IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2016
Letnik 63
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 63 • ŠT. 3 • STR 81-120 • MAJ 2016

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2016, letnik 63, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

MATRIČNO KONVEKSNE MNOŽICE

IGOR KLEP

Institut Jožef Stefan
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 46L07, 13J30

V prispevku predstavimo matrično konveksne množice, ki so naravna posplošitev konveksnosti za matrične prostore. Ogledali si bomo ustrezno različico matričnega Hahn-Banachovega izreka in njegovo uporabo.

MATRIX CONVEX SETS

In this article we explore a natural extension of the notion of convexity to matrix spaces, the so-called matrix convex sets. We shall give an appropriate analog of the Hahn-Banach theorem and present some of its applications.

Uvod

Podmnožico K evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ imenujemo **konveksna**, če za poljubni točki $x, y \in K$ vsa daljica, ki povezuje x in y, leži v K. Funkcija je konveksna, če je območje nad njenim grafom konveksna množica. Ta preprost koncept izvira iz geometrije in se uporablja kot orodje v mnogih znanostih. Konveksnost je pomembna v ekonomiji in financah (splošna teorija ravnotežja predvideva konveksne preference), statistiki in verjetnosti (glej npr. Jensenovo neenakost) ter v matematični optimizaciji. Slednja vsebuje kot samostojno vejo konveksno optimizacijo, ki je zaradi nedavnih prelomnic (metoda notranjih točk [13] in semidefinitno programiranje oz. linearne matrične neenakosti [16]) aktualna tema v matematiki in računalništvu. Konveksnost naredi optimizacijo zanesljivo, saj je vsak lokalni minimum v tem primeru globalen.

V tem sestavku si bomo ogledali posplošitev pojma konveksnosti v matričnih prostorih. Pojem je vpeljal Wittstock [18], mi pa bomo sledili šoli Effrosa [5].

Matrično konveksne množice

Simetrične in pozitivno semidefinitne matrike

Spomnimo, da je realna $n \times n$ matrika $A = (a_{ij})_{i,j}$ **simetrična**, če je $A = A^t$, kjer smo z A^t označili transponiranko matrike A. Z drugimi besedami, A

je simetrična, če za poljubna $1 \leq i,j \leq n$ velja $a_{ij} = a_{ji}$. Množico vseh simetričnih $n \times n$ matrik bomo označili s $\mathbb{S}_n$.

Lastne vrednosti simetrične matrike so vselej realne. Če so vse lastne vrednosti nenegativne (oz. pozitivne), potem je A **pozitivno semidefinitna** (oz. **definitna**), kar označimo z $A \succeq 0$ (oz. $A \succ 0$). Pozitivno semidefinitnost lahko ekvivalentno vpeljemo na več načinov: simetrična matrika A je pozitivno semidefinitna natanko takrat, ko velja katera koli izmed naslednjih izjav:

(i) $\langle Av, v\rangle = v^t Av \geq 0$ za vse vektorje $v \in \mathbb{R}^n$;

(ii) obstaja realna matrika B, za katero velja $A = B^t B$;

(iii) obstaja simetrična realna matrika C, za katero velja $A = C^2$;

(iv) vsi glavni minorji matrike A so nenegativni.

Povsem analogno lahko karakteriziramo tudi pozitivno definitne matrike.

Množica vseh pozitivno semidefinitnih $n \times n$ matrik tvori konveksen stožec $\mathbb{S}_n^{\succeq 0}$ v $\mathbb{S}_n$. Na sliki 1 je predstavljen rob stožca vseh 2×2 pozitivno semidefinitnih matrik $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$ kot podmnožica $\mathbb{R}^3$.

V nadaljevanju bo ključno vlogo imela **Löwnerjeva delna ureditev** na $\mathbb{S}_n$, ki jo porodi $\mathbb{S}_n^{\succeq 0}$: za $A, B \in \mathbb{S}_n$,

$$A \succeq B \quad \iff \quad A - B \succeq 0.$$

(Kroneckerjev) tenzorski produkt matrik

Pogosto bomo posegali tudi po tenzorskem produktu matrik, zato si na kratko oglejmo njegove lastnosti. Če je $A = (a_{ij})_{i,j}$ matrika velikosti $m \times n$ in B matrika velikosti $p \times q$, potem je

