PO SLEDEH NEKE GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A55, 51M04, 51M15

V prispevku obravnavamo nekatere geometrijske konstrukcije trikotnika z dano osnovnico c, višino v_c nanjo in razliko $\alpha - \beta$ kotov ob osnovnici. Nalogo je Josipu Plemlju dal leta 1891 njegov profesor matematike Vincenc Borštner na ljubljanski gimnaziji. Plemelj je nalogo rešil na originalen način.

ON THE TRACKS OF A GEOMETRIC CONSTRUCTION

In this contribution we discuss certain geometric constructions of a triangle with a given base c and altitude h_c to the base, and the difference $\alpha - \beta$ between the angles at the base. The problem was posed in the year 1891 to Josip Plemelj by his mathematics teacher Vincenc Borštner in secondary school in Ljubljana. Plemelj has solved the problem in an original way.

Uvod

Ob okroglih obletnicah slavnih matematikov se po navadi znova poveča zanimanje zanje. Dne 22. maja 2017 smo v Plemljevem seminarju na Jadranski ulici 19 v okviru Seminarja za zgodovino matematičnih znanosti skromno počastili točno 50. obletnico smrti našega velikega matematika akademika prof. Josipa Plemlja (1873–1967). V ta namen smo povabili prof. Antona Suhadolca, enega izmed redkih še živečih Plemljevih študentov, da nam je povedal nekaj iz življenja in dela našega svetovno znanega matematika. Prof. Suhadolc je pred leti urejal Plemljevo pisno zapuščino, ki je sedaj shranjena v Arhivu Republike Slovenije (ARS) v Ljubljani. Ob tem zahtevnem in hvalevrednem delu je odkril marsikaj zanimivega, kar pred desetletjem še ni bilo splošno znano, predvsem o težavah s pridobivanjem profesorjev fizike v prvih letih po ustanovitvi ljubljanske univerze leta 1919. Njen prvi rektor je bil namreč ravno prof. Plemelj. Čeprav je imel možnosti, da bi svoje znanstveno delo nadaljeval na kakšni že utečeni univerzi, se je raje posvetil ljubljanski, na kateri je dolga leta predaval matematiko bodočim profesorjem matematike in fizike ter inženirjem, in sicer vse do upokojitve leta 1957. Številni Plemljevi študentje so ostali tudi na visokih in višjih šolah, napredovali v profesorje in nadaljevali s širjenjem matematičnega znanja. V glavnem je vse, kar je o prof. Plemlju povedal prof. Suhadolc, zapisano v članku [10]. Še več pa je o prof. Plemlju in njegovem delu zapisal njegov najboljši študent, akademik prof. Ivan Vidav (1918–2015) v [11].

Kot dijak ljubljanske klasične gimnazije se je Plemelj vnaprej sam naučil toliko matematike, da je lahko inštruiral dijake višjih letnikov, zlasti maturante. Tako se je laže spopadal z revščino, ki so jo tolkli v njegovi družini. Ni pa ostal le pri gimnazijski matematiki, posegel je tudi po višji. Plemljev profesor je bil Vincenc Borštner (1843–1917), ki je spoznal in spoštoval njegovo nadarjenost za matematiko. Zato je Plemelj zlahka nadaljeval študij matematike na Dunaju.

Ob tej priložnosti se spodobi, da navedemo nekaj osnovnih, manj znanih podatkov o Vincencu Borštnerju. Z vztrajnim iskanjem se jih najde na svetovnem spletu. Rodil se je 8. januarja 1843 v Lažišah, vasici, ki sedaj spada pod občino Laško. Gimnazijo je obiskoval v Celju in Mariboru, nato je študiral na graški univerzi. Leta 1870 je bil imenovan za asistenta za višjo matematiko in fiziko na graški tehniški visoki šoli. Obenem je poučeval kot učiteljski kandidat na neki graški gimnaziji, od 1871 pa nadaljeval s pedagoškim delom na celovški in ljubljanski gimnaziji. V Ljubljani se je prof. Borštner na lastno željo upokojil leta 1903. Umrl je pred sto leti, 31. maja 1917 v Ljubljani.

