Verjetno najpomembnejše poslanstvo društva je kravžljanje mladih možganov. Talente je namreč treba prebuditi. Ključna za uspeh pri prebujanju talentov pa je motivacija, kar je naloga društva. Uspeh pa ne pride brez velikega truda in dolgoletne tradicije. Društvo pripravlja in sodeluje na različnih tekmovanjih vseh vrst, od šolskih tekmovanj do mednarodnih olimpijad. Organizira tekmovanja iz znanja, ki se jih vsako leto udeleži več kot 100.000 tekmovalcev. V sedemdesetih letih se to število kar namnoži.

V zadnjih letih beležimo izjemne dosežke posameznikov na olimpijadah, kar nedvomno prispeva k ugledu Slovenije v svetu tam, kjer šteje – med mladimi. Olimpijade iz matematike, fizike in astronomije potekajo po celem svetu in so zelo podobne športnim olimpijadam, le da se pri enih tekmuje v umskih veščinah, pri drugih pa v telesnih. Razlika je tudi v tem, da je neposredni televizijski prenos matematičnega tekmovanja lahko nekoliko manj zanimiv, kot je na primer smučanje. Je pa dolgoročni družbeni pomen nabiranja znanja iz naravoslovno-matematičnih veščin verjetno širšega pomena, kot je šport, saj je ključ do uspeha na vseh področjih znanosti, gospodarstva, medicine in tudi družboslovja ter športa.

Člani društva so prostovoljci, ki delajo brezplačno. Predsedniško priznanje je še posebej pomembno za vse tiste posameznike, ki jih ne morem danes poimensko našteti, a dobro vemo, kdo so. Oni svoje življenjsko delo posvečajo poslanstvu društva. Seveda smo nagrajeni tudi vsakič, ko naši tekmovalci izkažejo uspehe, a državno odlikovanje je vendarle pomembno priznanje širše družbe za požrtvovalno delo skupine posameznikov, ki tvorijo društvo. V izjemno čast mi je, da lahko v imenu DMFA Slovenije prejmem to priznanje in se v imenu vseh članov društva zanj srčno zahvalim.

LITERATURA

[1] Predsednik Pahor na posebni slovesnosti vročil državna odlikovanja: srebrni red za zasluge, red za zasluge in medalje za zasluge, dostopno na `www.up-rs.si/up-rs/uprs.nsf/objave/A3042FB21FC143A4C125843300255232?OpenDocument`, ogled 10. 7. 2019.

Uredništvo

Šestindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tudi letos je konec julija v Blagoevgradu v Bolgariji potekalo mednarodno tekmovanje študentov matematike. Pomerilo se je 360 študentov. Ljubljansko univerzo so predstavljali Viktor Cvrtila, Grega Saksida, Tea Štrekelj in Gašper Urh, Univerzo na Primorskem pa Đorđe Mitrović, Besfort Shala in Roman Solodukhin.

Besfort Shala in Roman Solodukhin sta dobila drugo nagrado, Đorđe Mitrović in Gašper Urh tretjo, Gregor Saksida in Tea Štrekelj pa sta dobila pohvalo.

Slika 1. Predstavniki Slovenije pred kampusom Ameriške univerze v Blagoevgradu. Z leve: Grega Saksida, Gašper Urh, Đorđe Mitrović, Besfort Shala, Roman Solodukhin, Tea Štrekelj in Viktor Cvrtila.

Naloge s tekmovanja in posamične rezultate lahko najdete na internetni strani `www.imc-math.org`.

Za vtis sledi nekaj rešenih nalog s tekmovanja. Upam, da vas bo kakšna od nalog motivirala za možgansko telovadbo, še preden boste pogledali njeno rešitev.

Tekmovalci so dva dni, vsak dan po pet ur, reševali po pet nalog. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko naloge. Praviloma teža naloge narašča z zaporedno številko.

I.1. *Izračunaj produkt*

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

Podobno kot seštejemo teleskopske vsote, lahko naredimo tudi s produkti.

Razpišimo n-ti faktor produkta a_n kot

$$\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n^3-8)(n^3+8))} = \frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)} =$$

$$= \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n^2+3}{(n-1)^2+3} \cdot \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.$$

Za $N \geq 3$ je N-ti delni produkt $\prod_{n=3}^{N} a_n$ enak

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n}{n-2}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n}{n+2}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right) \cdot \left(\prod_{n=3}^{N} \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right)\\
&\quad = \frac{N(N-1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{N^2+3}{2^2+3} \cdot \frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}\\
&\quad = \frac{72}{7} \frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N-1)(N+2)((N+1)^2+3)}.
\end{aligned}$$

Ko gre N proti neskončno, zgornji izraz konvergira proti $\frac{72}{7}$.