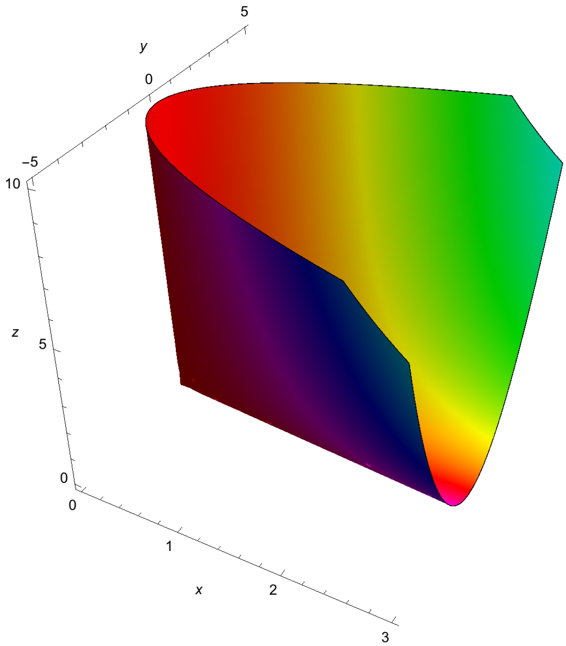
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

matrika velikosti $mp \times nq$. Kroneckerjev produkt je bilinearen, asociativen in skoraj komutativen: obstajata permutacijski matriki P, Q, za kateri velja

$$B \otimes A = P(A \otimes B)Q.$$

Če sta A, B kvadratni, smemo vzeti $Q = P^t$. V tem primeru sta torej $A \otimes B$ in $B \otimes A$ ortogonalno ekvivalentni. Velja tudi

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$



Slika 1

kadar sta produkta AC in BD definirana. Operatorska norma[1] tenzorskega produkta je produkt norm, transponiranka tenzorskega produkta pa je tenzorski produkt transponirank.

Matrično konveksne množice

Fiksirajmo naravno število g. Naš univerzum bodo g-terice realnih simetričnih matrik vseh velikosti nad realnimi števili,

$$\mathbb{S}^g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_n^g.$$

Na $\mathbb{S}^g$ vpeljemo operacijo **direktne vsote**: za $A \in \mathbb{S}_n^g$ in $B \in \mathbb{S}_m^g$ postavimo

$$A \oplus B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{S}_{n+m}^g.$$

[1] **Operatorska norma** $n \times m$ matrike W je definirana kot $\|W\| := \max\{\|Wx\| \mid x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}$. Operatorska norma je submultiplikativna: $\|VW\| \leq \|V\| \cdot \|W\|$, kadar je produkt VW definiran.

Tako si lahko $\mathbb{S}^g$ mislimo kot neskončno disjunktno unijo ali pa kot stopničasto množico. *Podmnožica* $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ je zaporedje

$$\mathcal{K} = \big(\mathcal{K}(n)\big)_n,$$

kjer je $\mathcal{K}(n) \subseteq \mathbb{S}^g_n$.

Definicija 1. Podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ imenujemo **matrično konveksna**, če zadošča naslednjim pogojem:

(0) $0 \in \mathcal{K}$ (vsebovanost izhodišča);

(1) $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$: za vse $A, B \in \mathcal{K}$ velja $A \oplus B \in \mathcal{K}$ (zaprtost za direktne vsote);

(2) (zaprtost za $*$-konjugiranje s skrčitvami) za vse $n, m \in \mathbb{N}$, vsako skrčitev[2] $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in vsak $A = (A_1, \dots, A_g) \in \mathcal{K}(n)$ velja

$$V^t A V := (V^t A_1 V, \dots, V^t A_g V) \in \mathcal{K}(m).$$

Omenimo, da je predpostavka (0) nebistvena, a jo tukaj privzamemo, da se izognemo nekaterim tehničnim zapletom. Če (0) izpustimo, lahko v (2) predpostavimo le zaprtje za $*$-konjugiranje z izometrijami V.

Opomba 2. Podmnožici $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$, ki zadošča aksiomu (1) in aksiomu (2) za *ortogonalne matrike* V, pravimo prosta množica. Proste množice so domene in kodomene prostih preslikav, s katerimi se ukvarja prosta analiza [17, 10].

Zgled 3. Preden se lotimo študija matrično konveksnih množic, si poglejmo nekaj zgledov.
(a) Fiksirajmo g-terico simetričnih matrik $\Omega \in \mathbb{S}^g_n$. Potem je

$$\mathcal{K} := \{V^t (I_\mu \otimes \Omega) V \mid \mu \in \mathbb{N},\ V \in \mathbb{R}^{n\mu \times m} \text{ je skrčitev, } m \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

matrično konveksna množica. Tukaj z $\otimes$ označujemo Kroneckerjev tenzorski produkt matrik. Če zapišemo

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_\mu \end{pmatrix},$$

[2]Matriki V rečemo **skrčitev**, če je njena operatorska norma ≤ 1. Ekvivalentno: matrika $I - V^t V$ je pozitivno semidefinitna, $I - V^t V \succeq 0$. Simetrična matrika S je skrčitev natanko takrat, ko je $-I \preceq S \preceq I$.

kjer $V_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, potem je

$$V^t(I_\mu \otimes \Omega)V = \sum_{j=1}^{\mu} V_j^t \Omega V_j,$$

$V^tV \preceq I$ pa se prepiše v $\sum_j V_j^tV_j \preceq I$.

