in menſura angulorum aberrari poſſit.

104. Examen inſtrumenti duplex eſt: nam imprimis quæritur de accuratione diviſionis, dein de centro motus regulæ dioptricæ mobilis. Ut examinari poſſit diviſio, neceſſe eſt, ut habeatur centrum diviſionis, ad quod inveniendum varia Geometriæ Elementaris Theoremata uſui eſſe poſſunt, quorum illud facile obvium, ut ex diverſis arcus inſtrumenti punctis tanquam centris, & radio æquali chordæ arcus 60 graduum deſcribantur plures exigui arcus prope eum locum, ubi per ſe ſcitur, quod centrum eſſe deberet. Si ſe omnes interſecent in eodem puncto, centrum habebitur in illa ipſa interſectione. Dividatur item diameter inſtrumenti (Fig. 26 Tab. II) BA bifariam in C, ſi hoc punctum diviſionis congruit cum interſectionibus arcuum prioribus, erit verum centrum diviſionis. At ſi neque interſectiones arcuum fiant in eodem puncto, neque C cum iis congruat, jam concluditur, eſſe in inſtrumento aliquod vitium. Hinc

Fig. 26
Tab. II

Quæri poteſt vel conſtructione Geometrica, vel ope perpendiculi e tenui filo ſuſpenſi, & ex C (medio puncto lineæ AB per extrema arcus ductæ)

Hinc deducitur methodus inveniendi diſtantiam CK, C*k* centrorum motus & diviſionis. Notato in regula mobili puncto cum initio diviſionis A congruente, circumducatur eadem per totam ſemiperipheriam, & attendatur *primo*, an in progreſſu verſus B, ſive 180°, punctum idem non alicubi rurſus cum peripheria congruat. Si hoc advertatur, reducatur regula ad dimidium ejus arcus, quem illuc usque deſcripſit. Quod ſi punctum notatum nuſpiam iterum incidat in peripheriam, iterato illud circumducendo & tentando inveniendus eſt locus maximæ exerrationis ſaltem circiter. *Secundo* relicta regula in eo ſitu, in quo punctum habet maximam exerrationem, & notato præterea puncto F vel G, ubi occurrit radio BC; ſumantur circino, (Fig. 28 N. 3. Tab. II) (ut exemplo utamur) diſtantiæ MF, MA, uti etiam AF; & concipiatur deſcriptus circulus per puncta F, M, A. Datis tribus lateribus in triangulo FMA quæratur angulus MFA; cogiteturque QK e medio puncto Q chordæ MA perpendicularis, quæ tranſibit per centrum K. Quod ſi præterea ductus intelligatur radius MK, patet angulum ad centrum MKQ æquari angulo ad peripheriam invento MFA. Quare ſi fiat *ſin.* MFA : R = MQ : MK, habebitur radius hic in particulis ſcalæ. Notandum autem, quod error nullus poſſit enaſci, etſi non accipiantur chordæ MF, MA in loco exerrationis maximæ, ſed notetur qualecunque punctum M; nam poſtea calculo hoc punctum determinabitur, præferimus tamen illud, quod diſcrimen chordarum a chordis arcus diviſionis ſæpe ſit illic maxime ſenſibile. Habito radio, evidens eſt, AF eſſe chordam arcus AMF, & ſi concipiatur e centro K demiſſum in eam perpendiculum KP, eſt P ejus punctum medium. Et quia ſcitur BF, datur FP, & FC, & proinde CP. Dein eſt FK = MK radio invento, & KP = $\sqrt{FK^2 - FP^2}$; datur ergo CP & PK, & hinc CK = $\sqrt{CP^2 + KP^2}$; & ſi porro fiat CP : CK = *ſin.* CKP : R, reperitur angulus CKP = NCD, adeoque habetur in diviſione arcus punctum, per quod tranſit recta per centra C & K ducta. CK deinceps vocabimus *errorem centri*. Ut ſitus CK rite determinetur, præcedentes animadverſiones proderunt.

Fig. 28
N. 3
Tab. II

107. Cognito errore centri in partibus ſcalæ, videndum modo, quid erroris in angulis acceptis ope inſtrumenti enaſcatur, & quæ propterea correctio adhibenda ſit. Ponatur, (Fig. 29 Tab. III) centrum motus in *d* repertum, & arcus AO, quem abſcindit recta per centra motus *d*, & diviſionis C ducta. Patet, quando regula mobilis in inſtrumento habet ſitum OC*d*, acquiri verum arcum AO, ab errore immunem. At ſi aliquis arcus minor, quam AO, v. g. AG accipitur, error centri hunc angulum jam afficit. Ducatur G*d*, quæ ſecet radium AC in D; manifeſtum eſt, angulum viſorium fore GDA, & non GCA, quem arcus AG metitur. Concipiatur ex C in G*d* demiſſum perpendiculum CH, & ex O perpendiculum OL. Cum angulus CG*d* (qui eſt differentia inter angulum verum viſualem GDA, & GCA, quem indicat inſtrumentum) ſit admodum parvus, citra errorem ſenſibilem etiam ſinus angulorum G*d*O, & GCO æquales cenſeri poſſunt, & triangula rectangula *d*CH, COL ſimilia. Hinc erit C*d* : CH = R : *ſin.* OCG, ſeu *ſin.* (ACO — ACG);

Fig. 29
Tab. III

— ACG); hoc eſt ſinus totus eſt ad ſinum differentiæ angulorum conſtantis ACO (& ab errore immunis) & anguli accepti ACG; ita eſt error centri *d*C in partibus ſcalæ ad lineolam CH in iiſdem partibus. Porro dum anguli admodum exigui ſunt, arcus a ſinubus ſenſibiliter non differunt. Quare haberi tuto poterit lineola CH pro arcu, qui radio GC deſcriptus metitur angulum CGD. Cum igitur conſtet, (Geomet. 343) radium ad arcum reductum eſſe $57^{v}\ 17'\ 44'',8$, ſive $206264'',8$ (cujus Logarithmus 5,3144251) ſupereſt hæc proportio facienda, quæ ope Logarithmorum expedite fit, ut numerus partium ſcalæ convenientium radio inſtrumenti ad $206264'',8$, ita numerus earundem partium inventus lineolæ CH ad numerum minutorum & ſecundorum anguli correctionis CG*d*.

108. Figuram conſideranti patebit, in toto arcu AO obtineri arcus veris minores; quare correctio usque in O erit additiva, & in O nulla. Ubi anguli accepti excedunt arcum AO, velut ſi accipiatur angulus AM, evidens eſt, acquiri arcus juſto majores. Ducatur enim M*d*, quæ ſecabit diametrum AB in *r* ultra C reſpectu A, eritque verus angulus viſualis A*r*M, erroneus, quem inſtrumentum oſtendit ACM, qui verum excedit angulo CM*d*. Quare ſi rurſus ex C, & O demittantur perpendicula CI, ON, triangula *d*CI, CNO pro ſimilibus haberi debent, & fieri $R : \mathit{ſin.}\,(ACM - ACO) = dC : CI$, ſeu radius ad ſinum differentiæ anguli accepti, & conſtantis ACO, ita error centri ad CI, dein invenietur ope ſecundæ Analogiæ ſuperiore numero expoſitæ angulus *d*MC, qui deinceps usque ad B ſemper eſt correctio ſubtractiva.

109. Ex his abunde liquet, ſi frequentior ſit uſus ejusmodi Goniometrici, poſſe conſtrui tabulam pro ſingulis gradibus, vel etiam pro quinis, vel denis, prout error centri major vel minor fuerit. Illud notatu dignum, errorem centri angulos inde ab O verſus B ſemper magis afficere usque ad certum terminum, ultra quem effectus hic iterum decreſcit. Facile autem determinatur is terminus, in quo correctio maxima eſt, nempe in diſtantia quadrantis ab O, uti in K. Ducta enim KC erit ad OC*d* perpendicularis; & ſicut ſinus OCH fit ipſe radius, ſic totus error centri C*d* fit arcus, qui metitur angulum correctionis CK*d*.

Fig. 30 Tab. III

110. Quæ modo attulimus, tiro facile applicabit cuivis alteri ſitui centri motus *d*. Sit hoc (Fig. 30 Tab. III) intra diametrum AB in *d*. In hoc caſu ſi accipiatur angulus AG, verus angulus viſualis eſt GDA, minor illo, quem inſtrumentum oſtendit ACG, quantitate anguli DGC. Poterunt autem ob exilitatem differentiæ triangula O*d*L (quod eſt ſimile triangulo *d*CH) OCG haberi pro æqualibus (quantum ad ſinum OL); hinc $CO : OL = dC : CH$, id eſt: ſinus totus ad ſinum differentiæ anguli accepti ACG, & conſtantis ACO, ita error centri ad CH reducendam ad partes radii, ut ſciatur correctio DGC, quæ, ut apparet, per totum arcum AO eſt ſubtractiva. Ultra O, uti ſi accipiatur arcus AM, hæc correctio fit additiva. Nam ducta M*dr* ſecat diametrum BA inter A & C, & verus angulus viſualis A*r*M major eſt angulo inſtrumenti ACM, quantitate anguli CM*d*, vel CM*r*. Perpendiculum CI invenitur ex eadem proportione ut $R : \mathit{ſin.}\,(ACM - ACO) = Cd : CI$.

111. Illud denique in hiſce inſtrumentis curandum ſedulo, ut dioptræ, ſeu conſtent filis tenuibus, ſeu lineis in lamina orichalcina exciſis, ſint ad planum inſtrumenti perpendiculares; & fixæ quidem accurate congruant punctis 0^v & 180^v; mobiles autem cum acie regulæ mobilis, quæ numerum graduum abſcindit. Si regula mobilis adducatur ad AB (eſt enim plerumque aliquantum brevior, ut id fieri poſſit) quatuor dioptræ tranſpicienti unius inſtar apparere debent, & fila ſeſe mutuo accurate tegere; id niſi fiat, vitium erit in collocatione dioptrarum commiſſum omni cura emendandum. Qui nova ſibi inſtrumenta Goniometrica ab experto artifice fieri curant, diligenter eidem inculcent, ne partem laminæ orichalcinæ, in qua diviſionis centrum accepit, reſecet, ſed relinquat, ut examen commode inſtitui poſſit, quoties lubet. Solent enim multi in medio inſtrumenti collocare pyxidem pro acu magnetica, vel alios importunos ornatus adhibere; quaſi vero id genus pyxides non alibi connecti poſſent, ſi quis foret earum uſus, vel ejusmodi loco alieno intruſæ elegantiæ tantam fidem fabris præſtarent, quam nemo alter ſuſpectam habeat, & in periculum adducere audeat.

112. Celeberrimus vir Tob. Mayer (Comment. Acad. Reg. Scient. Götting. Tom. II ad An. 1752) de re Mathematica præclariſſime meritus proponit novum Goniometricum, quod uſitatis aſtrolabiis vult eſſe emendatius. Qui accuratam inſtrumenti deſcriptionem deſiderat, adeat ipſos Commentarios laudatos: nos quæ ad naturam ejus pertinent, breviter iſthic indicabimus. Conſtat inſtrumentum duabus regulis EF, HG, quarum inferior HG conferruminata eſt cylindro cavo NO, qui ſolidum QR pedis inſtrumenti Caput recipit, & ope cochleæ P eidem firmiter adſtringi poteſt. Superior regula EF intra foramen conicum per inferiorem HG tranſiens, circa axem item conicum mobilis eſt; ita, ut ſuperior, immota inferiore, libere circumagi poſſit. Firmatur in ſuperiore regula ope duorum annulorum, qui cochleis L, M adſtringi poſſunt, tubulus non nihil brevior regula, lente objectiva ad I, & oculari ad K, alteri ductili tubulo inſerta, inſtructo, ut cujusvis oculo accommodetur. In foco communi lentium collocatur vitrum planum (Fig. 32 Tab. III), in cujus centro ſe interſecant ad angulum rectum lineæ tenuiſſimæ AB, CD ſilice, vel adamante deſcriptæ. Circa extrema regularum in lineis per centrum motus tranſeuntibus, & æqualibus ab eodem diſtantiis, notantur puncta A, C, B, D, quorum a ſe invicem diſtantiæ circino acceptæ, velut CD, vel AB, & in ſcalam chordarum translatæ, dant angulos.

Fig. 31
Tab. III

Fig. 32
Tab. III

113. Quare ad radium æqualem $\frac{1}{2}$AC, vel $\frac{1}{2}$BD, conſtruenda erit ſcala chordarum, de qua in Geometria (251) mentionem jam fecimus; in quem finem adſit, oportet, accurata ſcala Geometrica, in cujus partibus $\frac{1}{2}$AC haberi poſſit. Accipiantur tum ſinus dimidiorum angulorum, & duplicentur, atque inſtituantur hæ proportiones: ut radius tabularis ad duplum ſinus accepti, ita radius inſtrumenti ad chordam anguli dupli illius, cujus ſinus acceptus eſt. Ex. gr. quæris chordam anguli 10^v; in tabulis, quære Logarithmum $2 \times$ *ſin.* 5^v; quære item in numeris naturalibus Logarithmum partium radii inſtrumenti, hosque adde, & a ſumma ſubtrahe Logarithmum radii tabularis

ſeu 10,0000000, reſiduum erit Logarithmus numeri naturalis, qui indicabit numerum partium ſcalæ convenientium chordæ 10^{v}. Sit v. g. radius inſtrumenti 5 digitorum, ſeu partium ſcalæ 500

Log. 2 = 0,3010300
Log. *ſin.* 5^{v} = 8,9402960
Log. 500 = 2,6989700

Summa = 11,9392960 abjecta decade Logarithmo 1,9392960 competunt proxime 86,95. Hac ratione inde a gradu 1 usque ad 90 chordæ haberi poſſunt. Ut exemplo, & Schemate rudiore rem magis reddamus perſpi- Fig. 35 Tab. III cuam, ſit ejusmodi ſcala chordarum (Fig. 35 Tab. III) ABCD, quæ quidem non niſi ad 60^{v} gradus pertingit. DC ſit radius, ſive chorda 60^{v}; DA, BC diviſæ ſunt in 10 partes æquales; in DC ſunt translatæ ex D chordæ D10, D20, D30 &c usque ad D60, ſeu chordæ 10^{v}, 20^{v}, 30^{v}, 40^{v}, 50^{v}, 60^{v}; in latus AB vero chordæ A5, A15, A25, A35 &c ſive chordæ 5^{v}, 15^{v}, 25^{v}, 35^{v}, 45^{v}, 55^{v}. Diviſiones 5, 10; 10, 15; 15, 20 &c junguntur transverſalibus. Lateri DA alternis diviſionibus adſcripti ſunt numeri 1, 2, 3, 4. Ut uſum intelligas, pars *na* habenda eſt pro chorda 30′, ſeu $\frac{1}{2}$ gradus; 1*b* pro chorda 1^{v}, 2*c* pro chorda 2^{v} &c A5 pro chorda 5^{v}, 4*e* pro chorda 6^{v}, 3*f* pro chorda 7^{v}, 2*g* pro chorda 8^{v}, 1*h* pro chorda 9^{v}, D10 pro chorda 10^{v}; tum eodem modo in transverſali 10, 15 ex linea DA acquires chordas 11^{v}, 12^{v}, 13^{v} &c usque ad 15^{v}. Ex quo reliqua ſatis intelligi poſſunt. Si quæras, cujus arcus chorda ſit linea datæ longitudinis *kl*, crure uno circini in linea AD moto, quære, ubi in transverſali aliqua, hic in 35, 40, alterum incidat in eandem ad DC parallelam *kl*: numera inde a 35 usque ad *l* gradus in alternis parallelis integros, in ſingulis vero dimidios, habebis 2$\frac{1}{2}$; quare inferes, *kl* eſſe chordam 37^{v} 30′.

Verum obſervandum hoc loco, hanc ſcalam non eſſe accuratam, ita, ut non error etiam ad minuta pertingat, præcipue in chordis angulorum a recto parum differentium, in quibus ſunt exiguæ differentiæ chordarum. Sumuntur enim tantummodo veræ chordæ angulorum 5^{v}, 10^{v}, 15^{v}, 20^{v} &c graduum; omnium intermediorum arcuum chordæ determinantur per transverſales. At ſi veræ chordæ arcuum intermediorum in parallelas inter AB, & DC medias transferrentur, earum extrema haudquaquam rectis transverſalibus conjungi poſſent, ſed eſſent in linea curva. Unde qui pro uſu accuratiore ejus generis ſcalam ſibi parat, non utetur transverſalibus rectis ad quinos gradus ductis, ſed ſingula puncta intermediarum chordarum extrema conjunget ſingulis lineis rectis. Verum explicata ſcala chordarum redeamus ad uſum inſtrumenti Goniometrici a Mayero propoſiti.

Fig. 33 Tab III 114. Sit accipiendus (Fig 33 Tab. III) angulus POQ. Conſtituatur Fig. 31 Tab. III inſtrumenti centrum in O, ita, ut regula inferior GH cadat paullum extra crura anguli accipiendi, & firmetur in hoc ſitu ope cochleæ (Fig. 31 Tab. Fig. 32 Tab. III III) P. Tum regula ſuperiore FE cum tubulo ad ſitum FEQ adducta collineetur in Q, ut objectum appareat in linea verticali AB (Fig. 32 Tab. III) vitri plani in foco conſtituti, & accipiatur circino diſtantia punctorum D, C, quæ prope extrema F & G in regulis notata ſunt, atque ope ſcalæ chordarum quæratur angulus FOG. Immota regula inferiore, ſuperior adducatur ad ſitum *fe*, ut objectum P in verticali linea vitro inciſa appareat, rurſusque accipiatur diſtantia punctorum, ſive chorda anguli *f*OG; differentia angulorum *f*OG, FOG erit angulus quæſitus FO*f* = POQ, ut manifeſtum eſt. Poterat etiam (præcipue dum anguli majores ſunt) regula fixa GH collocari intra crura anguli accipiendi, & tum non differentia, ſed ſumma duorum angulorum foret angulus quæſitus. Extra crura cadat regula fixa, dum anguli accipiendi ſunt exigui, ut hi evitentur; ſed intra crura ponatur, dum anguli accipiendi ſunt obtuſi, ut iis acuti ſubſtituantur. Ex hoc uſu Goniometrici hujus ſane manifeſtum eſt, ut tuto in eo acquieſci poſſit, ſumme neceſſarium eſſe liberum regulæ ſuperioris, dum inferior quieſcit, motum, quod unice ex artificis accurata induſtria, & pedis ſeu fulcri firmitate pendet, cum *linea fiduciæ* deſtituto non ſit medium, quo quis certum ſe reddat, an mota regula ſuperiore verſus alterum objectum, inferior nihil e ſitu ſuo dimota ſit. Præter hoc diſplicet in iſto inſtrumento, quod paullo frequentiore uſu puncta regulis inſculpta facillime vitientur.

115. Adjungo, quæ vir celeberrimus de uſu non modo hujus Goniometrici, ſed omnium inſtrumentorum fere, quibus anguli capiuntur, addit. Duplex genus errorum eſt, quod minoribus inſtrumentis committitur; alterum pendet a collineatione minus accurata, alterum a diviſione vel inſtrumenti vel ſcalæ (ſi ceterum vitium nullum adeſſe fingamus in ipſa conſtructione inſtrumenti commiſſum, quod propterea examini ſubjectum, & notum interim pono): priori ſatis cautum eſt per tubi ſubſtitutionem in locum pinnacidiorum vel dioptrarum filarium, & quamvis etiam aliquis adhuc reſideat, una cum altero, qui ex imperfectione inſtrumenti (cujus diviſiones non ſatis accurate diſcerni poſſunt, dum de uno, alterove minuto agitur) naſcitur, ſequente anguli metiendi multiplicatione mirum in modum minui poſſunt.

Fig. 34 Tab. III
Fig. 31 Tab. III
Fig. 32 Tab. III

Accipiatur, ut prius (114) angulus POQ (Fig. 34 Tab. III); dein laxata cochlea P (Fig. 31 Tab. III) adducatur regula ſuperior cum tubulo ſuo ad ſitum O*e*Q, ut objectum Q appareat in verticali linea vitri AB (Fig. 32 Tab. III), regula autem fixa in *hog*. Hoc ſitu firmetur denuo cochlea regula *hg*, & tubulus e ſitu *fe* reducatur ad objectum alterum P ad ſitum talem, ut P ſit in verticali vitri, ac menſuretur angulus *god*, qui jam continebit 2POQ + *e*OB. Laxetur rurſus cochlea P, ut tubulus ſit in ſitu OQ; regula fixa ex *h*O*g* tranſferatur in *k*O*i*, in quo ſitu firmetur, tubulo cum ſuperiore regula ad *cd* reducto; accipiatur chorda *id* (vel ſi angulus *doi* ſit obtuſus) ejus ſupplementi chorda *ic*; habebitur 3POQ + *e*OB; idem repetatur, quoties expedire videtur. Evidens eſt, ſi jam ab angulo ultimo accepto (qui eſt multiplum anguli quæſiti, v. g. triplum, plus angulo conſtante *e*OB) ſubtrahatur angulus conſtans, & dividatur per numerum, qui indicat, quoties tubulus ex ſitu OQ ad ſitum O*d*P adductus eſt, dividi una errorem in ejus anguli acceptione commiſſum, qui proinde eo magis minuitur, quo majus ejus multiplum accipitur.

116. Liceat hoc loco duo quærere: *primo* an hujusmodi multiplicatione anguli, in ſingulis acceptionibus non poſſint facile committi novi errores, ſi defectu lineæ fiduciæ neſciam, an regula fixa immota perſtiterit, dum altera movebatur? id ſi contingeret, errores eſſent omnes in eandem partem, ſeu omnes per defectum peccarent, & error primum commiſſus non minueretur. *Secundo.* An non imminutio ſecurius obtineatur, ſi idem angulus POQ, de novo ſemper, vel directis dioptris, vel alio ſemper ſumpto angulo conſtante *e*OB, menſuretur, & ex omnibus accipiatur medium Arithmeticum, hoc eſt, addantur omnes anguli acquiſiti in unam ſummam, & hæc dividatur per numerum indicantem, quoties angulus acceptus ſit? hoc ſi fiat, videtur mihi æque error minui. Niſi forte quis dicat, in multiplicatione anguli methodo a Mayero indicata inſtituta, & poſita ſufficiente firmitate inſtrumenti, ne regula fixa cedat, accipi ſemper alias, aliasque chordas, remotiores ab illa, quæ ſubtenditur angulo primo accepto, ideoque ſi diverſis vitiis eæ laborent, poſſe propterea errorem minui. Quanquam hac re meum mihi dubium ſatis ſolvi non videam, nolo tamen diutius immorari.

Fig. 28 Tab. II

Fig. 36 Tab. III

117. Tubuli optici etiam aſtrolabiis, de quibus primo loco egimus, aptari poſſunt dioptrarum loco: ille nempe (Fig. 28 Tab. II), qui dioptris fixis AB ſubſtituitur, figendus erit in parte averſa, ſeu infra regulam AB, alter ſupra regulam EH, ita ut axis tubuli ſit omnino parallelus cum acie EO, quæ gradus arcus accepti abſcindit, uti alterius fixi axis congruere debet cum AB. Licebit id explorare, ſi conſtituatur centrum inſtrumenti C (Fig. 36 Tab. III) in eadem recta cum duobus objectis valde diſſitis P, Q, & directo tubulo fixo *ed* verſus Q, accipiantur ope objectorum circumſitorum, quæ deeſſe vix poſſunt, varii anguli inde ab *e*, usque ad *d*, ubi objectum P per tubulum mobilem videtur; ſi ſumma omnium horum angulorum fuerit 180° quam proxime, axes tubulorum erunt rite poſiti. At ſi v. g. axis tubuli mobilis DCE aberret a ſitu debito ACB, anguli minores erunt, & objectum P jam apparebit in tubulo *de*, dum acies regulæ mobilis habebit ſitum *a*C*b*. Contrarium fieret, ſi AB eſſet axis tubuli mobilis, & DE acies regulæ. Alia ratione in idem inquiri poteſt, ſi nempe actu menſuretur aliqua diſtantia duorum objectorum, & calculetur, ſub quo angulo ex dato loco apparere debeat; tum adhibito inſtrumento is ipſe angulus exploretur, utrum cum calculo congruat. Hoc ſi ſæpius fiat, variique anguli determinentur, aberratio axium tubulorum facile corrigetur. Apparet autem, quæ de hoc examine ſitus axium diximus, applicanda quoque eſſe ſitui dioptrarum, vel pinnacidiorum.

118. Sed paullo accuratius in quantitatem erroris ex collineatione oriundi inquirendum eſt. Laudatus D. Mayerus lineas parallelas nigras, quarum latitudo erat $\frac{2}{10}$ unius lineæ, relictis intervallis albis ejusdem latitudinis, in charta fecerat, eoque removit oculum, donec apparerent confuſæ. Ex diſtantia oculi, facili calculo determinavit, ibi $\frac{2}{10}$ unius lineæ ſubtendere angulum 2′ 54″. Unde concludit, quæ ſub angulo 2′ minore apparent, non amplius diſtincte cerni. Hinc qui dioptris utuntur, in angulis accipiendis nunquam ſecuros eſſe de 2′. Cum ope tuborum objecta augeantur (& eſt tuborum

borum augmentum proxime in ratione ſubduplicata longitudinis) in ratione augmenti minuunt propterea hunc errorem. Verum judico, magnum eſſe diſcrimen inter dioptras; ſæpius dioptra, cui oculus applicatur, (Fig. 37 Tab. III) CD, linea tenui AB pertuſa eſt, altera eidem oppoſita EF, per quam transſpicitur, eſt filaris, hoc eſt, quadrangulum apertum, quod tenui filo GH in medio ſecatur. In hoc caſu agitur de diſcernendo hoc unico filo, utrum objectum aliquod, v. g. apicem alicujus turris, vel arboris &c accurate ſecet, id, quod tam difficile non eſt, cum oculus ſatis accurate diſcernat, an ex alterutra fili parte, plus, minusve objecti appareat, quod ſæpius experiundi occaſionem habui, cum meæ inſtitutioni creditos in ejusmodi menſurationibus exercerem. Si objectum ſit tenuius, quam ut utrinque extra filum appareat, tum vero (modo non per totam fili longitudinem protendatur, quod non niſi rariſſime contingere poteſt) facillime advertitur ex inæquabili craſſitudine, quam filum habere videtur, ſi collineatio non ſit accurata. Illud modo curandum, ut ne ſectio AB dioptræ ocularis ſit vel nimis tenuis, vel nimis lata: in primo caſu diffractio lucis efficit majorem umbram, quam ut a filo ſatis diſtinguatur: in altero parallaxis eſſe poteſt. Si hæc fiſſura mediocris ſit, oculus aſſuetus, umbras diffractionis ſatis commode a filo alterius oppoſitæ dioptræ diſtinguit.

Fig. 37 Tab. III

119. Ut ita ſentiam, eo adducor, quod longe difficilius ſit, partes minutæ alicujus totius (quales conſtituunt apud Mayerum lineæ nigræ albas intercipientes) diſcernantur, quam ut tenuis aliqua linea in fundo æquabili (qualem præſtat dioptræ filaris EF lata apertura) diſtinguatur, quæ ad ſpatium multo longius, & ſub angulo etiam pauciſſimorum ſecundorum (ut apud Käſtnerum vollſtändige Optik, Jurins-Abhandlung vom deutlich, und undeutlich Sehen, obſervat §. VI) videri poteſt. Haud negem ſane, errores collineationis facilius per tubulos evitari; verum tanti erroris periculum ſubeſſe etiam eo caſu, quo ſpatium vacuum dioptræ EF ſatis illuminatum eſt, perſuadere mihi non poſſum. Aliud foret, ſi objectum obſcurum, ſi radii viſuales terminentur in loco itidem obſcuro, uti in prato, vel monte diſſito; tum enim lubens do, in collineatione per dioptras etiam majores errores committi poſſe. Sed enim tum repetenda menſuratio ſæpius, ſi quid certi erui debet, quæ tum ne quidem per tubulos tam exacta erit.

120. Filum, cujus craſſitudo eſt 0,0058 digiti, in diſtantia 10 digitorum ſub angulo 2′ apparet (ut patet ſi fiat $206264'',8 : 120'' = 10$ dig. : x, quæ proportio ope Logarithmorum expedite fit). Fieri poteſt (immo reapſe frequenter contingit) ut aliquod objectum in magna diſtantia, v. g. 1000 pedum, aut etiam minore videatur ſub angulo minore, proinde tegatur non ſolum a filo, ſed etiam non poſſit apparere moto aliquantulum in utramque partem filo. In tali caſu diſcerni nequit, utrum dioptra ſit accurate diſpoſita, an vero paullum augeri, an minui debeat angulus. Si radii viſuales non terminentur ad oppoſitum aliquem montem, ſed ad cœlum liberum, objectum, cujus diameter 3,49 digitorum ultra horizontem eminens adhuc facillime ſub angulo 1′ videtur ex diſtantia 1000 pedum, ſeu 12000 digitorum. Itaque

mota dioptra etiam per integrum minutum, manebit objectum adhuc a filo tectum, ideoque in collineatione error 1' vix vitabitur. Ex hoc autem deducitur, quantum fieri poteſt, fila eſſe tenuia pro dioptris adhibenda.

121. Si fila dioptrarum ſint ſatis tenuia, in minoribus inſtrumentis errores majores naſcuntur ex diviſione in graduum partes non ita parvas. Nam adhibito etiam vitro auctorio, ſi acies regulæ non accurate, per aliquam diviſionem tranſeat, diſcerni vix poteſt, quotam partem ex ſequente diviſione abſcindat; ut ſi diviſio perveniat ad dena minuta, ſat quidem commode medietas ejusmodi diviſionis diſcernitur, at partes minores vix ſatis diſtingui poſſunt. Unde æſtimatio ocularis facienda tantummodo eſt, quæ facile in duorum (quin etiam 3) minutorum errorem nos inducit. Ceterum in hoc genere illud veriſſimum eſt, oculum longiore uſu in hiſce obſervationibus exercitatum, ſæpe ſat magna accuratione diſtinguere, quæ alius haud amplius diſcernit. Supereſſent ſane multa adhuc in Goniometricis inſtrumentis artificum induſtria, & ingenio perficienda, modo non deeſſent, qui utiliſſime collocatæ operæ dignum ſemper exhibeant pretium; aut illorum emptorum minor ſi foret numerus, qui externo illo nitore inſtrumentorum contenti eorundem ſæpe artificum negligentiam alunt, qui, cum vident, facili labore ſe ſibi, unde vitam ſat honeſte tolerent, parare poſſe, parum de accuratione, minus de ulteriore perfectione ſolliciti ſunt.

122. Supereſt ut aliquid etiam de menſula, quam Prætorianam vocant, & frequentiſſimum uſum habet, dicamus, quanquam operationes, quæ ejus ope inſtituuntur, non tam Trigonometricæ, quam practicæ quædam Geometriæ applicationes dicendæ ſint. Et quidem menſula ipſa ope limbi exemptilis charta munda obtegitur, atque tribus pedibus circa axes verſatilibus fulcitur, ut ad ſitum omnem, pedibus magis, minusve explicatis, conſtitui poſſit. Præcipuum organum, quod adhibetur, eſt regula dioptrica. Eſt mihi ejusmodi ad manus (Fig. 38 Tab. III), cujus longitudo AB 2 ped. 4,6 digit. diſtantia dioptrarum CD 26,2 dig. altitudo dioptrarum CG 8,5 dig. Utraque dioptra duplex eſt: CG ſuperiore parte habet aperturam 3,2 dig. longam, & 0,02 digit. latam *np*, cui opponitur in altera DH dioptra filaris *rs* ejusdem longitudinis, ſed 0,5 digit. lata, per cujus medium ducta eſt chorda fidium ſat tenuis. Inferne in CG ſimilis aperturæ eſt dioptra filaris *om*, cui in DH reſpondet fiſſura *tu* ejusdem longitudinis, ſed latitudinis 0,02 digiti, ut ſcilicet tam ad B, quam ad A conſtitui commode oculus poſſit, illic quidem tranſpecturus per *tu* & *mo*; hic per *np*, & *rs*. Fila dioptrarum, & fiſſuræ accurate ſunt in acie regulæ EF producta, ipſæque dioptræ ad planum regulæ AEFB normales. Sunt item circa axes prope C & D verſatiles, ut utraque in planum regulæ demitti queat, dum extra uſum in capſam regula reponitur. Ipſi dioptræ DH duæ aliæ minores LKIH, QPOB connexæ ſunt, quarum illa filaris eſt, & latæ aperturæ; hæc pinnacidium, ſeu fiſſura *zy* tenui prædita, quæ extra uſum, quem inferius indicabimus, cum eodem modo circa axiculos per HL, BQ transmiſſos verſatiles ſint, plano dioptræ majoris HD applicatæ relinquuntur.

Fig. 38
Tab. III

123. Alii

123. Alii in hujus generis regulis (quæ variæ magnitudinis eſſe poſſunt) utrinque in dioptris GC, DH tantummodo adhibent fila. Verum, ut judicent, an debita regula verſus objectum diſpoſita ſit, dum v. g. oculus ex B per A tranſpicit, a dioptra DH aliquantum recedere debent (cum filum in nimis magna vicinia cerni non poſſit diſtincte) & videre, an utrumque dioptrarum filum cum objecto ſit in eadem recta, ſive an filum dioptræ vicinioris accurate obtegat filum remotioris, quod per objectum tranſire apparet. Hunc uſum in regula ſuperius deſcripta præſtat etiam dioptra filaris brevior LKIH prope extremum LH dioptræ DH majori connexa, & itidem circa axiculum per HL tranſeuntem verſatilis. Dioptra enim DH plano regulæ DFEC applicata, erigitur altera LKIH ad ſitum verticalem, in qua longitudo fili *qx* eſt 0,8 digiti, quod per *mo* transſpicienti obtegi debet, & ſimul objectum ſecare. Denique ſuperficiei regulæ EF — DC variæ ſcalæ inſculpuntur, uti in noſtra reperiuntur pes Viennenſis, cujus digitus in 60 partes diviſus eſt, & pes militaris.

124. Dum dioptræ debite verſus objectum directæ ſunt, juxta aciem EF ex vertice anguli metiendi, in quo acicula defigitur, quam regulæ acies ſemper accurate tangat, ducitur ceruſſa linea: tum verſata eadem acie regulæ circa aciculam, collineatio fit verſus alterum objectum, novaque ducta linea habetur angulus. Communiter ſumitur, ab oculo exercitato raro committi errorem 2′ majorem in collineatione; verum cum fila craſſiuſcula ſint, etiam hinc (119) errores augeri poſſunt, præterquam quod, niſi maxima adhibeatur cura, in ducendis lineis vel craſſioribus, vel regulam aliquantulum trudendo, multo magis aberrari poſſit. Cavendi ſunt in menſurationibus anguli acuti nimium. Nam cum omnis linea aliquam latitudinem habeat, interſectio binarum, quæ verticem anguli conſtituit, ſatis diſcerni nequit, uti patet (Fig. 36 Tab. III) in angulo ACD; ex quo deinde fit, ut non debita Fig. 36
linearum longitudo in ſcalam transferatur, atque ſi particulæ ſcalæ, quæ pe- Tab. III
dibus ſubſtituuntur (uti videbimus) ſint exiguæ, ſæpe pedibus etiam aberretur a vera laterum metiendorum longitudine.