Kot zanimivost naj omenim, da je velika večina tekmovalcev dobila pravo idejo in pokrajšala ustrezne zaporedne člene, pri tem pa naredila napako, ker ni delala z limitami končnih produktov. Ocenjevalci so v tem primeru nalogo ocenili s 60 %, zraven pa ilustrirali težavo z neskončnim produktom

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1},$$

ki je enak 0 (N-ti delni produkt je enak $\frac{1}{N+1}$), na videz pa se vsi členi pokrajšajo in bi tako moral biti produkt enak 1.

I.3. *Naj bo* $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija, za katero velja*

$$2f'(x) + xf''(x) \geq 1 \quad \textit{za vse } x \in (-1,1).$$

Pokaži, da je

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx \geq \frac{1}{3}.$$

Naloga črpa idejo iz zakladnice na videz nemogočih rešitev nalog z Rollovim in Lagrangeevim izrekom, kjer moramo funkcijo napisati kot odvod primerne funkcije. Hitro ugotovimo, da je drugi odvod funkcije

$$g(x) = xf(x) - \tfrac{x^2}{2}$$

enak ravno

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geq 0,$$

zato je funkcija g konveksna in se njena tangenta nahaja pod grafom funkcije. Če je $g'(0) = a$, je

$$g(x) \geq g(0) + g'(0)x = ax,$$

zato je

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right) dx \geq \int_{-1}^{1} \left(ax + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

II.2 *Naj C označuje množico vseh sestavljenih števil. Za vsako število $n \in C$ definirajmo a_n kot najmanjše naravno število k, za katero n deli $k!$. Utemelji, ali konvergira vrsta*

$$\sum_{n \in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n.$$

Pokazali bomo, da je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{3} \text{ za } n > 4,$$

zato dano vrsto od drugega člena naprej majorizira konvergentna geometrijska vrsta s kvocientom $\frac{2}{3} < 1$.

Vsako sestavljeno število $n > 4$ je lahko treh različnih oblik:

(i) Recimo, da je število n deljivo z vsaj dvema različnima prašteviloma. Tedaj ga lahko razcepimo na produkt tujih števil $n = qr$, kjer je $r \geq 2$ in je brez škode za splošnost $q > r$. Tedaj $n = qr$ deli $q! = r!(r+1)\cdots(q-1)q$, zato je $a_n \leq q$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} = \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}.$$

(ii) Tokrat naj bo $n = p^2$ kvadrat praštevila $p \geq 3$ (gledamo le $n > 4$). Ker p^2 deli $p \cdot 2p$, ki deli $(2p)!$, je $a_n \leq 2p$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} \leq \frac{2}{3}.$$

(iii) Naj bo n potenca praštevila, $n = p^k$, $k \geq 3$. Tedaj $n = p^k$ deli produkt $p \cdot p^2 \cdots p^{k-1}$, zato je $a_n \leq p^{k-1}$ in je

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{p^{k-1}}{p^k} = \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}.$$

II.4 *Določi vsa naravna števila n, za katera obstajata kvadratni obrnljivi realni matriki A in B velikosti $n \times n$, za kateri velja*

$$AB - BA = B^2 A.$$

Enakost, ki velja za matriki A in B, lahko predelamo v veliko bolj informativno enačbo

$$B = A^{-1}(B^2 + B)A,$$

ki pove, da sta si matriki B in $B^2 + B$ podobni.

Naj bo najprej velikost matrik n liho število. Tedaj ima karakteristični polinom matrike B vsaj eno realno ničlo, recimo λ. Po izreku o preslikavi spektra je tudi $\lambda^2 + \lambda > \lambda$ realna lastna vrednost matrike B, ki je večja od λ, saj zaradi obrnljvosti matrike B velja $\lambda \neq 0$. Tako pridemo do neskončne množice različnih realnih lastnih vrednosti matrike B, kar je v nasprotju s končno velikostjo matrike B.

Preostane nam še možnost, ko je n sodo število. V primeru $n = 2$ množica

$$\{\lambda, \lambda^2 + \lambda, (\lambda^2 + \lambda)^2 + \lambda^2 + \lambda\}$$

ne sme imeti več kot dveh elementov. Tako hitro najdemo kandidata za lastni vrednosti matrike B, z nekaj vztrajnega poskušanja pa še primerno realno matriko, na primer

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

in podobnostno transformacijo med B in $B^2 + B$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo teh 2×2 matrik lahko zgradimo diagonalno bločni matriki poljubne sode velikosti

$$A = A' \oplus \cdots \oplus A',\ B = B' \oplus \cdots \oplus B',$$

ki sta seveda realni, obrnljivi in ustrezata enakosti $AB - BA = B^2 A$.

Marjan Jerman