MIMO KVADRATNE ENAČBE

Tine Golež

Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

Povzetek – *Za nadarjene srednješolce prvih letnikov je naloga, ki zahteva kvadratno enačbo,* terra incognita*. Morda je taka naloga prilika, da spregovorimo o iteraciji. Prav to je prikazano na treh primerih fizikalnih nalog.*

Abstract – *A physical problem involving a quadratic equation is, even for talented first-year high school students,* terra incognita. *Maybe such a problem is a good starting point for the introduction of iteration. This is shown on three exercises.*

UVOD

Priznati moramo, da se da veliko nalog pri srednješolski fiziki izračunati kar z osnovnošolsko matematiko. Prav zato z veseljem (in ne prevelikim navdušenjem z dijaške strani) kdaj pa kdaj zastavimo tudi nalogo, kjer dijaki osmislijo srednješolska matematična orodja, saj jih končno uporabijo za stvarne naloge. Logaritmi so že tak primer, a namesto vzklika navdušenja, da jih bomo uporabili, iz razreda največkrat slišimo le vzdih, da se bodo še tu mučili s temi čudnimi logaritmi.

Še bolj osnovna stvar je kvadratna enačba. Dijaki jo srečajo v drugem letniku, ko je večji del mehanike že mimo. Vsekakor pride prav tudi pri lečah pri nalogah, kjer je podana razdalja med predmetom in zaslonom. Izračunati moramo, kam je treba postaviti lečo, da dobimo ostro sliko. Rešitvi ustrezne kvadratne enačbe sta v tem primeru obe legi, ki dasta ostro sliko na zaslonu (povečana, pomanjšana). Pa vendar se ozrimo še v mehaniko in se vprašajmo, ali se da naloge, ki sicer zahtevajo poznavanje reševanja kvadratne enačbe, rešiti tudi po stranski poti. Glede na naslov članka je vprašanje zgolj retorično.

NAJPREJ AVTO

Izberimo najprej nalogo z avtom. Hitrost avta je 10 m/s. Potem 40 m zavira s konstantnim pojemkom 1,1 m/s^2. Koliko časa je zaviral?

Ta naloga je še posebno primerna, saj jo lahko rešimo na tri načine: s kvadratno enačbo, z dobrim poznavanjem kinematike in še z »obvodom« kvadratne enačbe, ki se po približkih odpravi proti rešitvi (iteracija). Poglejmo si vse tri poti.

S kvadratno enačbo

Ljubitelj kvadratne enačbe bi se naloge lotil z enačbo za lego telesa.

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Z minusom je upošteval, da gre za zaviranje. Spremenljivka je čas in smiselna rešitev kvadratne enačbe je:

$$t = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{2x}{a}}$$

kar da 5,94 sekunde. (V »Dodatku« je krajša razlaga, zakaj je smiselna rešitev tista, pri kateri je pred korenom minus.)

Poznavalec kinematike

Kdor dobro zna kinematiko, se zna izogniti kvadratni enačbi – vsaj pri tej nalogi. Najprej izračuna, kolikšna je hitrost na koncu zaviranja:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2ax$$

Hitrost se zmanjša na 3,46 m/s. Hitrost se enakomerno zmanjšuje, zato lahko povprečno hitrost izračunamo kot $(v_0 + v_1)/2.$ Povprečna hitrost med zaviranjem je zato 6,73 m/s. Prevožena pot med zaviranjem in povprečna hitrost med zaviranjem pa nas privedeta do časa zaviranja:

$$t = \frac{x}{v_{povp}} = 5{,}94 \text{ s}$$

Pot približkov

Nazadnje se odpravimo po poti približkov. Zelo smiselno je, da novo orodje, če smemo prvemu stiku z iteracijo tako reči, preizkusimo na primeru, ki ga sicer znamo analitično rešiti.