125. Ut regula menſoria exploretur, ſeligatur locus quiſpiam medius inter duos muros parallelos (ſaltem proxime) alicujus ambulacri, aut inter duo ædificia, aut ſaltem talis, ut utrinque conſtitui poſſit tabula alba circiter 6 vel 7 pedes longa; exempli cauſa pono haberi ambulacrum 70, aut 75 pedes longum, utrinque muro terminatum. In utroque muro adhibita plumbagine in recta verticali fiant bini circelli nigri tres ſaltem lineas habentes in diametro (tum enim in diſtantia 36 pedum apparebant adhuc ſub angulo 2′), quorum centra diſtent 5 vel 6 pedes. Aut ſiquidem commodius videatur, retinaculo utrinque fixo ſuſpendantur pondera e funiculis diametri 3 vel quatuor linearum, longitudinis minimum 5 aut ſex pedum, qui debite tenſi, & ab oſcillationibus liberi verticalem ſitum exacte ſervent. Menſula in medio conſtituta tribuatur ei talis ſitus, ut in murum collineanti aut circulorum nigrorum centra accurate per filum dioptræ ſecari, aut id cum funiculo pondus ſuſtinente congruere videatur. Regula in eodem ſitu relicta idem videri de-

debet collineanti in murum oppoſitum. Quod ſi non contingat, dioptræ non ſunt in eodem plano, ideoque corrigendæ erunt. At ſi id repetita collineatione obtineatur, ducatur juxta aciem regulæ recta tenuis in plano menſulæ, & converſa regula eidem lineæ applicetur, ut acies congruat: tum per dioptras alias in utrumque murum collineetur. Si vel circuli accurate ſecentur, vel funiculi cum filis congruant, dioptræ rite ſunt diſpoſitæ. At ſi fila videantur funiculos interſecare, aut rectam circulorum centra conjungentem, id indicio erit, dioptrarum planum non eſſe verticale ad planum regulæ, ideoque dioptris correctio foret adhibenda. Denique fieri poteſt, ut ſit quidem dioptrarum planum perpendiculare ad planum regulæ, ſed non tranſeat per ejusdem aciem, quod quidem vitium tolerabile eſt, cum non mutet magnitudinem angulorum ope regulæ acceptorum, ſed tantummodo vertices extra planum dioptrarum conſtituat. Ut autem exploretur id ipſum, ſi planum dioptrarum non tranſeat per aciem regulæ, evidens eſt, converſa regula, utrumque circulum fore in linea parallela ad filum dioptrarum. Unde adeſſe debet examinis adjutor, qui prope utrumque circulum deſignet in muro duos alios circellos, vel notas quaslibet in eadem diſtantia verticali, qui accurate obtegantur a filo dioptræ. Si horum novorum circulorum, ſuperioris & inferioris, a correſpondentibus fuerit eadem centrorum diſtantia, & quidem in utroque muro, concludi poterit, planum dioptrarum eſſe parallelum aciei regulæ; at ſi in uno muro fuerit quidem diſtantia par, non tamen eadem, ac in altero, planum dioptrarum nequit eſſe parallelum aciei regulæ, & niſi hoc vitium tolleretur, anguli ope regulæ accepti evaderent erronei. Quantitas erroris calculo ſubjacet, ſi nempe fiat: ut diſtantia menſulæ ad differentiam diſtantiarum circulorum per fila dioptrarum tectorum a circulis ab initio factis, & qui tegebantur in prima regulæ collocatione; ita eſt radius ad minuta ſecunda reductus ad terminum quartum, qui erit error anguli, quando per eadem extrema regulæ ſit collineatio: ſi per oppoſita collineetur, error eſt contrarius.

De majoribus inſtrumentis, uti ſunt quadrantes, quorum radii ſaltem 2 pedum, & qui tubis atque micrometris inſtruuntur, hoc loco non agimus. Quibus maxime methodis eorum accuratio examinetur, qui cupit, videre poterit apud Aſtronomos practicos, & in illorum præclariſſimis operibus, qui gradus diverſos in diverſis meridianis terreſtribus dimenſi ſunt. Præ ceteris commendandum eſt opus R. P. Joſ. Liesganig S. J., qui maximo judicio, & longo uſu firmato hac in re optimum inter methodos ſelectum fecit.

ARTICULUS III.

Reſolutio practica triangulorum.

126. Propoſuimus poſtremo ſuperioris Capitis Articulo Problemata Trigonometrica, & oſtendimus, qua ratione ex datis trianguli partibus

bus reliquæ inveniri calculo poſſint. Videndum modo, quomodo ea ipſa reſolutio executioni danda ſit, poſtquam ſufficientem inſtrumentorum, quæ adhibenda ſunt, notitiam tiro acquiſivit. Unde totum hoc argumentum reſolutione practica Problematum, quæ ſubjungimus, comprehendemus.

127. PROBLEMA I. Metiri diſtantiam duorum locorum A, B, quorum unus (B) tantummodo accedi poteſt. (Fig. 39 Tab. IV). Fig. 39 Tab. IV

RESOL. I. Ope menſulæ. Conſtituta commoda aliqua ſtatione C, ex qua uterque locus A, B conſpici poſſit, defigatur in C pertica (niſi forte jam adſit aliquod alterum objectum ex B aſpectabile) ope perpendiculi ad ſitum verticalem, & ſiquidem diſtantia fuerit aliquanto major, appendatur eidem tabula nigra cruce alba, vel tabula alba cruce nigra diſtincta, ad altitudinem fere menſulæ: hujusmodi tabulæ mobiles plures ad manus ſint, cum frequentior earum in menſurationibus ſit uſus. Conſtituatur menſula in B, & defixa non procul a limbo acicula, applicetur ei regula dioptrica, qua collineetur in A, ducaturque juxta regulæ aciem in charta linea tenuis B*a* indefinita. Eodem modo immota menſula regula dirigatur verſus C, ut aciculam B tangat, & collineetur in C, rurſusque ducatur altera linea indefinita B*c*. E puncto B, in quo acicula defixa eſt, demittatur in humum perpendiculum, quod commode fit ope forcipis CABD (Fig. 40 Tab. IV) cujus ſuperius crus in acumen C deſinit, inferius ad D, infra C, foramello pertuſum appenſam habet plumbaginem DE: diſtantia utriusque cruris CD eſt fere craſſitudini menſulæ æqualis: applicato itaque cuſpide C brachii CA ſupra menſam ad punctum B, perpendiculum DE eidem infra menſam applicabitur. In eo loco ſoli, in quem cadit perpendiculum, defigatur remota menſula alia pertica cum ſua tabula, uti prius de ea, quæ in C collocata fuit, diximus, tabulæ plano ſtationem C ſpectante. Tum vel ope decempedarum, vel catenæ menſuretur diſtantia BC (Art. I hujus Capitis). Ubi ad C perventum eſt, numero pedum, vel orgyarum inventarum æqualis numerus partium a ſcala Geometrica transferatur in menſula ope circini ex B verſus *c*, & puncto huic applicato brachio AC forcipis conſtituatur ita menſula, ut perpendiculum E cadat in C, ubi antea pertica defixa fuit. Fixa acicula in C, applicetur regula dioptrica lineæ C*b* in menſula deſcriptæ, & moveatur ita menſula (quin tamen punctum C loco cedat), donec per dioptram videatur objectum B, vel pertica illic defixa. Hæc *linea fiduciæ* dicetur, quod tum demum fidere poſſimus ſive angulo ABC, ſive alteri ACB, ſi intelligamus, nos a linea BC non exerraſſe. Denique linea fiduciæ rite conſtituta, regulaque circa aciculam C converſa, quin menſula ullum inde motum recipiat, collineetur ex C verſus A, atque ducatur linea C*a*, donec prius jam in ſtatione B deſcriptam *ba* interſecet. Capiatur intervallum *ba* circino, & applicetur eidem ſcalæ Geometricæ, ex qua acceptæ ſunt partes lineæ *b*C, numerus partium ſcalæ convenientium lineæ *ab* erit numerus pedum, vel orgyarum diſtantiæ BA. Ratio manifeſta eſt. Cum enim angulus ABC ſit idem cum angulo *ab*C, ob communem angulum ad C ſunt triangula ABC, *ab*C ſimilia; hinc *b*C : *ba* = BC : BA.

Fig. 40 Tab. IV

128. OBSERVA. Sæpe contingit, ut ſi pedibus lateris BC ſubſtituantur integræ lineæ ſcalæ, linea *b*C in menſula nimis magna fiat, ut triangulum excurreret extra limbos; ſi autem ſubſtituantur decimæ lineæ, triangulum *ab*C fieret nimis parvum. In tali caſu, ubi apta diviſio in ſcala non adeſt, quæ commode adhibeatur; ſumi poterit quiscunque numerus partium ſcalæ pro *b*C. Exemplum: ſit inventa BC 224 pedum; ſumantur 50 lineæ pro *b*C; & peracta menſuratione inveniatur $ab = 82.3$ lineis. Fiat iſta proportio 50 : 82,3 = 224 : 369; erit longitudo BA proxime 369 pedum. Facilius erit, adhibere dimidium numeri inventi, ſi partes ſcalæ videantur juſto majores, vel aliam notam aliquotam, ut deinde numerum æqualium partium lateri *ab* reſpondentium tantummodo opus ſit duplicare, triplicare &c.

129. SCHOL. Quæ de defixione perticarum, appendendis tabulis, demisſione perpendiculi in hac reſolutione monuimus, in ſequentibus fieri ponemus, neque repetemus ea amplius ſine peculiari neceſſitate.

130. RESOL. II. Ope Goniometrici. Electa commoda ſtatione in C, atque ſigno illic collocato, conſtituatur centrum Goniometrici (quod itidem fit demiſſo inde perpendiculo) in B, atque dioptræ fixæ in C dirigantur, ut ſignum C in filo verticali videatur. Regula mobilis dirigatur verſus A, donec in ejus dioptris A debite videatur, & numerentur gradus arcus inter utramque regulam intercepti, habebitur angulus ABC. Remoto Goniometrico, atque ſigno in B collocato menſuretur diſtantia BC, atque numerus pedum, orgyarum &c adſcribatur accurate. Tum centro Goniometrici in C poſito per regulam fixam collineetur ex C in B, per mobilem vero ex C in A, ut acquiratur angulus ACB; dabitur hoc ipſo tertius CAB. Unde fiat *ſin.* A : *ſin.* C = BC : AB.

Fig. 41 Tab. IV 131. PROBLEMA II. Metiri diſtantiam duorum locorum A, B (Fig. 41 Tab. IV) quorum neuter accedi poteſt.

RESOL. I. Ope menſulæ. Eligantur duæ ſtationes commodæ D, E; & collocata menſula in D, collineetur verſus E, A, & B, ductis indefinitis D*e*, D*a*, D*b*. Menſuretur baſis DE; & numerus pedum transferatur in partibus ſcalæ ex DE, ut *d*E ſit tot. partium ſcalæ, quot DE continet pedes. Tum menſula in E collocata (juxta 127) collineetur in D, ductæ E*b*, E*a* abſcindent puncta *b*, *a*; horum diſtantia in ſcalam translata indicabit numerum pedum AB.

Sunt enim triangula BED, *b*E*d* ob angulos ad E, & *d* vel D eosdem ſimilia. Eodem modo ſimilia ſunt ADE, *ad*E; hinc ſimilia quoque eſſe debent triangula AEB, *a*E*b*, & totum trapezium *a*E*db* trapezio AEDB, & maniſeſtum eſt.

RESOL. II. Ope Goniometrici. Ex ſtationibus D, E accipiantur iidem anguli ADE, ADB; & AEB, BED. Quia in triangulo EBD dantur tres anguli (duo enim BDE, BED accepti ſunt) cum latere ED, quod menſuratum eſt, reperitur EB. Eodem modo ob datos angulos, & latus ED, in triangulo AED invenitur AE. Unde in triangulo AEB habentur duo latera EA, EB cum angulo intercepto, proinde (88) latus tertium AB inveniri poteſt.

132. OBSERVA. Quando objecta non ſunt in eodem plano (ſaltem ad ſenſum) horizontali, multum intereſt inter earum diſtantias veras, & diſtantias horizontales. V. g. objectorum A, B (Fig. 42 Tab. IV) diſtantia vera Fig. 42 Tab. IV apparet ſub angulo ACB, horizontalis ſub angulo DCE. Si inſtrumenti ſitus ſit horizontali parallelus, & objecta per dioptras appareant in filis verticalibus, acquires angulum DCE, non vero ACB. Si poſteriorem deſideres, oportet, ut utrumque objectum appareat in plano inſtrumenti, ſive trianguli BCA; quare tum inclinandum erit hoc planum inſtrumenti, atque ita dirigendum, ut objecta appareant in punctis filorum v. g. mediis, vel aliis æqualiter ab extremis diſtantibus. Conſultum eſt, in tali caſu adhibere fila ſeſe decuſſantia ad æqualem in utraque dioptra diſtantiam, & loco fiſſuræ longioris, vel pinnacidii, exiguum foramen circulare, cui oculus applicetur. Verum uſus longiorum & altiorum dioptrarum eſt frequentior, dum regio aliqua exhibenda eſt in charta, cum ad id genus delinationes topographicas non anguli BCA, ſed horizontales ECD requirantur. Unde ſi foret tanta altitudo objectorum A, B ſupra horizontale planum, per dioptras *tu*, *mo* (Fig. 38 Tab. Fig. 38 Tab. III III), regula AB in ſitu horizontali poſita videri nequirent, tum vero uſus foret minorum illarum dioptrarum QPOB, LKIH, quæ longiori DH innexæ ſunt. Nam (Fig. 43 Tab. IV) dioptra DH ſub tali angulo HDC ad planum Fig. 43 Tab. IV regulæ EFAD inclinatur, ut per rimam *zy* dioptræ QPO tranſpicienti objectum appareat in filo *qr* dioptræ oppoſitæ LKIH. Jam cum *zy*, *qr* (ex regulæ conſtructione) maneant in eodem plano verticali, in quo eſt acies regulæ EF, evidens eſt, acquiri angulum in horizontali plano DCE (Fig 42 Fig. 42 Tab. IV Tab. IV), ſi in hunc modum adhibeatur regula dioptrica verſus objecta A, B directa. Sed enim ſi ejuſmodi regula compoſita ad manum non ſit, vel ſi Goniometrico utaris, ut obtineas angulum (Fig. 42 Tab. IV) BCA, is calculo Fig. 42 Tab. IV reduci debet ad horizontalem ECD. Nam (ut e ſubjectis Problematis patebit clarius) metienda eſt utraque altitudo AD, BE non ſolum accepto angulo BCA, ſed etiam angulis BCE, ACD. Reſoluto triangulo BCA dabitur latus AB, & datis altitudinibus AD, BE, habetur earum differentia AF; tum ſi cogitetur recta BF ad ED horizontalem parallela, in triangulo rectangulo ABF, datis BA, AF invenietur BF = ED. Et quoniam ex reſolutione triangulorum rectangulorum ADC, BEC obtinentur etiam latera DC, EC, in triangulo horizontali EDC dantur tria latera, & proinde (89) anguli inveniri poſſunt.

133. Hæc reductio angulorum BCA obſervatorum ad planum horizontale, quando latera ſunt majora, & notabilis diverſitas altitudinum locorum B, A, C, alias fit ope Trigonometriæ ſphæricæ; ſed in minoribus triangulis methodus expoſita ſufficit. Quod ſi contingeret, nullam, quæ ſentiri poſſit, differentiam altitudinum AD, BE reperiri, ipſa diſtantia AB æqualis foret lateri ED, ut per ſe manifeſtum eſt. De reductione angulorum ad horizontem nobis inferius ſermo redibit.

134. PROBLEMA III. Altitudinem acceſſam KI (Fig. 44 Tab. IV) metiri. Fig. 44 Tab. IV

RESOL. Conſtituatur inſtrumentum Goniometricum in ſitu verticali in diſtantia tanta, ut nullus angulus fiat nimis parvus, ita, ut regula fixa AB ſit in ſitu horizontali, quod obtinetur vel e centro C demiſſo perpendiculo CG e tenui filo ſuſpenſo, quod gradum 90mum in limbo abſcindat, vel applicata
Fig. 22 Tab. II ad BA libella aquatica (Fig. 22 Tab. II), donec bulla aerea in ejus medio quieſcat.

Sed rectius videtur adhiberi perpendiculum, cujus filum limbum inſtrumenti proxime attingere debet, non tamen prorſus, ut ejus motus adhuc in utramque partem liber ſit, qua obſervatione præcavetur inclinationi plani inſtrumenti in latera. Inſtrumento rite conſtituto accipiatur angulus ACD = KCH. Ex C demiſſo perpendiculo in L menſuretur diſtantia LI = CH. Habebitur in triangulo rectangulo ad H, KCH, & latus HC, e quibus invenitur KH, atque addita altitudine inſtrumenti CL = HI, tota altitudo.

135. OBSERVA. Pro altitudinibus metiendis uſus menſulæ eſt incommodus, cum in ejus plano, ſi verticaliter erigatur, difficulter regulæ dioptricæ applicentur, & lineæ ducantur. Forte commodius adhiberetur regula eo
Fig. 43 Tab. IV ſitu, quem habet (Fig. 43 Tab. IV), ut nempe facta collineatione per dioptras minores, demittatur in planum regulæ EF ex H perpendiculum, & notetur puncti, in quod cadit, diſtantia a D; lineis his DH, diſtantia perpendiculi a D, & ipſa altitudine perpendiculi ex H usque in planum regulæ, in ſcalam translatis, per ſimplicem proportionem inveniri poſſet utcunque alti-
Fig. 44 Tab. IV tudo quæſita, ſi præterea menſuretur baſis LI (Fig. 44 Tab. IV) ſimilem proportionem inſtituimus ſuperius (128).

Fig. 44 Tab. IV 136. PROBLEMA IV. Metiri altitudinem inacceſſam KI. (Fig. 44 Tab. IV.)

RESOL. Pateat ad KI liber acceſſus in eadem recta *l*LI usque ad L. Menſuretur in ſtatione *l* angulus *acd* = K*c*H, inſtrumento Goniometrico in ſitum verticalem erecto. Inde menſuretur baſis *l*L = *c*C. Et denuo verticaliter conſtituto Goniometrico accipiatur angulus ACD. In triangulo KC*c* habebuntur tres anguli (ob acceptos KC*c*, KCH, qui eſt ſupplementum anguli KC*c*) & latus C*c*; hinc invenietur KC. Tum datur in triangulo rectangulo KHC angulus ad C & latus CK, reperieturque KH, ſeu addita CL, KI.

137. OBSERVA. Si ſtationes ſumantur in eadem recta IL*l*, facile contingit, ut anguli ad *c* obveniant nimis parvi. Quare aliter ſolvetur Problema ſecurius in hunc modum.

Fig. 45 Tab. IV Eligantur duæ ſtationes C, D (Fig. 45 Tab. IV), & plano Goniometri ita conſtituto, ut ſit in plano trianguli CKD obliquo, accipiantur anguli KCD, KDC; dabitur etiam tertius CKD, & menſurata baſi NM = CD, reperietur latus DK.

Poſtquam in ſtatione D captus eſt angulus KDC, tribuatur Goniometrico ſitus verticalis (134), & menſuretur angulus KDH, habebitur in triangulo verticali KDH, præter rectum ad H, angulus KDH, & latus KD; quare invenietur KH, & KI.

138. Facile intelligitur, quæ de metiendis altitudinibus dicta ſunt, applicanda eſſe etiam profunditatibus; uti ſi quæreretur profunditas alicujus foſſæ, cujus latitudo vel jam nota eſt, vel ex duplice ſtatione inveniri poteſt. Quamvis dimenſio valde magnarum diſtantiarum accurata fieri non debeat, minoribus adhibitis inſtrumentis; ut tamen tirones aliquam ideam acquirant operationum majorum, libet ſequens Problema addere.

Fig. 45 N. 1 Tab. IV

139. PROBLEMA V. Diſtantiam duorum locorum A, B (Fig. 45 N. 1 Tab. IV) valde magnam metiri, ſi locus A ex B conſpici poſſit.

RESOL. Adhibeantur plura triangula ACD, DCE, ECF, FED, quæ ſatis accurate ope minoris Goniometri reſolvi poſſint. Si AB fuerit major, numerus triangulorum major eſſe debebit, qui minor eſſe poterit, ſi AB non fuerit tam magna. Stationes D, C, E, F ita, ſi fieri poſſit, eligantur, ut fere triangulorum latera per AB ſecentur. Præterea caveatur, ne anguli nimis parvi prodeant. Tota figura conjiciatur ruditer in chartam, ne inter adſcribendum error admittatur.

In ſingulis triangulis, ſi fieri poteſt, capiantur omnes tres anguli, ut pateat, quantum eorum ſumma vel deficiat, vel excedat 180°, atque ſciatur, quantum dimenſioni tribui poſſit. Quod ſi fieri nequeat, ſaltem duo anguli ſumendi ſunt. Præterea menſuretur v. g. in triangulo ACD latus AD. Ob datos angulos reperientur latera AC, CD. In triangulo CDE habito latere CD, & angulis, invenientur DE, CD; tum ex angulis & CE, quærantur latera CF, FE trianguli CEF, & tandem noto jam FE, & angulis, latera FB, BE poſtremi trianguli. Quoniam ponitur, terminum A ex B videri poſſe, menſurentur, qua fieri poteſt accuratione, anguli CAB, DAB; FBA, EBA. Concipiantur in rectam AB ex E, D (vel ex F, C, aut ex omnibus ſimul) demiſſa perpendicula EH, DK, vel etiam FG, CI. In triangulo ad H rectangulo BHE datur angulus HBE, & latus EB. Quare reperiri poſſunt BH, & HE. Eodem modo in triangulo rectangulo AKD ob datum angulum KAD, & latus AD, invenitur AK, & KD. Habitis perpendiculis KD, HE, datur eorum differentia nD, & ſi concipiatur nE ad AB parallela, in triangulo rectangulo ad n, nDE dabitur latus DE, & latus nD, reperiturque $nE = KH$. Partes AK, KH, HB conſtituunt longitudinem quæſitam AB. Idem inveniri poterat per triangula BFG, ACI, CFo. Si forte plura ſint perpendicula, poteſt eorum differentia etiam ſic reperiri: in triangulo ADK datur angulus ADK, complementum anguli KAD; hoc ſubtracto e ſumma angulorum ACD, CDE notorum, relinquitur angulus KDE, vel nDE, & ex hoc, & latere DE reperitur $nE = KH$.

140. Si rectificare (ut ajunt) velis tuas operationes, metire præter latus AD, etiam in poſtremo triangulo aliquod latus, velut FB, & inde incipe calculum, ut devenias ad latus AD, quod ſi ejusdem magnitudinis præbuit calculus cum actuali dimenſione; & viciſſim initio ſumpto ex ACD reperias FB longitudinis ejusdem cum vera, ſecurus eſſe poteris de bonitate operationis; aut certe e magnitudine diſcriminis facile conſtituere poteris, quantum in ea confidi poſſit.

Ceterum in tali operatione, cum raro triangula ſint in plano horizontali, ſed plerumque vertices in locis magis editis, antequam perpendicula DK &c in AB demittantur, omnia triangula ad idem planum horizontale reducenda ſunt, de qua reductione (ut jam monui) poſtea agemus, quantum per Trigonometriam planam fieri poteſt. In operationibus majoribus, dum latera ſingula triangulorum adhibitorum aliquot millium hexapedarum ſunt, multo plura attendi debent, quæ, cum extra noſtrum inſtitutum ſint, hoc loco non attingimus.

Ceterum ſi hypotheſis Problematis mutetur, & ponatur, terminum alterum ex altero conſpici non poſſe, haberi poterit reſolutio ſequens licet minus tuta, attamen Aſtronomiæ ſubſidiis deſtituto fortaſſis quandoque utilis futura. Nempe determinanda prius erit poſitio laterum duorum, quorum alterum ad poſtremum triangulum unius, alterum ad poſtremum alterius termini pertinet.

Fig. 46 N. 2 Tab. IV Sint (Fig. 46 N. 2 Tab. IV) triangula ACD, DCE, ECF, FEG, ECH, HGB, termini A, B. Concipiantur ducti per terminos circuli maximi $aA\alpha$, $bB\beta$, qui repræſentent meridianos, & ſi AB fuerit tantummodo aliquot millium hexapedarum, citra ſenſibilem errorem pro rectis parallelis haberi poſſunt. Si vel ope pyxidis magneticæ, vel melioris horologii ſciaterici inveniatur angulus αAC, vel aAD, (alteruter ſufficit, cum ob notum CAB, & ſummam $\alpha CA + CAD + DAa = 180^{\circ}$, dato alterutro extremorum, etiam alter detur), & concipiatur v. g. latus AD productum, donec occurrat in b meridiano alterius termini βBb, atque eadem obſervatio anguli HBb inſtituatur in termino B, producto latere BH in a, ubi meridiano αAa occurrit, habebuntur triangula Aca, Bcb ſimilia, & $cAa = cbB$, $caA = cBb$, qui cum jam noti ſint, tertius ad c etiam ſcitur, & hinc etiam ejus ſupplementum DcH. Præterea ponatur ducta recta DH. In triangulis DCE, CEF, FEG, GEH noti jam ſunt omnes anguli ad E; & quoniam hi cum DEH conſtituunt quatuor rectos, habetur in triangulo DEH angulus comprehenſus lateribus ED, EH itidem notis; proinde invenitur & latus DH, & anguli EDH, EHD. Jam ob notos $ADC + CDE + EDH$, ſcitur quoque horum ſupplementum HDc; uti etiam DHc, ſupplementum trium notorum DHE, EHG, GHB. Quare in triangulo DCH datur latus DH, & tres anguli, conſequenter invenitur Dc, & cH. Igitur habetur ſumma $AD + Dc$, & $BH + Hc$, & in triangulo AcB dabuntur latera cA, cB cum angulo comprehenſo, poteritque AB inveniri.

Verum *imprimis* hæc reſolutio ſatis accurata eſſe nequit, cum ſitus laterum AC, AD; BG, BH reſpectu meridiani neque ope pyxidis magneticæ, neque ope horologiorum ſat tuto determinari poſſit. *Secundo* omnino neceſſe eſt, ut prius triangula reducantur ad eundem horizontem, cum alias Aca, Bcb non ſint in eodem plano. Atque hæc incertitudo, (cujus cauſæ complures adferri poſſent) angulorum, qui per acum magneticam accipiuntur, ſatis nobis erat, ut nihil in tota hac tractatione de ejus generis menſurationibus di-

diceremus, quæ reſolutionem ex fonte tam dubio petunt, & quas non niſi in omnium aliarum defectu adhibendas cenſemus.

141. PROBLEMA VI. Datis in triangulo ABC (Fig. 39 Tab. IV) tribus angulis, & differentia laterum AB, BC, invenire latera. Fig. 39 Tab. IV

RESOL. Cum detur angulus B, eſt (74) $AB + BC : AB - BC = \textit{tang.}\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C) : \textit{tang.}\,(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$. Sit ſumma laterum $= x$, differentia $= a$; habebitur $\textit{tang.}\,(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A) : \textit{tang.}\,(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A) = a : x$. Reperitur ergo ſumma $AB + BC$ ex ſimplice hac Analogia; & quoniam ex angulis ſcitur, utrum latus majus, vel minus ſit, habebitur majus $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, & minus $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a$.

142. PROBLEMA VII. Datis partibus AD, DB (Fig. 47 Tab. V) rectæ AB, & angulis ACD, DCB, invenire diſtantias CA, CB. Fig. 47 Tab. V

RESOL. Concipiatur triangulo CAB circumſcriptus circulus, CD producta in F, atque chordæ AF, FB. Quia dantur AD, DB, datur etiam earum ſemiſumma ED, & ſi concipiatur radius BO cum OE e centro ad dimidiam chordam normalis, erit $EOB = ACD + DCB$, cum ille ſit ad centrum, hi ad peripheriam. Itaque $OB : BE = R : \textit{ſin.}\,ACB$, igitur habebitur radius circuli, quo dato invenientur chordæ FB ($= 2\,\textit{ſin.}\,DCB$) & AF ($= 2\,\textit{ſin.}\,ACD$). In triangulo ADF habebuntur jam duo latera AD, AF, & angulus comprehenſus $FAD = FCB$ ſeu DCB. Igitur reperitur angulus ADF. Hoc habito in triangulo ACD dantur anguli ACD, ADC cum latere AD: poteſt ergo reſolvi, & inveniri AC. In BC reperiendo jam non eſt difficultas, ob datum $ABC = ADC - DCB$; item ACB, latera AB, AC.

143. LEMMA. Si in triangulo quovis ACB (Fig. 48 Tab. V) ex medio puncto D lateris AB ducatur recta DC ad angulum oppoſitum C, erunt ſinus angulorum, in quos dividitur angulus C, in ratione reciproca laterum CA, CB iis adjacentium, ſive $\textit{ſin.}\,ACD : \textit{ſin.}\,DCB = BC : AC$. Fig 48 Tab. V

DEMONST. In triangulo ADC eſt $AD : DC = \textit{ſin.}\,ACD : \textit{ſin.}\,A$; &
in triangulo DCB eſt DB vel $AD : DC = \textit{ſin.}\,DCB : \textit{ſin.}\,B$;
hinc $\textit{ſin.}\,ACD : \textit{ſin.}\,DCB = \textit{ſin.}\,A : \textit{ſin.}\,B$. Sed $\textit{ſin.}\,A : \textit{ſin.}\,B = BC : AC$ (66) igitur etiam $\textit{ſin.}\,ACD : \textit{ſin.}\,DCB = BC : AC$. Q. E. D.

144. PROBLEMA VIII. Datis in triangulo ABC (Fig. 48 Tab. V) latere AB, ratione laterum $AC : CB = m : n$, & angulo lateri dato oppoſito C, invenire latera AC, CB. Fig. 48 Tab. V

RESOL. Aſſumatur radius quivis arbitrariæ magnitudinis CG, & intelligatur deſcriptus arcus GLH centro C. Ob datum angulum GCH reperietur pro radio aſſumpto chorda $GH = 2\,\textit{ſin}\,\frac{1}{2}C$. Fiat $m + n : n = GH : GI$. Patet (476 & 479 Geomet.) cum ſit $HI : IG = m : n$, fore etiam ſinus angulorum LCH, LCG in eadem ratione $m : n = AC : CB$.

Quare (per Lemma) ſi ducatur per I recta CID, tranſibit hæc per medium punctum D lateris dati AB. Igitur cum inventi ſint anguli ACD, DCB, una cum partibus AD, DB, Problema reductum eſt ad præcedens, & circumſcripto triangulo circulo AFBC erit eadem ſolutio, quam proinde non repetimus.

145. COROLL. Cum DF etiam ſecet angulum AFB (complementum ad duos rectos anguli dati C); erit *ſin.* AFC : *ſin.* CFB = FB : AF. Sed eſt AFC = ABC, & CFB = CAB; ergo etiam *ſin.* AFC : *ſin.* CFB = *ſin.* ABC : *ſin.* CAB = FB : AF = AC : CB. Cum igitur ex data ratione laterum *m* : *n* ſinus angulorum CAB, CBA inveniri poſſint, reperietur BC illico, ſi fiat *ſin.* ACB : AB = *ſin.* CAB : BC &c.

Fig. 49 Tab. V 146. PROBLEMA IX. Datur triangulum ABC (Fig. 49 Tab. V) cum angulis ADB, BDC; oportet invenire diſtantias ſingulorum angulorum A, B, C a puncto D.

RESOL. Concipiatur per A, C, D deſcriptus circulus, cujus radius AO ex data AC, & angulo ADC, uti ſuperius (142), invenitur, nec non chordæ AG, GB, quæ ſubtendunt angulos datos ADB, BDC. Eſt vero GCA = ADB; & ACB datur, igitur habetur etiam differentia GCB angulorum ACB, ACG, & in triangulo GCB habentur duo latera GC, BC cum angulo comprehenſo: quare reperietur angulus GBC, & in triangulo BDC dantur jam duo anguli DBC, BDC, & latus BC, e quibus facile reliqua latera BD, CD inveniuntur. De diſtantia AD nihil difficultatis eſt, cum in triangulo ACD nota ſint latera AC, CD, & angulus ACD. Q. E. I.

Fig. 50 N. 1 Tab. V OBSERVA. Si vertex unius anguli, velut B (Fig. 50 N. 1 Tab. V) trianguli dati, cadat intra circulum, id tantum diſcriminis erit in reſolutione, quod angulus GCB non ſit differentia, ſed ſumma angulorum GCA (ſeu BDA) & ACB. Hujus Problematis uſus eſſe poteſt in conſtructione chorographica. Si ſemel tria loca A, C, B rite determinata ſunt, quartus quivis facile, quantum a tribus illis diſtet, reperitur, ſi ex eo (nempe D) obſerventur anguli ADB, BDC. Si vero hæc tria loca poſita eſſent in eadem recta, uſui foret Problema VII (142).

Fig. 50 N. 2 & 3 Tab. V 147. PROBLEMA X. Dato in triangulo ABC latere AC cum angulo oppoſito B, & puncto D, in quod cadit perpendiculum ex B in AC demiſſum, invenire reliquas partes trianguli (Fig. 50 N. 2 & 3 Tab. V).

RESOL. Concipiatur triangulum inſcriptum circulo, & arcus, quem ſubtendit latus datum AC, in M biſectus: biſecabit MB angulum datum B. Sit CBN complementum dimidii anguli B, ſive MBN = 90^{v}: recta MN erit diameter, & biſecabit chordam AC in R; & quia uterque angulus ABM, ACM inſiſtit eidem arcui AM, æquales ſunt, & in triangulo rectangulo MRC, ob datum RC = $\frac{1}{2}$AC, reperitur RM; hinc etiam RN, cum ſit $\frac{AR^2}{RM} = NR$; unde dabitur radius circuli OM, vel OQ. Dein ob datum punctum D, habetur AD, & AR, ideoque & DR. Hinc in triangulo rectangulo QOP invenitur angulus ejusdem nominis. Patet autem eſſe AOM = ABC, & AOQ = 2ABD; ſcitur igitur etiam dimidium ABD, & ejus complementum BAC cum angulo tertio C innoteſcit. Habitis angulis cum latere AC reliqua facile inveniuntur.

148. PROBLEMA XI. Dantur in trapezio ABCD (Fig. 51 Tab. V) quatuor anguli, & latera duo inter ſe oppoſita AB, CD; quæruntur reliqua duo latera, quorum ratio item datur ad ſeſe. Fig. 51 Tab. V

RESOL. CASUS I. Si latera quæſita non ſunt parallela. An bina quævis latera parallela ſint, facile ſcitur ex angulis. Ponamus 1mo, latera quæſita BC, AD non eſſe parallela. Seu data AB, CD (vel C*d*) parallela ſint, ſeu non parallela, producantur in E latera quæſita, donec concurrant. Dabuntur duo triangula ABE, CDE (vel C*d*E), in quibus dantur omnes anguli, A, B, E; & DCE, CDE (ſupplementa datorum BCD, ADC) & E, cum lateribus AB, CD (vel C*d*). Quare reperientur latera BE, AE; CE, DE, quorum differentiæ ſunt latera trapezii quæſita BC, AD (vel A*d*).