V Celovcu je 1875 objavil razpravo *Zur Theorie der Potenzen von Kreisen und Kugeln (O teoriji potenc krogov in krogel).* Borštner je objavljal svoje strokovne prispevke tudi v celovškem *Kresu*, leposlovnem in znanstvenem listu, v katerem je na primer leta 1881 objavil v treh nadaljevanjih prispevek *Spektralna analiza kot pripomoček v astronomiji*, naslednje leto pa *O telegrafičnih vremenskih poročilih*, prav tako v treh nadaljevanjih.

Pisal je tudi ocene knjig, na primer leta 1881 *Oko in vid* Jakoba Žnidaršiča (1847–1903) in pozneje dveh predelanih Močnikovih učbenikov za aritmetiko in geometrijo. Baje je Plemelj kot dijak rad prebiral Borštnerjeve astronomske prispevke v Kresu, zato ni čudno, če se je navduševal nad astronomijo.

Prof. Borštner je prišel v našo zgodovino matematike morda predvsem zaradi **konstrukcijske naloge**, ki jo je narekoval iz neke zbirke mlademu petošolcu Plemlju leta 1891:

(A) Konstruiraj trikotnik, če poznaš stranico c, višino v_c in razliko kotov $\alpha - \beta$.

Pri tem vzamemo, da je $\alpha > \beta$, ker je za $\alpha = \beta$ naloga trivialna. Seveda je pri tem mišljena klasična konstrukcija, samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Plemelj je nalogo rešil, najprej analitično, nato pa še konstrukcijsko v veliko profesorjevo zadovoljstvo. Rešitev sicer ni bila taka, kot je bila v zbirki in kakršno je pričakoval profesor. Vsaj dve rešitvi, drugačni od Plemljeve dijaške, pa sta bili znani že vsaj 60 let pred tem dogodkom, kot bomo videli pozneje. Plemelj je o tej nalogi še večkrat razmišljal, zlasti med novoletnimi počitnicami, in našel več drugačnih konstrukcij. Sicer pa je znano (glej na primer [11]), da se je prof. Plemelj ukvarjal s težkimi problemi v teoriji potenciala, diferencialnih in integralskih enačb, analitičnih funkcij ter algebri in teoriji števil. Pri prebiranju virov v zvezi z nalogo (A) pa naletimo na nekaj težav in nejasnosti.

Ni znano, ali je prof. Plemelj svojo konstrukcijo trikotnika pred letom 1949 kje javno predstavil. Zgodilo pa se je, da je novembra tega leta na Bledu potekal 1. kongres Zveze jugoslovanskih društev matematikov, fizikov in astronomov, kjer je Plemelj kot domačin imel govor o svojem življenju in delu. Ob tej priložnosti je pokazal tri konstrukcije svojega trikotnika: dve lastni in tisto iz Borštnerjeve zbirke. Prispevek s konstrukcijami vred je bil objavljen v Beogradu leta 1951 v zborniku kongresa, v Ljubljani pa šele 101 leto po Plemljevi dijaški rešitvi, to se pravi leta 1992, in sicer v Obzorniku za matematiko in fiziko (glej [7]), kar ni nič čudnega, saj v času kongresa v Sloveniji še nismo imeli matematične strokovne revije, kaj šele znanstvene. Imeli smo pa *Proteus*, ilustriran časopis za poljudno naravoslovje. V času kongresa je izhajal njegov 12. letnik, njegov dolgoletni urednik pa mu je bil prof. Lavo Čermelj (1889–1980). Čermelj je v Proteus vpeljal rubriko *Za bistre glave*, v kateri je postavljal vprašanja z različnih področij naravoslovja, fizike in matematike, v naslednjih številkah pa je objavljal in komentiral odgovore bralcev. Ko je Čermelj izvedel, da je prof. Plemelj na blejskem kongresu govoril tudi o konstrukcijski nalogi (A), je takoj v rubriki *Za bistre glave* objavil *Vprašanje št. 6* (več v [3]). To je verjetno naredil z namenom, da bi bralci našli še kakšno rešitev. Zapisal je, da je sam Plemelj že našel *kakih dvajset* različnih rešitev. Najprej se je verjetno na urednikovo prošnjo odzval sam prof. Plemelj in v Proteus poslal tri rešitve iz svoje zbirke: tisto iz Borštnerjeve zbirke in dve svoji, od katerih je zadnja tista iz njegovih dijaških let, pri kateri si je pomagal s trigonometrijo. Vse so bile objavljene v [8]. Kot kaže, je to bila prva objava njegovih trikotnikov v tiskani obliki. Prispele so tudi rešitve nekaterih bralcev, ki pa so bile pomanjkljive. Ing. Mitja Brodar, ki je našel pravilno rešitev, pa je bil prepozen in je prišel na vrsto v naslednji številki Proteusa, to je v [2]. Zanimanje za konstrukcijo še ni upadlo, kajti bralec Ivan Munda je poslal še eno pravilno rešitev, ki je pristala v [6]. Še nekaj bralcev je poslalo rešitve, ki pa so bile pomanjkljive in so zato ostale neobjavljene. Urednik je dopisal, da so vse pravilne rešitve bralcev že v Plemljevi zbirki. Tako je Proteus odigral pomembno vlogo tudi na področju matematike.