Prvi približek bo čas, ki ga porabi avto za to pot, če sploh ne bi zaviral. Ta čas je točno 4 sekunde. Sedaj pa upoštevamo, da je imel pojemek štiri sekunde časa, da je oviral potovanje avta. Zato:

$$x_{pod} = \frac{at^2}{2} = 8{,}8 \text{ m}$$

Izračunali smo navidezni podaljšek, ki ga dobimo z enačbo za enakomerno pospešeno gibanje. Zaviranje ima v prvem približku tak učinek, kot da bi avto moral prevoziti s konstantno hitrostjo 10 m/s kar 48,8 m in ne le 40 m. To nas pripelje k naslednjem približku za čas vožnje, ki ga dobimo iz podaljšane poti in konstantne hitrosti avtomobila:

$$t_2 = \frac{48{,}8 \text{ m}}{10 \text{ ms}^{-1}} = 4{,}88 \text{ s}$$

Ampak ta podaljšani čas vožnje pomeni, da je v igri še daljši podaljšek poti, saj je imel pojemek kar 4,88 sekunde časa (in ne le 4 sekunde, kot smo upoštevali pri prejšnjem približku), da je oviral vožnjo:

$$x_{\mathrm{pod2}} = \frac{1{,}1\ \mathrm{ms}^{-2}\,(4{,}88\ \mathrm{s})^2}{2} = 13{,}10\ \mathrm{s}$$

In od tod izračunamo naslednji približek časa:

$$t_3 = \frac{53{,}10\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{ms}^{-1}} = 5{,}31\ \mathrm{s}$$

Zgodba se ponovi: daljši čas spet pomeni več zaustavljanja, kar podaljša pot na 55,506 m. No, gre seveda za približek navidezne poti, za katero porabi ob konstantni hitrosti 10 m/s toliko časa kot z zaviranjem na poti 40 metrov.

Tabela približkov časa (od drugega naprej) in približkov »podaljškov poti« in navideznih poti.

čas zaviranja	podaljšek poti	navidezna pot
4,88	13,10	53,10
5,31	15,51	55,51
5,55	16,95	56,95
5,69	17,84	57,84
5,78	18,40	58,40
5,84	18,76	58,76
5,88	18,99	58,99
5,90	19,14	59,14
5,91	19,23	59,23
5,92	19,30	59,30
5,93	19,34	59,34
5,93	19,37	59,37
5,94	19,38	59,38
5,94	19,40	59,40
5,94	19,40	59,40
5,94	19,41	59,41
5,94	19,41	59,41

Po več korakih uvidimo, da so razlike med približki časa potovanja vse manjše. Slutimo, da bo 5,94 sekunde kar prava vrednost. Seveda to tudi preverimo, ko ta čas vstavimo v enačbo:

$$x = v_0\,t - \frac{at^2}{2}$$

in s tem časovnim približkom dobimo pot 39,99 metra, kar je dovolj blizu, da verjamemo, da je 5,94 ustrezna zaokrožitev ustreznega (= dovolj poznega) približka časa. Do cilja smo prišli po korakih, pri katerih je vsak pomenil boljši približek. Nič nas ne moti, da je potrebno neskončno korakov do popolnoma prave rešitve. V fiziki je rešitev prava že tedaj, ko je znotraj merske napake ali pri nalogah znotraj natančnosti danih podatkov. Do tja je pa le končno mnogo korakov.

V Dodatku je še grafična razlaga, kaj na grafih $v(t)$ pomenijo tu zapisani računski koraki, ki vodijo do vedno boljšega približka.

KROGLA PADE IN ZADENE DNO

Poglejmo si drugi primer, kjer bosta poti k rešitvi le dve: kvadratna enačba in pot s približki. Imamo torej železno kroglico in prepad. Kroglico spustimo v prepad in točno 3 sekunde po spustu zaslišimo udarec krogle ob dno prepada. Vprašamo se, kako globok je prepad. Pri tem za gravitacijski pospešek vzamemo 9,81 m/s^2. Navedemo še hitrost zvoka, ki je 342 m/s, kar bi ustrezalo temperaturi zraka 20 °C.