CASUS II. Si latera quæſita AB, C*d* ſint parallela, & dentur BC, A*d*, nec non ratio BA : C*a*. In hac hypotheſi triangula ABE, *d*CE ſimilia ſunt, & datur ratio laterum $AB : dC = AE : dE$. Sit hæc ratio $m : n$; fiat $m - n : n = AE - dE : dE$; ſeu $m - n : n = Ad : dE$. Quoniam A*d* datur, habetur etiam *d*E, & inde e triangulo *d*CE ipſa magnitudo *d*C, conſequenter etiam AB.

149. PROBLEMA XII. Polygoni ABCDE aream metiri, & delineare. (Fig. 52 Tab. V). Fig. 52 Tab. V

CASUS I. Dum area pervia eſt. Eligantur intra aream binæ ſtationes commodæ G, & F, quarum diſtantia non ſit multo minor lateribus, & quarum directio non tranſeat per angulum polygoni. Accipiantur in G omnes anguli DGF, CGF, BGF, AGF, EGF; eodem modo in F (defixo in G ſigno, & menſurata GF) ſumantur anguli DFG, CFG, BFG, AFG, EFG. In menſula hæ ipſæ lineæ his interſectionibus determinant puncta D, C, B, A, E, quibus junctis habebitur perimeter.

At ſi anguli accipiantur ope Goniometri; e triangulo FGD, in quo datur FG, & omnes anguli, reperiuntur latera FD, GD. Eodem modo in triangulo FEG, ex angulis & FG, habentur FE, GE. Cum jam noti ſint anguli EGF, DGF, etiam nota eſt eorum differentia EGD: itaque in triangulo EGD dantur latera GE, GD cum angulo comprehenſo: quare invenientur reliqui, & latus ED. Eodem modo notus eſt angulus AFG & EFG, adeoque etiam AFE, qui priores complet ad quatuor rectos; & ex triangulo FAG, ob angulos omnes datos cum latere FG, invenitur FA. Hinc in triangulo AFE rurſus dantur latera FA, FE angulum datum comprehendentia, & reperientur anguli reliqui cum latere tertio AF. Hunc in modum habebitur angulus polygoni DEA e duobus FED, FEA coaleſcens, & duo latera. Manifeſtum autem eſt, ſimili methodo reliqua latera cum angulis inveniri, neque neceſſe eſt, ut in re perſpicua diutius moremur. Angulis, & lateribus rite calculatis, ope ſcalæ & transportatorii inſtrumenti, figura ſimilis in charta conſtruetur.

CASUS II. Dum area impervia eſt, attamen accedi poteſt (Fig. 53 Tab. V). Accipiantur anguli ABC, BCD, CDE &c usque ad duos, ordine, uti etiam BCA, ACE, CBD, ECD, & menſuretur unum latus, v. g. BC. In tri- Fig. 53 Tab. V angulo BCA datur præter angulos etiam latus BC; & inveniuntur AB, AC. Dein in triangulo BCD eodem modo ex notis angulis & latere BC reperitur CD. Tum in triangulo CDE ob notos angulos ECD, CDE, latusque CD, dabitur CE, ED. Tandem in triangulo ACE notis jam AC, CE cum angulo comprehenſo inveniendum eſt AE, habebunturque omnes anguli, & latera polygoni.

OBSERVA. Si ambitus polygoni ſit admodum irregularis, uti littus ſtagni *abcdefghik*; ſeligendæ ſunt ita ſtationes A, B, C, D, E, ut latera rectilinea ita ſecent irregularem ambitum, ut fere tantundem ſpatii abſcindant ad *k*, *h*, *f*, &c quantum accedit prope angulos ad *i*, *g*, *e* &c.

Fig. 54 Tab. V CASUS III. Dum non modo polygonum impervium eſt, ſed neque accedi poteſt. Uti (Fig. 54 Tab. V) ſi eſſet munitio militaris foſſa *abcde* cincta. Eligatur ſtatio in H in directum jacens cum latere CD; & altera in I, in eadem recta cum AE. Menſuretur IH, & ſumantur anguli IHD, IHE, EID, DIH. Eodem modo ſtationes G, F ſint in lateribus productis ED, BC; & accipiatur angulus DHG, HGD &c. Patet in triangulo DIH inveniri latera ID, DH; item in EHI reperiri EI; tum ex EHD habitis lateribus HE, HD cum angulo comprehenſo dabitur ED. Et cum jam habeatur DH, ſolvetur eodem modo triangulum DHG, DFG, CGF &c, uti conſideranti manifeſtum eſt. Unde ſimiles ſtationes circa alia polygoni latera ponendo, innoteſcent omnia latera, & anguli, qualis EDC = GDH.

Fig. 55 Tab. VI 150. PROBLEMA XIII. Metiri diametrum circuli (Fig. 55 Tab. VI).

CASUS I. Si circulus ſit pervius. Collocetur in quocunque puncto ejus peripheriæ F inſtrumentum Goniometricum, & regula mobilis dirigatur ad 90^v, ut ad F ſit angulus rectus: notentur puncta G, H, in quibus radii viſuales occurrunt peripheriæ; recta GH tranſibit per centrum, cum angulus GFH inſiſtat ſemicirculo. Unde ſi accipiatur etiam angulus unus acutorum, & menſuretur latus interjacens, invenitur facile diameter GH, niſi ipſam menſurare velis.

CASUS II. Si circulus ſit undique clauſus, uti ſi foret turris circularis, ad quam tamen accedi externe poſſit.

Seligatur ſtatio in A, & ita collineetur verſus B & C, ut radii viſuales peripheriam tangant. Accipiatur tum anguli BAC dimidium, & rurſus collineetur ſub dimidio hoc angulo ita, ut ad B radius viſualis fiat tangens. Evidens eſt, AD productam tranſire per centrum. Notetur punctum D, menſurataque diſtantia AD fiat R : *tang.* BAD = AD : DL. Ex natura circuli liquet, cum DL, LB tangant circulum, eſſe DL = LB. Igitur erit $LOD = \frac{1}{2}BOA$. Eſt autem BOA complementum anguli DAB, conſequenter $LOD = \frac{1}{2}$ complemento anguli BAD. Unde fiat: ut ſinus dimidii complementi anguli BAD, ad ſuum coſinum, ita DL ad DO, habebitur radius circuli quæſitus.

CASUS III. Si circulus nec accedi poſſit. Collineetur iterum ex A in B & C, ut AB, AC circulum tangant, & accipiatur dimidii anguli BAC complementum DAE, ut habeatur angulus CAE = 90^v. Collineetur tum per di-

dioptras fixas in C, ut AC ſit tangens, per mobiles verſus E, & deſignetur fixis perticis recta AE (91).

In hac eo usque ab A (ubi interim ſignum ponitur) recede, donec ex E videas A ſub angulo AED $= \frac{1}{2}$BAC, ſeu $=$ complemento anguli DAE, ita ut radii viſuales tangere videantur peripheriam in D. Metire AE, invenies-que e triangulo rectangulo EAD rectam AD, qua habita reliqua fiant, ut in caſu præcedente.

151. Problema XIV. Invenire diſtantiam duorum locorum A, B (Fig. 57 Tab. VI) qui nequeant ex duabus ſtationibus C, D, uterque ſimul videri. Fig. 57 Tab. VI

Resol. Metire vel per Problema I, vel per II, diſtantiam AC, & accipe angulum ACD, cum ponatur, quod B ex C videri nequeat. Eodem modo metire BD, & rurſus accipe angulum CDB. Denique menſuretur diſtantia ſtationum C, D. Habebitur in utroque triangulo ACD, BCD angulus C, & D cum lateribus eos comprehendentibus, reperieturque AD, CDA; item CB & BCD. In triangulo CED dabuntur igitur tres anguli cum latere CD, & invenientur CE, DE, quæ ſubtracta ex BC, AD jam notis relinquunt EB, EA cum angulo comprehenſo. Unde ſolvetur triangulum AEB, ut obtineatur AB.

152. Problema XV. Polygonum deſignare in campo.

Resol. Polygoni deſignandi omnes dimenſiones notæ ſint, oportet, ſeu e ſcala Geometrica, ſeu e calculo. Poteſt autem deſignatio fieri e centro C (Fig. 56 Tab. VI) acceptis per Goniometricum angulis DCB, DCE, ECF &c, rectis ſeu polygoni radiis, ope perticarum interim ſignatis; tum actuali menſura determinatis diſtantiis CB, CD, CE, &c. Si medium areæ, quæ includitur polygono, non ſit permeabile, poſſunt accipi anguli ipſi polygoni, & latera menſurari, vel ope diagonalium determinari, prout e loci conditionibus opportunius viſum fuerit. Fig. 56 Tab. VI

Anguli poſſunt etiam conſtrui in ipſa humo vel ope circini longi perticalis, vel in hujus defectu, baculo AB in terram defixo, cui inſeritur funis CH, qui inde ex H in duas partes HF, HG finditur, atque alteri baculo DE illigatur, cujus extremum E in cuſpidem deſinit. Si intra G & F manu prehenſus baculus DE circumducatur, partibus funis HF, HG flexionem, aut inclinationem impedientibus, deſcribi poterit quivis arcus EI. Si ad manum fuerit pertica debitæ longitudinis MI in ſemidigitos (vel adhuc minores partes) diviſa, & ſciatur, quot partium hujus perticæ ſit radius EB, ope tabularum ſinuum chorda arcus IE definietur, ut angulus IBE debitum graduum numerum habeat. Sed Geometriam callenti hujusmodi ſubſidia, quæ operis deſignandi ratio, & loci opportunitas exigit, facile occurrent. Hinc nihil addimus de peculiaribus etiam inſtrumentis a multis ingenioſe excogitatis, quæ generalem quidem uſum non habent, attamen in quibusdam circumſtantiis laboris compendio non mediocri adhibentur. Nihil attingimus de menſurationibus vel altitudinum per umbras, vel diſtantiarum per ſolas perticas in terra defixas, quæ, cum alia inſtrumenta deſunt, triangulis ſimilibus deſi- Fig. 58 Tab. VI

gnan-

gnandis opportunæ ſunt. Hæc enim practicorum artificia recenſere infinitum foret, & a Theoriæ non ignaris, cum vel ſemel videntur, facile intelliguntur: quin ipſe ſibi quisque in Geometria verſatus ſæpe meliora excogitabit.

ARTICULUS IV.

De reductione angulorum ad centrum, & triangulorum ad planum horizontale.

Fig. 60 Tab. VI 153. Sæpius contingit, maxime dum triangula majora acquiruntur, ut pro ſigno collineationis accipiatur aliquod objectum, intra quod inſtrumentum accipiendis angulis deſtinatum collocari nequit, ut ſi quis (Fig. 60 Tab. VI) angulos A & B accipere debeat, ſitque B quæpiam turricula, ad A arbor. Quando accepto angulo BAC capiendus eſt ABC, inſtrumentum non in B, ſed prope v. g. ad *b* ſtatuendum erit, ut adeo angulus A*b*C loco ABC ſumendus ſit. Non eſt rarum, ut hunc in modum inſtrumentum collocandum ſit extra omnes angulos trianguli. Ponitur autem ſive ex reſolutione alterius trianguli, ſive aliunde innotuiſſe unum e lateribus AB, vel AC, & quæruntur reliqua latera. Manifeſtum eſt, niſi ex angulo accepto A*b*C inveniatur angulus ABC, qui accipi debuerat, haud poſſe reperiri vera latera. Reſolutio autem hujus Problematis: *ex angulo accepto* (cujus vertex parum admodum reſpectu magnitudinis laterum abeſſe ponitur a vertice anguli, qui accipiendus erat) *invenire angulum verum*, dicitur *reductio anguli ad centrum*, quod nempe non in vertice accepti, ſed in vertice quæſiti centrum inſtrumenti ponendum fuerat. Ut itaque reſolutio hujus Problematis rite intelligatur, præmittimus ſequens.

Fig. 59 Tab. VI 154. LEMMA. Si angulus ACB (Fig. 59 Tab. VI) ſit admodum parvus, I*mo*, loco arcus hunc angulum metientis ſine errore ſenſibili accipi poteſt perpendiculum BA ex A in BC; vel ex B in AC demiſſum. II*do*. Si AD, vel BE reſpectu AC vel BC ſit admodum parva, perpendiculum AB a perpendiculo DE ſenſibiliter non differt.

DEMONST. Prima pars facile patet ex ipſis tabulis ſinuum. Si enim fiat, ut radius ad minuta & ſecunda reductus (cujus Logarithmus 5,3144251) ad arcum 30′ ſeu 1800″, ita ſinus totus ad ſinum anguli 30′, Logarithmus, qui pro quarto termino proportionis obtinetur, nempe 7,9408474, a Logarithmo tabulari ſinus anguli 30′, ſeu a 7,9408419 non niſi poſtremis duabus notis differt. Quod ſi autem tam exigua differentia ſit inter arcum & ſinum arcus 30′ ſeu $\frac{1}{2}$ gradus; multo minor erit in angulis minoribus.

Pars altera e Geometria clara eſt. Concipiatur enim DF ad CB parallela, AF : FD ſeu BE = DE : EC, ſive AF : DE vel FB = EB : EC. Jam ponitur, eſſe BE reſpectu EC partem admodum parvam; igitur etiam AF reſpectu FB erit pars admodum parva, ergo multo magis reſpectu EC vel BC,

cum

cum ſit $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{EB}$. V. g. ſi fuerit AB = 6 dig. EB — 1 ped. CB = 500 ped. invenitur AF $<$ 0,15 lineæ.

155. PROBLEMA I. Angulos trianguli ABC, qui accepti fuerunt in *a*, *b*, *c*, reducere ad ſua centra (Fig. 60 Tab. VI). Fig. 60 Tab. VI

RESOL. Calculetur *primo* triangulum ABC ex angulis acceptis, & latere noto v. g. AC. Habitis lateribus AB, BC in hac hypotheſi fiat: latus AB ad perpendiculum *ad*, quod ex ſtatione *a*, in qua angulus B*a*C acceptus fuit, demiſſum eſt in verum latus AB, & menſuratum in digitis, vel etiam pedibus; ita radius ad gradus reductus ad arcum, qui metitur angulum *a*BA. Hic angulus additus accepto B*a*C, dat angulum externum B*g*C. Eodem modo fiat latus inventum AC ad perpendiculum *ae* e ſtatione *a*, in qua fuit centrum inſtrumenti, in verum latus CA (etiam productum, ſi neceſſe ſit) demiſſum; ita radius ad gradus reductus ad arcum metientem angulum *a*CA. Quoniam angulus externus (jam inventus) B*g*C = BAC — *a*CA, ſubtrahatur ab externo B*g*C modo inventus *a*CA, habebitur angulus reductus ad centrum A.

Ex lemmate facile intelligitur, haud intereſſe, ſeu ſumatur *da*, ſeu A*f*. Unde prout commodius fuerit ratione ſitus loci, poteſt vel ex vera ſtatione A in rectam *a*B demitti perpendiculum, & menſurari; ſeu ex ſtatione aſſumpta *a* in latus verum.

Obſervet autem Tiro, hanc demiſſionem perpendiculi non fieri tam ſcrupuloſe, ſed vel ope gnomonis lignei, aut alterius majoris; vel etiam tantummodo judicio oculi exercitati. Ut autem habeatur aliqua linea, velut AB, in quam cadat perpendiculum, ſatis eſt, ſi oculo inter A & B conſtituto ita tendatur funiculus, ut videatur in recta eadem AB poſitus. Etſi enim erretur uno, alterove digito, ſi latus AB ſit ſatis magnum, error ſenſibilis non afficiet angulum: quare regula accurationis in acceptione perpendiculorum ejusmodi eſt major, vel minor diſtantia AB. Ut autem hæc reductio exemplo illuſtretur,

156. Sit latus AC quomodocunque repertum, 583 pedum; angulus acceptus B*a*C = $42^{v}\ 18'$, A*b*C = $63^{v}\ 50'$, B*c*A = $73^{v}\ 52'$. Quærantur more ſolito laterum AB, BC interim Logarithmi, qui ſufficiunt pro reductione anguli ad *a* accepti, ex Analogiis *ſin.* B : *ſin.* A = AC : BC; & *ſin.* B : *ſin.* C = AC : AB.

Log. *ſin.* A = 9,8280231
Log. AC = 2,7656686
Summa = 12,5936917
Log. *ſin.* B = 9,9530418
Log. BC = 2,6406499

Log. *ſin.* C = 9,9825506
Log. AC = 2,7656686
Summa = 12,7482192
Log. *ſin.* B = 9,9530418
Log. AB = 2,7951774

Ponamus inventa eſſe perpendicula *ad* = 0,5 ped. *ae* = 0,7 ped. quorum Logarithmi commode ſumi poſſunt ſemipoſitivi (ut in Algebra diximus) nempe pro *ad* — 1,6989700, pro *ae* vero — 1,8450980. Erunt jam ſequentes duæ Analogiæ: latus AB (inventum): *ad* = rad. red. ad gradus : arcum, qui metitur angulum *a*BA; dein latus AC : *ae* = rad. red. : arcum *ae*.

Log. *ad* = — 1,6989700
Log. rad. red. = 5,3144251
Summa = 5,0133951
Log. AB = 2,7951774
Log. arcus *ad* = 2,2182177. Hic Logarithmus inter eos, qui pertinent ad numeros naturales, dabit numerum ſecundorum competentium arcui *ad*, qui metitur angulum *a*BA; reperiuntur proxime 165″,3 = 2′ 45″,3.

Log. *ae* = — 1,8450980
Log. rad. red. = 5,3144251
Summa = 5,1595231
Log. AC = 2,7656686
Log. arcus *ae* = 2,3938545, cui reſpondent 247″,6 = 4′ 7″,6.

Quoniam (155) angulo accepto addi debet *a*BA, & demi *a*CA, ſatis eſt, ſi horum differentia (cum poſterior priore major ſit) ſubtrahatur ab angulo accepto.

Angulus acceptus ad *a* = 42° 18′ 0″
Differentia *a*BA & *a*CA = 0 1 22, 3
Angulus ad centrum A reductus = 42° 16′ 37″,7, ſeu numero rotundo 42° 16′ 38″.

157. Eadem operandi methodo reducitur angulus acceptus A*b*C ad centrum B, ubi id ſolum diſcriminis eſt, quod uterque angulus *b*AB, *b*CB auferri debeat ab accepto, uti patebit, ſi per *b*, B ducatur recta *k*B. Si *b* foret ultra B, ut lineæ *b*A, *b*C caderent extra BA, BC, uterque addendus foret obſervato. In reductione anguli A*c*B iterum additur obſervato angulus CA*c*, & aufertur a ſumma CB*c*, vel potius differentia correctionum additur, vel demitur ab obſervato, prout prior, vel poſterior major fuerit. Poſitis *bh* = 0,3 dig. *bi* = 0,4 dig. invenitur ſumma angulorum *b*AB + *b*CB = 4′ 27″, 87 aut 4′ 28″, quæ ſubtracta ex obſervato ad *b*, relinquunt reductum ad centrum B = 63° 45′ 32″. Pariter ſi perpendicula fuerint *cl* = 0,45, *cn* = 0,8 dig. obveniet *c*AC = 159″,2 *c*BC = 377″,4; differentia 218″,2 = 3′ 38″ ex 73° 52′ ablata, habetur angulus ad C reductus = 73° 48′ 22″.

158. Notet hoc loco Lector, *in exemplis non quærendam eſſe veritatem*, ſed methodi applicationem. Nos ſuperius aſſumpſimus tres angulos A, B, C obſervatos tales, ut eorum ſumma accurate eſſet 180^{v}. Perpendicula *ad*, *ae*, *bh*, *bi*, *lc*, *cn* nullo ſelectu aſſumpta fuerunt, ut correctiones omnes fuerint ſubtractivæ. Hinc contigit, ut ſumma angulorum reductorum deficiat a 180^{v} proxime $9'\ 28''$. Id in exemplo aliquo vero haudquaquam contingere potuiſſet. Interim ſciendum, ſi omnes tres anguli obſerventur, non niſi fortuito fieri, ut eorum ſumma accurate æquetur 180^{v}, etſi optima adhibeantur inſtrumenta. Quis enim in angulo, etſi inſtrumentum tubo micrometro inſtructo præditum ſit, & radii tripedalis, de errore 3, vel 4 ſecundorum, immo $5''$ cavebit? cum ejusmodi errores vel ex craſſitudine fili micrometrici oriri poſſint. Dum igitur exceſſus $12''$, $15''$, vel $20''$ vel defectus a 180^{v} in ſumma angulorum deprehenditur, is ſolet æqualiter diſtribui in angulis (niſi forte unus ex iis debita accuratione accipi non potuiſſet, tum enim huic maxima erroris pars tribuenda eſt) omnibus, ut ſumma ad 180^{v} redigatur, quo facto calculus initur. Quod in ſumma angulorum obſervatorum fere ſemper evenit, id etiam contingere neceſſe eſt in reductione ad centrum. Ponamus facta reductione (ut in noſtro exemplo ficto maneamus) deficere ſummam angulorum a 180^{v} quantitate indicata, nempe $9'\ 28''$; tribuatur hæc aberratio in tres partes, & addantur ſingulis angulis reductis $3'\ 9''$, ac illi, ubi perpendicula erant maxima (cum tunc facilius erretur) præterea $1''$, quod alias deeſſet ſummæ debitæ, fiet angulus ad $A = 42^{v}\ 19'\ 47''$, $B = 63^{v}\ 48'\ 41''$, $C = 73^{v}\ 51'\ 32''$.

159. Si anguli accepti ſint inſtrumento vitio obſervatori noto laborante, corrigendi ſunt ea methodo, quam indicavimus Num. 107 & *ſeqq.*, antequam quærantur latera pro reductione ad centrum facienda; ut autem corrigantur ab errore ſummæ debitæ, haud neceſſe eſt; ſed hæc correctio facienda tantummodo eſt in angulis reductis ad centrum, & tum denuo ex angulis ita correctis repetendus eſt calculus pro lateribus neceſſarius. Verum quidem eſt, in menſurationibus, quæ inſtrumentis minoribus fiunt, ejusmodi accurationem non modo ſuperfluam, ſed pene ridiculam eſſe; ſed illud nemo ſane ſuperfluum dixerit, quod ſi hæc Tirones, dum praxi ſeſe accingunt, etiam minoribus inſtrumentis applicent, methodos eas, quæ in delicatioribus operationibus neceſſariæ ſunt, ſibi familiares reddant, ut, cum res poſcit, iis rite uti poſſint, & non primo ex libris operoſe ea evolvere teneantur, quæ exercitationis gratia ſine magno negotio nunc diſcere poſſunt. Denique ſi minora inſtrumenta errori etiam craſſiuſculo obnoxia ſunt, an propterea eos negligemus, quos corrigere in noſtra poteſtate eſt, maxime ſi de re agatur alicujus majoris momenti, & majora inſtrumenta haberi non poſſint?

160. Ut porro Tirones intelligant, quousque illorum accuratio in ejusmodi circumſtantiis ſeſe extendere debeat, ac qua cura, & diligentia perpendicula pro reductione neceſſaria menſuranda ſint; ex calculatis lateribus, prout Num. 156 fecimus, quærant, quantum citra magnum detrimentum in hiſce accipiendis errare liceat. V. g. invenimus Logarithmum lateris AB =

2,7951774, cui competunt (neglecta fractione) 624 pedes: non liceat errare in angulo *a*BA ultra $\frac{1}{2}$ minutum; quæritur, quantum errare liceat in perpendiculo *ad*? fiat: ut radius reductus ad gradus ad 30″ ita AB ad terminum quartum;

Log. 50″ = 1,4771213
Log. AB = 2,7951774
Summa = 4,2722987
Log rad. = 5,3144251

Differ. = — 2,9578736, cui reſpondent 0,09076, ex quo intelligitur, ſi error in perpendiculo ſit 0,09 pedis, hoc eſt, 12,96 lin. ſeu 13 li-
Fig. 61 Tab. VI nearum, error anguli jam ſit 30″. Itaque ſi (Fig. 61 Tab. VI) loco perpendiculi *ad* (quod ponimus eſſe 16 digitorum), accipias *ae* = 17 d. 1 lin. augetur angulus $\frac{1}{2}$ minuto. Verum ut loco *ad* acquiras *ae*, neceſſe eſt, ut angulus *aed* ſit 69°, 30′ fere, adeoque ut a recto ad *d* aberres plus quam 20′, quod ſane vel oculi judicio facillime evitatur.

Fig. 62 Tab. VI 161. PROBLEMA II. Triangula DAE, EAC, CAB &c (Fig. 62 Tab. VI) reducere ad horizontem, in quo accepta eſt baſis AB, in hypotheſi, quod eorum latera non ſint adeo magna.

RESOL. Dum accipiuntur in ſtationibus anguli collineando ad ſigna expoſita, erecto inſtrumento ad ſitum verticalem ope perpendiculi, vel libellæ accuratæ Hydroſtaticæ, accipiantur etiam ubivis anguli altitudinis ſtationis, ad quam collineatur, velut in A ſumatur angulus CAF (AF ponitur horizontalis), EAG, DAH; in B vero CBF; in E, CEN, ſi ſtatio C ſit altior ſtatione E; item DEM. Aut vero, ſi qua ſtatio ſit altior, menſurentur anguli depreſſionis, ſive ſi ex D in E collineanti, ſit DK horizontalis, angulus depreſſionis erit KDE, in non adeo magnis diſtantiis æqualis angulo altitudinis DEM; eodem modo angulus depreſſionis IDA æquatur angulo altitudinis DAH &c ut per ſe clarum eſt.

Angulis omnibus tum in planis obliquis, tum altitudinum, vel depreſſionum rite acceptis, atque prioribus per præcedens Problema ad centra reductis, correctione etiam, ſi quam inſtrumentum exigit, adhibita, quærantur latera AC, CB (AB ponitur baſis in plano horizontali, ad quod reliqua latera reducenda ſunt) AE, AD, DE &c. Tum pro reductione trianguli ACB ſit R : *coſ.* CBF = CB : BF; item R : *coſ.* CAF = AC : AF. Habebuntur jam latera BF, AF in horizonte baſeos, quæ cum etiam nota ſit, invenientur, ſi neceſſe ſit, anguli ex Num. 89.

162. Ulterius quærendum eſt EN = GF, ex Analogia R : *coſ.* CEN = EC : EN; item reperietur GA, ſi fiat R : *coſ.* EAG = AE : AG. Rurſus in triangulo AGF habebuntur tria latera, ex quibus anguli quoque innoteſcent.

Eadem ratione ex Analogiis R : *coſ.* DAH = DA : AH; R : *coſ.* DEM = DE : EM ſeu GH, habentur latera HG, HA in plano baſeos horizontali, & ex tribus lateribus trianguli HGA anguli invenientur.

163. Ex-

163. Exemplum. Sit AB = 593 ped. anguli reducti ad centrum CAB = 64^{v} 15′; ABC = 88^{v} 25′, ACB = 27° 20′.

Analog. *ſin.* C : *ſin.* A = AB : BC. Log. *ſin.* A = 9,9545184
Log. AB = 2,7730547
Summa = 12,7275731
Log. *ſin.* C = 9,6619701
Log. BC = 3,0656030

Anal. *ſin.* C : *ſin.* B = AB : AC. Log. *ſin.* B = 9,9998342
Log. AB = 2,7730547
Summa = 12,7728889
Log. *ſin.* C = 9,6619701
Log. AC = 3,1109188

Sit præterea angulus altitudinis CBF = 3^{v} 11′, CAF 2^{v} 52′.

Analog. R : *coſ.* CBF = BC : BF:
Log. *coſ.* CBF = 9,9993293
Log. BC = 3,0656030
Log. BF = 3,0649323, cui competunt 1161,2.

Analog. R : *coſ.* CAF = AC : AF.
Log. *coſ.* CAF = 9,9994562
Log. AC = 3,1109188
Log. AF = 3,1103750, cui reſpondent 1289,3.

Pro inveniendis angulis
Anal. AF : AB + BF = BF — AB: different. ſegment.
Log. AB + BF = 3,2440786
Log. BF — BA = 2,7545012
Summa = 5,9985798
Log. AF = 3,1103750
Log. differ. ſegm. = 2,8882048, cui competunt fere 773,1.

Reperitur hinc ſegmentum majus DF = 1031,2; ſegmentum minus AO = 258,1.

Analog. AB : AO = R : *ſin.* ABO.
Log. R + Log. AO = 12,4117880
Log. AB = 2,7730547
Log. *ſin.* ABO = 9,6387333, cui competunt 25^{v} 48′ 3″.

Analog. BF : OF = R : *ſin.* OBF.
Log. R + Log. OF = 13,0133029
Log. BF = 3,0649323
Log. *ſin.* OBF = 9,9483706, cui reſpondent proxime 62^{v} 36′ 44″.

Hinc tandem habetur angulus ABF $= 88^{v}\ 24'\ 47''$; FAB $= 64^{v}\ 11'\ 57''$, AFB $= 27^{v}\ 23'\ 16''$.

164. Quod in triangulo ACB fecimus, idem faciendum in reliquis; cum methodus ex hoc uno ſatis appareat, calculum ulterius non proſequimur. Illud interim obſervet Tiro, ope Trigonometriæ ſphæricæ reperiri via multo breviore angulos, quos tam operoſe modo quæſivimus. Voluimus tamen hoc loco oſtendere, ad eundem ſcopum per Trigonometriam planam perveniri. Verum, ut ipſa Problematis enunciatio indicabat, hæc ſufficiunt tantummodo, dum triangula conſtant lateribus non adeo magnis. Porro ex dicendis conſtabit, utrum latus quodpiam tantum cenſendum ſit, ut aliis correctionibus opus habeat.

165. THEOREMA I. Quando in ſtationibus admodum inter ſe diſſitis capiuntur anguli altitudinum, & depreſſionum, corrigendi ſunt dimidio angulo, quem faciunt lineæ verticales ad centrum telluris.

Fig. 63 Tab. VI DEMONST. C ſit centrum telluris, ſtationes B, A, verticales lineæ per A & B ductæ (quæ ad horizontem ſunt perpendiculares & prope centrum C concurrunt) AC, HBC. Si LB ſit ad verticalem perpendicularis, & LBC $= 90^{v}$, angulus ABL ex B in L collineanti dat apparentem differentiam altitudinum BF, AE. Si jam cogitetur radio CB deſcribi arcus BD, evidens eſt, fore DE = BF, & differentiam veram altitudinum haberi per angulum ABD. Cum autem LBC $= 90^{v}$, LB tangit arcum in B, & angulus comprehenſus a tangente BL & chorda BD ex Geometria æquatur $\frac{1}{2}DCB = \frac{1}{2}ECF$; igitur angulus ABL apparentis altitudinis augendus eſt angulo LCB, vel $\frac{1}{2}ECB$. Q. E. unum.

Si HAC $= 90^{v}$, angulus depreſſionis ſtationis B infra A apparentis eſt HAB; ſed ſi deſcribatur radio AC arcus AG, vera depreſſio GB apparet ſub angulo GAB; quare auferendus eſt HAG, qui cum AH ſit tangens, æquatur $\frac{1}{2}ACG = \frac{1}{2}ECF$. Ut igitur corrigatur depreſſio apparens, minuenda eſt $\frac{1}{2}ECF$. Q. E. Alt.

166. COROLL. I. Anguli apparentes altitudinum ſunt veris minores, depreſſionum autem veris majores.

167. COROLL. II. Si altitudo EA eſſet minor quam EL, & major, quam ED, locus A ex B aſpicienti videretur infra horizontalem BL depreſſus. Unde fieri poteſt, ut major altitudo habeat angulum depreſſionis. In tali caſu, angulus depreſſionis apparentis auferendus eſt ex $\frac{1}{2}ECF$; differentia erit angulus verus altitudinis.

Fig. 63 Tab. VI 168. COROLL. III. Altitudines æquales habent depreſſiones apparentes æquales. Nam (Fig. 63 Tab. VI) ſi ſtationes eſſent A, G, utriusque depreſſio foret HAG $= \frac{1}{2}ECF$, & hoc ipſo adhibita correctione e Theoremate eruta innoteſceret æqualitas, cum differentia fieret = 0.

Fig. 65 Tab. VI 169. COROLL. IV. Altitudo major (Fig. 65 Tab. VI) EA debet habere depreſſionem minorem, quam altitudo minor FB. Cum enim anguli HAG, LBD æquentur, & ponatur EA > FB; erit A intra L & D, & LBA < LBD, & proinde minor quam HAG. At ob AE > FB, eſt FG > FB,

&

& G intra H & B, conſequenter HAG < HAB, igitur multo magis erit LBA < HAB. Atque hinc cognoſcitur, utra ſtatio ſit altior, ut differentia altitudinum debite definiatur.

170. SCHOL. Quæret hic merito Tiro, quanta debeat eſſe diſtantia ſtationum, ut correctio expoſita adhibenda ſit? & qua ratione cognoſci poſſit dimidius ille angulus ECF, qui per Theorema correctionem conſtituit? utrumque dubium reſolutione ſecundi tolletur. Etſi angulus hic ad centrum in diverſis locis, etiam eodem ſtationum intervallo poſito, diverſus ſit ob figuram Telluris a ſphærica non nihil differentem, hoc tamen diſcrimen tam exiguum eſt, ut citra erroris periculum inſuper haberi poſſit. Aſſumimus itaque rationem diametri æquatoris ad axem Telluris Newtonianam 231 : 230, e qua (quod, qui fiat, exponere non eſt hujus loci) radius æquatoris eruitur 3280108, ſemiaxis 3265909 hexapedarum Pariſinarum; ſi inter hos quæratur medius proportionalis, & reducatur ad pedes Viennenſes, (cum ſit Pariſinus ad Viennenſem 102764 : 100000, quorum numerorum Logarithmi ſunt 5,0118410, & 5,0000000) habebitur radius Telluris ſphæricæ in pedibus Viennenſibus, cujus Logarithmus 7,3049382. Facile proportione habito hoc Logarithmo inveniuntur & Logarithmi, & pedum ipſorum numerus, quos, quia ſæpius uſum habere poſſunt, ſubjicio.

Logarithmi rationis pedis Viennenſis ad Pariſinum 5,0000000 . 5,0118410.

Logarithmus numeri hexapedarum Vienn. radii Telluris ſphæricæ 6,5267870,
cui reſpondent 3363556 hexap.

Logarithmus numeri pedum Viennenſium radii Telluris ſphæricæ 7,3049382,
cui reſpondent 20181336 ped.

Logarithmus numeri pedum Viennenſium 1^{v} Telluris ſphæricæ 5,5468156,
cui reſpondent 352221 ped.

Logarithmus numeri pedum Viennenſium 1′ Telluris ſphæricæ 3,7686644,
cui reſpondent 5870,35 ped.

Logarithmus numeri pedum Viennenſium 1″ Telluris ſphæricæ 1,9905132,
cui reſpondent 97,84 ped.