Toda na omenjeni blejski konferenci je prof. Plemelj povedal, da je sam našel še *devet* različnih rešitev, zadnjo, kot je sam dobesedno zapisal v [7], *v noči 1. januar 1940, po Silvestru 1939.* Poleg teh je dve rešitvi dobil od drugod. Potožil pa je tudi, da nima naslova Borštnerjeve zbirke nalog, ker si ga ni zapomnil. Tako zbirko sta mu pokazala v Černovicah, kjer je služboval kot profesor matematike, dva študenta. V njej je bila tudi omenjena naloga iz Borštnerjeve zbirke. Žal si naslova te zbirke ni zapisal. Tako ostane odprto vprašanje, katero zbirko je uporabljal prof. Borštner. Pač pa je prof. Plemelj na ljubljanski klasični gimnaziji našel Wiegandovo knjigo [12] z geometrijskimi nalogami. V [7] je v njenem naslovu uporabil izraz *Obergymnasien (višje gimnazije)* namesto *höhere Lehranstalten (višje učne zavode)*, kar je nekoliko oteževalo iskanje po svetovnem spletu. S pravilnim naslovom pa Wiegandovo knjigo zlahka najdemo celo v elektronski obliki. O avtorju Augustu Wiegandu ne vemo veliko, znano pa je, da je leta 1845 poučeval matematiko na realki v nemškem mestu Halle ob Saali. V tem mestu je od leta 1869 deloval Georg Cantor (1845–1918), *oče teorije množic*. Wiegandova zbirka [12] iz leta 1865 vsebuje raznovrstne konstrukcijske naloge z obrazložitvami in rešitvami za trikotnike, štirikotnike in krožnice. V njej najdemo na strani 147 nalogo:

(B) Konstruiraj trikotnik, če poznaš kotno simetralo iz enega oglišča, iz drugega pravokotnico nanjo, v tretjem oglišču pa kot.

Za to nalogo prof. Plemelj v [7] pove, da je povezana z nalogo (A) in da je dobil novo, prav lepo konstrukcijo.

Ko iščemo knjige, mimogrede najdemo tudi kakšno, ki je nismo pričakovali. Tako smo naleteli na obsežno zbirko konstrukcijskih nalog [4] z obrazložitvami in rešitvami. Zbirka je izšla v letih 1831 in 1832 v dveh delih na 860 straneh, v vsakem so dodane izvedene geometrijske konstrukcije na posebnih listih na koncu. V obeh knjigah je skoraj 2300 nalog. Že v prvem delu je na strani 136 rešena naloga (A) z natančno razlago. Uporabljena je metoda dopolnitve trikotnika v enakokrak trapez, kar najdemo v bistvu tudi v [2, 7]. V drugem delu spet najdemo na strani 298 pod zaporedno številko 1720 nalogo (A) z analizo in rešitvijo, ki se opira na *izrek o potenci točke glede na krožnico*. Popolnoma možno je, da so poznejše zbirke nalog črpale primere ravno iz te knjige, morda tudi Borštnerjeva zbirka.