V igri sta dva dogodka: prvi je padanje krogle do dna prepada, drugi pa potovanje zvoka od dna do nas. Obe dogajanji trajata del izmerjenih treh sekund. Celotni čas, ki je 3,00 sekunde, je vsota dveh časovnih intervalov:

$$t = t_1 + t_2$$

Pri prostem padu upoševamo, da gre za enakomerno pospešeno gibanje, zato je čas padanja enak:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\,l}{g}}$$

Pri potovanju zvoka je v igri enakomerno gibanje, zato je:

$$t_2 = \frac{l}{c}$$

Oznaka ℓ je globina prepada in c hitrost zvoka.

Zato je:

$$t = \sqrt{\frac{2\,l}{g}} + \frac{l}{c}$$

Pred kvadriranjem enačbe poskrbimo, da je na desni le korenski člen. Tako se znebimo korenov. Postopek kvadriranja tu ni nevaren, saj nastopajo le pozitivne količine (globina, čas, gravitacijski pospešek, hitrost zvoka). Po kvadriranju dobimo kvadratno enačbo:

$$t^2 - 2t\,\frac{l}{c} + \left(\frac{l}{c}\right)^2 = \frac{2\,l}{g}$$

Smiselna rešitev kvadratne enačbe je:

$$l = \frac{c^2}{g} + tc - \sqrt{\left(\frac{c^2}{g} + tc\right)^2 - c^2 t^2}$$

Globina prepada je 40,71 metra oziroma zaokroženo na tri mesta: 40,7 m.

Sedaj se postavimo v kožo dijaka, ki še ne zna rešiti kvadratne enačbe. Najprej izračunajmo prvi približek. Pri tem privzamemo, da zvok neskončno hitro pripotuje do ušes. Gre torej le za prosti pad:

$$l_1 = \frac{gt^2}{2}$$

Pri danih podatkih dobimo prvi približek za globino prepada 44,145 metra. Ker je zadnja decimalka ravno 5, bi jo bilo nerodno zaokrožiti ali navzgor ali navzdol.

Sedaj pa vendarle priznamo, da je nekaj časa porabil tudi zvok. Zato čas, ki je na voljo za padanje navzdol, zmanjšamo za čas, ki ga zvok porabi za pot navzgor. Pri tem upoštevamo, da je moral zvok prepotovati ravnokar izračunani približek za globino prepada. Od tod pa bomo izračunali naslednji približek, ki seveda predstavlja manj globok prepad:

$$l_2 = \frac{g\left(t - \frac{l_1}{c}\right)^2}{2} = 40{,}43 \text{ m}$$

Seveda toliko decimalk pišemo le zato, ker gre za vmesni rezultat. Po isti poti se odpravimo do naslednjega približka. Tokrat upoštevamo, da mora zvok prepotovati 40,43 metra in ne 44,145 m:

$$l_3 = \frac{g\left(t - \frac{l_2}{c}\right)^2}{2} = 40{,}73 \text{ m}$$

Naslednji približki so: 40,71, pa potem spet 40,71 (ko zaokrožimo na dve decimalki) … Vsekakor zaslutimo, da smo že zelo blizu prave vrednosti. Zato rezultat zaokrožimo na 40,7 m. Ker poznamo rešitev kvadratne enačbe, smo z rezultatom zadovoljni. Dijak, ki ne pozna pravega rezultata, ki ga da kvadratna enačba, pa izračuna oba časa in ugotovi, da je vsota obeh časov (ob predpostavki, da je prepad globok 40,7 metra) enaka 3,00 sekunde (zapisano na več mest: 2,99957 s), kar je res dovolj blizu času, ki je podan v nalogi. Zato dijak utemeljeno domneva, da je globina prepada zadovoljivo natančno izračunana.

Na koncu spregovorimo še o uporu zraka. Če gre za 120-gramsko železno kroglico, se čas padanja podaljša za dobre 0,03 sekunde. Kogar to moti in se mu zdi preveč, naj v mislih to kroglico preoblikuje v telo z »ribjo obliko«, pa bo podaljšek časa (ob predpostavki kvadratnega zakona upora) le še 0,003 sekunde, kar res zanemarljivo vpliva na rezultat.