171. Ex his jam intelliget Tiro, quanta circiter ſtationum diſtantia eſſe debeat, ut correctione opus ſit. Si ageretur de decimis unius ſecundi, ſemper adhibenda foret; ſi de minutis, intervallum 11740 pedum requireretur. In menſurationibus majoribus, dum inſtrumenta accurata adſunt, ſecunda negligi non debent, & ſi intervallum vel 195,68 pedum fuerit, jam 1″ mutabitur ſeu depreſſio, ſeu elevatio ſtationum; quamvis tum plerumque aliæ ſubſint cauſæ, ob quas in exiguis diſtantiis hujus correctionis ratio non habeatur, uti quod raro ipſa altitudinum, vel depreſſionum differentia tam accurate inſtrumentis etiam optimis accipi poſſit, ut non quintuplo, vel ſextuplo arcus diſtantiæ aberretur. Ceterum ſi ſtationum depreſſio & elevatio accurate ſumpta eſt, poteſt angulus ad C in minutis, & ſecundis reperiri, ſi ſimul calculatum ſit latus AB. Cum enim HAC ſit rectus, dato HAB datur BAC, qui a BLC differt angulo ABL, quare ſi angulum elevationis addas, habebis CLB, cujus complementum eſt angulus ad C (Fig. 63 Tab. VI). Si in utraque Fig. 63 Tab. VI

que

Fig. 65 Tab. VI que ſtatione ſit depreſſio (Fig. 65 Tab. VI) ſubtracto HAB e 90^{v} habetur BAC, a quo ſi auferas depreſſionem alteram ABL, obtines CLB, cujus complementum eſt ECF. Si jam detur AB in triangulo ABC, dantur tres anguli, & latus, conſequenter reperiri etiam poteſt BC, AC, & dato radio CE, ipſa AE, BF.

172. THEOREMA II. Arcus menſurati in ſuperficie Telluris, ut eorum magnitudo reſpectiva haberi poſſit, reducendi ſunt ad libellam maris.

DEMONST. Quoniam ob inæqualitatem Telluris dimenſiones in diverſis locis captæ habent diverſam a centro Telluris diſtantiam, etſi arcus ſint totidem graduum, minutorum, ſecundorum, ſive (quod idem) etſi ſimiles ſint, magnitudine tamen diſcrepare poſſunt. Sic ſi quis dimenſionem arcus Telluris Fig. 63 Tab. VI notabilis feciſſet in altitudine (Fig. 63 Tab. VI) BF ſupra libellam maris EF, & omnibus triangulis ad planum baſeos in altitudine BF acceptæ reductis inveniſſet numerum hexapedarum arcus BD, alter vero ſua triangula reduxiſſet ad ipſam ſuperficiem maris EF, evidens eſt, quod arcus BD cum ED comparari nequeat, niſi etiam prior ad hunc horizontem reducatur. Quare hæc reductio adhibenda eſt, quando differentia BF rationem notabilem ad radium Telluris habet. Q. E. D.

173. COROLL. I. Ante omnia igitur conſtare debet de altitudine BF.

174. SCHOL. Hæc altitudinum differentia commode deſumitur ex obſervationibus Barometri in vicinia loci B per plures annos factis. Ex his enim definitur altitudo Mercurii in Barometro media ſupra Mercurium in vaſe ſtagnantem, ſive altitudo notæ, cui in ſcala Barometri *varium* adſcribi ſolet. Et cum eadem definita ſit a variis pro horizonte maris, conſtetque proxime, quanta ſit variatio altitudinum Mercurii, ſi inde a ſuperficie maris certo hexapedarum numero aſcendatur, facile ex comparatione altitudinum mediarum de altitudine loci B ſupra libellam maris conſtitui poteſt, quantum ad hanc reductionem requiritur; neque enim paucarum hexapedarum diſcrimen reductionem ſenſibiliter mutare poteſt. Immo ſunt, qui differentiam altitudinum ſtationum A, & B notatis altitudinibus Mercurii in Barometro ad eas delato metiuntur, quanquam id non tam ſecure fieri exiſtimem, quod ſæpe interea, dum ab una ad alteram ſtationem pervenitur, variæ aeris mutationes accidere poſſint, quæ cum ipſæ in Mercurii altitudinem, præcipue in noſtro climate, non parum influant, comparationem admodum dubiam reddere debent.

175. COROLL. II. Quia arcus EF, BD ſunt ſimiles, erit $CF : FE = CB : BD$, & $CF : BF = EF : DB - EF$. In hac proportione, ob datum angulum FCE, noti ſunt primi tres termini (170), conſequenter quartus dat quantitatem ſubtrahendam ex arcu menſurato, ut idem habeatur reductus ad libellam maris.

Exemplum. Sit $DCB = 20'$; erit $EF = 117407$ pedum Viennenſium cujus numeri Logarithmus 5,0696944; eſto præterea $EB = 600$ pedum Logarithmus 2,7781512, reperietur Logarithmus $DB - EF$ hac ratione

Log. BF = 2,7781512
Log. EF = 5,0696944

Summa = 7,8478456
Log. rad. Tell. = 7,3049382

Log. DB — EF = 0,5429074, cui reſpondent proxime 3,49 pedes, ſeu $3\frac{1}{2}$ pedes: qui ex numero arcus DB menſurati ſubtrahi debeant, ut habeatur arcus reductus.

176. Apparet, niſi arcus magni ſint, & notabilis altitudo BF, hanc reductionem omitti poſſe, cum aliæ ſint cauſæ, quæ longitudinem arcus menſurati multo majore quantitate reddunt incertam, uti illa inter alias, quod de ipſo angulo ad centrum C non adeo certi ſimus. Patet autem (170) ſi vel unico ſecundo in hoc erretur, longitudo arcus prope 100 pedibus ſit erronea. Multo minoris momenti eſt correctio, quam mox exponemus, quæ adhiberi debet ratione refractionis, niſi latera triangulorum ſint admodum magna.

177. **Theorema III.** Anguli altitudinum, & depreſſionum apparentes vitiantur per refractionem radiorum lucis in atmoſphæra Telluris.

Demonst. Conſtat certis obſervationibus, radium, qui dum ad A (Fig. 64 Tab. VI) cum directione tAB advenit, in aere non progredi recta AB, ſed incurvari in arcum quempiam (cujus naturam exponere hujus loci non eſt) qui totus ſitus eſt infra AB, & quem AB in puncto A tangit; quare per radios hac directione ex A egredientes ſpectator in B poſitus objectum A videre nequit, cum omnes inflectantur infra B. Ut igitur videat objectum A, neceſſe eſt, ut ex A emittantur alii radii, alia directione TAG, qui eadem refractione curventur in arcum AOB, qui habeat in A tangentem TAG. Jam vero cum objecta illuc referamus, quo tendit directio radiorum, quam habent, dum oculum ſubeunt, ſpectator in B poſitus videbit objectum A in directione radiorum, quam habet eorum curvatura in B: eſt autem hæc directio (80 Geomet.) ſitus ipſius tangentis rB arcus AOB; quare ſpectator in B referet objectum juxta Br, & propterea apparebit illi objectum altius angulo rBA. Eodem modo radii e B egreſſi directione BA non perveniunt ad A, ſed alii, qui feruntur directione Br, atque in arcum BOA inflectuntur, ut propterea ſpectator in A objectum B videre ſibi videatur in directione tangentis AG, atque depreſſio apparens HAB minuatur angulo GAB. Unde evidens eſt, angulos altitudinum & depreſſionum apparentium per refractionem mutari. Q. E. D. Fig. 64 Tab. VI

178. **Schol.** Curvatura hujus arcus AOB exigua ſane eſt, & ſumi poteſt utroque in extremo æqualis. D. Bouguer (ut etiam refert D. de la Lande Aſtron. a §. 1755) angulum GAB ſtatuit proxime = $\frac{1}{9}$ACB. Unde niſi arcus EF (170) fuerit 880 pedum, ad 1'' non pertingit. Hæc correctio ex aliis capitibus ſæpe valde incerta redditur, quod refractiones in diverſis locis, & anni tempeſtatibus non ſequantur certam aliquam legem, quæ vel ex combinata altitudine Barometri, & Thermometri deduci poſſit. Unde fit, ut

etiam ab expertis obſervatoribus in diſtantiis multo majoribus negligatur, cum ſibi ob locorum diverſam conſtitutionem, vapores magis, minusve copioſos, nihil certi promittere audeant, ut merito præſtare arbitrentur, obſervata ſua incorrecta aliis communicare, quam minus provida correctione corrumpere.

ARTICULUS V.

De ſelectu ſtationum, & æſtimatione errorum laterum, qui ex erroribus angulorum oriuntur.

179. Plurimarum reflexionum utilium ferax eſt hoc argumentum, quod in præſens tractandum ſuſcipimus, & quia omnia, quæ quidem occurrunt, perſequi non licet, ſequentia potiſſimum diſcutiemus. Imprimis adferemus methodum ex errore dato, qui committitur in menſura anguli, definiendi errorem in latere oppoſito. Dein inquiremus, quænam ſtatio eligenda ſit, ut poſito errore ſeu in uno, ſeu in duobus angulis, ut latus, de cujus dimenſione agitur, quantum fieri poteſt, accuratum, aut ſaltem cum minimo errore acquiratur. Et quoniam ſæpiſſime Trigonometria utimur, ut ſitum alicujus loci reſpectu aliorum duorum rite determinemus, quod quidem, ſi in angulis metiendis erretur, fieri citra errorem haud poteſt; indagabimus ulterius, quibusnam conditionibus obtineri poſſit, ut vertices trianguli erronei, & veri, quod menſurandum ſuſcipimus, quam minime inter ſe diſtent. Plus enim haud videtur in præſente angulorum erroneorum hypotheſi exigi poſſe. His diſcuſſis addemus non nullas reflexiones de influxu errorum in primo triangulo commiſſorum in reliqua, quæ lateribus communibus in plurium ſerie connexa ſunt; uti etiam de ſtationum delectu, quando duorum locorum diſtantia metienda eſt, quorum neuter accedi poteſt.

180. Ut autem, quæ dicturi ſumus, Tiro rite aſſequatur, præter Lemma, quod Num. 154 præmiſimus reductioni angulorum ad centrum, etiam ſumimus, ſinus angulorum inter ſe parum admodum differentium, ita parum inter ſe diſtare, ut, quando agitur de ratione alterutrius ad aliquem ſinum tertium, alter pro altero ſine ſenſibili rationis mutatione ſubſtitui poſſit.

Exemplum. Si quantitas exigua A ſit ad quantitatem exiguam B in ratione ſinus v. g. $15^{v}\ 27'$ ad ſinum totum; licebit pro ſinu anguli $15^{v}\ 27'$ etiam accipere ſinum anguli ab hoc parum differentis, uti $15^{v}\ 30'$. Nam ſi hæc ratio in numeris ineatur (ope Logarithmorum), deprehendetur ratio *ſin.* ($15^{v}\ 27'$) ad ſinum totum proxime ut 1 ad 3,753: & ratio ſinus ($15^{v}\ 30'$) ad ſinum totum, ut 1 ad 3,742; differentia eſt 0,011, conſequenter ſi erretur in B (per hypotheſin quantitate exigua) undecim milleſimis, ſeu fere 1 centeſima, error ſentiri vix poterit.

181. Accepimus autem ex propoſito ſinus in hoc exemplo arcuum parvorum intra 15 & 16 gradus, quandoquidem ſi ſit eadem differentia arcuum, ſinus arcuum parvorum multo magis inter ſe differunt, quam ſinus arcuum majorum, ut propterea, ſi anguli fuerint majores, multo magis liceat ſinus modice differentium ſubſtituere. Id autem, quod multo major ſit inter ſinus arcuum minorum differentia, quam inter ſinus majorum, ſi diſcrimen arcuum utrinque idem ſit, hunc in modum demonſtratur. Sint differentiæ Mm, Nn arcuum (Fig. 66 Tab. VI) AM, Am; AN, An exiguæ, & inter ſe æquales. Fig. 66 Tab. VI Concipiantur tangentes MT, Nt, & mR, nr ad CA parallelæ, erit ob exilitatem arcuum Mm, Nn inter hos ipſos, & particulas tangentium nullum ſenſibile diſcrimen, & triangula MRm, MPT; item Nrn, NQt ſimilia habenda ſunt; adeoque $MR : Mm = MP : MT$, &
$Nn : Nr = Nt : NQ$, & compoſitis rationibus, ob $Nn = Mm$, habebitur $MR : Nr = MP \times Nt : NQ \times MT$. Eſt vero $Nt = \frac{NQ \times AC}{QC}$, & $MT = \frac{MP \times AC}{PC}$ (52 Formul. VII), quibus ſubſtitutis fit

$$MR : Nr = \frac{MP \times NQ \times AC}{QC} : \frac{NQ \times MP \times AC}{PC},$$

ſeu omiſſis in ſecunda ratione æqualibus, $MR : Nr = \frac{1}{QC} : \frac{1}{PC} = PC : QC$.

Evidens eſt, eſſe MR, Nr differentiam ſinuum, qui pertinent ad arcus parum inter ſe diverſos; PC, QC vero eſſe coſinus arcuum AM, & AN. Quare habemus hoc Theorema: *differentiæ ſinuum pertinentium ad arcus æquidifferentes, ſi diſcrimen ſit exiguum, ſunt inter ſe in ratione coſinuum.* Atqui coſinus arcus majoris minor eſt coſinu arcus minoris; igitur differentiæ ſinuum arcuum majorum minores ſunt, quam differentiæ ſinuum arcuum minorum, ſi arcus æqualiter differant. Q. E. D.

182. His poſitis, erretur in accipiendo angulo CAB (Fig. 67 Tab. VI) Fig. 67 Tab. VI quantitate exigua, ita, ut loco CAB ſumatur DAB, erit error anguli accepti CAD, quem metitur arcus exiguus Dd centro A, radio AD deſcriptus, & qui ob exilitatem a recta ad AC perpendiculari non differt (154). Quantitas arcus Dd reſpectiva eſt, & fit major, vel minor, aucto vel imminuto radio AD, quamvis angulus CAD non mutetur. Porro ſi in angulo CBA metiendo nullus committatur error, & latus AB ſit accuratum, patet per reſolutionem trianguli ADB, quod ob errorem anguli A acquiritur, obtineri loco lateris veri BC latus BD, ut proinde in latus inducatur error DC. Ut jam error in angulo commiſſus comparari poſſit cum errore inducto in latus BC, arcus Dd reducendus eſt ad digitos, lineas &c, cum latus BC in hujusmodi menſura habeatur. Hanc autem converſionem jam ſæpius fecimus; ſit enim ut ſinus totus in gradus converſus ad numerum minutorum, ſecundorum &c metientium angulum CAD, ita latus AD, quod ex reſolutione trianguli erronei acquiritur, ad numerum digitorum, linearum &c competentium arcui Dd (154). Hanc reductionem ſemper jam factam eſſe ponemus deinceps,

cum eadem in præcedentibus ſæpius jam ſimus uſi. Quia Dd eſt ad AC perpendicularis, ſumpto DC pro ſinu toto, erit in triangulo DCd rectangulo Dd ſinus anguli dCD = ADB, cum ADB ab ACB non differat, niſi angulo DAC; ſumi item poterit Cd pro coſinu anguli C relate ad radium CD. Patet ergo eſſe Dd : CD = *ſin.* C : R, ſeu errorem anguli (reductum ad digitos) eſſe ad errorem lateris BC, ut eſt ſinus anguli tertii C ad ſinum totum; & Dd : dC = *ſin.* C : *coſ.* C. Seu errorem lateris AC ad errorem anguli, ut eſt coſinus C ad ſinum ejuſdem anguli tertii C.

183. Eadem ratiocinatione oſtenditur, ſi erretur in angulo CBA quantitate CBc, & intelligatur exiguus arcus cE radio Bc deſcriptus, fore errorem anguli B ad errorem in latere AD, ut eſt ſinus anguli D (qui cum ſinu anguli C æqualis cenſetur) ad ſinum totum; & errorem in latere DB (nempe DE) ad errorem anguli B, ut eſt coſinus C ad ſinum C. Si itaque ponatur errari in utroque angulo, & quidem in eandem partem, hoc eſt, utrobique vel per exceſſum, vel per defectum, deſcripto arcu ce, erit error lateris AC quantitas ed + dC; & error lateris CB, CD + DE. Jam ed = cD facile reperitur, ſi fiat cE : cD = *ſin.* C : R.

Fig. 68 Tab. VI Si erretur in partes contrarias (Fig. 68 Tab. VI), ita, ut angulus A accipiatur juſto minor quantitate CAc, & angulus B juſto major quantitate CBc, patet, loco ACB acquiri triangulum AcB, in quo deſcriptis arcubus Dd, DE, ce, evidens eſt, errorem lateris AC fore Dc — dC, & errorem lateris CB fore CD — De: eſt vero DE : Dc = *ſin.* C : R; & Dd : dC = *ſin.* C : *coſ.* C. Item Dd : CD = *ſin.* C : R; ac DE : cE vel eD = *ſin.* C : *coſ.* C. Unde intelligitur, qua ratione ſinguli errores acquirantur, datis erroribus angulorum.

Fig. 69 Tab. VII Fig. 67 Tab. VI Quod ſi angulus ACB (Fig. 69 Tab. VII) foret obtuſus, & errores conſpirarent in eandem partem, uti in (Fig. 67 Tab. VI) manifeſtum eſt, deſcriptis iisdem arcubus, errorem lateris AC fore Ce = cD — Cd, & lateris CB errorem CE = CD — ED, eorundem ſcilicet ſinuum differentiam, quorum in hypotheſi anguli ad C acuti ſummam acquiſivimus. Fig. 70 Tab. VII Ceterum per ſe clarum eſt, quod ſi etiam erretur in latere AB quantitate bB, ita, ut in angulis nullus committeretur error, triangulumque foret loco ACB alterum AGC, fore errorem in latere AC ex errore lateris AB, nempe GC, ad bB ut AG ad Ab, vel AC ad AB, & ad errorem CH in latere BC ut AG : Gb, vel AC : CB. Si ſimul erretur in angulis, error totalis in AC erit KC; in BC vero CL, ut patet, ſi deſcribantur arcus cK, cI, & ducatur IL ad AB parallela. Methodo æſtimandi errores expoſita, videndum modo, quis ſelectus in ſtationibus faciendus videatur, ut, ſi non evitari queant, ſaltem minuantur.

Fig. 71 N. I Tab. VII 184. PROBLEMA I. Si agatur de unico latere AD (Fig. 71 N. I Tab. VII) accurate determinando, & angulus DAB, cum latere AB ſit erroris expers, in metiendo autem angulo DBA erretur paucis minutis, invenire in latere AB poſitione dato ſtationem B, ut error in latere quæſito AD ſit minimus.

RE-

Reſol. Quoniam ponitur angulus A datus, & AB poſitione item dari, ſumatur AB tantæ longitudinis, ut angulus B fiat proxime $= 90^{v} - \frac{1}{2}A$. Dico, fore errorem DC, vel D*c* minimum. Concipiatur circulus C*c*B, quem in B tangat AB, AC autem ſecet in DC, vel D*c*, ita, ut angulus DBC, vel DB*c* metiatur errorem anguli B. Sumatur enim quodcunque aliud punctum *b*, vel β, & ducantur ad illud D*rb*, C*qb*, vel D*rb*, *cpb*; patet angulum DBC, cujus menſura eſt $\frac{1}{2}$DC, eſſe majorem angulo D*b*C, cujus menſura eſt $\frac{1}{2}DC - \frac{1}{2}rq$; ſi itaque in ſtatione *b* erraretur æquali angulo, arcus DC, conſequenter etiam ejus chorda, quæ eſt error lateris quæſiti, major eſſe deberet, quam ſi in ſtatione B hoc angulo erretur. Jam vero eſt ex Geometria $DA : AB = AB : AC$, & $\sqrt{AD \times AC} = AB$, & cum DC ſit quantitas exigua, debebit AD, vel AC eſſe proxime æqualis cum AB, ac triangulum DAB iſoſceles, conſequenter angulus $ABD = ADB$; eſt autem $ABD = 180^{v} - ADB - DAB$, ſeu $2ABD = 180^{v} - A$, & $ABD = 90^{v} - \frac{1}{2}A$. Quare ſi ita ſeligatur ſtatio B, error in latere quæſito erit minimus. Q. E. I.

185. **Schol. I.** In praxi raro contingit dari angulum A ſine errore, niſi dum metienda eſt altitudo aliqua perpendicularis (Fig. 44 Tab. IV) KI, acceſſa; tum enim angulus rectus H vel I datur, & ex reſolutione patet, debere ſumi $IL = IK$, quod obtinetur, ſi fuerit angulus KCH proxime 45^{v}. Extra hunc caſum illud etiam ſæpe permoleſtum accideret, quod baſis (Fig. 71 N. 1 Tab. VII) AB tantæ longitudinis ſumenda eſſet, quantæ eſt ipſum latus metiendum. At quando accurate foret $AB = AD$, ſive $B = 90^{v} - \frac{1}{2}A$, calculo opus non foret, ſed conſtaret ex dimenſione AB ipſa longitudo lateris quæſiti.

Fig. 44 Tab. IV

Fig. 71 N. 1 Tab. VII

186. **Schol. II.** Quando angulus A, conſequenter ſitus baſeos AB non datur, evidens eſt, eo minorem futurum errorem DC, quo minus fuerit latus BD. Nam cum ſit error anguli DBC ad errorem lateris DC, ut ſinus C vel D ad ſinum totum (182), decreſcente in infinitum latere BD error anguli ſemper decreſceret. Verum eſt contra hypotheſin, latus AB incidere in AD. Et alias etiam extra caſum Scholii prioris vix contingit, ut detur angulus A ſine erroris periculo. Quare quærendum potius videtur, quæ ſtatio eligenda in linea poſitione data, dum in utroque angulo erratur, & quidem ſi poni poſſit, quod errores in eandem partem conſpirent, dein ſi erretur in partes oppoſitas. Unde rurſus duplex enaſcitur quæſtio.

187. **Problema II.** Dato latere AB poſitione, & poſito in utroque angulo A & B errore CA*c*, CB*c* in eandem partem, quæritur ſtatio E, ut error lateris AC ſit minimus (Fig. 71 N. 2 Tab. VII).

Fig. 71 N. 2 Tab. VII

Reſol. Oſtendimus (183) errorem lateris AC (ſi deſcribatur arcus *ce*) eſſe *e*C, qui ſi error anguli A dicatur = EA, & error anguli B = E . B, exprimetur per $\frac{E.B \times R \pm E.A \times \text{coſ.}C}{\text{ſin. } C}$. Evidens eſt, *e*C eo fore minorem, quo punctum *c* fuerit propius ad D. Demittatur ex C ad AB perpendiculum CF, quod ſecet B*c* in K. Manifeſtum eſt, eo fore *c* propius ad D, quo

K fuerit propius ad C, hoc eſt, quo CK minor fuerit; erit autem CK eo minor, quo, ſi ex ſtatione B metiendum eſſet FC, error in FC foret minor; & ex præcedente conſtat, CK fore minimum, ſi fuerit FB = FC; quare ſtatio ita in E eligenda eſt, ut ſit proxime FE = FC, quod obtinetur, ſi AE ſumatur tantæ longitudinis, ut angulus ad E ſit proxime 45°. Q. E. I.

188. SCHOL. Procul dubio dimenſio tantæ baſeos AE (quæ ſemper erit multo major, quam AC, ſi angulus ad A non ſit prorſus exiguus, cum ſit AF + FC > AC) plus moleſtiæ ſæpe habet, quam fortaſſis utilitatis ſit in errore minimo lateris AC. Interim libuit reſolutionem proponere, cum caſus, quo plus eſſet poſitum in dimenſione lateris AC accuratiore, quam in quovis labore exhauriendo, reapſe emergere poſſit. Ceterum illud univerſe Tirones hoc loco obſervare poſſunt, vix poni poſſe, quando eodem inſtrumento accipiuntur anguli, angulorum errores eſſe diverſos, cum iſthic non agamus de erroribus, qui ex vitio inſtrumenti pendeant, ſed qui ex minus accurata collineatione oriuntur. Unde hanc hypotheſin deinceps ſtatuamus, niſi contrarium ex peculiaribus circumſtantiis monendum ſit.

189. PROBLEMA III. Si dato latere AB poſitione, erretur in utroque angulo A & B in partes contrarias, quæritur ſtatio B, ut error in latere AC
Fig. 72 Tab. VII ſit quam minimus (Fig 72 Tab. VII).

RESOL. Sumatur angulus ad B recto proximus, & ſi AC ſit latus quæſitum, ab Ac vix ſenſibiliter differet. Concipiatur enim ſuper AC deſcriptus ſemicirculus, erit Ac chorda arcus ABc, qui a ſemicirculo differt arcu Cc, qui pro recta haberi poteſt, eritque $Ac = \sqrt{AC^2 - Cc^2}$; oſtendimus autem jam (97) quam exigua ſit differentia inter AC & $\sqrt{AC^2 - Cc^2}$ etiam tum, quando Cc eſt — $\frac{1}{120}$ de AC; habet autem Cc ad AC multo minorem rationem, cum, ſi radio AC deſcribatur arcus metiens errorem anguli A, is a Cc ſenſibiliter differre haud poſſit, isque arcus paucorum minutorum ponatur, quare diſcrimen inter AC & Ac ſentiri vix poteſt.

190. OBSERVA. Hypotheſis, quod errores ſint oppoſiti, quando in utroque metiendo angulo peccatur, tantum unico gradu probabilior eſt altera, quod errores conſpirent in eandem partem; unde licet poni non debeat, quod erretur in eandem partem, *incertitudo* tamen relinquitur erroris in latere quæſito tanta, quantus is fieret erroribus conſpirantibus.

191. PROBLEMA IV. Si errores in angulorum menſura commiſſi conſpirent in eandem partem, & latus AB poſitione non datur, ſeu ſit libera baſeos electio; quæritur, an non haberi poſſit aliqua ſtatio B, ut error in latere AC fiat inſenſibilis?

Fig. 73 Tab. VII RESOL. Sit (Fig. 73 Tab. VII) latus quæſitum AC, ſuper quo conſtruatur triangulum iſoſceles ad O rectangulum, & ſuper AO producta deſcribatur ſemicirculus; utrinque ad C capiantur arcus æquales exigui CF, CE, quorum dimidii metiantur errores in angulis admiſſos, & ducta AE, quæ ſecet CO in K, deſcribatur centro A arcus Cc menſura erroris; agatur per F & c recta occurrens peripheriæ in B, erit B ſtatio quæſita. Patet enim, ſi uter-

uterque angulus ſit minor quantitate CAE, FBC, loco lateris AC, acquiri A*c* illi æquale. Sed quæritur jam, quomodo ſtatio B in campo inveniri poſſit.

Cum AC ſit quadrans, erit CBA proxime 45^{v}; & cum CE arcus parvus non differat a chorda cognomine, erit etiam CEK ſemirectus, conſequenter etiam CKE, ob rectum KCE; igitur quia C*c* ad KE perpendicularis, erit quoque K*c* = *c*E.

Ducatur FK, quæ erit ob CF = CE, etiam æqualis cum KE, adeoque FKC = CKE = 45^{v}, & FKE = 90^{v}, conſequenter FK ad K*c* perpendicularis, & producta tranſibit per D. Hinc FK : K*c* = 2 : 1 = R : *tang*. DFB, Invenitur e tabulis BFD proxime $26^{v}\,34'$, & arcus DB $52^{v}\,8'$, BC vel BE proinde $37^{v}\,52'$, ac denique angulus CAB = $18^{v}\,56'$. Habitis angulis CBA = 45^{v}, & CAB = $18^{v}\,56'$ determinata eſt ſtatio B. Q. E. F.

192. COROLL. Si aſſumatur AC = 1, reperitur Logarithmus de AB 0,1039284, cui proxime reſpondent 1,27.

193. Videamus modo, quomodo congruat calculus. Ponamus errari in ſingulis angulis $5'$, adeoque ſumi CAB = $18^{v}\,51'$, & CBA = $44^{v}\,55'$, erit ſupplementum de ACB = $63^{v}\,46'$, & *ſin*. $63^{v}\,46'$: *ſin*. $44^{v}\,55'$ = AB : AC.

Log. $44^{v}\,55'$ = 9,8488524
Log. AB = 0,1039284
Summa = 9,9527808
Sin. $63^{v}\,46'$ = 9,9527931
Different. = 0,0000123 negativa

ſeu Log. AC — 1,9999977 ſemipoſitivus, cui utrivis competit plus, quam 0,99999; adeoque deficit ab 1 (quæ reperta fuiſſet, ſi nullus in angulis fuiſſet error) minus quam 0,00001, hoc eſt, ſi latus AC fuerit 8333 pedum, error nondum penitus æquat unum digitum.

194. OBSERVA. Non negandum eſt, ſtationis hujus electionem operoſam admodum reddi per longitudinem baſis AB metiendam. Præterea, cum probabilius ſit, errores angulorum non conſpirare, quam in utroque peccari in eandem partem, latus manet adhuc incertum in hac ipſa ſtatione errore *c*E æquali cum errore anguli A, nempe C*c*. Ceterum nullum eſt diſcrimen, ſi ponantur anguli veros eadem quantitate excedere, quia tunc tantum rectæ ex A per F, & ex B per E ducendæ ſunt, ac perpendiculum OC uſque ad earum concurſum in K prolongandum, quod nihil in demonſtratione mutat. Si fingas errari in angulo A tantummodo, & latus quæſitum AC opponi angulo experti erroris B, tum ſane patet, non aliam ſtationem, quam D, deligi oportere, cum C*c* illuc tendat, fiatque A*c* = AC. Verum quando non tam intereſt, ut latus aliquod accurate habeatur, quam ut ſitus verticis trianguli, quod ſuppoſitis erroribus obtinetur, quam minimum aberret a ſitu verticis veri trianguli, quod ſine erroribus angulorum obveniſſet, quæſtioni ſequenti locus eſt.

195. PROBLEMA V. Poſitis erroribus in metiendis angulis æqualibus, invenire ſtationem B (vel *b*) ejus conditionis, ut diſtantia C*c* verticis trianguli veri ACB vel AC*b*, & erronei A*c*B vel A*cb*, ſit minima (Fig. 74 Tab. VII). Fig. 74 Tab. VII

RESOL. Quoniam ponitur, errari angulo CA*c* in menſura anguli A, ubicunque eligatur ſtatio B, *b*, & error in angulo B (vel *b* ſit æqualis), diſtantia verticum nequit fieri minor, quam C*c*, error anguli A. Cum enim ſit C*c* perpendicularis ad AC, A*c* proxime, & dum errores conſpirant, ducatur ad A*c* ex B linea alibi interſecans eam, quam in *c*, diſtantia verticum jam fieret hypotenuſa trianguli ad *c* rectanguli, adeoque major catheto C*c*. Idem eſt, ſi angulorum errores ſint contrarii. Quare evidens eſt, ita debere in caſu errorum conſpirantium eligi ſtationem B, ut ſit, ſi ponamus ſuper diametro C*c* deſcriptum circulum CD*cd*, C*c* : *c*D = AC : CB, vel *c*B; tunc enim errores angulorum æquales ſunt. Idem debet fieri in caſu errorum contrariorum, nempe debet eſſe C*c* : *cd* = CA : *cb*. Dantur itaque infinita puncta B, & *b*, ſed pro B anguli A*c*B ſemper erunt obtuſi, pro *b* vero acuti.

196. COROLL. I. Unicus angulus ad C excluditur. Nam ſi in C*c* producta accipias punctum quodlibet G, & ducatur inde recta aberrans a vero puncto C, ſecabit rectam A*c* vel inter *c* & F, vel inter *c* & A, & diſtantia verticum fit hypotenuſa trianguli rectanguli, major, quam C*c*.

197. COROLL. II. Angulus AC*b* in caſu errorum oppoſitorum tantum deficit a recto, quantum eundem excedit in caſu errorum conſpirantium, ſi latera *cb*, *c*B ſumantur æqualia. Quippe fit tum *cd* = *c*D, adeoque *d*C*c* = DC*c*.

198. COROLL. III. In caſu, quo obtinetur diſtantia verticum minima C*c*, ſimul obtinetur latus AC erroris expers, ob A*c* = AC. Quare liquet 1*mo* in caſu errorum oppoſitorum fieri angulum A*b*C proxime rectum, angulum ACB vero, quando errores conſpirant in eandem partem, tanto magis obtuſum, & tanto longiorem baſin AB, quo latus *c*B, vel CB ſumitur majus. 2*do*. Conſtat, Problema IV habere plures ſolutiones, & eſſe indeterminatum.

SCHOL. Problemate IV determinavimus angulum CAB = 18° 56′, pro caſu particulari. Si (Fig. 75 Tab. VII) producatur AC, & radio CL = ½AC deſcribatur ſemicirculus, & ex A ducatur tangens AB, clarum eſt, fore CAB angulum maximum, qui haberi poteſt. Punctum enim B ob angulos *c*AC, *c*BC æquales per hypotheſin, ſemper incidet in peripheriam circuli centro L deſcripti, & recta ex quovis alio puncto, quam contactus B, ad A ducta, ſemper cadet intra angulum CAB. Eſt autem AL : LB = 3 : 1 = R : *ſin.* CAB, ex quo reperitur CAB paullo major, quam 19° 28′. Fig. 75 Tab. VII

Ceterum facile apparet, ſi in Fig. 73, & 72 ducantur centro B arcus C*d* & *cd*, eos reſpondere chordis *c*D, *cd* Figuræ 74.

Fig. 76 Tab. VII 199. Quando ex duabus ſtationibus A, B (Fig. 76 Tab. VII) metienda eſt diſtantia CD, nimis multæ hypotheſes errorum in angulis fieri poſſunt, quam ut eas perſequi operæ ſit pretium. Hinc ſequentia tantummodo obſervamus. *Primo.* Si errores in angulis DBA, CAB admiſſi conſpirent in ean-

eandem partem, ſintque v. g. *d*BD, CA*c*; qui vero in angulis CBD, CAD admittuntur, conſpirent quidem inter ſe, ſed ſint prioribus oppoſiti, error in CD maximus enaſcitur, cum loco CD acquiratur *cd*. Si in omnibus peccaretur exceſſu, acquireretur K*k*; ſi defectu, κδ; utraque autem major eſt, (& propius ad CD accedit) quam *cd*. *Secundo.* Si errores angulorum DBA, CAD conſpirent inter ſe, & ſint oppoſiti erroribus pariter inter ſe conſpirantibus angulorum DBC, CAB, error lateris CD erit differentia inter CD & κK, vel inter CD & *k*δ, adeo, ut frequentius hi errores errorem diſtantiæ CD minuant, aut etiam penitus tollant. *Tertio.* In caſu erroris, quem primo loco attulimus, dum acquiritur *cd* loco CD, error lateris CD erit tanto minor, quanto baſis AB propius accedit & ad parallelismum cum CD, & ad ejusdem longitudinem. Quippe eſt CD : *cd* = DG : *d*G, poſita baſi parallela. *Quarto.* Si anguli DBC, CAD accedant ad rectos, & errores angulorum DBA, DBC; item CAB, CAD contrarii, & æquales ſint, error in diſtantia CD parvus, aut nullus erit, modo ſumma angulorum DBA + DAB ſit prope æqualis ſummæ CAB + CBA. Tunc enim latus, quod loco CD acquiritur, velut κK, vel *k*δ, eſt chorda diametro circuli, in quo ſunt anguli A & B, valde propinqua, aut ipſa diameter = CD, & anguli C & D ſunt ad peripheriam ejusdem circuli. Obtinebitur autem, ut dictæ angulorum ſummæ proxime æquentur, ſi curetur, ut baſis AB ſit fere parallela ad CD, & prope medium.