Avtorja zbirke [4] sta Hermann pl. Holleben in Paul Gerwien, v času njenega izida polkovnika pruske vojske in učitelja v kadetskem korpusu. Gerwien je leta 1833 v reviji, ki jo je ustanovil August Leopold Crelle (1780–1855) in izhaja še danes pod imenom *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, objavil članek, v katerem dokaže izrek, da lahko poligona, ki imata enaki ploščini, z ravnimi črtami razrežemo na iste poligone. Izrek po Farkasu Bolyaiju (1775–1856), ki je izrek dokazal leta 1833, in Gerwienu imenujemo *Bolyai–Gerwienov izrek*. Kot poseben primer lahko kvadrat ali njemu ploščinsko enak enakostranični trikotnik razrežemo na sedem trikotnikov, iz katerih lahko sestavimo oba lika.

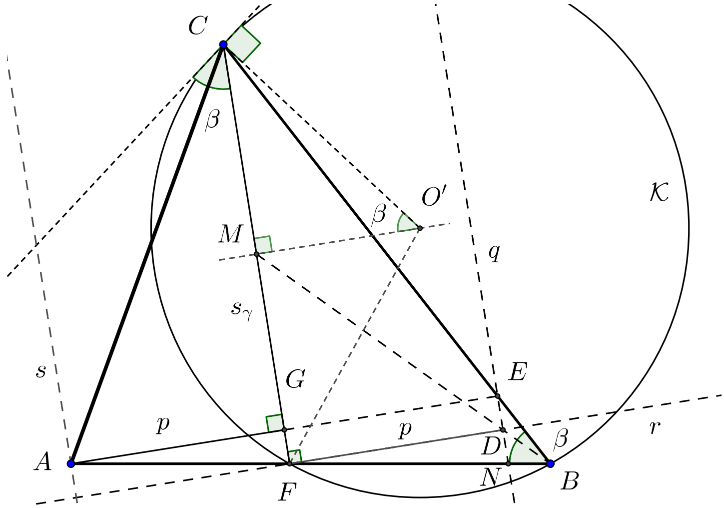
Nekaj geometrijskih konstrukcij

Ker nas je zanimalo, koliko rešitev naloge (A) je prof. Plemelj v resnici našel, smo (I. Hafner, P. Legiša in avtorja) stopili v ARS. Ker je tamkajšnja Plemljeva zapuščina obsežna, vsebuje 19 enot, smo natančneje pregledali enoto številka 3 in v njej našli na več listih geometrijske konstrukcije, za katere pa ni popolnoma razvidno, ali so popolne ali samo delne. Najbolj zanimiv je list stenskega koledarja za november 1939, na katerem je na hrbtni strani več konstrukcij. Za nekatere pa je treba šele ugotoviti, kaj predstavljajo, saj posebnih pojasnil, ki smo jih vajeni pri takih rečeh, skorajda ni. Nekatere konstrukcije so pa vendarle zelo očitno rešitve naloge (A). Nekaj zares elegantnih rešitev, do katerih se pride brez uporabe kotnih funkcij, predstavljamo v pričujočem prispevku. Konstrukcij, ki so bile objavljene v [2, 5, 8, 9], tukaj ne bomo ponavljali. Rešitev naloge (A), ki jo je prof. Vidav obravnaval v akademskem letu 1952/53 pri geometriji in je objavljena v [9], se le malo razločuje od rešitev v [1, 2, 4].

Bralec, ki želi bolje razumeti konstrukcije v nadaljevanju, naj jim sledi z geometrijskim orodjem, še bolje pa z računalniškim programom za dinamično geometrijo (na primer GeoGebro), da bo lahko z lahkoto spreminjal podatke. Kajti samo z gledanjem rešitev se bo bolj malo naučil.