KROGLICA PADA, A JO REŠI ELASTIKA

Druga kroglica bo tudi padala, a jo bo pred padcem na tla rešila elastika. V mislih imamo kroglico, ki je privezana na elastiko. Tako nalogo smo v reviji že srečali [1, 2], poleg tega so jo letos reševali na regijskem tekmovanju. Ko so se z njo spopadli srednješolci prvega letnika (bila je ena izmed nalog prve tekmovalne skupine), so imeli kar nekaj težav. K rešitvi vodi pot, ki zahteva kvadratno enačbo, a ta je vendar snov drugega letnika.

Elastika je dolga 50 cm, privezana je na strop. Koeficient je 5N/m, velja Hookov zakon. Masa kroglice je 50 gramov. Kroglico, ki je pritrjena na elastiko, dvignemo do stropa in spustimo. Kolikšna je celotna dolžina raztegnjene elastike, ko kroglica doseže najnižjo točko?

Na sistem elastika-kroglica sicer deluje poleg teže še zunanja sila (sila stropa), ki je med poskusom znatno različna od nič. Ker pa se prijemališče te sile ne premakne, je delo vseh zunanjih sil (razen dela, ki ga opravi sila teže) enako nič. Izrek o mehanski energiji tako postane izrek o ohranitvi energije. Ravnina, kjer je potencialna energija enaka nič, je oddaljena od stropa za vsoto dolžine elastike (ℓ) in največjega raztezka (x). Začetna potencialna energija se v trenutku, ko kroglica doseže najnižjo točko, v celoti spremeni v prožnostno energijo:

$$mg\,(l + x) = \frac{kx^2}{2}$$

Gre za kvadratno enačbo s spremenljivko x:

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k}\,x - \frac{2mgl}{k}$$

Smiselna rešitev je:

$$x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right)$$

Rešitev je 43 cm, kar pomeni, da je najnižja točka, ki jo kroglica doseže, 93 cm pod stropom.

Do rešitve se podajmo še s približki. Najprej predpostavimo, da se potencialna energija zmanjšuje le toliko, kolikor je dolžina elastike. Ne upoštevamo, da raztegnjena elastika pomeni še nekoliko zmanjšanja potencialne energije in s tem možnost za nekoliko večje povečanje prožnostne energije. Dobimo seveda šele prvi približek raztezka, $x1$:

$$mgl = \frac{kx_1^{\,2}}{2}$$

Prvi približek je 0,313 metra. Za sedaj še obdržimo tri decimalke, pozneje bomo zaokrožili končni rezultat. Sedaj pa upoštevamo, da se kroglica ni spustila le za pol metra, pač pa za 0,813 m. Dolžini elastike smo prišteli še prvi približek. To nam omogoča, da izračunamo drugi približek:

$$mg\,(l + x_1) = \frac{kx_2^{\,2}}{2}$$

Od tod izračunamo, da je x_2 = 0,399 m. Postopek ponovimo in dobimo tretji približek:

$$mg\,(l + x_2) = \frac{kx_3^{\,2}}{2}$$

Ta je enak 0,420 metra. Četrti je 0,425, peti 0,426, šeti 0,426, sedmi 0,426 m …

Morda smo izračunali že dovolj približkov. Rezultat zaokrožimo na 0,43 m. Naredimo še preizkus dobljenega rezultata. Najprej izračunamo, koliko se spremeni potencialna energija, če se kroglica spusti za 0,93 metra. Rezultat je 0,456 J. Sedaj še izračunamo, koliko dela moramo opraviti, da to elastiko raztegnemo za 43 cm. Rezultat dobimo iz izraza za prožnostno energijo in je 0,462 J. Očitno se za toliko elastika ni mogla raztegniti (prožnostno energijo plačuje potencialna energija), zato je pravi rezultat malo manj kot 43 cm. A ker smo rezultat zaokrožili na dve mesti, smo ga pravilno zapisali, saj približki stalno naraščajo. Očitno smo izračunali dovolj približkov.