200. Hujus Articuli argumentum paullo diligentius perſecutus ſum in brevi Diſſertatione idiomate Germanico edita Viennæ 1766; ubi plures adhuc reflexiones occurrunt. Nobis hæc ſatis ſint, poſtquam pauca addidero de influxu errorum in ſeriem triangulorum communibus lateribus inter ſe nexorum. Intereſt plurimum non modo, cujus ſpeciei ſint triangula, verum etiam, quænam eorum latera ſecundum ſeriei longitudinem potiſſimum ſita ſint, quæ ſi minoribus erroribus fuerint obnoxia, terminorum extremorum diſtantia ex ea triangulorum ſerie multo accuratius reperietur. Exemplum facile nobis præbeat duplex triangulorum ſeries (Fig. 77 Tab. VII), altera conſtet meris triangulis æquilateris ACB, CBL, BLM, LMN, MNO, NOP, altera contineat mera triangula iſoſcelia rectangula ADB, DBF, BFM, FMQ, MQO, QOZ, quorum hypotenuſæ ſint ſecundum longitudinem rectæ extremos terminos nectentis AW diſpoſitæ, ſitque primi trianguli rectanguli DAB hypotenuſa æqualis lateri primi trianguli æquilateri AB. Fingamus, errari in angulis A & B æqualiter, & quidem erroribus conſpirantibus, ita, ut loco lateris AC, vel BC acquiratur latus A*d*. Quia errores æquales ſunt, erunt arcus eos metientes, ut ipſa latera, ſive *cd* : *ef* = AC : AD; ſi aſſumatur latus AB = AC = L; cum angulus *d*C*c* ſit = 30^v, erit *cd* : *d*C = 1 : $\sqrt{3}$; ponamus præterea eſſe *cd* partem n^{esimam} lateris AC, vel A*d*, erit error $dC = \frac{L\sqrt{3}}{n}$. Et ſi fingamus, deinceps nullum errorem admitti, loco prioris ſe iei, habebitur præter A*c*B, *c*BG, BGH, GHI, HIY, IYK, & poſteriorum

Fig. 77
Tab. VII

rum quinque latera erunt ſingula $L - \frac{L\sqrt{3}}{n}$. Quia in triangulo rectangulo & $AB : AD = \sqrt{2} : 1$, erit $AD = \frac{L}{\sqrt{2}}$; & quia errores æquales, ſeu arcus ſimiles ſunt ut latera, erit $cd : ef = L : \frac{L}{\sqrt{2}}$, & cum poſuerimus eſſe eum partem $n^{\text{eſimam}}$ radii, ejus valor erit $\frac{L}{n\sqrt{2}}$; hinc, ob triangulum cfD rectangulum & iſoſceles, erit $cd = fD = \frac{L}{n\sqrt{2}}$, conſequenter $Ae = \frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}$ & in eadem hypotheſi nullius erroris conſequentis ad hunc, triangulorum deinceps eBR, RST, STV &c catheti omnes erunt æquales cum $\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}$. Videndum modo, quis error in hypotenuſa oriatur; cujus quadratum erit $2\left(\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}\right)^2$, & proinde ipſa hypotenuſa $= \sqrt{2} \times \left(\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}\right) = L - \frac{L}{n}$. Ex quo evidens eſt, errorem eundem in angulis minus obeſſe hypotenuſæ triangulorum rectangulorum ſeriei, quam lateribus ſeriei triangulorum æquilaterorum, cum $L - \frac{L}{n} > L - \frac{L\sqrt{3}}{n}$. Hinc ſeries rectangula, in qua ultimum triangulum eſt TVX, propius accedet ad terminum W, quam ſeries æquilatera, in qua ultimum triangulum eſt IYK.

201. Multo magis erraretur in menſura diſtantiæ AW, ſi ſimiles errores admitterentur in reliquis etiam poſt primum triangulis, ſiquidem omnes conſpirarent. Sed enim hoc poni non debet, cum tanto minus ſit probabile, errores conſpirare, quanto major eſt triangulorum numerus, & idem gradus probabilitatis ſit in ſingulis pro erroribus oppoſitis.

Porro ſeriem triangulorum æqualium in praxi vix unquam habere poſſumus, neque aliud videtur attendi debere, quam ut nullus angulus ſit admodum parvus; nam in latere oppoſito error fieret magis ſenſibilis, cum illud latus ceteris minus eſſet, & in ſeriem laterum error ſæpiſſime æqualiter influit. Hinc ſi liberum ſit, ſtationes ita erunt ſeligendæ, ut evitentur anguli, qui infra 25^{v} gradus ſunt. Præterea triangula non debent eſſe nimis parva, cum non modo numerus eorum admodum excreſceret cum ingenti calculi moleſtia, ſed etiam reductio angulorum ad centrum fieret minus ſecura. Sed qui id genus majores menſurationes aggrediuntur, ut jam diximus, longe aliis ſubſidiis inſtructi eſſe debent, quam quæ a nobis petant.

Non abs re fuerit, hoc loco monere Tironem de uſu non nullarum machinarum opticarum, quarum ſubſidio diſtantia quæpiam alicujus loci ex una, ut ajunt, ſtatione acquiritur. Variæ autem a diverſis jam olim excogitatæ ſunt, atque cum mox inſufficientiam ſuam proderent, rejectæ; alii deinceps rem ſubtilius aggreſſi micrometris uſi ſunt. Poterat hunc in modum inſtrumentum confici. Sit ſuper tabula EFGH (Fig. 108 Tab. X) tubus fixus AB, ut ejus axis baſi BD tabulæ ſit accurate normalis; ſit CD tubus alter itidem, ſi lubet, fixus, vel etiam mobilis circa centrum D, ut alterum extremum percurrat quadrantem FKI. Uterque ſit micrometro inſtructus. Si per tubum AB collineetur in objectum, ut id in filorum interſectione appareat, & in altero tubo accipiatur per micrometrum ejusdem diſtantia a filo medio verticali, acquiritur reapſe angulus, ſub quo ex objecto apparere debet diſtantia tuborum parallelorum BD, ideoque in triangulo rectangulo habetur baſis DB, angulus rectus ad B, & angulus ad objectum, innoteſcit proinde ex ordinaria reſolutione diſtantia objecti. Quod ſi diſtantia non ſit admodum magna, ut angulus ad objectum ad aliquot gradus, aut generatim ad majorem aſcendat, quam qui micrometro capi queat, poſſet moto tubo CD in arcu FKI accipi numerus graduum integrorum, & minuta ac ſecunda obtineri per micrometrum. Ut adeo reipſa talis dimenſio non ex una, ſed duabus ſtationibus, B & D fiat. Quidquid autem hujusmodi machinarum excogitatur, ſemper ad hæc fere reduci poterit totum artificium.

Fig. 108 Tab. X

Eſto itaque AB (Fig. 109 Tab. X) baſis trianguli CAB rectanguli ad A, in quo AB reſpondet diſtantiæ tuborum parallelorum prioris figuræ BD, & C eſt angulus ad objectum, exiguus proinde, ſi diſtantia AC vel BC (quæ ſenſibiliter differre nequeunt) ſit magna. Videamus jam, quantum tali menſurationi tribui poſſit.

Fig. 109 Tab. X

Certum eſt, etiam in tubis ſeptem, octove pedum, angulos vix certos eſſe ad $3''$ vel $4''$; multum ergo tribuemus, ſi demus machinæ menſoriæ angulos certos ad $5''$. Sit AB 3 ped. 5 dig. 8 lin. ſeu 500 linearum. Ponamus errari angulo EBD = $5'$, erit error in diſtantia = EC (ſi centro B intelligatur deſcriptus arcus ED). Quæritur *primo*, quanta poſſit eſſe diſtantia AC, ut EC ſit ejus pars v. g. $\frac{1}{1000}$? facile ea invenietur, ſi attendatur, quod triangula CAB, CED ſint ſimilia quam proxime, cum angulus ad B non niſi $5''$ a recto differre ponatur. Hinc erit ED : AB = CE : CA. Debet autem per hypotheſin eſſe CE : CA = 1 : 1000; igitur neceſſe eſt, ut etiam ſit ED pars milleſima de AB, hoc eſt, ut ſit $\frac{ED}{500\,\text{lin.}} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{2}$ lin. ſupereſt itaque, ut quæratur diſtantia, ad quam $\frac{1}{2}$ linea apparet ſub angulo $5''$, quæ innoteſcet, ſi fiat: ut $5''$ ad $206264'',8$, ita $\frac{1}{2}$ linea ad diſtantiam quæſitam. Reperitur AC non major, quam 143 ped. 2 d. 10,5 lin., ipſe vero error CE erit 1 dig. 8,6 lin. Intelligitur hinc, pro magnis diſtantiis id genus machinas prorſus ineptas eſſe, ſi quid accurationis requiratur ad operationem, & pro minoribus ad eandem accurationem ſufficere inſtrumenta ordinaria, cum dimenſio baſeos non magnæ tam moleſta non ſit, ut ſumptus in ejusmodi pretioſas machinas æquare videatur.

Secundo. Quæri poteſt, ſi diſtantia AC ſit v. g. 2000 pedum (quæ ſane nondum inter magnas haberi poteſt) quantum errari poſſit in diſtantia, poſito errore $5''$ in angulo? In hac hypotheſi ex data AB, AC facili calculo reperitur angulus ad C $= 0^{v}\ 6'\ 58''$. Quia error EBD $= 5''$, erit angulus AEB priore $5''$ major, adeoque $= 0^{v}\ 7'\ 3''$. Anguli parvi, ut ſunt præſentes, ſunt proxime reciproce ut diſtantiæ AC & AE; hinc $7'\ 3'' : 6'\ 58'' =$ 2000 ped.: AE, quod obtinetur paullo majus quam 1976,3 ped. ut adeo CE ſit ſaltem 23,6 pedum, qui error profecto in tantula diſtantia admodum notabilis. Unde conficitur, parum confidi poſſe in ejuſmodi inſtrumentis.

ARTICULUS VI.

De Libellatione.

Fig. 63 Tab. VI

202. Libella dicitur quodvis inſtrumentum, quo determinatur linea per oculum ſpectatoris tranſiens, & ejus lineæ verticali perpendicularis. Sic (Fig. 63 Tab. VI) ſi ſpectator in A conſiſtat, ejus linea verticalis eſt AEC; AH vero ad AC perpendicularis in A (in quo puncto ponitur ſpectatoris oculus) eſt *linea libellæ*, alio nomine etiam *horizontalis*, & inſtrumentum, quo poſitio vera hujus lineæ obtinetur, libella eſt. Hinc *horizon verus* Telluris (quæ iſthic ſphærica ponitur) vel ſpectatoris A alius eſt, quam linea libellæ, nempe arcus radio CA deſcriptus, & ea dicuntur eſſe in eodem horizonte vero, quæ ſunt in hoc arcu; quæ autem ſita ſunt in linea libellæ, dicuntur eſſe in eodem horizonte apparente: unde linea libellæ etiam vocatur *horizon apparens*. Unde ſequitur, ea, quæ ſunt in horizonte vero eodem, habere eandem a centro terræ diſtantiam, conſequenter cum fluida non moveantur vi ſuæ gravitatis, niſi verſus centrum Telluris, aqua in eodem horizonte vero poſita non fluit, ſed ſtagnat. At quæ in eadem linea libellæ ſunt, quando diſtantiæ duorum objectorum ingentes ſunt, nequaquam eandem diſtantiam habent a centro Telluris, ut patet in eadem figura, quippe punctum L cum B eſt in eadem linea libellæ, ſed quia horizon verus puncti B eſt arcus BD, ſi quis canalis directione LB duceretur, aqua ex L verſus B flueret, utpote cum $LC > DC$ vel BC. Denique patet, lineam libellæ nil aliud eſſe, quam tangentem arcus, ſive veri horizontis, & ut objectum aliquod (ſi mentem a refractione interim abſtrahamus) ſpectatori in B poſito viſibile ſit, oportet, ut ſit in ſecante hujus arcus CA, ex qua ultimum punctum, quod videri poteſt, eſt ipſum L; quæ infra hunc terminum ſunt, apparere haudquaquam poſſunt, ſi ſcilicet ſpectatoris oculus B ponatur in ipſo horizonte vero; at ſi ſupra hunc elevatus eſſet, videre poſſet omnia, quæ inter B, & punctum contactus radii ex oculo ad horizontem verum ducti poſita ſunt.

203. Maximi uſus eſt ars libellandi, ſive inveniendi, quantum locus quiſpiam altero magis ſit editus, vel a centro Telluris diſtet, quando non ar-

duus & præceps eſt aſcenſus, ut in multis montibus, ſed lenis acclivitas, quæ commode ope Trigonometriæ menſurari haud poteſt. Sæpiſſime aquæ derivandæ ſunt (ut alias cauſas taceam, quæ variæ occurrere poſſunt) ſæpe rivorum, torrentium alvei mutandi; quibus caſibus ſumma diligentia prius explorandum, num ſufficiens inter eum locum, ex quo derivanda aqua eſt, & eum, ad quem canalis ſtruendus eſt, ſit declivitas, ne improvidi moliminis ſumptus projiciantur, aut etiam non nunquam vicinia tota ingenti damno afficiatur.

Putavimus autem libellationem a Trigonometria haud ſejungendam, non modo quod ſtationum intervalla hujus ope definiantur, ſed quod etiam ipſa ſit quædam ſpecies metiendi altitudinem acceſſam, non quidem ad pedem, ſed ad ſupremum punctum. Et quoniam argumentum hoc non utilitate tantummodo ſua ſeſe commendat, verum etiam ſat amplum eſt; partiamur præſentem Articulum in duas *Sectiones*, in quarum priore de libellatione minore, quando diſtantiæ ſtationum exiguæ ſunt, tractabimus; de majore, dum intervalla ſtationum ingentia ſunt, in poſteriore agemus; atque ne memoria Tironis fatigetur, ſingulas rurſus in ſuos paragraphos dividemus.

SECTIO I.

De libellatione minore.

§. I.

De inſtrumentis, ſeu variis libellis.

204. Libellationem minorem voco, in qua ſtationum intervalla tam exigua ſunt, ut tangens arcus ab ipſo arcu (ſeu linea libellæ (202) aut horizon apparens ab ipſa diſtantia in horizonte vero) ſenſibiliter non differat, quod ſemper contingit, quando diſtantia eſt infra 300 pedes. Inferius videbimus, ſi ſtationes 306 pedibus remotæ ſunt, non niſi 0,34 lineæ correctione opus eſſe. Et ſane inſtrumentis minoribus, maxime ſi tubis inſtructa non ſint, vix accurate ad tantam diſtantiam, ſigna, quæ in perticis figuntur, diſcerni poſſunt, ut non errori aliquot linearum locus ſit. Deſcribemus hoc quidem loco non niſi tres libellarum minorum ſpecies & uſitatiores, & facile parabiles; per quod tamen non ſimpliciter reliquas omnes proſcriptas volumus: illud vero optamus potius, ut pro minoribus libellationibus adhibeantur inſtrumenta majoribus apta, ſed ad modulum minorem conſtructa.

205. (Fig. 78 Tab. VIII) eſt AB tubus verſus extrema recurvus ex lamina orichalcea, aut alia quavis materia aquam continente, annulo K inſertus, qui connectitur collo ſphæræ ſolidæ I, quæ intra cavam S in omnem partem Fig. 78 Tab. VIII

tem mobilis eſt, atque dum ſitus debitus obtentus eſt, cochlea T firmatur; tota machina pede VV ſuſtentatur. Longitudo tubi AB arbitraria eſt, atque fere intra 3 pedes conſiſtit. Extremis A, B inſeri ſolent cylindri cavi vitrei DC, FE, pice liquata, aliove apto glutine viam omnem aquæ intra cylindrorum latera & laminam tubi AB effluxuræ præcludente. Tum aqua in cylindros per tubum AB communicantes infunditur, quæ utrinque ad æqualem altitudinem *m*, *n* ex liquorum proprietate ad æquilibrium tendentium aſcendit. Libella hunc in modum vulgo parata, trans ſuperficiem aquæ *mn* collineatur oculo ad *m* conſtituto. Verum quam facile a vera aquæ ſuperficie aberrari notabiliter poſſit, quisque facile intelliget, qui attenderit, ſuperficiem eam (etſi aqua colore quopiam infecta ſit) haud ita facile per vitri latera diſcerni poſſe, quod undique prope vitrum aqua attollatur concava ſuperficie.

Unde ſaltem dioptræ addendæ forent utrinque ad cylindrorum vitreorum latera, velut Q exiguo foramello inſtructa, cui opponatur altera R foramine circulari ampliore prædita, in cujus centro fila decuſſatim ducta ſe interſecent; uti & P itidem foramellum parvum oculo objiciens, cui altera O in cylindro oppoſito reſpondeat, quæ ſit filis, uti dioptra R, inſtructa. Poſſent etiam in eadem dioptra v. g. O tam foramen amplum cum cruce filari, quam exigum illud foramellum fieri, quod dioptræ filari opponitur, ſi itidem dioptra P ſimili ratione duplicaretur.

Fig. 79 Tab. VIII 206. Altera libella eſt quodlibet Goniometricum (Fig. 79 Tab. VIII) AOB*a*, modo dioptris AC, BD inſtructum ſit, quorum altera AC foramellum circulare, altera DB fila ſeſe decuſſantia habeat, atque ad ſitum verticalem erigi poſſit, ut e centro O perpendiculum OP ſuſpenſum filo gradum nonageſimum ad *a* notet: tum enim regula AB ſitum horizontalem obtinebit, ſi inſtrumentum nullo vitio laboret. Ex hoc autem patet, innumera inſtrumenta pro libellatione adhiberi poſſe; neque opus eſſe ſemicirculo A*a*B, ſed ſufficere, ſi per O*a* tranſeat regula ad AB normalis, quæ in *a* notam habeat, quam filum perpendiculi tangere debet, ut ad O angulos rectos utrinque efficiat. Hæc inſtrumenta eo aptiora erunt libellationi, quo majora, præcipue quo longiora fuerint perpendicula, quæ ne aeris agitatione facile moveantur, capſis includi poſſunt, & ne oſcillationes diutius morentur properantem, vaſculo aquam continenti immitti, cujus majore reſiſtentia oſcillatorius motus citius extinguitur. Sed illud, quandocunque perpendiculorum uſu linea libellæ determinatur, vel maxima ſolicitudine curandum, ne filum vel regulam AB prope O, ubi ſuſpenditur, tangat, vel prope *a*, neque etiam nimis multum ab O vel *a* diſtet, ſed proxime quodammodo radat, ut libere, & ſine attritu in utramque partem adhuc oſcillare poſſit. Hinc in majoribus inſtrumentis filum perpendiculi, cujus extremum laxiorem efficit annulum, ex aciculæ cuſpide centro inſtrumenti imminente, ſuſpenditur, ne vel arctior nexus cum acicula, vel contactus cum centro attritum efficiat, qui libertati oſcillationum obſtet.

207. Utri-

207. Utrique libellæ præſtare videtur hydroſtatica, de qua generatim jam mentionem fecimus (99) ſi accurata ſit. Quid autem ad ejus perfectionem, ut apta ſit libellationi, requiramus præterea, paucis exponemus. *1mo.* Debet eſſe debitæ longitudinis, ſaltem unius pedis (Fig. 80 Tab. VIII). *2do.* Tubi vitrei latera interna debent eſſe perpolita. In hunc finem cylindrum vitreum alium *D. Cheſis* (vid. *de la Lande* Aſtron. §. 1911) externe polit ope cylindri cavi cuprei, ut cavitati tubi pro libella deſtinati congruat; tum pulvere ſmiridis conſperſa ſuperficie convexa eum intra cavum tamdiu verſus utrumque extremum movet, donec abraſis omnibus inæqualitatibus, ſuperficies interna cavi ſit polituræ apta, quam peragit, alterius convexa ſuperficie charta obducta, & terra Tripolitana conſperſa. An rite hæc præſtita ſint, facile dignoſcitur, ſi tubo aqua repleta bullæ aereæ, quæ relinquitur, motus, dum regulæ, cui incumbit tubus, exigua inclinatio fit, æquabilis advertitur, & non ſaltim fieri. *3tio.* Si tubi vitrei longitudo ſit 1 pedis, longitudo bullæ IK ſaltem 8 vel 9 digitorum ſit, oportet. Nam ſi parvæ relinquantur bullæ, tempeſtate calidiore lentius moventur, affrictu adverſus tubi latera, dum liquoris expanſione aer violente conſtringitur, nimis ſenſibili, quod fieri nequit in bullis magnis & conſequenter aquæ expanſione non tam magna reſpectu voluminis bullarum. *4to.* Tubus orichalcinus, qui vitreum continet, & munit, LEGHFM, altero extremo ſupra regulam orichalcinam figi debet, altero ope cochleæ poſſe deprimi, & per ſuppoſitam laminam elaſticam, dum in contrariam partem cochlea circumagitur, attolli, ut libella examinari poſſit, de quo examine mox dicemus. *5to.* Regula ipſa pedi apto (qualem ſuperius (205) indicavimus (Fig. 78 Tab. VIII)) conjungi debet, & dioptris inſtrui duplicibus, velut ad A foramine amplo circulari, in cujus centro fila tenuia ſe in crucis formam interſecant, cui opponitur in altera ad C foramellum exiguum itidem circulare. Viciſſim dioptræ filari D opponitur foramellum circulare B in priore. Licet in alios uſus, laudatus ſuperius *D. Cheſis* tam accuratas libellas unicum pedem longas conſtruxit, ut inclinatio etiam unius ſecundi motu bullæ per ſpatium unius lineæ indicaretur, quæ accuratio vix per perpendicula mediocris longitudinis haberi poteſt. Unde colligitur, commode id genus libellas debite conſtructas, atque exploratæ bonitatis ſubſtitui poſſe non modo in Goniometricis parvis perpendiculo, verum etiam in quadrantibus aliquantum majoribus, dum altitudines metiendæ ſunt, quod perpendiculorum oſcillatio obſervatorem fere diutius morari ſoleat.

Fig. 80 Tab. VIII

Fig. 78 Tab. VIII

§. II.

De Examine libellæ.

208. Tum pro ipſa libellatione, tum pro libellarum examine, ad manum eſſe debent tabulæ certa nota inſignitæ, ad quam collineandum eſt, cujusmodi eſſe poſſunt (Fig. 81 Tab. VIII) vel tabula nigra cum annulo albo

Fig. 81 Tab. VIII

Fig. 82
Tab. VIII

nigrum circellum, cujus diameter v. g. 1 digiti, ambiente, vel tabula nigra cruce alba diſtincta, aut ex oppoſito alba tabula cum nigro annulo vel cruce, ut ad A & B exhibetur. Tum crucis, tum circelli medii ea debet eſſe amplitudo, ut per dioptram collineanti, quando a filo ſecatur, tantillum utrinque ultra filum eminere videatur, ob rationem, quam ſuperius (119) attulimus. Has tabulas deinceps *notas* appellabimus. Porro ut attolli, aut deprimi poſſint, ut res poſcit, varia artificia uſui eſſe poſſunt. Exempli cauſa (Fig. 82 Tab. VIII) ſi perticæ firmæ & parallelepipedi forma AB (niſi quod inferne cuſpidata ſit, ut humi ad perpendiculum defigi queat) nexa ſint ad C & E duo ligamenta ferrea, vel orichalcina, per quæ altera pertica FD transmitti, & ad libitum ope cochleæ per inferius ligamentum E tranſeuntis, firmari poſſit, pertica FD ad F nota ſua prædita, poſtquam AB firmata eſt, ſemper altius notam attollet, vel demittet; & poterit vel ipſa pars GE perticæ AB in digitos, vel etiam lineas, dividi, ut mox videri poſſit earum numerus inde a ſolo usque ad extremum D perticæ mobilis, qui longitudini exploratæ ipſius perticæ DF additus indicat altitudinem notæ ad F affixæ ſupra ſolum, vel vero ad manus ſit oportet alia menſura, ad quam GD exigatur. His præparatis.

Fig. 78
Tab. VIII

209. Sit I*mo* examinanda libella tuborum communicantium (Fig. 78 Tab. VIII.). Si hæc dioptris inſtructa non ſit, nec examini ſubjici poteſt, cum aqua ſemper ſeſe ad lineam libellæ accurate componat, ita, ut ejus ſuperficies ad *m* & *n* ſit in eadem a centro Telluris diſtantia; uſus proinde magis, minusve accuratus uni libellatoris dexteritati reſpondet. Verum ſi dioptris inſtruatur, hæ ipſæ examinandæ, utpote errori obnoxiæ, & quidem in eo poſito, quod foramellum Q, cui oculus applicatur, poſſit eſſe altius, vel humilius, quam filorum interſectio in dioptra oppoſita R; idem, vel contrarium evenire poteſt in dioptris P & O, ut propterea ambæ examini ſubjiciendæ ſint, quod ſatis fuerit pro binis expoſuiſſe, cum idem aliæ duæ ſubire debeant ſeorſim.

Fig. 83
Tab. VIII

Eligatur diſtantia AB (Fig. 83 Tab. VIII) nec major, nec minor facile, quam ut oculo in O conſtituto, Nota in pertica BM accurate cerni poſſit, v. g. 200 aut 150 pedum. Conſtituatur libella ita, ut aquæ ſuperficies accurate ad dioptras pertingat in utroque cylindro; tum per Q & R collineanti ex puncto O appareat Nota M in altitudine BM ſupra ſolum: menſuretur diligenter tum altitudo oculi, ſive dioptræ Q, tum etiam altitudo notæ BM. Transferatur libella ex A in B, & figatur pertica cum nota in A. Sit altitudo oculi, ſive ejusdem dioptræ Q, B*o*, & ex *o* per Q, R collineanti appareat interſectio filorum in nota N. Menſuretur rurſus B*o*, & AN. Si nullus fuerit dioptrarum error, erit ſumma altitudinum oculi $AO + Bo$ æqualis ſummæ altitudinum notarum $BM + AN$. Cum enim diſtantia AB per hypotheſin ſit exigua, verticales OA, MB ad centrum Telluris productæ angulum inſenſibilem efficiunt, & citra omnem errorem pro parallelis habentur. Ducatur BC parallela ad OM, quæ productæ OA occurrat in C: erunt OC, MB æquales. Hinc ſumma altitudinum notarum $MB + NA$ erit $= OC + NA$

$= OA$

$= OA + AC + NA$; ſumma altitudinum oculi erit $OA + Bo$: ſi jam ſit $OA + AC + NA = OA + Bo$, ablata utrinque OA, manet $AC + NA = CN = Bo$; atqui ſi $CN = Bo$, rectæ No, OM debent eſſe parallelæ, quod fieri non poſſet, ſi quod vitium foret in dioptris. Etenim ſi ponas foramellum Q (Fig. 78 Tab. VIII) eſſe infra interſectionem filorum R, recta per hæc puncta tranſiens faceret angulum obtuſum AOM, uti etiam obtuſus fieret angulus BoN, conſequenter foret ob OA, BM parallelas, angulus ONo itidem obtuſus, ergo duo interni ad O & N inter OM, No uterque foret obtuſus, & lineæ parallelæ eſſe non poſſent. Si vero foramellum Q eſſet altius interſectione filorum R, eodem modo oſtenditur, angulos NOM, ONo fieri utrumque acutum. Patet igitur, dioptras eſſe rite collocatas, ſi ſumma altitudinum oculi æqualis ſit ſummæ altitudinum notarum.

Fig. 78
Tab. VIII

210. Hinc facile deducitur, ſi quis error in dioptris ſit, quomodo corrigi poſſit. Ponamus *primo*, libella in A collocata notam non in M ſed in m ponendam eſſe, ut appareat in filorum interſectione. Inſtrumento ad B tranſlato pariter figenda erit nota in n; quo caſu nempe foramellum Q deprimitur infra interſectionem R. Evidens eſt primo, hunc errorem detegi, cum ſumma altitudinum notarum mB, nA excedat priorem ſummam MB, NA, ſive (209) $OA + oB$ rectis $Mm + Nn$, quæ inter ſe æquales eſſe debent, cum ſit eadem diſtantia ex O in M, ac ex o in N, & manente eodem errore dioptrarum, rectæ Om, on æqualiter divergant a rectis OM, oN. Quare ſi menſuratis altitudinibus oculi & notarum talis exceſſus deprehendatur, manente libella in ſtatione B in eadem altitudine Bo, nota n deprimatur dimidio exceſſu $mM + nN$, hoc eſt exceſſu nN; quo fieri neceſſe eſt, ut conſtituatur in vera horizontali oculi in o. Dein interſectio filorum dioptræ R pariter deprimenda eſt, donec tranſire videatur per notam N, eritque correctio facta. Quod ſi error eſſet oppoſitus, vel ex figuræ inſpectione intelligitur, notas collocandas fore in μ & ν, indeque ſumma altitudinum notarum deficeret a ſumma altitudinum oculi quantitate $M\mu + N\nu$, & pro correctione, ejus dimidio nota ex ν in N attollenda eſſet.

211. OBSERVA. Si filorum interſectio non poſſet commode emendari, accurate menſuranda eſſet dimidia quantitas $Mm + Nn$, vel $M\mu + N\nu$, & dum libellatio fit, correctio adhibenda eſſet. Nam patet divergentiam rectarum OM, Om (vel OM, $O\mu$) eſſe proportionalem diſtantiæ ſtationum. Fingamus eſſe $AB = 150$ ped. $Mm + Nn = 4$ digit.; quando libellatio fit, & intervallum ſtationum ſit v. g. 200 pedum; fiat $150 : 200 = 2$ dig. $2\frac{2}{3}$ dig. eritque hac quantitate altitudo notæ minuenda (vel augenda pro errore oppoſito) ut vera obtineatur. Ceterum tum in ipſa libellatione, tum maxime in inſtrumentorum examine ſeligendum eſt ſolum firmum, ac durum, quod non facile cedat, ne inter ipſam obſervationem inſtrumenta nutent, & ſitum mutent, quod univerſe ſemel monuiſſe ſatis ſit.

212. Altera examinandi methodus ſequens eſſe poteſt. (Fig. 84 Tab. VIII) menſuretur diſtantia AB, ut antea, tantæ longitudinis, ut ex A in B nota expoſita diſtincte cerni poſſit, dum a cruce dioptræ filaris in medio ſe-

Fig. 84
Tab. VIII

catur. Conſtituatur inſtrumentum examinandum in medio C, ut ſi fuerit $AB = 200$ ped. ſit $AC = CB = 100$; ſi $AB = 150$ ped., $AC = 75$. Collineetur oculo in O poſito verſus ſtationem A, ut nota appareat in M (vel N); converſo inſtrumento, & manente eadem altitudine, eodemque oculi loco O, collineetur ſimiliter in ſtationem B, ut nota videatur in m (vel n). His peractis transferatur inſtrumentum in alterutram ſtationem, v. g. in A, menſurata prius accurate notæ altitudine M (vel N), & ita conſtituatur, ut locus oculi ſit in P: accipiatur differentia altitudinum AM (vel AN) & AP, & in pertica Bm transferatur ex m (vel n) in p, ut ſit $MP = mp$, vel $NP = np$, ſeu dein P & p ſit ſupra M & m, ſeu infra; determinato hunc in modum puncto p, adducatur ad illud nota ex m vel n, & correcta interſectione filorum, ut oculo in P poſito videatur ſecare notam p, habebitur Pp vera linea libellæ. Ratio hujus examinis facile perſpicitur. Cum enim quiscunque ſit error dioptrarum, converſo inſtrumento verſus A & B, manente eodem puncto oculi, eademque altitudine ſint anguli COM, COm; vel CON, COn æquales, & lineæ OM, Om; item ON, On æqualiter divergant in æqualibus a puncto O diſtantiis a vera linea libellæ, evidens eſt, ſi conjungantur puncta M, m; vel N, n, fore Mm, Nn parallelas ad veram lineam libellæ per O tranſeuntem: quare cum etiam $MP = mp$, aut $NP = np$, & parallelæ inter ſe, neceſſe eſt, ut ſit Pp parallela ad Mm vel Nn, adeoque ſit vera linea libellæ oculi in P conſtituti. Unde ſi ita collocatæ ſint dioptræ, ut nota p accurate ſecetur a filis, utraque rite diſpoſita eſt.

213. *Secundo.* Examen Goniometrici, aut quadrantis. Conſiſtit hoc
Fig. 79 examen in inverſione inſtrumenti. Nam (Fig. 79 Tab. VIII) conſtituto ſe-
Tab. VIII mel Goniometrico ſitu verticali, ut (206) dictum eſt, fiat collineatio per dioptras C, D, ut filorum interſectio cum nota debito intervallo (quod menſurandum eſt) congruat, adſcribatur altitudo notæ. Tum convertatur Goniometricum ita circa regulam AB, ut arcus AaB obtineat ſitum AbB, & perpendiculum OP, e centro O exemptum, firmetur ad punctum b, quod idem ſit cum puncto a, per quod in priore ſitu tranſibat filum perpendiculi, & circa centrum O moto tantillum inſtrumento videatur, ut filum bp per centrum O tranſeat. Hoc novo ſitu conſtituto inſtrumento denuo collineetur per easdem dioptras c, d (quæ jam ex averſa parte plani, in quo eſt arcus inſtrumenti, poſitæ ſunt); & ſiquidem centro inſtrumenti O in eadem altitudine manente, nota rurſus per fila ſecari videatur, nullus error in dioptris eſt; at ſi altior videatur, ſeu ſupra interſectionem filorum, deprimatur aliquantum, ut cum ea congruat; oppoſitum fiat, ſi appareat infra filorum interſectionem. Intervallum, quo notam a priori loco moveri neceſſe fuit, dividatur bifariam, & in medio ejus puncto denuo firmetur; tum ſeu hoc, ſeu priore inſtrumenti ſitu ad eam collineetur, itaque corrigatur altitudo interſectionis filorum, ut cum nota accurate congruat, habebitur inſtrumentum ab errore dioptrarum correctum; de hoc enim tantummodo nobis ſermo in præſens eſt.

Fig. 85 Tab. VIII

214. Ut methodi præſcriptæ ratio intelligatur, eſto (Fig. 85 Tab. VIII) ſitus primus inſtrumenti *EaF*, & videatur per dioptras E, F nota in P; ſi converſo inſtrumento punctum *a* transferatur in *b*, & tranſeat filum perpendiculi *bO* per centrum O, ſitque $Ea = Eb = 90^{v}$, evidens eſt, fore EFP veram horizontalem, utpote perpendicularem ad verticalem *bOa*; at ſi dioptræ A, B non fuerint in vera linea libellæ, ſed v. cauſa B non nihil altior, quam A, erit *Aa* minor quadrante, ſive *AOa* erit angulus acutus, & nota videbitur in M. Siquidem converſio ſemicirculi fieret circa diametrum AB, ita, ut dioptræ manerent in priore recta ABM, patet, punctum *a* translatum iri in *n*, ut ſit $An = Aa$; ſed tum perpendiculum ex *n* ſuſpenſum non poſſet per O tranſire; quod ut fiat, attollenda eſt dioptra A, ut veniat in C, & punctum *n* in *b*, ita, ut ſit $An = Cb = Aa$, conſequenter dioptra B tantundem deſcendet in D: hoc autem facto per C & D collineantis linea viſus tantum diverget a linea vera libellæ EFP infra horizontem oculi C verſus N, quantum prius ſupra eandem verſus M, ut adeo nota ex M in N transferri debeat, ut in filorum interſectione videatur. Quoniam igitur anguli MOP, NOP æquales, manifeſtum eſt, notam in P, hoc eſt, in medio puncto diſtantiæ MN collocari oportere, ut correcto ſitu dioptrarum, habeatur vera linea horizontalis EFP.