1. Oglejmo si najprej rešitev naloge (B) iz Wiegandove zbirke [12], ki jo omenja prof. Plemelj v [7]. Poznamo simetralo s_γ kota γ iz oglišča C trikotnika ABC, razdaljo p oglišča A od te simetrale in kot β (slika 1). Zaradi enostavnosti vzemimo, da je β manjši od pravega kota. Enak pogoj bomo v nadaljevanju privzeli za kot $\varepsilon = \alpha - \beta$ v nalogi (A). Za večje kote potekajo konstrukcije podobno, le da je treba tu pa tam daljice podaljševati na eno ali drugo stran.

Najprej narišemo simetralo $s_\gamma = CF$ kota γ in njeno razpolovišče ozna-



Slika 1. Rešitev naloge (B).

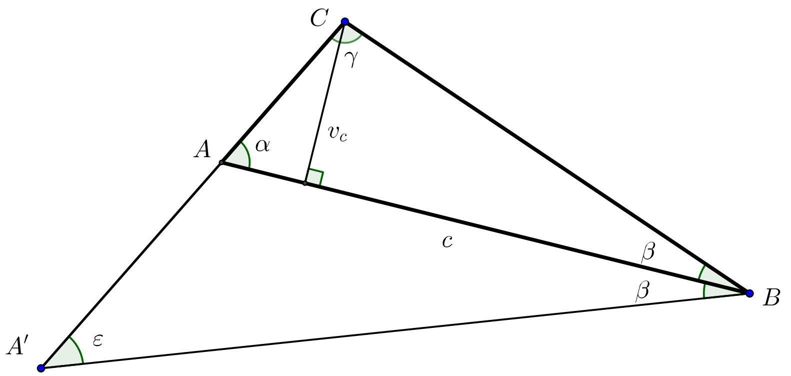
čimo z M. Oglišče B leži na krožnici $\mathcal{K}$, s katere se daljica CF vidi pod kotom β. (Takšno krožnico znamo narisati s pomočjo zveze med središčnimi in obodnimi koti. Središče O' trikotniku CFB očrtane krožnice je vrh enakokrakega trikotnika CFO' z osnovnico CF in kotom med krakoma 2β.)

Z naslednjim premislekom bomo prišli do točke B. Predstavljajmo si, da nam je trikotnik ABC že uspelo narisati. Skozi točko A potegnemo pravokotnico na simetralo CF, ki seka stranico BC v točki E, CF pa v točki G. Trikotnik AEC je enakokrak. Zato točka E leži na premici q, ki je vzporedna simetrali CF in je od nje oddaljena za p. Skozi točko F potegnemo pravokotnico r na CF in njeno presečišče s premico q označimo z D. Štirikotnik $FDEG$ je pravokotnik in $|DE| = |FG|$. Tudi točka D je od simetrale CF oddaljena za p, zato jo znamo enostavno konstruirati. Z N označimo presek premice q in stranice AB. Trikotnika AFG in FND sta skladna, ker sta podobna pravokotna trikotnika z enako dolgo istoležno kateto $|AG| = |FD| = p$. Zato je $|FG| = |ND|$. Od prej vemo, da je $|DE| = |FG|$, zato je BD težiščnica trikotnika NBE. Trikotnika FBC in NBE imata skupno oglišče B, stranici NE in FC sta si vzporedni, preostali dve stranici pa se pokrivata, zato sta si podobna in njuni težiščnici iz B se pokrivata.

Sedaj znamo skonstruirati točko B. Po eni strani leži na krožnici $\mathcal{K}$, po drugi strani pa na težiščnici trikotnikov NBE in FBC skozi B. Ta težiščnica poteka skozi razpolovišči D in M točki B nasprotnih stranic NE in FC. Po korakih poteka konstrukcija takole. Narišemo daljico CF, določimo njeno razpolovišče M in konstruiramo krožnico $\mathcal{K}$. Na pravokotnici r na daljico CF v točki F za p stran od F označimo točko D. Oglišče B iskanega trikotnika je presek premice skozi M in D ter krožnice $\mathcal{K}$. Oglišče A pa je presečišče premice skozi B in F ter vzporednice s daljici CF, za p stran od CF, na nasprotnem bregu kot B. Nazadnje izrišemo trikotnik ABC.