SKLEP

Vsekakor ne priporočam, da bi te načine na veliko vpeljevali v pouk. Raje počakamo na kvadratno enačbo in se tedaj lotimo takih nalog. Za zares odprte glave pri fizikalnem krožku pa je smiselno, da jim pokažemo, koliko neizrabljenih možnosti je skritih v njihovem dosedanjem znanju, ki še ne obsega kvadratne enačbe. Z »obvodnim« reševanjem kvadratne enačbe tako obidemo še nepredelano snov (kvadratno enačbo), hkrati pa s fizikalnim razumevanjem rezultata in uporabo dosedanjega znanja utemeljimo rešitev, ki je sicer približek, a je znotraj okvira natančnosti podatkov. Prav to pa je pomemben kriterij za ovrednotenje rešitve.

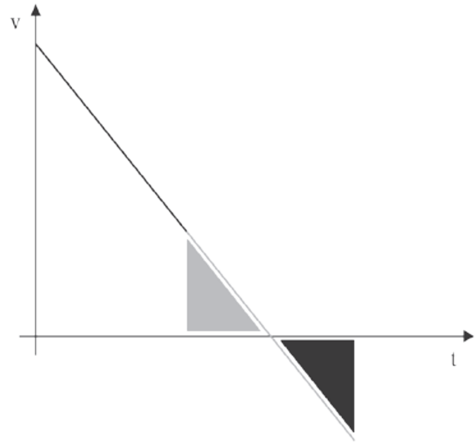
Za dijake je to morda prvo srečanje z iteracijo. Kaže jih opozoriti, da vselej ni na voljo analitične rešitve in da v resnici tudi pravi znanstveniki pogosto pridejo do rezultata z iteracijo. V šolski fiziki seveda težimo k temu, da nalogo rešimo analitično. A če še ne obvladamo ustreznega matematičnega orodja, je pač treba na pot z iteracijo. Seveda takih zahtev ni pri šolskih nalogah, medtem ko za fizikalno tekmovanje tovrstna zahtevnost ne bi smela biti prepovedana.

Morda bi bilo bolj primerno, da bi se dijaki najprej srečali s primerom, ki je tu opisan na drugem mestu (padanje kroglice v prepad). Najbrž bi jim bil konceptualno bolj razumljiv. Po drugi strani pa je smiselnost prvega primera v tem, da ga znajo rešiti tudi analitično, ne da bi morali uporabiti kvadratno enačbo. Učitelj naj sam presodi, kaj bi bil ustreznejši uvodni primer za njegove dijake.

Dodajmo še jezikovni namig. Nič ne bo narobe, če bomo iskanje teh približkov poimenovali z nazivom iteracija in se bodo dijaki srečali tudi s to tujko,. Navsezadnje lahko to besedo uporabimo za opis nekaterih dogajanj, nenazadnje tudi za nastajanje tega članka: »Po nekaj iteracijah sta pisec in recenzent dala članku končno podobo …«

DODATEK

Najprej se vprašajmo, kako smo ugotovili, da moramo izbrati rešitev kvadratne enačbe »z minusom«. Narišimo graf ustavljanja. Hitrost se enakomerno zmanjšuje, ploščina pod grafom $v(t)$ pa je natančno dani premik avta, 40 metrov.



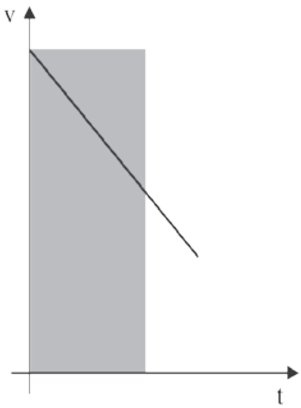
Med črno daljico, ki kaže spreminjanje hitrosti, in vodoravno osjo je ploščina, ki ustreza 40 metrom, ki jih avto prevozi med zaviranjem.