215. Quæ ſuperius de diſtantia OP, de modo ſuſpendendi perpendiculum, de metienda notarum altitudine, de firmo ſtatu inſtrumenti & hujusmodi diximus, cum omnibus communia ſint, repetenda non putamus. Ceterum hæc methodus examinandi in majoribus inſtrumentis apprime commendatur, & ſecuriſſima videtur, uti dum explorandum eſt, an quadrans ſit accurate 90 graduum, ac tubus debite collocatus, ut ejus axis per centrum, & initium arcus, ubi diviſio incipit, tranſeat &c. Illud autem etiam commune eſt errori hoc examine detecto pro libellatione, quod ſi corrigi non queat facile, ejus magnitudo ſit proportionalis diſtantiæ.

Fig. 84 Tab. VIII

Porro facile apparet, alteram examinis methodum (212) etiam Goniometrico, vel quadranti applicari poſſe. Nam eodem modo per dioptras vitioſas AB determinantur (Fig. 84 Tab. VIII) duo puncta M, *m* in ſtationibus A, B, quæ ſint in linea horizontali veræ parallela. Quare ſi poſito Goniometrico in A, & dioptra oculari in P, intervallum MP transferatur in *mp*, habebitur punctum *p*, in quo nota ſtationis B collocanda eſt, ut vitium dioptrarum corrigatur, ſed enim exiſtimo inverſionem inſtrumenti ſecuriorem eſſe.

Fig. 86 Tab. VIII

216. *Tertio.* Examen libellæ Hydroſtaticæ. Duplex examen ſubeundum eſt libellæ Hydroſtaticæ; alterum pertinet ad detegendum, & corrigendum errorem dioptrarum, quod ab eo nihil diverſi habet, quod ſuperius expoſuimus pro tubis communicantibus, ideoque non repetimus; alterum pertinet ad ipſam libellam, quæ, ut corrigi, & ſemper examini ſubjici poſſit, cum forte dubium de ejus exactitudine ſuboritur, alterum extremum (immo vero utrumque potius) mobile habere debet, id, quod hunc in modum obtineri poterit. Exhibeat (Fig. 86 Tab. VIII) A extremum tubi orichalcini,

cui inſertus eſt vitreus. Ejus extremum deſinat in brachiolum *mn*, quod per fiſſuram capſæ MN, regulæ, cui tubus incumbit, BF afferruminatæ, qua capſa tubum reſpicit, transmitti queat intra capſam.

Per ſuperiorem laminam capſæ MN, cochlea cava prope medium *or* inſtructam, cochlea ſolida C*d* transmittitur, quæ extremo ſuo *d* brachiolum tubi *mn* premit deorſum converſa cochlea; in fundo capſæ ad *q* firmatur lamella elaſtica fortis, *qp*, quæ idem brachiolum ſemper ſurſum impellat adverſus cochleam, ut id firmum conſiſtat. Alterum tubi extremum (quod repræſentari opus non eſt) ſimili brachiolo intra ſimilem capſam porrecto inſtructum eſt, idque tantum diſcriminis eſt, quod per cochleam non apprimatur elateri, ſed ſubſtaculo modice excavato (ne motus in latus fieri poſſit) quod preſſioni cochleæ cedere impotens tubi extremum firmum retineat, & immobile. Ex hac conſtructione (vel quavis alia ſimili) apparet, laxata parum cochlea alterius extremi, poſſe extremum tubi A attolli, vel deprimi, quantum uſus poſcit: craſſiores enim errores, qui ut corrigantur, motus majores exigunt, in ipſa conſtructione evitari ponuntur.

Fig. 87 Tab. VIII

217. Vitium, quod eſſe poteſt in libella Hydroſtatica, id unum eſt, quod latus ſuperius internum tubi vitrei, quod (Fig. 87 Tab. VIII) repræſentatur per rectam EF, horizontale non ſit; inferius enim latus obliquum eſſe poterit citra defectum libellæ; nam cum liquor aere gravior in tubo contentus, ſemper deorſum nitatur, leviorem aerem verſus ſupremam partem extendit. Ex quo quidem conſequitur, bullam GH, utcunque parum latus EF declinet a recta horizontali, debere aſcendere usque ad ſupremum punctum E, ſiquidem nullus omnino eſſet affrictus; at quia is ſemper aliquid e libertate motus tollit, niſi tanta ſit inclinatio lateris EF, ut niſu aquæ omnino ſuperetur attritus, non penitus ad extremam tubi partem pertingit bulla. Quod ſi vero latus EF ſit horizontale, & libella vitio careat, e medio tubi loco non emovebitur, cum niſus aquæ deſcendendi utrinque æqualis ſit, & vires impellendi bullam æquilibrentur. Ex hac affectione liquoris & aeris hæc duo manifeſte deducuntur, quibus tanquam fundamento libellæ examen innititur: *primo* ſi libella vitioſa CDFE incumbat plano horizontali vero AB, & notatis in hoc punctis C, D, vertatur, ut acquirant libellæ extrema ſitum oppoſitum, F in *f*, E in *e* translato, bulla, quæ in priore poſitu aſcendit verſus extremum E ad diſtantiam EG, in ſecunda poſitione aſcendet verſus *e*, ut diſtantia *eg* ſit æqualis cum EG. Nam ponitur latus tubi interni æquabiliter politum, & eſt eadem altitudo punctorum E & *e* ſupra horizontalem veram AB. Fig. 88 Tab. VIII *Secundo.* Si libella accurata (Fig. 88 Tab. VIII) incumbat plano inclinato IB ad lineam veram horizontalem AB ſub angulo exiguo IBA, bulla GH verſus E aſcendet, & ſi convertatur, ut extremum F veniat in *f*, E in *e*, bulla rurſus in eodem loco *gh* hærebit. Diſcrimen enim altitudinum FD, CE in hac hypotheſi provenit unice ab inclinatione plani IB, unde idem effectus in liquore, & aere ſequi debet.

Fig. 87 Tab. VIII

218. Facile foret, ſi ſemel conſtaret de accurato ſitu plani AB (Fig. 87 Tab. VIII) ad horizontem nullo modo inclinato, libellam vitioſam corrigere;

re: nam ea plano tali impoſita, non alia re opus eſſet, quam laxata aliquantum cochlea alterius extremi, cochleam C extremi A (Fig. 86 Tab. VIII) Fig. 86 Tab. VIII vel deprimere, vel attollere, donec bulla æqualiter utrinque ab extremis tubi diſtaret, & tum firmata cochlea altera, notas ſtabiles ad I & K (Fig. 80 Tab. VIII) Fig. 80 Tab. VIII vitro incidere.

Sed enim ſupponi non poteſt, planum AB eſſe vere horizontale. Fingatur itaque, libellam vitioſam EF imponi plano inclinato IB, ſitque latus EF vel in eandem partem inclinatum cum plano IB, vel in oppoſitam, & quidem eadem quantitate aut plus, aut minus.

Ponamus *primo* latus EF habere eandem inclinationem; aſcendet bulla verſus extremum E altius, v. g. in GH, quam, dum converſa libella extremum F venit in *f*, utpote cum inclinatio duplex conſpiret in primo ſitu, & oppoſita ſit in ſecundo, manet ſola inclinationum differentia: & ſiquidem major ſit inclinatio lateris tubi, quam plani IB, bulla movebitur verſus *e*; ſi minor, verſus *f*, v. g. ad diſtantiam *f*L; ſi æqualis, manebit in medio; ut palam eſt, cum motus bullæ ſequatur differentiam inclinationum, quæ in primo caſu facit, ut *e* ſit altius, quam *f*; in ſecundo ut *f* ſit altius quam *e*, ſed non tam altum, quam E in primo libellæ poſitu fuerat; in tertio denique caſu nulla eſt. Ut jam libellæ vitium tollatur, evidens eſt, debere in motu bullæ tantummodo relinqui effectum debitum inclinationi plani. Hoc autem præſtatur, ſi notatis accurate diſtantiis bullæ ab extremis EG, *f*L, elevato extremo *f* in ſecunda poſitione libellæ (vel depreſſo *e*, quod idem eſt) adducatur bulla ex LM, vel e medio, vel ab extremo *e*, ad diſtantiam ab extremo *f* æqualem mediæ inter diſtantiam EG, quam habuerat in prima poſitione libellæ & diſtantiam ſecundam *f*L, quam habuit in altera libellæ poſitione. Hoc etenim ſi fiat, extremum humilius F lateris EF tantum attollitur, quantum prius ultra debitum fuit elevatum extremum E; hinc principium ſecundum, quod priore numero adduximus, locum habet, & libella correcta eſt, debebiturque diſtantia bullæ a loco medio uni inclinationi plani IB.

Si *ſecundo* ponas, inclinationem lateris EF in primo ſitu libellæ eſſe contrariam inclinationi plani IB, ſequetur bulla exceſſum majoris ſupra minorem; at converſa libella, ſequetur ſummam inclinationum: quare bulla rurſus adducenda erit ad diſtantiam mediam inter obſervatas, ut in priore hypotheſi. Verum hoc nondum ſatis eſt. Si quis in ipſa correctione error admiſſus ſit, is detegetur, ſi nova converſione libellæ, bulla in utraque poſitione eandem ab extremis non ſervet diſtantiam. Quare correctio vel augenda, vel minuenda eſt tamdiu, donec utcunque converſa libella, bullæ diſtantia ab extremis eadem maneat accurate, uti juxta ſecundum noſtrum principium debet, ſi latus EF fuerit parallelum plano IB, cui libella incumbit, ut ejus inclinationi tantummodo, non autem inclinationi lateris EF aſcenſus bullæ adſcribi poſſit.

219. Obſervet Tiro, nos poſuiſſe adhuc tubum libellæ incumbere regulæ planæ, uti eam (Fig. 80 Tab. VIII) exhibuimus. Sed id neceſſe non eſt: Fig. 80 Tab. VIII

poterunt regulæ extrema deorſum incurvari, ut pedum vice fungantur, quod non nullis in caſibus uſum libellæ commodiorem reddit, præcipue ſi extrema illa flexa non nihil excaventur, ut convexæ ſuperficiei tuborum, quorum axes examinandi ſunt, congruant. Præterea ſi adſit regula menſoria, qua-
Fig. 38 Tab. III lem (Fig. 38 Tab. III) exhibuimus, poterit conjungi cum libella Hydroſtatica ejus plano FCE impoſita; verum dioptra filaris adhuc filo transverſo inſtruenda erit, & fiſſura oblonga, per quam oculus tranſpicit, obtegenda usque ad foramellum exiguum in eadem ſupra regulam altitudine relictam, quanta eſt altitudo fili transverſi in altera dioptra, quod ipſum examine ſuperius expoſito explorandum erit.

§. III.

De modo libellandi.

220. In libellatione minore ante omnia diligentiſſime curandum, ut perticæ, quibus notæ, ad quas collineandum eſt, appenduntur, ad perpendiculum defigantur, applicata ſemper plumbagine. Hoc ſi fiat, & libellæ exactæ adhibeantur, facile e ſequentibus Problematis, tota operandi methodus comprehendetur.

Fig. 89 Tab. VIII 221. PROBLEMA I. Libellare terminorum C & E altitudinem (Fig. 89 Tab. VIII).

RESOL. Terminorum altitudinem libellare nil aliud eſt, quam altitudinem termini alterius ſupra alterum invenire, ad quod (ſi nil aliud quæratur) opus non eſt, ut ſciatur eorum diſtantia. Et hoc Problemate *libellatio ſimplex* continetur.

Eligatur prope medium inter C & E ſtatio D, in qua libella R rite conſtituatur, perticis in terminis C & E, quæ ſigna, ſive notas exhibeant, defixis, & collineetur verſus utramque, laboris adjutoribus notas ad nutum attollentibus vel deprimentibus, donec utraque P & Q in filorum interſectione appareat. Menſuretur accurate utriusque notæ altitudo CP, & EQ; harum differentia dat altitudinem termini C ſupra terminum E, quæ quærebatur. Etenim ſi concipiatur ex E parallela EG ad rectam puncta P & Q connectentem, & alia eidem parallela CV, evidens eſt, fore $CG = VE$, & $PG = EQ$, conſequenter etiam $CP = VQ$; eſt autem $VE = EQ - VQ = EQ - CP = CG$, quoniam ob exiguam ſtationum diſtantiam CP, EQ pro parallelis haberi debent, ut linea libellæ oculi ab horizonte vero differre nequeat.

222. E Num. 219 facile intelligitur, ſi nullus fuerit error inſtrumenti R, nequidem opus eſſe, ut termini C, E cum ſtatione D ſint in eadem recta, vel ut de diſtantiis CD, DE conſtet. At ſi error adſit in inſtrumento, vel de diſtantia ſtationis D a terminis conſtare debet, ut correctio in utraque altitudine fiat, vel vero debent eæ diſtantiæ eſſe omnino æquales, cum errores altitudinum ſint proportionales diſtantiis, quibus æqualibus poſitis, etiam ip-

ſi errores æquantur, & in differentiam nullum diſcrimen invehere poſſunt. Ceterum ſi ſepoſito inſtrumenti errore oriatur dubium de accuratione collineationis, quod v. g. notæ non ſatis diſtincte cerni potuerint, adhiberi poterit libellatio reciproca. Nempe (Fig. 83 Tab. VIII) ſi libellandi ſint termini A, B, collocetur primo libella in A, & oculi locus ſit in O, & in termino B ſignum notæ appareat in M; accipiatur differentia altitudinum oculi AO, & notæ BM, quæ erit DB = AC. Dein translata libella in B ex o collineetur in N; iterumque accepta differentia Bo — AN, conferatur cum priore: ſi nullus error admiſſus eſt, eadem inveniri debet, nempe DB. At ſi prima, & ſecunda differentia diſcrepent, v. g. prior ſit 3 ped. 7 dig. 5 lin. poſterior 3 ped. 6 dig. 10 lin., addantur in unam ſummam 7 ped. 2 dig. 3 lin. quæ per 2 diviſa dabit proximam veræ altitudinem AC = 3 ped. 6 dig. 1,5 lin.

Fig. 83
Tab. VIII

223. Generatim adhuc ſequentia monita pro libellandi uſu ab expertis dari opportune ſolent. *Primo*, ut quantum fieri poteſt, libella ita conſtituatur, ut in dioptra filari alterum filum ſit proxime ad horizontem parallelum, alterum verticale, velut (Fig. 91 Tab. IX) HR, VE. *Secundo*, ut conveniatur prius inter obſervatorem, & adjutores, qui notas in perticis attollere, ac deprimere debent, (maxime quando diſtantiæ ſunt paullo majores, ut vox difficulter, vel prorſus non audiatur, niſi ex totis pulmonibus clametur, quod moleſtiſſimum accidere deberet) de certis ſignis arbitrariis manu, vel pileo &c dandis, ut ex iis mox intelligant, quid præſtari debeat. *Tertio*, ut adjutor laboris, dum peracta obſervatione jubetur perticam cum nota affixa alio transferre, antequam eam e ſtatione tollat, notabiliter in utramque partem moveat, verſus dextram, & ſiniſtram obſervatoris, hoc interim adhuc per dioptras aſpiciente. Quod ſi enim accidiſſet, ſocio minus attendente, ut pertica loco ſitus perpendicularis (Fig. 91 Tab. IX) ID acquiſiviſſet obliquum IC, ſi perſtante extremo C in eodem loco, perticæ alterum extremum eo motu in utramque partem deſcribat arcum circularem *ab*, neceſſe eſt, ut nota alicubi videatur (quæ inter obſervandum apparebat in interſectione I) attolli ſupra filum horizontale HR, velut in *b*. At ſi ſitus verticalis perticæ ID accuratus ſit, extremum I deſcribet arcum, qui filum HR in I tangat, utrinque autem ſit infra illud.

Fig. 91
Tab. IX

Fig. 91
Tab. IX

224. Problema II. Libellare terminos A & E (Fig. 89 Tab. VIII), quorum diſtantia major, quam ut libellatione ſimplice altitudinum differentia haberi poſſit.

Fig. 89
Tab. VIII

Resol. Conſtitutis in A & C ſignis collocetur circa medium B libella O, ut in libellatione ſimplice, & menſurentur accurate altitudines notarum AM, CN, adſcripta altitudine AM ex uno, CN vero ex altero laterculo chartæ vel tabulæ. Tum relicto ſigno in C alterum ex A transferatur in E, & libella verſus medium D, atque ex R collineetur in P (depreſſo, ſi opus ſit, ſigno infra N) & Q. Iterum altitudines CP, EQ referantur in tabulam, ita, ut omnes, quæ ſpectant terminum A, in eodem laterculo, altera infra alteram, ſcribantur; quæ autem obſervatæ ſunt verſus alterum terminum E, ſint debito ordine in laterculo altero, in quo notata fuit CN. Hæc operatio continuatur, usque ad terminum E. Colligantur omnes altitudines, quæ ſpectabant terminum A inter obſervandum, in unam ſummam, uti etiam eæ, quæ referebantur ad terminum E, & propterea ſeparatim ſcriptæ ſunt; ſumma minore e majore ſubtracta habebitur altitudinum differentia, quæ quærebatur. Ratio facile intelligitur. Quæritur enim (ſi ductæ intelligantur horizontales FE, AT, CV, quæ cum lineis libellæ oculi in parvis diſtantiis non differunt) TE = AF. Atqui, ſi accipiatur NC — MA, habetur SC = TV, & ſi ſumatur EQ — CP, obtinetur VE, conſequenter AM ex CN, & CP ex QE ſubtractis obtinetur TV · :- VE = AF. Manifeſtum autem eſt, eandem differentiam prodire, ſeu ſeparatim AM ex CN, & CP ex EQ auferas, ſeu ſummam AM + CP ex ſumma CN + QE; igitur &c.

Fig. 90 Tab. IX 225. OBSERVA. Fieri poteſt, ut una, vel plures altitudines, velut AN, quæ ſpectant terminum A inter obſervandum, majores ſint, quam correſpondentes, uti CP, quæ ſunt obſervatori verſus terminum E. At per hoc nihil mutationis requiritur in ordine adſcribendi altitudines. Nam non indagatur altiſſimæ ſtationis C altitudo C*a* = KY, ſed quæritur AZ = MY, quæ reipſa obtinetur, non ſubtracta CP ex AN, ſed AN ex CP, habita differentia AG negativa, quæ proinde ex ſumma ablata corrigit quantitatem KY parte KM = AG.

226. Sæpius ope libellationis indagatur declivitas alvei alicujus fluminis, cujus littus terminetur linea *mpqrn*, ſed ripa in utroque termino inæqualis altitudinis A*m*, Y*n* eſſe poterit. Peracta libellatione ſupererit adhuc in tali caſu metienda altitudo ripæ A*m* & Y*n*, & differentia inter utramque ſubtracta ab MY vel addita, ſi A*m* < Y*n*, in præſente Schemate foret declivitas quæſita, cum aſſumpſerimus pro priore Problemate ZY horizontalem. Nec opus eſt monere Tironem, perinde eſſe, ſeu libellatio ex A verſus Y inſtituatur, ſeu ex Y verſus A aſcendendo. Si plus momenti in ea poſitum ſit, fieri poterit reciproca, ut diſcrimine utrinque ex æquo diviſo media quantitas pro uſu retineatur.

SECTIO II.

De libellatione majore.

227. Majorem libellationem appello ſeu ſimplicem, quæ ex unica ſtatione haberi poteſt, ſeu compoſitam, quæ e pluribus ſtationibus peragitur, quando intervalla tam magna ſunt, ut libellæ lineæ (quemadmodum ſuperius Num. 202 expoſuimus) jam ſenſibiliter diſcrepent ab arcubus, quorum tangentes ſunt, & punctum, ad quod collineatur, extra verum horizontem oculi poſitum eſt. In hunc finem notæ eſſe debent elevationes ſupra horizontem ſtationum, in quas collineatio fit, ſiquidem diſtantiæ ſciantur, id

eſt,

eſt, dato arcu ſciri debet pars ſecantis inter arcum, & tangentem intercepta. *Picardus*, cum Regis Galliarum juſſu magnos terrarum tractus libellandos ſuſcepiſſet, inde ab arcu 50 hexapedarum Pariſinarum usque ad arcum 4000 haſce elevationes computavit, & in Tractatu de Libellatione a *de la Hirio* An. 1728 Gallice edito communicavit. Methodus ſupputandi, qua uſus eſt, haud quidem Geometrico rigori, attamen uſui abunde ſufficit. En vero principium, quo ejus calculus nititur. Sit (*Fig.* 92 Tab. IX) AC radius Telluris, AB arcus exiguus (nam ſi $AB = 4118$ hexap. Viennenſibus, nondum continet prorſus 4',09), AD tangens, quæ citra errorem pro AB haberi poteſt (quippe in eadem hypotheſi, quod $AB = 4118$ hexapedis, reperitur $BD = 15$ pedibus); concipiatur altera tangens ad B, quæ priori occurrat in E; erit, ut e Geometria notum eſt $AE = EB$, & triangula ACD, BED ſimilia, & $AC : AD = EB : BD$. Jam vero cum angulus $DEB = ACD$, & hic paucorum minutorum, etiam dum pro maxima diſtantia ſupputatio fit, manifeſtum eſt, coſinum EB a ſinu toto ED in triangulo DEB rectangulo vix differre, & ſine erroris ſenſibilis periculo cenſeri poteſt $EB = ED$, & quia $EB = AE$, haberi poteſt $AD = 2EB$. Hoc poſito duplicentur termini antecedentes prioris Analogiæ $AC : AD = EB : BD$, fiet $2AC : AD = AD : BD$, adeoque $BD = \frac{AD^2}{2AC} = \frac{AB^2}{2AC}$. Fig. 92 Tab. IX

228. Coroll. I. Diſtantiæ lineæ libellæ ab horizonte vero ſunt inter ſe ut quadrata diſtantiarum ab oculo ſpectatoris, proxime. Nam in eadem figura eſt $Hi = \frac{Ai^2}{2AC}$, & $Lm = \frac{Am^2}{2AC}$, in qua expreſſione 2AC, ſeu Telluris diameter eſt quantitas conſtans, & rationem non mutat.

229. Coroll. II. Si inſtrumentum aliquo vitio laborat, ut anguli CAD, CAG non ſint recti, ſi diſtantiæ AB, AF æquales fuerint, erunt nihilominus puncta D, G in libellæ linea eadem, ſeu erit $BD = FG$, non tamen in linea libellæ per oculum tranſeunte, & poterit per tale inſtrumentum vera differentia ſtationum F, B inveniri.

230. Coroll. III. Si libella vitioſa faciat angulum CAG acutum, velut CAo, in diſtantiis minoribus, velut Ai, objecta infra horizontem verum oculi A deprimit in K, utpote cum Ao ſit ſecans arcus AF; ſed in diſtantiis majoribus objecta viſa ſunt ſupra verum horizontem oculi, velut ipſum punctum o. Si notus ſit error, ex tabula elevationum, quam ſubjiciemus, inveniri poteſt punctum m, ſive diſtantia Am, in qua inſtrumentum exhibet objectum viſum in vero horizonte oculi. Dicatur $Am = x$, ſitque error inſtrumenti tantus, ut in diſtantia 100 orgyarum deprimatur objectum quantitate a, ac ponatur diſtantia hæc $= D$. Quæratur elevatio libellæ ſupra horizontem verum pro diſtantia D, quæ ſit $= b$. Quoniam error inſtrumenti eſt proportionalis diſtantiæ, habebitur ſequens Analogia $a : D = Lm : x$; & quia elevationes libellæ (Coroll. I) ſunt ut quadrata diſtantiarum, erit item

$D^2 : b = x^2 : Lm$; compoſitis rationibus $a \times D : b = x : 1$ ſive $a \times D = bx$; hinc $b : D = a : x$, id eſt: elevatio debita libellæ pro diſtantia D, eſt ad hanc diſtantiam, ut eſt error inſtrumenti in diſtantia eadem D ad diſtantiam quæſitam. Exempli cauſa notum ſit, inſtrumentum deprimere objectum in diſtantia 309 orgyarum tribus digitis: huic diſtantiæ in tabula competit elevatio 1 dig. 0,36 linearum : erit $D = 309$, $a = 3$, b 12,36 lin.; proinde 12,36 lin.: 309 hex. = 36 lin. : $x = 1061{,}8$, cui diſtantiæ in tabula competit plus, quam 11 dig. 6,8 lin. cum tamen vi erroris deberent tantummodo convenire 10 dig. 3,7 lin. indicio ſcilicet, totam hanc computationem non eſſe niſi quandam approximationem, quod quidem nihil ad rem pertinet, quod præſens Problema in libellationis accurationem prorſus non influat.

231. Subjeciſſemus hoc loco tabulam *Picardi* elevationum libellæ ſupra horizontem verum oculi; at quia *Picardus* aſſumpſit radium Telluris ſphæricæ 3269297 hexapedarum Pariſinarum; nos ſuperius (170) eundem poſuimus 3273000 ejusmodi hexapedarum, neceſſario jam aliqua mutatio nobis facienda fuit: nam ſi radius Picardi ſit CP, a nobis aſſumptus CQ; arcus apud illum *PR v. g.* = 300 hexapedis, apud nos ſubſtitui debet QS, qui ſit ad PR ut CQ ad PC. Conſequitur hinc etiam elevationes *Picardi* RT eſſe ad noſtras in æqualibus diſtantiis SV in eadem ratione radiorum CP ad CQ. Deinde reducendæ fuiſſent menſuræ Pariſinæ ad Vienneſes. Denique tabula *Picardi* ad 4000 hexapedas producta ingentia relinquit intervalla media, pro quibus non tam ſimplici calculo elevationes competentes eruuntur. Quare putavimus uſui fore aptiorem, quam ſubjungimus, usque ad 2000 hexapedas; ſed elevationibus aſſumptis (quæ dimidiis ab initio lineis creſcunt) aptavimus diſtantias, ut quisque illico videat, quid erroris ſubeſſe poſſit, ſi correctionem negligat. Deinde a 300 hexap. aſſumpſimus incrementa elevationum 1 ſemper lineæ usque ad 500 hexapedas; tum duarum linearum usque ad 600, inde ternarum usque ad 750; inde dimidii digiti usque ad 1060 hexapedas: poſtea incrementa ſumpſimus digitos ſingulos usque ad diſtantiam 1500 hexapedarum; denique dimidii pedis usque ad 2120 hexapedas. Addidimus etiam angulos ad centrum reſpondentes diſtantiis; tum refractionem, & competentem huic correctionem, quam quæſivimus ſemper ex hac Analogia: ut radius ad ſecunda reductus eſt ad angulum refractionis, ita eſt diſtant a ad magnitudinem ſpatii in lineis, ac decimis earundem, quo objectum altius debito attollitur. Hæc tabula multo amplior eſt *Picardiana*, etſi non ad tam magnas diſtantias ſeſe extendat, quod vix contingere arbitrati ſimus, ut ultra 1000 hexapedas ſumantur. Unde pro majoribus etiam majora reliquimus intervalla, utpote uſus rarioris.

Diſt. in hexap. Vien.	Elevat.	Angulus ad centrum.	Refractio	Correctio Refract.
62,39 hexap.	½ lin.	1″,913	0″,2126	0,05556 lin.
88,24	1	2,704	0,3007	0,1111
108,1	1½	3,314	0,3682	0,1667
124,8	2	3,826	0,4252	0,2222
139,5	2½	4,278	0,4753	0,2778
252,8	3	4,686	0,5207	0,3333
165,1	3½	5,061	0,5624	0,3889
176,5	4	5,411	0,6012	0,4445
187,1	4½	5,739	0,6377	0,5000
197,3	5	6,050	0,6722	0,5556
207,0	5½	6,345	0,7050	0,6111
216,1	6	6,627	0,7364	0,6667
225,0	6½	6,898	0,7664	0,7222
230,8	7	7,077	0,7863	0,7601
241,7	7½	7,410	0,8233	0,8333
249,6	8	7,653	0,8503	0,8889
257,3	8½	7,888	0,8764	0,9444
264,7	9	8,117	0,9019	1,0000
272,0	9½	8,339	0,9266	1,056
279,0	10	8,556	0,9506	1,111
285,9	10½	8,767	0,9741	1,167
292,6	11	9,000	1,000	1,226
299,2	11½	9,175	1,019	1,278
305,7	1*d.* 0*l.*	9,372	1,041	1,333
318,1	1*d.* 1*l.*	9,755	1,112	1,445
330,2	1 2	10,12	1,125	1,555
341,7	1 3	10,48	1,164	1,667
353,0	1 4	10,82	1,202	1,778
363,8	1 5	11,16	1,240	1,889
374,3	1 6	11,48	1,275	2,000
384,6	1 7	11,79	1,310	2,111
394,6	1 8	12,10	1,345	2,222
404,3	1 9	12,40	1,378	2,333
413,9	1 10	12,69	1,410	2,444
423,2	1 11	12,98	1,442	2,556
432,3	2 0	13,25	1,473	2,666
441,2	2 1	13,53	1,503	2,778
449,9	2 2	13,80	1,544	2,889
458,5	2 3	14,06	1,562	3,000
466,9	2 4	14,32	1,591	3,111
475,2	2 5	14,57	1,619	3,222
483,3	2 6	14,82	1,647	3,333

Dist. in hexap. Vien.	Elevat.			Angulus ad centrum.	Refractio	Correctio Refract.
		d.	l.			lin.
491,3 hex.		2	7	15″,06	1″,674	3,444
499,2		2	8	15,31	1,700	3,556
509,9		2	9	15,54	1,727	3,667
514,5		2	10	15,78	1,753	3,778
522,0		2	11	16,00	1,778	3,889
529,5		3	0	16,23	1,804	4,000
543,9		3	2	16,68	1,853	4,222
558,0		3	4	17,11	1,901	4,445
571,8		3	6	17,53	1,948	4,667
585,3		3	8	17,94	1,994	4,889
598,5		3	10	18,35	2,039	5,111
611,3		4	0	18,74	2,083	5,334
630,1		4	3	19,32	2,147	5,667
648,4		4	6	19,88	2,209	6,000
666,1		4	9	20,43	2,269	6,333
683,5		5	0	20,57	2,328	6,667
700,4		5	3	21,47	2,386	7,000
716,9		5	6	21,98	2,443	7,334
732,9		5	9	22,47	2,497	7,667
748,7		6	0	22,96	2,551	7,998
779,3		6	6	23,89	2,655	8,667
808,7		7	0	24,80	2,755	9,333
837,1		7	6	25,67	2,852	10,000
864,5		8	0	26,51	2,946	10,670
891,2		8	6	27,32	3,036	11,33
917,0		9	0	28,11	3,124	1*d.* 0,00 *lin.*
942,2		9	6	28,89	3,209	1 0,65
966,6		10	0	29,64	3,293	1 1,34
990,5		10	6	30,37	3,374	1 2,00
1014,0		11	0	31,09	3,454	1 2,64
1036,0		11	6	31,78	3,531	1 3,34
1059,0	1 *pes*	0	0	32,47	3,607	1 4,00
1102,0	1	1	0	33,79	3,754	1 5,34
1144,0	1	2	0	35,07	3,896	1 6,67
1184,0	1	3	0	36,39	4,033	1 8,00
1223,0	1	4	0	37,49	4,165	1 9,33
1260,0	1	5	0	38,64	4,294	1 10,66
1297,0	1	6	0	39,76	4,418	2 0,00
1332,0	1	7	0	40,85	4,539	2 1,33
1367,0	1	8	0	41,91	4,657	2 2,66
1401,0	1	9	0	42,95	4,772	2 4,00
1434,0	1	10	0	43,96	4,885	2 5,33

Dist.

Diſt. in hexap. Vien.	Elevat.			Angulus ad centrum.		Refractio	Correctio Refract.	
		d.	l.					lin.
1466,0	1 *pes*	11	0		44″,95	4″,994	2 *d.*	6,66
1497,0	2	0	0		45,91	5,102	2	8,00
1672,0	2	6	0		51,28	5,697	3	7,70
1834,0	3	0	0		56,24	6,248	4	0,00
1981,0	3	6	0	1′	0,74	6,749	4	8,00
2118,0	4	0	0	1	4,93	7,215	5	4,00

232. Quod ad uſum hujus tabulæ, notet Tiro, ſi quæratur elevatio pro diſtantia quapiam, quæ in tabula non extat, non debere fieri proportionem inter numeros ſimplices orgyarum, ſed inter eorum quadrata, cum elevationes ſint proxime ut quadrata diſtantiarum. Quæras v. g. quæ elevatio competat diſtantiæ 325 orgyarum? cum ſit $318,1^2 : 330,2^2 = 1$ dig. 1 lin. : 1 d. 2 lin. fiat $330,2^2 - 318,1^2 : 325^2 = 1$ lin.: x, reperietur proxime 1 d. 1,4 lin., quæ quantitas dat elevationem pro diſtantia 325 hexapedarum æqualem 1 d. 1,4 lin. Quod pertinet ad refractionem, diximus eam eſſe proxime $\frac{1}{9}$ anguli ad centrum, qui ex diſtantia facile reperitur. Correctio fractioni competens invenitur ex Analogia: ut radius in ſecunda converſus ad refractionem; ita eſt diſtantia ad correctionem faciendam. His generatim expoſitis, quæ in libellatione majore attendenda ſunt, videamus jam, quænam apta inſtrumenta adhiberi poſſint.

§. I.

De Libellis.

233. Partes neceſſariæ libellæ majoribus diſtantiis ſervituræ ſunt tubus, ut ſignorum notæ diſtingui accurate poſſint, & vel perpendicula, vel libellæ accuratæ Hydroſtaticæ, quibus tubis debita poſitio conciliatur. Reliquæ partes accidentariæ ſunt, & uſum magis, minusve commodum reddunt. Propterea binas tantummodo libellas deſcribemus, alteram *Picardi* perpendiculo inſtructam; noſtri *R. P. Liesganig* alteram libella Hydroſtatica præditam, omiſſis omnibus iis, quæ loco perpendiculi vel libellæ Hydroſtaticæ liquores quibuscunque in vaſis ſe ad horizontem componentes requirunt, ut debitum ſitum obtineant, quod nempe earum uſus magis impeditus ſit, ſi generatim loquamur, quam ut commendari mereantur.