2. Kakšno povezavo ima naloga (B) z nalogo (A)? Naj bo ABC trikotnik z osnovnico c, višino v_c nanjo in običajno označenimi koti (slika 2). Točka A' naj bo presek poltraka CA in premice skozi B, ki oklepa z BA kot β in se ne pokriva z BC. Potem je daljica BA simetrala kota pri B v trikotniku $A'BC$. Točka C je od BA oddaljena za v_c. Kot α je zunanji kot trikotnika $A'BA$ in je zato enak vsoti njegovih notranjih nepriležnih kotov: $\alpha = \sphericalangle BA'A + \beta$, iz česar dobimo $\sphericalangle BA'A = \alpha - \beta = \varepsilon$.

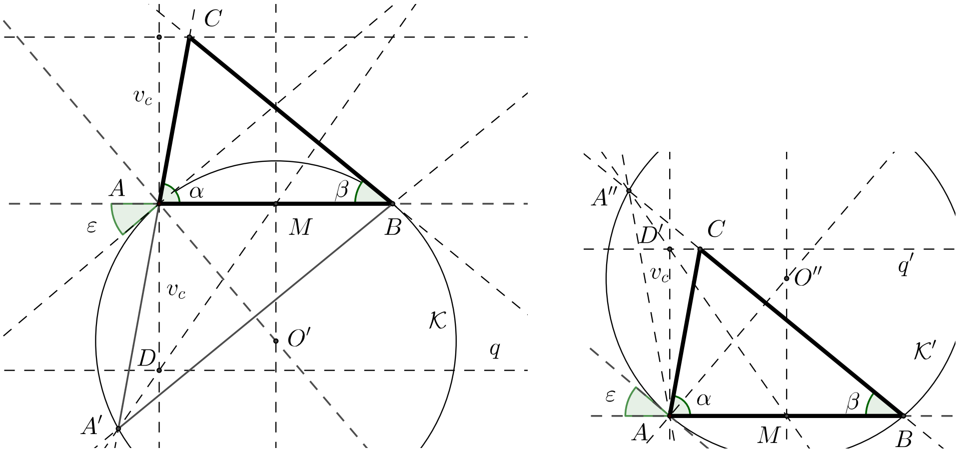
Trikotnik $A'BC$ po (1.) že znamo konstruirati. Vlogo kota β odigra kot ε, simetrale s_γ stranica c, razdalje p pa višina v_c. Točko A dobimo kot presečišče stranice $A'C$ s simetralo kota pri B trikotnika $A'BC$ (slika 3 levo).



Slika 2. Pojasnilo k rešitvi naloge (A) s pomočjo naloge (B).

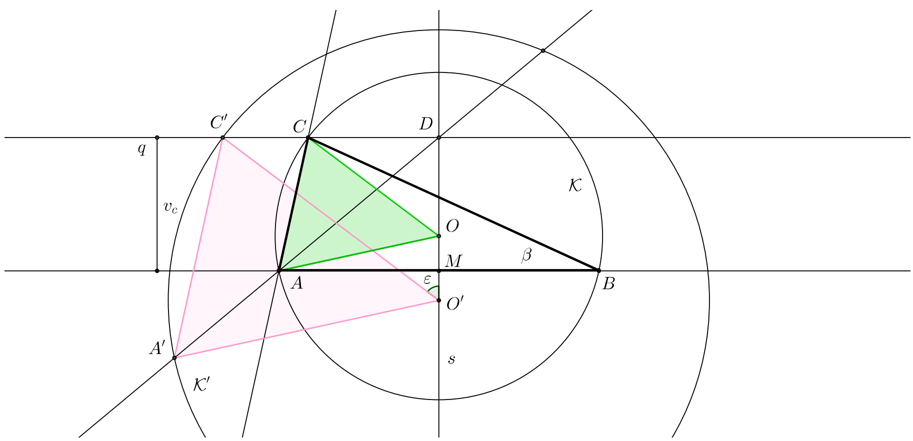
Konstrukcijo lahko precej poenostavimo z zrcaljenjem preko nosilke stranice AB (slika 3 desno). Pri tem trikotnika $A'BA$ ni treba risati.