Še enkrat si oglejmo enačbo, s katero smo izračunali čas:

$$t = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{2x}{a}}$$

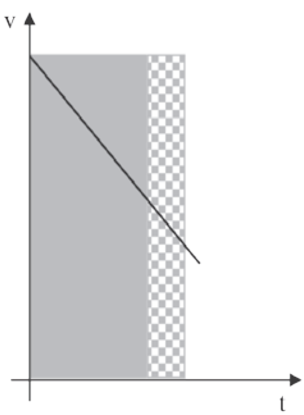
Prvi člen predstavlja celotni čas, če bi se avto popolnoma zaustavil z danim pospeškom (pojemkom). Prav zato ni težko uganiti, da moramo ta čas zmanjšati; da bo torej pravilna tista rešitev kvadratne enačbe, pri kateri kvadratni koren odštejemo. In kaj bi pomenila rešitev, pri kateri kvadratni koren prištejemo? Ta rešitev predstavlja avto, ki se je popolnoma ustavil, takoj nato pa začel voziti nazaj z istim pospeškom (kot žoga, ki jo ob metu navzgor gravitacija najprej zaustavlja in potem pospešuje navzdol). Vrednost časa ob koncu črnega trikotnika na vodoravni osi ustreza času, ko je spet 40 metrov daleč od začetne lege in vozi vzvratno natančno s tako veliko hitrostjo, kot jo je imel pri vožnji naprej pri koordinati 40 metrov. Sivi in črni trikotnik sta seveda enaka. Namenoma sta narisana malo premajhna, da je siva črta, ki predstavlja namišljeno nadaljevanje vožnje, bolj vidna. Sivi trikotnik ustreza premiku od koordinate 40 m do točke, kjer se avto ustavi, črni trikotnik, ki je pod osjo, pa predstavlja premik nazaj, ki je po velikosti enak. Kvadratna enačba je torej pravilno napovedala, da bo avto kar ob dveh trenutkih 40 m od začetne točke, če bomo seveda poskrbeli, da bo pospešek ves čas enak.

Grafično pojasnimo še račun s približki. Naš prvi približek je bila vožnja avta brez zaviranja. Avto bi porabil točno 4 sekunde za 40 metrov. To pot predstavlja sivi pravokotnik. Zavedamo se, da je bil čas daljši, saj sega graf *v(t)* bolj na desno. V igri je pač šele prvi približek.

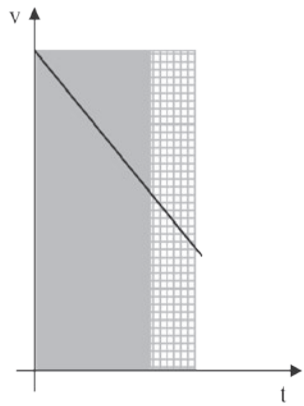


Prevožena pot je sicer res 40 metrov, a čas je prekratek. Iz grafa vidimo, da se poševna črta (hitrost) konča pozneje kot ob času $t = 4{,}0\ \mathrm{s}$.

Pojemek je imel (v tem približku) štiri sekunde časa, da je oviral potovanje. Lahko si predstavljamo, da je dodatna pot, ki smo jo tako pridobili, enaka »ploščini« sivega pravokotnika, ki je nad grafom $v(t)$. Zato natančno tako veliko ploščino dodamo še desno od sivega pravokotnika. S tem bomo pot navidez podaljšali, a bomo spet pri novem približku upoštevali, kot da ni zmanjševanja hitrosti. Ta podaljšek poti znaša 13,1 metra, kar smo izračunali na začetku članka.



Tako smo dobili že nekoliko daljši čas vožnje. Pospešek je lahko dlje časa zmanjševal hitrost in ne le 4 sekunde. Podobno kot prej spet pogledamo, koliko ploščine je nad



grafom v(t) (kolikšno navidezno podaljšanje poti je pripeval pojemek). Zraven polnega sivega pravokotnika bomo zato postavili še malenkost večji pravokotnik (in prejšnjega odstranili).

Vsak naslednji približek bi povečal desni pravokotnik. A desni pravokotnik se vse manj povečuje. Pravzaprav le toliko, da sivi in desni pravokotnik skupaj segata v desno natančno tako daleč, kot sega graf v(t). Tako smo s predpostavko o konstantni hitrosti in z ustreznim navideznim podaljšanjem poti, ki ga določa zaviranje, z iteracijo rešili nalogo.