234. *Picardi* libella (Fig. 93 Tab. IX) exhibetur: tubus AE e ſolida lamina ad angulum rectum alteri longiori LM conferruminatur, qui poſterior inferne paullum ampliatur. Ad L ſuſpenditur perpendiculum L*s*, quod laxiore annulo (Fig. 94 Tab. IX) inſeritur aciculæ, cujus cuſpis per laminam L alteri D, in qua centrum notatum eſt, apprimitur. Tubus AE in diſtantia foci lentis objectivæ inſertum ſibi habet duplex quadrum EFGH, Fig. 93 Tab. IX Fig. 94 Tab. IX

Fig. 95 quod diſtinctius (Fig. 95 Tab. IX) repræſentat. Quadrum ABCD ſuperne
Tab. IX transmittit cochleolam E, in oppoſito latere DC affixam habet laminam
elaſticam K; latera AD, BC intra crenas recipiunt aliud quadrum FGIH,
in quo fila ſe ad angulum rectum interſecant. Hæc fila ſunt ſericum ſimplex,
ut e folliculo bombycis evolvitur. Hoc interius quadrum per cochleam
E deorſum premi, & per expanſionem elateris K ſurſum impelli debet, donec
Fig. 93 cum centro lentis objectivæ, quæ ſimili quadro (Fig. 93 Tab. IX) ABCD
Tab. IX incluſa eſt, & axe tubi filorum interſectio ſit in eadem recta. Eidem tubi extremo,
quod fila continet, inſeritur tubulus minor HEIK cum lente oculari
mobilis, ut cujusvis oculo accommodetur. Inferior pars tubi verticalis LM,
per cujus axem filum tenue perpendiculum *s* portans tranſit, continet laminam
orichalcinam *nopq*, intra cujus crenas altera argentea, cui punctum ad *r*
impreſſum eſt, a filo, cum inſtrumentum debitum ſitum habet, ſecandum, in
utramque partem paullum moveri, & ubi libuerit, firmari poteſt. Tubo AE
ex una, & ex altera parte tubi LM connexi ſunt bini arcus X, Y e metallo
ſolido, quibus tota libella incumbit. Fulcrum a pictorum pluteo haud differt;
foraminibus N, P inſeruntur paxilli, arcus X, Y ſuſtentantes. Pedes
anteriores plutei tamen ferramentis muniuntur, quæ protrudi poſſint, ut tota
machina etiam in ſolo inæquabili & aſpero firma conſiſtat. Quando ſemel
in debito ſitu collocata eſt libella, firmatur pertica VT e parte poſtica in
terram demiſſa. Magnitudo arbitraria eſt. Picardus tubo AE tribuit tres,
perpendiculari LM quatuor pedes.

235. Tractabilior eſt multo libella, quam ſuperius laudatus Liesganigius
Fig. 96 fabrefieri fecit, & quam (Fig. 96 Tab. IX) adumbrare conati ſumus.
Tab. IX AB eſt tubus e lamina firma 5 pedes longus: prope utrumque extremum eſt
capſa orichalcina, quæ bina continet quadra KLON, & MLOP; eodem modo
prope extremum A prorſus ſimilia continentur ſua capſa DEHG, EHIF,
Fig. 97 quæ ſeparatim exhibent (Fig. 97 & 98 Tab. IX); exterius verſus tubi extrema
& 98 quadrum (Fig. 98) ABCD per latera AB, AD cochleas I, K admittit;
Tab. IX his oppoſita BC, CD laminas elaſticas L, M annexas habent, quæ interius
quadrum EFGH adverſus cochleas oppoſitas) impellunt, ut & in latera, &
verticaliter moveri poſſit. Inſertum eſt huic interiori quadro vitrum objectivum
N. Huic prorſus æquale quadrum continet capſa prope extremum B.
Fig. 97 Alterum quadrum repreſentat (Fig.. 97 Tab. IX), priori ceterum ſimile, niſi
Tab. IX quod loco vitri tenſa ſint fila ſe ad angulum rectum in centro ſecantia; id
Fig. 96 priori contiguum tubi medium ex utraque parte ſpectat, & literis LOPM,
Tab. IX EHGD in (Fig. 96 Tab. IX) utrinque deſignatur, quemadmodum alterum
Fig. 98 (Fig. 98 Tab. IX) quod vitrum continet, literis KLON, FEHI in eodem
Tab. IX Schemate notatur. Eſt itaque tubus duobus vitris objectivis inſtructus, duobusque
reticulis in vitrorum utrinque focis poſitis. Tubulus brevis AC vitrum
oculare continet, & utrique extremo tubi A & B congruit, ut utraque
ex parte citra motum ullum tubi inſeri poſſit; & ne aſperior ſuperficies, dum
ex altero extremo eximitur, inſeriturve alteri, quidpiam officiat, panno ſerico
villoſo externe obductus eſt, quo ſimul vacillatio impeditur.

Capſæ

Capſæ KP, DI accurate æquales ſunt, & quadratæ, ut iis incumbens ſuper tabula levigata adverti poſſit (quanquam id poſtea adhuc aliter examinetur) num axis ſemper tabulæ parallelus ſit, ſi ſucceſſive omnibus quatuor capſæ cujusvis lateribus in iisdem tabulæ punctis impoſitus, ſemper objectum in filorum interſectione exhibeat.

Superiori tubi parti prope medium libella Hydroſtatica S, qualem ſuperius (207) deſcripſimus, niſi quod dioptris careat, inſiſtit, pedunculis ſuis Q, R per cochleas firmata. Ex adverſa libellæ parte tubus conferruminatam laminam firmam TV habet, quæ cum correſpondente, & e collo fulcri prominente ope cochlearum *a*, *b* conſeritur. Huic connexus eſt ſemicirculus *cd* dentatus, ut ope cochleæ F*e*, cujus helices dentes illius admittunt, tubus in plano verticali attolli, aut deprimi poſſit. Infra hunc ſemicirculum eſt circulus horizontalis *gh* itidem dentatus, cui collum inſtrumenti incumbit, & qui per cochleam alteram *ki* una cum tubo circumagi poteſt motu horizontali. Nititur tota machina tribus firmis pedibus *m*, *n*, *o*, cui poſtremo annexæ ſunt cochleæ cavæ ferreæ *r*, *t*, per quas ſolida ex eodem metallo *pq* ſuo manubrio inſtructa transmittitur, ut facilius ad planum horizontale pedes adducantur.

236. Apparet ex hoc apparatu commoditas pro libellationibus majoribus. Ut in minoribus uſus expeditioris ſit, tubus brevior fieri poteſt; loco laminæ TV inſtrui poterit capſa cava cylindrica, ut pedi, cui uſitatum alias Goniometricum committitur, aptetur: immo ſi lubet, ipſi menſulæ plano, quæ dimenſionibus alias ſervit, incumbere poteſt. Verum hæc cuivis cogitanti facile occurrunt. Nec quicquam incommodi enaſcitur vel e duplice lente objectiva, vel e duplice cruce filari: illa enim ſenſibiliter claritatem non minuit, ſed efficit tantummodo, ut focus lentis ocularis tantillo fiat brevior, ſi ipſe objectivi focus non ſit longus; hæc autem poſcit ſolum, ut ſit accurate poſita, quod examen detegit. Remotiora fila videri nequeunt, & non plus lucis intercipiunt, quam tenues maculæ, quæ vitris paſſim adhærent.

§. II.

De Examine.

237. Examen duplex, quod Num. 209 & 212 pro dioptris minorum libellarum expoſuimus, etiam tubis convenit, niſi quod in primo ſumma altitudinum oculi (Fig. 99 Tab. X) AO + B*o* excedi debeat a ſumma altitudinum notarum B*m*, AM duplice elevatione debita diſtantiæ ſtationum AB. Fig. 99 Tab. X Hæc diſtantia tanta eſſe debet, ut vix minor ſit 309 hexapedis, & vel ex tabula ſuperius allata, vel ex calculo nota eſſe debet elevatio libellæ ei competens. Sit ex. cauſ. AB = 309 hexapedis, AO = 4 ped. 6 dig. B*o* = 4 ped. 5 dig. B*m* = 4 ped. 6 dig. 0,3 lin. AM = 4 ped 7 dig. 0,3 lin. Erit AO + B*o* 8 ped. 11 dig.; & AM + B*m* = 9 ped. 1 dig. 0,6 lin. differentia = 2 dig. 0,6 lin. In tabula reſpondet elevatio 1 dig. fere diſtantiæ 309 hexap.

Qua-

Quare concluditur, fila in libella eſſe rite diſpoſita. At ſi ſumma altitudinum notarum prodiviſſet 9 ped. 3 dig. 0,6 lin. error fuiſſet in diſtantia 309 hexap. unius digiti. Quare nota ex *m* uno digito deprimi debuiſſet, & crux filaris itidem ope cochleæ, ut cum nota congrueret. Contrarium faciendum fuiſſet, ſi ſumma altitudinum fuiſſet debita minor. Cauſa facile perſpicitur: nam cum diſtantia AB jam ſit major, verticales MA, *m*B haud amplius pro parallelis haberi poſſunt, uti nec OM, *om*. Oſtendimus autem, quod, dum hæ lineæ parallelæ ſunt, ſummæ altitudinum oculi, & notarum æquentur: cum igitur notæ ſint in linearum OM, *om* extremis, elevationis ratio habenda eſt.

238. Si in altero examine (212) e medio loco D collineetur in N & *n*; hæ notæ habent elevationem *on*, ON ſupra oculi horizontem verum. Si modo transferatur libella in ſtationem A, differentia altitudinis notæ N & oculi O, nempe ON, transferenda quidem eſt ex *n* in *o*; ſed ex *o* in eandem perticam ulterius transferri debet *om* = elevationi debitæ diſtantiæ AB, & tum in *m* collineandum, interſectione filorum vel depreſſa, vel aliquantum ſublata, ut res poſcit.

239. Sed hæc examina non ſatis ſunt pro libella Picardi (& quacunque alia, quæ perpendiculo inſtruitur), ſed quemadmodum de Goniometrico (213) diximus, tota machina invertenda eſt, & perpendiculum in extremo capſæ M (Fig. 93 Tab. IX) ſuſpendendum, ut filum ſecet & punctum in lamina argentea prope *r*, & alterum ad L, cui cuſpis aciculæ perpendiculum alias ſuſtentantis imminet. Si in utroque ſitu filorum interſectio cum nota congruat, nullum in inſtrumento erit vitium; ſi vero diverſa requiratur notæ altitudo pro diverſo ſitu, ea in medio ponenda erit, & collineatione in eandem facta, fila vel attollenda, vel deprimenda erunt ope cochleæ, donec eorum interſectio notæ reſpondeat. Fig. 93 Tab. IX

240. Ut libella Lieſganigiana commode examinetur, curetur imprimis, ut lamellæ binæ verticales (Fig. 96 Tab. IX) capſarum KN, FI, ceteris paullo majores, ſint accurate æquales, & quadratæ, imponatur tum tubus ita tabulæ bene lævigatæ, ut v. g. latera capſarum NP, GI tabulam contingant, notatis in tabula ceruſſa lineis contactus, aſpiciaturque verſus notam quampiam correſpondentem interſectioni filorum. Convertatur dein tubus, ut ſuperiora capſarum latera KM, DF easdem lineas tabulæ contingant, diriganturque tam vitrum N (Fig. 98 Tab. IX), quam fila (Fig. 97 Tab. IX), ut eadem nota in eorum interſectione appareat. Erunt centrum lentis, & filorum interſectio in eadem recta. Fig. 96 Tab. IX Fig. 98 & 97 Tab. IX

241. Verum ut res adhuc ſecurius inſtituatur, paretur tubus non nihil brevior, quam BA (Fig. 96 Tab. IX), qui in pede firmari poſſit, & reſciſſa parte ſuperiore, ut relinquatur ſemicylinder cavus, probe atteratur ejus cava ſuperficies cum ſuperficie convexa tubi circa medium, ut hæc intra illam accuratiſſime recipiatur. Ubi tubus AB ſemicylindro commiſſus eſt, impoſita libella Hydroſtatica QSR tribuatur ei ſitus horizontalis, bulla medium locum S occupante, & collineetur in notam. Vertatur tum tubus, ut latera Fig. 96 Tab. IX

capſa-

capſarum NP, GI, quæ modo deorſum ſpectabant, fiant ſuprema, & eodem modo in eandem notam collineetur, & fila adducantur ad eum locum, ut in utraque poſitione nota debite appareat. Hoc ubi peractum eſt; inſeratur tubulus ocularis alteri extremo ad B, & eædem collineationes converſo circa axem ſuum tubo repetantur. Apparet hoc examen in re non differre a converſione illa, quam pro libella *Picardiana* requiſivimus, niſi quod duplex ſit, uti fila duplicia ſunt. Si hoc examen ſubierit libella, tuto in ejus accuratione acquieſci poterit.

§. III.

De Libellatione.

Fig. 89 Tab. VIII

242. De ipſa libellatione pauca ſunt, quæ moneamus. Si libellatio ſimplex ſit, velut (Fig. 89 Tab. VIII) inter diſtantias A, C, & ſtatio inſtrumenti ſit in medio B (ad quod ſatis eſt, ſi differentia duas, treſve hexapedas non multum excedat) nulla opus eſt correctione, ſeu ratione elevationis libellæ apparentis ſupra verum horizontem, ſeu ratione refractionis, cum utraque notarum altitudinem æqualiter afficiat, ut per ſe manifeſtum eſt; verum ſi alterutra diſtantia BC, vel AB major ſit notabiliter, ut diſcrimen elevationis utrivis debitæ ſit ſenſibile, altitudines minuendæ ſunt duplice correctione, quam tabula oſtendit, & correctarum differentia dabit differentiam altitudinum quæſitam. Exempli cauſa ſi AB ſit 206 hexap. BC 103; altitudo AM 7 ped. 2 dig. CN = 12 ped. 5 dig. 6 lin. Erunt ſubtrahendæ ex AM 5,5 lin.; ex CN vero 1,5 lin. ratione elevationis. Sed quia in diſtantia 206 (aut 207) hexap. refractio jam attollit objecta angulo 0″,7 (cui competunt 0,6 lineæ) evidens eſt, non debere ex altitudine apparente ſubtrahi totam elevationem in tabula repertam, ſed imminutam correctione refractionis; ſcilicet ex AM auferri debere 5,5 — 0,6 lin. ſive 4,9 lin., ex CN vero 1,5 — 0,1 lin., vel 1,4 lin. Unde fiet AM = 7 ped. 1 dig. 7,1 lin. CN = 12 p. 5 dig. 4,6 lin. horum differentia 5 ped. 3 dig. 9,5 lin. eſt altitudo termini A ſupra C.

243. Neque aliter res habet in libellatione compoſita; ſed correctæ tantummodo altitudines tum per elevationem libellæ ſupra verum horizontem oculi, tum per refractionem (aut brevius correctæ per differentiam elevationis & refractionis) adhibendæ ſunt; cetera peraguntur ut in libellatione minore. Unicum dubium, quod fortaſſis cuipiam ſuboriri poſſet, diſcutiendum ſupereſt. Tabula elevationum Num. 231 ſupputata eſt pro determinatis diſtantiis ſtationum, & pro radio Telluris conſtante. Videtur autem impoſſibile eſſe, ut maneat eadem quantitas elevationis, ſi ſtationum altitudo mutetur. Sic (Fig. 100 Tab. X) ſi e ſtatione altiore A collineetur in ſtationem inferiorem B, elevatio eſt CD; at ſi e ſtatione B collinearetur in altiorem A, ut obtineretur differentia libellarum verarum AC, BF, ſive AF, deberet ad AE adhuc addi EF, quæ elevatio lineæ libellæ BF ſpectata tabula

Fig. 100 Tab. X

æqualis eſſe deberet elevationi CD, quod tamen fieri nequit, cum ſit CD ad EF, ut diſtantia ſtationis A a centro Telluris ad diſtantiam ſtationis B ab eodem. Idem eſt de omnibus elevationibus KL, GH &c in ſtationibus humilioribus.

244. At enim ad duo hoc loco advertendum eſt; imprimis duarum ſtationum diſtantia, quando libellatio adhibetur, tanta eſſe poteſt ſolummodo, ut altitudinum differentia, quæ inter ſtationes intercedit, non hexapedis, ſed pedibus numeretur, iisque, cum maxima eſt, paucis: ſi enim major eſſet, non libellatione, ſed altitudinum dimenſione Trigonometrica inveniri deberet. Tantilla autem diverſitas in diſtantia a centro Telluris omnino inſenſibilis eſt inter binas quasque ſtationes. Deinde verum quidem eſt, eſſe elevationes CD, EF ut radios, quibus arcus ſimiles AC, BF deſcribuntur, ſed quemadmodum altitudo AF reſpectu radii Telluris evaneſcit, ita evaneſcit etiam diſcrimen elevationum CD, EF. Sed ſi non agatur de duabus ſtationibus, quæ ſeſe immediate excipiunt, & quarum altera notabiliter altior ſit; verum de ſtationibus, inter quas ingens terrarum tractus interjicitur, & altitudo v. g. AN habeat rationem ſenſibilem reſpectu radii Telluris, tum vero, ſi v. g. diſtantia AC ſit 1000 hexapedarum, & æqualis diſtantiæ alteri MO, arcus AC, MO non amplius erunt ſimiles, ſed angulus, quem metitur MO, erit notabiliter major angulo, quem metitur AC. Aucto jam angulo etiam elevatio GH creſcit, & ex oppoſito imminuto angulo, eadem decreſcit.

245. Ex his facile apparet, rem ſeſe habere ſicut in reductione triangulorum ad horizontem, in quo ſumpta eſt baſis, vel ad libellam maris, quæ non adhibetur, niſi quando omnino notabilis eſt differentia planorum horizontalium, ad quæ triangula ab initio reducuntur. Si talis caſus in libellatione emergeret, haud negem, alias fore elevationes in locis admodum editis, alias in ſenſibiliter humilioribus, quando ſunt eædem ſtationum diſtantiæ. Sit enim radius Telluris, pro cujus magnitudine conſtructa eſt tabula, $= R$, idem pro admodum differentibus altitudinibus ſit $= R + d$; diſtantia ſtationum ubivis eadem $= D$, elevatio pro radio R ſit $= e$. Juxta fundamentum, cui tabulæ conſtructio innititur, debet eſſe $\frac{D^2}{2R} = e$; & $\frac{D^2}{2(R + d)} = e - x$ (creſcente enim diviſore quotus decreſcere debet) habebitur hinc $D^2 = 2Re = 2(R + d)(e - x)$; vel $Re = (R + d)(e - x) = Re - Rx + de - dx$; ablato æquali Re, & facta transpoſitione fiet $de = (R + d)x$, ex quo datur ſequens Analogia: $R + d : d = e : x$; *radius Telluris in conſtructione tabulæ adhibitus, & auctus quantitate ſenſibili* d, *eſt ad hoc ipſum augmentum, ſicut eſt elevatio* e *debita radio* R *pro diſtantia* D, *ad quantitatem* x *ſubtrahendam ex elevatione tabulari, ut habeatur elevatio eidem diſtantiæ* D *competens in altitudine* d.

ARTICULUS VII.

De Geodæſia.

246. Geodæſiæ nomine nil aliud hoc loco intelligimus, quam uſum Geometriæ, & Trigonometriæ in dimetiendis, & partiendis agris, pratis, aliisve terræ ſpatiis, propter quæ inter poſſeſſores tam frequentes lites, & quæſtiones exoriuntur. Theoria ſufficiente imbutis non niſi monita quædam danda videntur in praxi obſervanda. Duplex Problema rem omnem abſolvet.

247. Problema I. Spatium irregulare (Fig. 101 Tab. X), cujus limites ABCDEFGHIKLMNOP, metiri. Fig. 101 Tab. X

Resol. Ante omnia reducantur limites ad rectilineos, velut pars ABC reducatur ad *aBb*, ut ſpatium *a*AB, quod abſcinditur, proxime compenſetur per ſpatium BC*b*, *quod adjicitur, id quod circiter* dimenſis rectis AB, B*b*, *b*C, ac ſinu *flexus* AB, *ubi maximus videtur, atque judicio oculi* præſtatur. Eodem modo curvæ PONM ſubſtitui poterit *p*ON*m*. Tum fixis in *a*, *b*, *m*, *p* perticis cum ſuis ſignis, ſi opus ſit, per Probl. XI Num. 149 metiendum erit ſpatium quadrilaterum *abmp*, ejusque area inveſtiganda. Eodem prorſus modo ſpatio CDEIKLM ſubſtituetur rectilineum *dein*, & ſic deinceps &c areæ omnium horum addantur, habebitur ſpatium quæſitum.

248. Observa. Si in ſpatio dimetiendo adſint colles, aut valles, & magnitudo æſtimanda ſit ratione frugum, quæ illic enaſci poſſunt, ſumi debet ſpatium in plano horizontali. Nam in plano inclinato (Fig. 102 Tab. X) ABCD non plus arborum, vel tritici eſſe poteſt, quam in correſpondente horizontali AEFD, cum ſingulæ arbores, ſingulæ ſpicæ certam diſtantiam horizontalem a ſeſe invicem habere debeant, quæ in plano inclinato non eſt major. Verum abſtrahimus hic ab aliis circumſtantiis, aut impedimentis fertilitatis, ponimusque humum in toto ſpatio æquabilem. Id enim non pertinet ad Geodæſiam, ſed ad rei ruſticæ peritos, decidere. Fig. 102 Tab. X

249. Problema II. Spatium ABCD (Fig. 103 & 104 Tab. X) partiri. Fig. 103 & 104 Tab. X

Casus I. Quando ſpatium ABCD (Fig. 103 Tab. X) proxime accedit ad figuram trapezii. Contingit hoc frequenter in agris.

Resol. Menſuretur 1*mo* area trapezii notis Trigonometriæ artificiis. 2*do*. Accipiantur anguli BCD, ADC: quia menſura lateris CD nota eſt, inveniri poteſt area trianguli CED. 3*tio*. Inveniatur etiam altitudo trianguli BEA ſumpto latere AB pro baſi. 4*to*. Dividatur area trapezii ABCD in tot partes æquales, in quot dividenda eſt. 5*to*. Fiat ut area trianguli ABE, ad ejusdem aream una parte trapezii v. g. $\frac{1}{3}$ (ſi trapezium triſecandum ſit) imminutam; ita quadratum altitudinis trianguli ABE ad terminum quartum, cujus radix quadrata ſubtrahatur ex altitudine trianguli ABE. 6*to*. In diſtantia reſidui, quod modo inventum eſt, agatur ad AB parallela HG; erit ſpatium BGHA una pars, in præſente exemplo tertia, trapezii. Eodem artificio reliqua diviſio peragi poteſt, modo ne pars una minor eſſe debeat, quam triangulum FCD, quod fit ducta CF ad AB parallela. Demonſtratio clara eſt ex præcedentibus, cum triangula ſimilia BEA, GEH ſint ut quadrata altitudinum. Si pars diviſionis minor foret dicto triangulo, Problema ſolveretur ut in caſu ſequente.

CASUS II. Quando area dividenda non eſt trapezium, vel ob cauſam modo expoſitam diviſio trapezii præcedente methodo fieri nequit. Sit dividenda area (Fig. 104 Tab. X) ABCD in tres partes æquales. Poſitis perticis in E, F, G, H dividatur *primo* æſtimatione oculi, & menſurentur ſingula ſpatia AEFB, FEGH, HGCD; vix continget, ut reperiantur æquales: hinc *ſecundo* videatur, quantum una ex extremis partibus, GHDC excedat (vel deficiat) unam tertiam totius. Menſuretur GH, & exceſſus (vel defectus) dividatur per numerum pedum (aut hexapedarum) rectæ GH; erit quotiens dimidia altitudo trianguli HIG auferendi a ſpatio HGCD. Quare *tertio* fiat: ut ſinus anguli GHI ad ſinum totum, ita altitudo inventa trianguli GHI ad HI: habebitur HI, & ſi per I & G agatur recta, erit IGCD tertia pars quæſita totius areæ. Eodem modo ſi BAEF reperiatur minus, quam oporteat, ex latere FE tanquam baſi & angulo EFK invenitur altitudo trianguli adjiciendi FEK, & recta per K, E ducenda, ut diviſio juſta ſit. Fig. 104 Tab. X

CASUS III. Quando ſpatia ſunt prorſus irregularia, in praxi ſequens ratio diviſionis adhiberi poterit. Sunt certæ machinæ, cylindris metallicis bene politis, & lata infra eos lamina inſtructæ, quibus plumbum in laminas tenues, æquabiliſque ubivis craſſitudinis extenditur. Ope menſulæ, vel Goniometrici, quantum circumſtantiæ ſinunt, fiat in charta accurata delineatio areæ dividendæ. Agglutinetur hæc charta laminæ plumbeæ, vel juxta ductum limitum ope ſtyli metallici imprimantur notæ per papyrum ipſi laminæ plumbeæ, & quod ultra eos excurrit, reſcindatur. Tum dividatur judicio oculi lamina plumbea, atque juxta diviſionis lineas ſcindatur, notatis (quod impreſſis punctis, vel aliis ſignis fieri poteſt) partibus, quæ ante ſectionem ſeſe contingebant. Ponderentur accurate partes, & ex majoribus reſcindatur ex ea parte, qua minores contingebant, portio adjicienda minoribus, ut æqualitas obtineatur. Ubi hoc factum, rurſum ſuper tabula æquabili diſponantur portiones laminæ eo ordine, quo in integra conjunctæ fuerant: videbitur facile, per quæ puncta ſectiones tranſeant, atque reperientur ex dimenſionibus factis, & ſcala, juxta quam in charta delineatio facta eſt, puncta correſpondentia in ipſa terra. Cauſa manifeſta eſt, quod eadem laminæ craſſitudo det ſuperficies ponderi proportionales. Adhibetur autem plumbum, ut minuſculæ etiam portiones ſubinde adjiciendæ partibus ex prima diviſione minoribus, in bilance accurata fiant magis ſenſibiles.

250. Ceterum obſerva Imo. Quando ſpatia dividenda ſunt regularia, aut parallelogramma, principia Geometriæ ſufficientes methodos ea in partes quotvis dividendi ſuppeditant; unde de his neque mentionem faciendam putavi-

ſtavimus. IIdo. Si diviſio in triangula admittatur, complura habuimus Problemata, quæ ſatisfacere poſſunt. Sed enim in agris anguli minus apti ſunt, ut arentur. IIItio. Contingit nonnunquam, ut per agros, vel prata novæ faciendæ ſint ſemitæ, quæ cum aliquam latitudinem habere debeant, agris tantundem ſpatii demunt. Si agri habeant latera parallela, indubium eſt, ſemitam ad ea perpendicularem cum minimo agrorum damno fieri. Quandoque aliæ emergunt quæſtiones, quæ e Geometria ſolutionem admittunt. Finge v. g. (Fig. 103 Tab. X) prope medium agri I eſſe aliquot arbores fructiferas, Fig. 103 Tab. X quarum duo poſſeſſores ſint; alter habitet ultra latus agri BC, cis latus AD alter: uterque acceſſum habere debet ad arbores: quæritur ſemita per I ducenda cum minimo agri detrimento, quem communi jure iidem poſſident, quorum ſunt arbores? ſi perfecto triangulo BEA, recta EI angulum ad E dividat bifariam, facile e Num. 475 Geometr. deducitur, ita debere duci ſemitam KIL, ut triangulum iſoſceles abſcindat. Poteſt enim conſiderari EI tanquam diagonalis rhombi, inter cujus duo latera angulum E comprehendentia producta ea ſemita tanquam linea breviſſima intercipitur, atque angulo I applicatur. Verum ſi punctum I (Fig. 105 Tab. X) ſit in alia recta Fig. 105 Tab. X IE, quæ angulum E non biſecat, ſolutionem indicabimus quidem, ſed hoc loco non demonſtramus, cum referatur ad methodum de maximis & minimis. Diviſa IE bifariam in O, centro O radio OI deſcribatur arcus circuli IN: breviſſima linea per I tranſiens KL ea erit, quæ ita ſecat arcum IN in M, ut ſi pars IL = KM. Eadem quæſtio oriri poteſt occaſione alicujus putei in prato vel alia terra fertili ſiti, ex quo tamen plures hauriendi jus habent, ſed plura non addimus, infinita caſuum varietas regulas particulares non admittit; e generalibus Geometriæ principiis, qui Theoriam callent, haud difficulter, quid agendum ſit, petent.

CAPUT III.

De non nullis applicationibus Algebræ & uſu ſinuum & coſinuum in eadem.

251. PROBLEMA I. Dato coſinu anguli ſimpli, invenire ſinum & coſinum anguli multipli.

RESOL. Etſi hoc Problema facile ſolvi poſſit, ſi in Formulis XVIII & Fig. 106 Tab. X XIV, pro ſinu dupli poſito A = B; dein hoc invento, & pro A ſubſtituto, obtineatur ſinus anguli tripli & ſic deinceps; libet tamen aliam adferre reſolutionem. Sit BAC angulus ſimplus, radius AB = 1, ſinus BC, coſinus AC = c; erit ſinus BC = $\sqrt{1 - cc}$; producti AB, AC, & AB in BD, DG, GH, HL &c translata, demiſſiſque in AL perpendiculis DE, HI &c, in AK vero GF, LK &c, evidens eſt, ob triangulum ADB iſoſceles, eſſe EBD =

$2BAC$; & quia etiam BDG iſoſceles, eſt $GDF = DGA + GAF$, ſeu ob $DGA = DBG = 2BAC$, erit $GDF = 3BAC$. Eodem modo patet, eſſe $HGL = 4BAC$, $LHK = 5BAC$ &c: hinc eſt DE ſinus dupli, EB coſinus dupli; GF ſinus tripli, DF coſinus tripli &c. Præterea manifeſtum eſt, ob angulum communem ad A, omnia triangula rectangula ABC, ADE, AGF &c ſimilia eſſe, eritque $AB : BC = AD : DE$, ſeu $1 : \sqrt{1 - cc} = 2c : DE = 2c\sqrt{1 - cc}$; item erit $AB : AC = AD : AE$, vel $1 : c = 2c : AE = 2cc$; ſed $BE = AE - AB$; quare erit coſinus dupli anguli $= 2cc - 1$. Pro angulo triplo eſt $AB : BC = AG : GF$; & ſubſtitutis valoribus, $1 : \sqrt{1 - cc} = 1 + 4cc - 2 : GF = (4cc - 1)\sqrt{1 - cc}$. Item $AB : AC = AG : AF$, id eſt, $1 : c = 1 + 4cc - 2 : AF = 4cc^3 - c$; ſubtrahatur $AD = 2c$; fiet $DF = 4c^3 - 3c$. Patet hinc methodus progrediendi ad ſinus & coſinus quadrupli, quintupli &c anguli.

252. Obſervat hoc loco (Tract. de Algeb.) *Mac-Laurinus*, ſinus obtineri etiam ex ſequente regula: fiat binomium, cujus primus terminus ſit coſinus, ſecundus ſinus, ſed uterque poſitivus. Elevetur hoc binomium ad eam potentiam, cujus exponens eſt multiplum anguli. Pro ſinu accipiantur termini pares, id eſt; ſecundus, quartus, ſextus &c, ſed ſigna mutentur alternis + & −. Pro coſinu ſumantur termini impares, ſive primus, tertius, quintus &c, eadem ſignorum mutatione facta. Exemplum. Petatur ſinus & coſinus anguli quadrupli, erit $(c + \sqrt{1 - cc})^4 = c^4 + 4c^3\sqrt{1 - cc} + 6c^2(1 - cc) + 4c(1 - cc)\sqrt{1 - cc} + (1 - cc)^2$. Termini pares ſunt mutatis alternatim ſignis $4c^3\sqrt{1 - cc} - 4c(1 - cc)\sqrt{1 - cc} = (4c^3 - 4c + 4c^3)\sqrt{1 - cc} = (8c^3 - 4c)\sqrt{1 - cc}$, qui eſt ſinus anguli quadrupli. Termini impares mutatis in alternis ſignis ſunt $c^4 - 6c^2(1 - cc) + 1 - 2cc + c^4 = c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2cc + c^4 = 8c^4 - 8c^2 + 1$, coſinus anguli quadrupli.

Hac methodo, ſi coſinus ſimpli anguli dicatur $c = c^{\mathrm{I}}$, dupli $= c^{\mathrm{II}}$, tripli $= c^{\mathrm{III}}$, quadrupli $= c^{\mathrm{IV}}$ &c (ubi numeri non denotant exponentes, ſed coſinum multipli) conſtruetur facile tabula ſequens, quouſque lubet, producenda.

Sinus arcus	Cosin. arcus
ſimpli $s = \sqrt{1 - cc}$	ſimpli $c^{I} = c$
dupli $s^{II} = 2c\sqrt{1 - cc}$	dupli $c^{II} = 2cc - 1$
tripli $s^{III} = (4cc - 1)\sqrt{1 - cc}$	tripli $c^{III} = 4c^3 - 3c$
quadrupli $s^{IV} = (8c^3 - 4c)\sqrt{1 - cc}$	quadrupli $c^{IV} = 8c^4 - 8c^2 + 1$
quintupli $s^{V} = 16c^4 - 12cc + 1)\sqrt{1 - cc}$	quintupli $c^{V} = 16c^5 - 20c^3 + 5c$
ſextupli $s^{VI} = (32c^5 - 32c^3 + 6c)\sqrt{1 - cc}$	ſextupli $c^{VI} = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$
ſeptup. $s^{VII} = (64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)\sqrt{1 - cc}$	ſeptup. $s^{VII} = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c$
&c.	&c.

253. **PROBLEMA II.** Invenire formulam generalem pro tangente anguli multipli, ſi detur tangens ſimpli.

RESOL. Facilis eſt ex formula tangentis (51), & præcedente regula. Sit tangens data $= t$, coſinus $= c$, ſinus $= \sqrt{1 - cc}$: quia $t = \frac{ſin.}{coſ.}$ erit $t = \frac{\sqrt{1 - cc}}{c}$. Elevetur binomium $c + \sqrt{1 - cc}$ ad potentiam indeterminatam exponentis n, erit $c^n + nc^{n-1}\sqrt{1 - cc} + \frac{n.n-1}{1.2} c^{n-2}(1 - cc) + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} c^{n-3}(1 - cc)\sqrt{1 - cc} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} c^{n-4}(1 - cc)^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} c^{n-5}(1 - cc)^2\sqrt{1 - cc}$ &c.

Cum ſinus ſint termini pares alternantibus ſignis, & coſinus impares, erit (ob radium $= 1$) tangens anguli multipli $=$

$$\frac{nc^{n-1}\sqrt{1-cc} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} c^{n-3}(1-cc)\sqrt{1-cc} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} c^{n-5}(1-c^2)^2\sqrt{1-cc} \text{ \&c}}{c^n - \frac{n.n-1}{1.2} c^{n-2}(1-cc) + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} c^{n-4}(1-cc)^2 \text{ \&c.}}$$

Atqui eſt $t = \frac{\sqrt{1 - cc}}{c}$, $t^2 = \frac{(1 - cc)}{c^2}$, $t^3 = \frac{(1 - cc)\sqrt{1 - cc}}{c^3}$ &c, & $c^{n-1}\sqrt{1 - cc} = c^n \times \frac{\sqrt{1 - cc}}{c}$; item $c^{n-3}(1 - cc)\sqrt{1 - cc} = c^n \times \frac{(1 - cc)\sqrt{1 - cc}}{c^3}$ &c, quare facta ſubſtitutione fiet

nc^n

$$\frac{nc^n t - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} c^n t^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} c^n t^5 \&c.}{c^n - \frac{n.n-1}{1.2} c^n \times t^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} c^n t^4 \&c}$$

ſive quia c^n eſt in omnibus terminis, eo omiſſo fiet

$$\frac{nt - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} t^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} t^5 \&c.}{1 - \frac{n.n-1}{1.2} t^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} t^4 \&c.}$$

254. Diximus Num. 17 ſinus, & coſinus arcus cujuslibet manere eosdem, ſi illi arcui addatur integra circuli peripheria; immo ſi non una, ſed plures peripheriæ addantur. Quare ſi arcus ſit $= A$, peripheria $= C$, arcus A, $A + C$, $A + 2C$, $A + 3C$ &c eosdem omnino ſinus & coſinus habebunt. Jam quemlibet arcum A ſpectare licet tanquam multiplum arcus $\frac{A}{m}$, denotante m numerum partium æqualium, in quas arcus ſectus concipitur; hinc ſicut A, $A + C$, $A + 2C$ &c tanquam multipla ſpectantur, ſic ad eosdem $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$, $\frac{A+3C}{m}$ &c ut eorum ſimpla referuntur. Jam vero in æquationibus, quas Num. 252 ad coſinus attulimus $c^{I} = c$, $c^{II} = 2cc - 1$, $c^{III} = 4c^3 - 3c$ &c, c^{I}, c^{II}, c^{III} &c exprimunt coſinus arcuum multiplorum A, $A + C$, $A + 2C$, $A + 3C$ &c, igitur c exprimet coſinus arcuum ſimplorum $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$ &c, ex quo conſequitur, ſi ſpectentur eæ æquationes tanquam gradus altioris, earum radices haberi per coſinus arcuum $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$ &c. Sed operæ pretium eſt indagare progreſſum horum arcuum, ut ſciatur, quæ & quot ejusmodi coſinus pro quovis multiplo haberi poſſint.