3. Zanimiva je tudi naslednja rešitev naloge (A), ki jo najdemo v [1]. Da bi jo razumeli, si oglejmo trikotnik ABC, ki je standardno označen, razlika $\varepsilon = \alpha - \beta$ pa naj bo manjša od $\pi/2$ (slika 4). Trikotniku očrtamo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v točki O, načrtamo simetralo s stranice AB in njuno presečišče označimo z M. Skozi C potegnemo stranici AB vzporednico q, ki seka simetralo s v točki D. Najprej se prepričajmo, da polmer OC s



Slika 3. Ena od rešitev naloge (A).

simetralo s oklepa kot ε. Očitno je $\sphericalangle COA = 2\beta$, $\sphericalangle OAC = \pi/2 - \beta$ in $\sphericalangle MAO = \alpha - \sphericalangle OAC = \alpha - (\pi/2 - \beta) = \alpha + \beta - \pi/2$. Zato je $\sphericalangle AOM = \pi/2 - \sphericalangle MAO = \pi/2 - (\alpha + \beta - \pi/2) = \pi - \alpha - \beta$. Nazadnje je res $\sphericalangle DOC = \pi - 2\beta - (\pi - \alpha - \beta) = \alpha - \beta = \varepsilon$, kar je bilo treba preveriti.



Slika 4. Rešitev naloge (A) s podobnostjo trikotnikov.

Nato si na simetrali s izberemo poljubno točko O' pod premico q in narišemo trikotniku AOC podoben trikotnik $A'O'C'$, pri čemer oglišče C' leži na premici q, stranica $O'C'$ je vzporedna z OC in zato oklepa kot ε s simetralo s, stranica $O'A'$ pa vzporedna z OA. Trikotnika AOC in $A'O'C'$ sta enakokraka, točke D, A in A' pa kolinearne.

Sedaj se da iskani trikotnik preprosto konstruirati. Najprej narišemo stranico AB z dano dolžino c, načrtamo njeno simetralo s, vzporednico q stranici AB na dani višini v_c, označimo z D presečišče premic s in q, nakar na s nekje pod q izberemo točko O' in skoznjo pod danim kotom ε načrtamo premico, ki seka q v točki C'. Skozi C' načrtamo krožni lok $\mathcal{K}'$ s središčem v O'. Lok $\mathcal{K}'$ naj seka premico skozi A in D v točki A'. S tem je trikotnik $A'O'C'$ določen. Stranici $A'C'$ skozi A potegnimo še vzporednico, ki preseka q v točki C, ki je tretje oglišče iskanega trikotnika. Izrišemo trikotnik ABC.

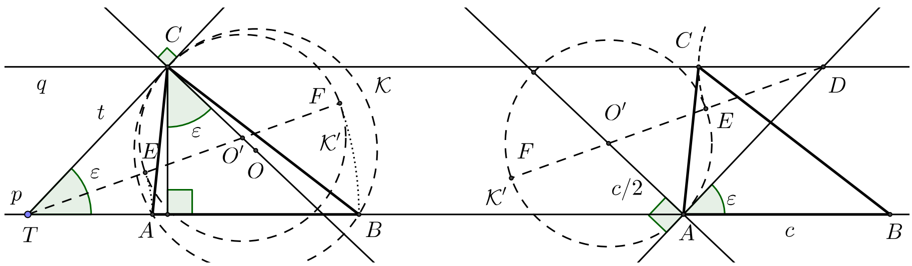
Če je $\pi/2 < \varepsilon < \pi$, poteka konstrukcija enako, le da točko O' izberemo nad premico q, v primeru $\varepsilon = \pi/2$ pa na q. V slednjem primeru lahko C' na q, levo od D, poljubno izberemo.

4. V [1], pa tudi v [5, 6], je rešitev naloge (A), ki temelji na *izreku o potenci točke glede na krožnico*. Izraz je leta 1826 uvedel Jakob Steiner (1796–1863), sam izrek pa je poznal že Evklid (Elementi, 3. knjiga, trditev 36), le da mu ni tako rekel. Obsežno delo [4] Steinerjevega izraza še ne uporablja. Dokaže pa se ga preprosto s podobnimi trikotniki.