255. LEMMA I. Quidquid ſit arcus A (excepta peripheria dimidia, aut integra), ultimus arcus, qui præbeat coſinum, qui ſit radix æquationis, eſt $\frac{A + (m-1)C}{m}$. Nam ſi adhuc unam peripheriam addas, habebis $\frac{A + mC}{m} = \frac{A}{m} + C$; ſed $\frac{A}{m} + C$ non habet alium coſinum, quam $\frac{A}{m}$ (17) igitur ulterius progredi non licet.

256. COROLL. Ex primo Art. Cap. I abunde liquet, arcus, qui ſeſe mutuo complent ad quatuor rectos, habere eosdem ſinus & coſinus. Videri propterea poſſet, quod ſicut arcus $\frac{C-A}{m}$, & $\frac{C+A}{m}$ ſeſe mutuo complent ad

$\frac{C}{m}$; ita quoque coſinus arcuum $\frac{C-A}{m}$, $\frac{2C-A}{m}$ &c non minus pertineant ad radices, quam coſinus arcuum $\frac{C+A}{m}$, $\frac{2C+A}{m}$ &c. Nihilominus hi arcus accipiendi non ſunt, cum non novas, ſed easdem radices darent. Arcus enim quilibet $\frac{C-A}{m}$, $\frac{2C-A}{m}$, $\frac{3C-A}{m}$, habet unum ex arcubus $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$, $\frac{A+3C}{m}$ ...... $\frac{A+(m-1)C}{m}$, qui eum compleat ad quatuor rectos; ſic $\frac{C-A}{m}$ & $\frac{A+(m-1)C}{m}$ ſeſe complent invicem, cum ſit $\frac{C-A+A+mC-C}{m}=C$; eodem modo $\frac{2C-A}{m}+\frac{A+(m-2)C}{m}$ $=C$ &c.

257. Lemma II. Si arcus A ſit æqualis ſemiperipheriæ, & m numerus impar, inter ſubmultiplos $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$ &c ſemper eſt unus, cujus coſinus ſit -1 (ſumpta unitate pro radio, ſive ſinu toto).

Patet ſi pro A ſubſtituatur $\frac{C}{2}$; nam fiet $\frac{C}{2m}$, $\frac{\frac{C}{2}+C}{m}$, $\frac{\frac{C}{2}+2C}{m}$ + &c $\frac{\frac{C}{2}+(m-1)C}{m}$ ſeu reductione facta $\frac{C}{2m}$, $\frac{3C}{2m}$, $\frac{5C}{2m}$, $\frac{7C}{2m}$, $\frac{9C}{2m}$ .... $\frac{C+2mC-2C}{2m}=\frac{1C}{2m}$, $\frac{3C}{2m}$, $\frac{5C}{2m}$ ...... $C-\frac{C}{2m}$.

In hoc progreſſu coefficientes numeratorum ſunt numeri impares, conſequenter devenietur ad unum, qui ſit $= m$; ſic ſi $m=5$, venietur ad $\frac{5C}{2\times 5}=\frac{C}{2}$, habet autem $\frac{C}{2}$ coſinum $=-1$. Eodem modo ſi $m=r$, terminus $\frac{7C}{2m}$ fit $=\frac{C}{2}$, ejusque coſinus $=-1$. Apparet autem hunc terminum non eſſe ultimum, cum in hac hypotheſi $m=7$, ultimus ſit

$$\frac{\frac{C}{2}+(7-1)C}{7}=\frac{13C}{14}.$$

258. Lemma III. Si $A=C$, ultimus arcus eſt peripheria C, & ejus coſinus $=+1$, quidquid ſit m, ut hoc oſtendatur, tantum opus eſt C pro A

in ultimo termino $\frac{A + (m - 1)C}{m}$ ſubſtituere; nam abit in $\frac{C + mC - C}{m} = C$.

259. LEMMA IV. Arcus $\frac{A}{m}$, $\frac{A + C}{m}$, $\frac{A + 2C}{m}$, ... $\frac{A + (m - 1)C}{m}$ obtinentur, ſi arcus datus AL = A (Fig. 107 Tab. X) dividatur per m, in punctis B, E, F, G &c & initio ſumpto in primo puncto diviſionis B dividatur tota peripheria per m in punctis H, I, K, M &c.

Fig. 107 Tab. X

OSTENDITUR. Sit v. g. $m = 5$, erit $AB = \frac{A}{5}$, & quia $BH = \frac{1}{5}C$, erit $BI = \frac{2}{5}C$, $BK = \frac{3}{5}C$, $BM = \frac{4}{5}C$ igitur $AB = \frac{1}{5}A$, $ABH = \frac{A + C}{5}$; $ABHI = \frac{A + 2C}{5}$, $AHIK = \frac{A + 3C}{5}$, $AHIM = \frac{A + 4C}{5}$. Ergo generatim $AB = \frac{A}{m}$, $ABH = \frac{A + C}{m}$, $ABI = \frac{A + 2C}{m}$ &c.

260. THEOREMA. Si e quovis puncto diametri V ad prædicta diviſionum puncta B, H, I, K, M, ducantur rectæ, VB, VH, VI &c, & ſint coſinus arcuum AB, AH, AI &c a, b, c, d &c, diſtantia vero puncti V a centro $C = x$, radius circuli $= 1$, erit $VB^2 \times VH^2 \times VI^2 \times VK^2 \times VM^2$ &c $= (1 - 2ax + xx)(1 + 2bx + xx)(1 + 2cx + xx)(1 + 2dx + xx)(1 - 2fx + xx)$, ita ut ſecundus terminus in hiſce æquationibus habeat ſignum —, quando coſinus ſunt poſitivi; & ſignum +, dum hi ſunt negativi, juxta Num. 6.

DEMONST. Eſt enim $BV^2 = BP^2 + PV^2 =$ (cum $PC = a$, $VC = x$) $BC^2 - PC^2 + (PC - VC)^2 = 1 - a^2 + (a - x)^2 = 1 - a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 1 - 2ax + xx$. Pariter $VH^2 = HQ^2 + VQ^2 = CH^2 - CQ^2 + (VC + CQ)^2 = 1 - b^2 + (b + x)^2 = 1 + 2bx + x^2$. Eodem modo patet, eſſe $VI^2 = 1 + 2cx + xx$, $VK^2 = 1 + 2dx + xx$, $VM^2 = 1 - 2fx + xx$ &c; igitur $VB^2 \times VH^2 \times VI^2 \times VK^2 \times VM^2$ &c $= (1 - 2ax + xx)(1 + 2bx + xx)(1 + 2cx + xx)(1 + 2dx + xx)(1 - 2fx + xx)$ &c. Q. E. D.

261. COROLL. I. Si in æquationibus ad coſinus (252) $c^{I} = c$, $c^{II} = 2c^2 - 1$, &c fiat $c - c^{I} = 0$, $2c^2 - 1 - c^{II} = 0$ &c & pro c ſubſtituatur (ut æquationes fiant generales) $\frac{1 + xx}{2x}$, obtinebuntur ſequentes æquationes

$$\frac{1 - 2c^{I}\,x + xx}{2x} = 0 \qquad \frac{1 - 2c^{IV}\,x^4 + x^8}{2x^4} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{II}\,x^2 + x^4}{2xx} = 0 \qquad \frac{1 - 2c^{V}\,x^5 + x^{10}}{2x^5} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{III}\,x^3 + x^6}{2x^3} = 0 \qquad \frac{1 - 2c^{VI}\,x^6 + x^{12}}{2x^6} = 0 \text{ \&c.}$$

Ge-

Generaliſſime exprimetur quælibet æquatio coſinus arcus multipli, ſi c^{I}, c^{II}, c^{III} &c ponatur $= t$, quando eſt poſitivus & $- t$, quando eſt negativus; ac pro exponentibus 1, 2, 3 &c ſubſtituatur m; unde fiet $\frac{1 \mp 2tx^m + x^{2m}}{2x^m} = 0$.

262. Coroll. II. Quoniam (254) æquatio ad coſinum arcus multipli habere debet pro radicibus coſinus arcuum $\frac{A}{m}$, $\frac{A + C}{m}$, $\frac{A + 2C}{m}$ &c, id eſt, coſinus (260) arcuum AB, AH, AI &c ſive a, $- b$, $- c$ &c; radices æquationum $\frac{1 - 2c^{\mathrm{I}}\, x + xx}{2x} = 0$ $\frac{1 - 2c^{\mathrm{II}}\, x^2 + x^4}{2x^2} = 0$ &c eſſe debent a, $- b$, $- c$, adeoque earum diviſores erunt (quia poſuimus loco coſinus arcus ſimpli determinati c generaliter $\frac{1 + xx}{2x}$) $\frac{1 + xx}{2x} - a$, $\frac{1 + xx}{2x} + b$, $\frac{1 + xx}{2x} + c$ &c, ſeu $\frac{1 - 2ax + xx}{2x}$, $\frac{1 + 2bx + xx}{2x}$, $\frac{1 + 2cx + xx}{2x}$ &c. Repræſentat autem **quamlibet** æquationem ad coſinum arcus multipli $\frac{1 \mp 2tx^m + x^{2m}}{2x^m} = 0$; ergo evidens eſt, hujus diviſores fore eosdem, & propterea ſemper erit

$$\frac{1 \mp 2tx^m + x^{2m}}{2x^m} = \frac{(1 - 2ax + xx)}{2x} \frac{(1 + 2bx + xx)}{2x} \frac{(1 + 2cx + xx)}{2x} \times \frac{(1 + 2dx + xx)}{2x} \frac{(1 - 2fx + xx)}{2x}$$

&c, donec fiat productum diviſorum x æquale x^m; tum vero utroque membro ducto in $2x^m$, manet $1 \mp 2tx^m + x^{2m} = (1 - 2ax + xx)(1 + 2bx + xx)(1 + 2cx + xx)$ &c.

263. Coroll. III. In Theoremate aſſumpſimus $1 = \mathrm{AC}$, $x = \mathrm{VC}$, adeoque cum habuerimus $\mathrm{VB}^2 \times \mathrm{VH}^2 \times \mathrm{VI}^2$ &c $= (1 - 2ax + xx) \times (1 + 2bx + xx)(1 + 2cx + xx)$ &c, erit quoque $\mathrm{AC}^{2m} \mp 2t \times \mathrm{VC} + \mathrm{VC}^{2m} = \mathrm{VB}^2 \times \mathrm{VH}^2 \times \mathrm{VI}^2 \times \mathrm{VK}^2$ &c.

264. Coroll. IV. Quando arcus datus A æquatur integræ peripheriæ, fit $t = + 1$; & æquatio $1 \mp 2tx^m + x^{2m}$ abit in $1 - 2x^m + x^{2m}$, cujus radix quadrata $x^m - 1 = \sqrt{1 - 2ax + xx}\,\sqrt{1 + 2bx + xx}\,\sqrt{1 + 2cx + xx}$ &c; at ſi A æqualis ſit ſemiperipheriæ, t æquatur $- 1$, & æquatio mutatur in $x^m + 1 = \sqrt{1 + 2ax + xx}\,\sqrt{1 + 2bx + xx}\,\sqrt{1 + 2cx + xx}$ &c.

265. Ex his Corollariis deducitur jam methodus ſolvendi æquationes, quarum forma $x^{2m} \mp 2tx^m + 1$, vel $x^m \mp 1$. Quia vero t denotat coſinum alicujus arcus, & 1 aſſumpta eſt pro radio, manifeſtum eſt, ut reſolutio per diviſionem circuli fieri poſſit, debere $2t$ eſſe minus quam duplum $\sqrt[2m]{}$ ultimi termini, cum ſemper ſubintelligatur 1^{2m}. Res patebit e ſequentibus Problematis, quæ vicem exemplorum obeant.

266. PROBLEMA III. Per diviſionem circuli & ope tabularum ſinuum invenire radices æquationis $x^{8} - 6x^{4} + 36 = 0$.

RESOL. Conferatur æquatio cum generali $x^{2m} - 2tx^{m} + 1$, ſive $x^{2m} - 2tx^{m} + 1^{2m}$; erit $m = 4$; $1^{2m} = 1^{8} = 36$. Ut tabulæ ſinuum uſui ſint, reducatur hæc potentia radii ad unitatem, quod fiet diviſis terminis æquationis per terminos progreſſionis Geometricæ, cujus primus terminus 1, ultimus 36; qui proinde erunt $1, \sqrt[4]{6}, \sqrt{6}, \sqrt[4]{6^{3}}, 6, 6\sqrt[4]{6}, 6\sqrt{6}, 6\sqrt[4]{6^{3}}, 36$; fiet $x^{8} - x^{4} + 1$; ut conſtat ex Algebra. Quare eſt ſumpto radio unitate, $t = \frac{1}{2}$; ſcitur porro eſſe $\frac{1}{2}$ ſinum anguli 30^{v}, ſeu coſinum anguli 60^{v}; & cum habeatur hic coſinus poſitivus, erit $A = 60^{v}$, $\frac{A}{m} = \frac{60^{v}}{4} = 15^{v}$, cujus coſinus ſive ſinus 75^{v} pro a accipiendus eſt. Eodem modo liquet, fore $\frac{A + C}{m} = 15^{v} + 90^{v} = 105^{v}$, cujus coſinus eſt itidem ac ſinus de $15^{v} = -b$; $\frac{A + 2C}{m} = 15^{v} + 180^{v} = 195^{v}$, cujus coſinus eſt ſinus de $75^{v} = -c$. Tandem $\frac{A + 3C}{m} = 15^{v} + 270^{v} = 285^{v}$, cujus coſinus eſt ſinus de $15^{v} = + d$. Sumantur jam hi ſinus e tabulis $a = 0{,}9659258$, $-b = -0{,}2588190$; $-c = -0{,}9659258$, $+d = 0{,}2588190$, & ſubſtituantur in $\sqrt{(1 - 2ax + xx)}$ $\sqrt{(1 + 2bx + xx)}$ &c fiet $(1 - 1{,}9318516x + xx)(1 + 0{,}5176380x + xx)(1 + 1{,}9318516x + xx)(1 - 0{,}5176380x + xx) = x^{8} - x + 1$. Jam quælibet æquatio quadratica dat duas radices de x; prima dat $x = 0{,}9659258 \pm \sqrt{-0{,}06723759889436}$; tertia $x = -0{,}9659258 \pm \sqrt{-0{,}06723759889436}$; ſecunda $x = -0{,}2588190 \pm \sqrt{-0{,}93301272523900}$, quarta $x = 0{,}2588190 \pm \sqrt{-0{,}93301272523900}$, ex quo apparet, omnes octo radices eſſe imaginarias. Sed quoniam omnes diviſimus per $\sqrt[4]{6}$, ut habeantur radices pro æquatione data $x^{8} - 6x^{4} + 36$, ſingulæ rurſus per $\sqrt[4]{6}$ multiplicandæ ſunt. Verum advertendum, quod quemadmodum ſinus & coſinus tantum per approximationem habentur, ita etiam hæ radices non accuratæ, ſed veris propinquæ ſint.

267. COROLL. I. Quia terminus $\pm 2tx^{m}$ eſt medius totius æquationis, ut is habeatur pro radio reducto ad unitatem, ſatis eſt, ſi dividatur per radicem ſecundam termini ultimi, in noſtro exemplo per 6.

268. COROLL. II. Si fuiſſet æquatio data $x^{8} + 6x^{4} + 36 = 0$, facta eadem reductione ad $x^{8} + x^{4} + 1 = 0$ fuiſſet $t = -\frac{1}{2}$, & debuiſſet pro A ſumi arcus 120^{v}, cujus coſinus $= -\frac{1}{2}$.

269. PROBLEMA IV. Invenire radices æquationis $x^{4} + b^{4} = 0$.

RESOL. Quia $x^{4} + b^{4}$ eſt radix ſecunda æquationis $x^{8} + 2b^{2}x^{4} + b^{8} = 0$, & ſecundus terminus habet ſignum $+$, ſi $b = 1$, fit $x^{8} + 2x^{4} + 1 = 0$, evidens eſt, arcum A debere eſſe ſemiperipheriam, ob $2t = 2$, adeoque $t = - 1$. Dividatur itaque ſemiperipheria (quia $m = 4$) in 4 partes æquales, erit primus arcus $= 45^v = \frac{A}{m}$, $\frac{A + C}{m} = 45^v + 90^v = 135^v$, cujus coſinus eſt iterum ſinus arcus 45^v; $\frac{A + 2C}{m} = 45^v + 180^v = 225^v$, cujus coſinus eſt itidem ſinus arcus 45^v, uti etiam quarti $\frac{A + 3C}{m} = 45^v + 270^v = 315^v$; quare omnes hi coſinus poſſunt per radicalia exprimi, nempe $+ \frac{1}{\sqrt{2}}, - \frac{1}{\sqrt{2}}, - \frac{1}{\sqrt{2}}, + \frac{1}{\sqrt{2}}$, quæ ſi ſubſtituantur in $\sqrt{1 - 2ax + xx}\sqrt{1 + 2bx + xx}\sqrt{1 + 2cx + xx}\sqrt{1 + dx + xx}$ fiet $x^4 + b^4 = \sqrt{b^2 - 2bx\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 + bx\sqrt{2} + xx} \times \sqrt{b^2 + bx\sqrt{2} + xx} \times \sqrt{b^2 - bx\sqrt{2} + xx}$, & ſi fiat actualis multiplicatio habebitur

$$\begin{array}{l} b^4 - b^3x\sqrt{2} + b^2x^2 - 2b^2x^2 + bx^3\sqrt{2} + x^4 = b^4 + x^4. \\ \quad + b^3x\sqrt{2} + b^2x^2 \qquad\qquad - bx^3\sqrt{2} \end{array}$$

Prima æquatio (fiunt enim $(b^2 - bx\sqrt{2} + xx)(b^2 + bx\sqrt{2} + xx)$) dat

$$x = \frac{b \pm b\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \text{ ſecunda } x = \frac{-b \pm b\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

270. Ex hoc exemplo apparet, quod radices accuratæ reperiantur, quando coſinus poſſunt Algebraice exprimi. Jam vero quotiescunque polygonum aliquod regulare circulo Geometrice inſcribi poteſt, oſtendimus in *Geometria* (439) latera eorum poſſe Algebraice, aſſumpto radio $= 1$, exprimi, & habita ejusmodi expreſſione lateris, etiam coſinus ita poſſunt exhiberi. Ope hujus obſervationis inveniri poſſunt radices unitatis ad tertiam, quartam, quintam, ſextam &c potentiam elevatæ, poſito $1 = x^3$, $1 = x^4$, $1 = x^5$ &c & inde formatis æquationibus $x^3 - 1 = 0$, $x^4 - 1 = 0$, $x^5 - 1 = 0$ &c. Uſus porro harum unitatis radicum eſt in Algebra, ut reperta ſemel una radice æquationis methodo *Cardanica*, etiam reliquæ obtineantur. In hunc finem ſubjungam ſequens.

271. Problema IV. Invenire radicem $\frac{1}{m}$ unitatis, poſito m, 3, 4, 5, 6, 15 &c ſeu tali, ut polygonum tot laterum, quot m habet unitates, circulo Geometrice inſcribi poſſit.

Resol. Ut rem exemplo particulari oſtendamus, petantur tres radices cubicæ, ſive ſit $m = 3$. Sumatur æquatio $x^3 - 1 = 0$, quæ eſt radix de $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$. Quia $2t = 2$, erit $t = 1$. Unde arcus datus eſt integra peripheria, quæ proinde in 3 partes æquales dividenda eſt, ſive inſcribendum erit triangulum æquilaterum, cujus angulus ad centrum $= 120^v$, & coſinum habet $- \frac{1}{2}$; alter arcus, additis rurſus 120^v, fit 240^v, & habet eundem coſinum $- \frac{1}{2}$; tertius eſt tota peripheria, cujus coſinus $= + 1$; quare

æqua-

æquatio fit $x^3 - 1 = (1 + x + xx)\sqrt{1 - 2x + xx}$; pars $1 + x + xx$, dat radices $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; altera pars $\sqrt{1 - 2x + xx}$ dat $x = 1$; unde tres radices ſunt, unica realis, reliquæ duæ imaginariæ.

272. Eodem modo ſi petantur radices quartæ, inſcriptum intelligatur circulo quadratum, & ſumatur æquatio $x^4 - 1 = 0$, erunt primi arcus coſinus $= 0$, ſecundi $= -1$, tertii $= 0$, quarti $= + 1$, & fient $\sqrt{1 + xx}\sqrt{1 + 2x + xx}\sqrt{1 + xx}\sqrt{1 - 2x + xx}$, prima & tertia dat $x = \pm 1\sqrt{-1}$; ſecunda $x = -1$, quarta $x = + 1$. Pro radicibus quintis, æquatio $x^5 - 1 = 0$ accipiatur, erit $\frac{A}{m} = 72^v$, cujus coſinus per N. 444 & 445 Geom. $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, arcus $\frac{A + C}{m} = 144^v$, cujus coſinus $\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, idemque eſt arcus tertii $\frac{A + 2C}{m}$; quarti coſinus idem cum coſinu primi; ultimi denique coſinus $= + 1$.

Eodem prorſus modo reperientur radices, adhibitis aliis polygonis, ut vel ex his ſatis liquet.

273. COROLL. Hinc etiam peti poteſt methodus (quamvis etiam aliæ dentur mere Algebraicæ) inveniendi factores rationales æquationum hujus formæ $x^{2m} \mp 2tx^m + 1 = 0$, vel $x^m \pm 1 = 0$, ubi 1 repræſentare poteſt quantitatem quamlibet ad potentiam $2m$, vel m elevatam, Ut exemplum demus poſterioris, ſumamus $x^4 - 1 = 0$, habuimus $x^4 - 1 = \sqrt{1 + xx} \times \sqrt{1 + 2x + xx} \times \sqrt{1 + xx} \times \sqrt{1 - 2x + xx}$; eſt autem $\sqrt{1 + xx} \times \sqrt{1 + xx} = (1 + xx)$; & $\sqrt{1 + 2x + xx} \times \sqrt{1 - 2x + xx} = \sqrt{1 - 2x^2 + x^4} = x^2 - 1^2$; quare ſecundum membrum fit $(1 + xx)(x^2 - 1)$, qui ſunt factores alterius membri $x^4 - 1$.

Eodem modo in Problemate III ſecundum æquationis membrum exhibet factores Trinomios primi, qui quidem in eo caſu rationales non ſunt, quales ſæpius obtineri poſſunt, uti ſi foret æquatio $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$, alterum membrum per coſinus obtentum fuiſſet $(1 - 2x + xx)(1 + x + xx)(1 + x + xx)$, quemadmodum apparet e Problemate præcedente.

274. Ceterum uſum ſinuum & coſinuum &c in Algebra ampliſſimum eſſe quisque facile perſpiciet, cum anguli per eos dari poſſint, & propterea ſpectentur velut aliæ quantitates datæ, ex quibus incognitæ reperiuntur.

Monitos interim velim Tirones, ne exiſtiment, omnes a nobis formulas, quæ in Algebra uſum habent, allatas eſſe. Poſſent ſane plurimæ aliæ ex iis, quas expoſuimus, erui. Exemplo ſit formula pro tangente ſummæ vel differentiæ angulorum A & B. Habuimus Num. 52 Formul. VII *tang.* A =

$\frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{coſ.}\ A}$; ideoque etiam *tang.* $(A \pm B) = \frac{\textit{ſin.}\ (A \pm B)}{\textit{coſ.}\ (A \pm B)}$ eſt autem (XVIII & XIX) $\frac{\textit{ſin.}\ (A \pm B)}{\textit{coſ.}\ (A \pm B)} = \frac{\textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B \pm \textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A}{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B \mp \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B}$. Jam vero manet idem valor fractionis, ſi ſingulas tam numeratoris, quam denominatoris partes per eandem quantitatem dividas; unde licebit etiam ponere *tang.* $(A \pm B) =$

$$\frac{\frac{\textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ B}{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B} \pm \frac{\textit{ſin.}\ B \times \textit{coſ.}\ A}{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B}}{\frac{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B}{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B} \mp \frac{\textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ A \times \textit{coſ.}\ B}}.$$

Atqui primus numeratoris terminus reducitur ad $\frac{\textit{ſin.}\ A}{\textit{coſ.}\ A} = \textit{tang.}\ A$; ſecundus ad $\pm \frac{\textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B} = \pm\ \textit{tang.}\ B$. Denominatoris primus terminus reducitur ad unitatem; alter vero ad $\mp\ \textit{tang.}\ A \times \textit{tang.}\ B$. Quare habetur *tang.* $(A \pm B) = \frac{\textit{tang.}\ A \pm \textit{tang.}\ B}{1 \mp \textit{tang.}\ A \times \textit{tang.}\ B} = \frac{\textit{tang.}\ A \pm \textit{tang.}\ B}{R^2 \mp \textit{tang.}\ A \times \textit{tang.}\ B}$.

275. Ope Formularum XXXII & XXXIII licet reperire formulas potentiarum ſinus & coſinus alicujus anguli. Etenim ſi ponamus $A = B$, fit $\textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ B = \textit{ſin.}^2\ A = \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ (A - A) - \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ 2A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ 2A$ (6). Ducatur jam $\textit{ſin.}^2\ A$ in *ſin.* A, habebitur $\textit{ſin.}^3\ A = \frac{1}{2}\ \textit{ſin.}\ A - \frac{1}{2}\ \textit{ſin.}\ A \times \textit{coſ.}\ 2A$. In ſecundo termino ſecundi æquationis membri adhibeatur jam valor e Formula XXXIII, fiet $- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ \textit{ſin.}\ (A + 2A) + \frac{1}{2}\ \textit{ſin.}\ (A - 2A)\right) = - \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ 3A - \frac{1}{4}\ \textit{ſin.} - A$. Porro ſi arcus A accipiatur negative, & ſit minor ſemicirculo, facile intelligitur ejus ſinum eſſe negativum, manente coſinu poſitivo, ſi fuit arcus quadrante minor; negativo vero, ſi fuerit quadrante major. Hac animadverſione adhibita; ſecundus hic terminus fit $- \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ 3A + \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ A$; unde ſi conjungatur terminus primus, habebitur $\textit{ſin.}^3\ A = \frac{3}{4}\ \textit{ſin.}\ A - \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ 3A$. Simili modo e Formula XXXV ſi ponatur $A = B$, obtinetur $\textit{coſ.}^2\ A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ 2A$. Si æquatio ducatur in *coſ.* A, fiet $\textit{coſ.}^3\ A = \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ (A + 2A) + \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ (A - 2A)\right) = \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ A + \frac{1}{4}\ \textit{coſ.}\ 3A + \frac{1}{4}\ \textit{coſ.} - A$. Et ſi ponatur $A < 90^{\circ}$, ejus coſinus eſt poſitivus, conſequenter idem cum coſinu $+ A$, ut proinde habeatur $\textit{coſ.}^3\ A = \frac{3}{4}\ \textit{coſ.}\ A + \frac{1}{4}\ \textit{coſ.}\ 3A$.

Æquatio $\textit{ſin.}^3\ A = \frac{3}{4}\ \textit{ſin.}\ A - \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ 3A$ ſi ducatur in *ſin.* A, dat $\textit{ſin.}^4\ A = \frac{3}{4}\ \textit{ſin.}^2\ A - \frac{1}{4}\ \textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ 3A$. Si modo valor $\textit{ſin.}^2\ A$ ſuperius repertus adhibeatur, & e Formula XXXII pro $\textit{ſin.}\ A \times \textit{ſin.}\ 3A$ adhibeantur coſinus, poſito $B = 3A$, obtinetur $\textit{ſin.}^4\ A = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\ \textit{coſ.}\ 2A - \frac{1}{8}\ \textit{coſ.} - 2A + \frac{1}{8}\ \textit{coſ.}\ 4A$, aut poſito $2A < 90^{\circ}$, $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ 2A + \frac{1}{8}\ \textit{coſ.}\ 4A$. Eodem prorſus modo ducta æquatione $\textit{coſ.}^3\ A = \frac{3}{4}\ \textit{coſ.}\ A + \frac{1}{4}\ \textit{coſ.}\ 3A$, in *coſ.* A, eruitur $\textit{coſ.}^4\ A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ \textit{coſ.}\ 2A + \frac{1}{8}\ \textit{coſ.}\ 4A$. Et ſic porro reliquæ potentiæ inveniri poterunt.

276. Uſus harum Formularum egregius eſt, ſi quando radicale quodpiam, uti $\sqrt{1 - xx}$, in quo 1 denotat ſinum totum, x vero ſinum vel coſinum alicujus anguli, deducendum eſt in ſeriem $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}$ &c, in qua loco x^2, x^4 &c potentiæ ſinus, aut coſinus expoſita methodo repertæ ſubſtituuntur. In præſente caſu ſi x denotet ſinum alicujus anguli v, fiet $\sqrt{1 - xx} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,cos.\,2v - \frac{3}{64} + \frac{1}{16}\,cos.\,2v - \frac{1}{64}\,cos.\,4v - \frac{5}{256} + \frac{15}{512}\,cos.\,2v - \frac{3}{256}\,cos.\,4v + \frac{1}{512}\,cos.\,6v$ &c $= \frac{175}{256} + \frac{175}{512}\,cos.\,2v - \frac{7}{256}\,cos.\,4v + \frac{1}{512}\,cos.\,6v$ &c. Quod ſi jam detur angulus v, coſinus dupli, quadrupli, ſextupli &c e tabulis accipientur, & quousque res requirit, continuata ſerie, ad verum propius ſemper accedi poteſt.

Finis Partis II. Geometriæ.

IN-

INDEX CAPITUM ET ARTICULORUM.

Corrigenda in Analyſeos Parte I.

Pag. 72 lin. penult. *adde* $\frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 1} a^{m-2}cd$. Pag. eadem in columna 2 lin. 5 loco $a^{m-3}e^3$ lege $a^{m-3}c^3$.

In ipſis Erratis.

Pag. 205 lin. 21 lege lin. 22.
Pag. 248 lin. ult. $r = 2 + 26$ *lege* lin. penult. $r = 2 + 2b \ldots\ldots 2 + 3b$

In Geometriæ Parte I.

In ipſis Erratis.

Pag. 43 lin. 4 - - FBH *lege* FBH biſectus - - FBI biſectus.
Pag. 80 lin. 6 *lege* lin. 7.

His addenda.

		Errata	Corrige.
Pag.	*Lin.*		
108	10	radium	diametrum
110	39	quadrata $R\sqrt{\tfrac{2}{3}P}$	tertia $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}PR^2}$
114	antepen.	triangulum	rectangulum
125	16	$\frac{2}{5 - 2\sqrt{5}} - \frac{1}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{20 - 8\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5 - \sqrt{5}} - \frac{1}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{20 - 4\sqrt{5}}$
- -	17	$\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$
- -	18	$\frac{5\sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$	$\frac{5\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$
- -	19	$\frac{5}{12} \times \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \times$	$\frac{5}{12} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$
- -	20	$\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}$
		$= \frac{5}{24} \times \frac{3 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \times \sqrt{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$	$= \frac{5}{24} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}} \times \sqrt{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$
126	1	$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{(5 - 2\sqrt{5})\sqrt{2}}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}\sqrt{10}}$

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
- -	- -	$\frac{5}{2} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{(5 - 2\sqrt{5})\sqrt{2}}$	$\frac{5}{2} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{(7 - 3\sqrt{5})}\sqrt{10}}$
133	22	$\frac{4ab + cc}{4} x$	$\frac{4ab + cc}{4}; x$
135	5	baſin	baſi

In Geometriæ Parte II.

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
13	24	IC	ID
20	ult.	ſin. A × ſin. B	ſin. A × coſ. B
21	2	$\frac{\text{coſ. } A^2}{R} - \frac{\text{ſin } A^2}{R}$	$\frac{\text{coſ.}^2 A}{R} - \frac{\text{ſin.}^2 A}{R}$
- -	9	quam utaris	quam ut utaris
23	6	B*f*	C*f*
24	28	earundem	eorundem
28	28	AB — BC	AB — AC
29	7	49^{v}	$49''$
37	14	= 120 dig.	(= 120 dig.)
41	20	*in margine* Fig. 184 Tab. XIII	Fig. 27 Tab. II
42	4	vel *d*	velut *d*
- -	6	AgF	AGF
44	36	OCG	OCL
48	19	fixis AB	fixis A, B
49	20	ſit, partes	ſit, ut partes
51	3	debita	debite
- -	13	EF — DC	EFDC
54	37	&	ut
55	14	delinationes	delineationes
57	7	Fig. 45 N. 1	Fig. 46 N. I
- -	9	FED	FEB
- -	21	CD	CE
- -	36	ACD	ADC
58	15	ECH	EGH
- -	21	αCA	αAC
- -	33	DCH	D*c*H
59	15	ED	EB
- -	16	normalis	normali
60	12	GB	GC
61	13	Ca	C*d*
- -	36	AF	AE

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
65	1	EB — 1 ped.	EB = 1 ped.
-	14	BAC — *a*CA	BAC + *a*CA
70	18	in L	in A
-	23	LCB	LBD
72	penult.	EB	EF
73	6	numero arcus	numero pedum arcus
-	29, 30, 31, 32	*r*	I
74	16	ut latus	latus
76	32	AGC	AG*b*
77	39	EA	E . A
78	3	FB	FE
-	25	$-\frac{1}{120}$	$=\frac{1}{120}$
79	11	$52^v, 8'$	$53^v, 8'$
-	12	$37^v, 52'$	$36^v, 52'$
-	12 & 13	$18^v, 56'$	$18^v, 26'$
80	6	(vel *b* ſit æqualis)	(vel *b*) ſit æqualis
-	31	$18^v, 56'$	$18^v, 26'$
81	8 & 17	$\varkappa K$	kK
-	-	$k\delta$	$\varkappa\delta$
83	14	iutegrorum	integrorum
85	13	partiamur	partiemur
87	12	repleta	repleto
91	31	AB	A, B
101	17	fractioni	refractioni
103	36	AB	A, B
110	11	$4cc^3$	$4c^3$
112	1	$c^n t^2$	$c^n t^3$

In Figuris ad Partem II. Geometriæ.

In Fig. 28 N. 3 Tab. II ubi recta KN occurrit arcui interiori G*d*A, ſcribendum eſt M.

In Fig. 29 Tab. III in arcu BMA loco H ponatur K.

In Fig. 34 Tab. III in interſectione rectarum *a*B, *cd* ponatur O.

In Fig. 64 Tab. VI in recta AB producta ſupra T ſcribatur *t*.

In Fig. 65 Tab. VI conjungantur A & B recta.