Do elegantne rešitve naloge (A) pridemo po obravnavi trikotnika ABC, ki mu očrtamo krožnico $\mathcal{K}$ in njegovo središče označimo z O (slika 5 levo). V trikotniku načrtamo tudi višino v_c. Podobno kot v prejšnji rešitvi hitro ugotovimo, da je kot med to višino in polmerom CO enak $\varepsilon = \alpha - \beta$. V oglišču C konstruiramo na $\mathcal{K}$ tangento t, ki seka premico p, to je nosilko stranice AB, v točki T. Po izreku o potenci točke glede na krožnico velja: $|TC|^2 = |TA| \cdot |TB| = |TA| \cdot (|TA| + c)$. Tangenta t pa oklepa s p tudi kot ε. Za uspešno konstrukcijo trikotnika je treba najti le še razdaljo $|TA|$. To pa nam uspe s pomožno krožnico $\mathcal{K}'$, ki ima premer c in se v C dotika t. Skozi T in središče O' krožnice $\mathcal{K}'$ potegnemo premico, ki $\mathcal{K}'$ seka v točkah E in F. Tedaj prav tako po izreku o potenci točke glede na krožnico velja $|TC|^2 = |TE| \cdot |TF| = |TE| \cdot (|TE| + c)$. Ker ima kvadratna enačba $x(x + c) = |TC|^2$ eno samo pozitivno rešitev, je $|TA| = |TE|$.

Konstrukcija trikotnika ABC je sedaj na dlani. Načrtamo vzporedni premici p in q v medsebojni razdalji v_c. Na p izberemo točko T in skoznjo načrtamo premico t, ki oklepa s p kot ε. Njeno presečišče s q označimo s C. Načrtamo krožnico $\mathcal{K}'$, ki ima premer c in se v C dotika t. Središče $\mathcal{K}'$ označimo z O' in skozi T ter O' potegnemo premico, ki $\mathcal{K}'$ seka v točkah E in F. Krožna loka s središčem v T skozi E in F sekata p v točkah A in B. Načrtamo trikotnik ABC, ki je rešitev naloge.

Rešitev naloge (A), ki se nekoliko razlikuje od tiste v [1, 5, 6], najdemo tudi v [4]. Levo na sliki 5 je konstrukcija iz [1], pri kateri začnemo s fiksirano točko T oziroma C, desno pa iz [4], pri kateri začnemo s fiksno stranico AB.



Slika 5. Rešitvi naloge (A) s potenco točke glede na krožnico.

Za konec

Od *devet* v [7] in *kakih dvajset* v [3] omenjenih rešitev naloge (A) smo v [1, 2, 7, 6, 9] našli *šest* bistveno različnih. Zato ostaja še veliko dela, da ugotovimo, kaj je s preostalimi. Še vedno pa ne znamo odgovoriti na vprašanje, iz katere zbirke je prof. Borštner izbral nalogo (A).

Kolega Izidor Hafner je nekaj rešitev naloge (A) obdelal s programom *Mathematica* in jih objavil na svetovnem spletu: `demonstrations.wolfram.com/ThePlemeljConstructionOfATriangle/`

LITERATURA

[1] AS 2012, Plemelj Josip, škatla 3, mapa 58, J. Plemelj, Razni matematični zapiski in rokopisi.

[2] M. Brodar, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 8, 285.

[3] L. Čermelj, *Vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 4/5, 166.

[4] H. Holleben, P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I. in II. del, G. Reimer, Berlin 1831 in 1832.

[5] D. S. Modic, *Trikotniki*, Math, Ljubljana 2009.

[6] I. Munda, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 9, 323–324.

[7] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 6, 188–192.

[8] J. Plemelj, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 7, 243–245.

[9] I. Pucelj, *Plemljev trikotnik in negibne točke transformacij*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015), 1, 12–14.

[10] A. Suhadolc, *O profesorju Josipu Plemlju*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), 2, 53–57.

[11] I. Vidav, *Josip Plemelj, Ob stoletnici rojstva*, DMFA, Ljubljana 1975.

[12] A. Wiegand, *Geometrische Aufgaben für höhere Lehranstalten*, druga izdaja, Braunschweig, C. A. Schwetschke und Sohn, 1865.