Očitno je $0 \in \mathcal{K}$, saj lahko v (1) postavimo $V = 0$. Pokažimo sedaj, da je $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Vzemimo $V^t(I_\mu \otimes \Omega)V$, $W^t(I_\nu \otimes \Omega)W \in \mathcal{K}$. Tedaj je

$$V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \oplus W^t(I_\nu \otimes \Omega)W = (W \oplus V)^t(I_{\mu+\nu} \otimes \Omega)(W \oplus V) \in \mathcal{K}.$$

Zaprtost $\mathcal{K}$ za $*$-konjugiranje s skrčitvami je še preprostejša. Za $V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \in \mathcal{K}(n)$ in skrčitev $W \in M_n(\mathbb{R})$ velja

$$W^tV^t(I_\mu \otimes \Omega)VW = (VW)^t(I_\mu \otimes \Omega)(VW),$$

hkrati pa je

$$\|VW\| \leq \|V\| \cdot \|W\| \leq 1$$

zaradi submultiplikativnosti operatorske norme.

Množica $\mathcal{K}$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje Ω. Pravimo ji **matrično konveksna ogrinjača** množice $\{\Omega\}$ in jo označimo s

$$\mathcal{K} = \text{mat-konv}\{\Omega\}.$$

(b) Vzemimo sedaj $\Omega_1, \ldots, \Omega_r \in \mathbb{S}^g$. Tedaj je najmanjša matrično konveksna množica $\mathcal{K}$, ki vsebuje vse Ω_j, enaka mat-konv$\{\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r\}$.

Očitno je $\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r \in \mathcal{K}$, saj je $\mathcal{K}$ zaprta za direktne vsote. Hkrati pa vsaka matrično konveksna množica, ki vsebuje $\Omega_1 \oplus \cdots \oplus \Omega_r$, vsebuje tudi vsak Ω_j, saj velja npr.

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \Omega_1 & & & \\ & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

S tem smo pokazali, da so vse matrično konveksne množice, ki so napete s končno mnogo tericami matrik, vselej napete kar s singletonom.

(c) Naj bo $\varepsilon > 0$. Definirajmo **prosto ε-kroglo** s središčem v izhodišču 0:

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \|X\| \leq \varepsilon\} = \Big\{X \in \mathbb{S}^g \mid \varepsilon^2 I \succeq \sum_j X_j^2\Big\}.$$

Preprosto je preveriti, da je $\mathcal{N}_\varepsilon$ matrično konveksna množica.

(d) Vzemimo $A = (A_1, \ldots, A_g) \in \mathbb{S}_d^g$ in tvorimo enični **matrični šop** velikosti d:

$$\Lambda(x) := I_d + x_1 A_1 + \cdots + x_g A_g. \tag{2}$$

Matrični šop lahko seveda vrednotimo v $\mathbb{R}^g$: za $x \in \mathbb{R}^g$ je $\Lambda(x)$ identiteta plus ustrezna linearna kombinacija matrik A_j. Veliko bolj zanimivo pa je vrednotenje v $\mathbb{S}_n$ za $n \geq 2$. Če so $X_1, \ldots, X_g \in \mathbb{S}_n$, potem definiramo

$$\Lambda(X) = I_n \otimes I_d + X_1 \otimes A_1 + \cdots + X_g \otimes A_g \in \mathbb{S}_{dn}.$$

Sedaj tvorimo **linearno matrično neenakost** $\Lambda(x) \succeq 0$ in njeno množico rešitev, t. i. **(prost) spektraeder**

$$\mathcal{D}_\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \Lambda(X) \succeq 0\}.$$

Vse skalarne točke $\mathcal{D}_\Lambda(1) = \mathcal{D}_\Lambda \cap \mathbb{R}^g$ tvorijo konveksno podmnožico $\mathbb{R}^g$.

Množica $\mathcal{D}_\Lambda$ je matrično konveksna. Res, $\Lambda(0) = I \succeq 0$, torej je $0 \in \mathcal{D}_\Lambda(1)$. Zaprtost $\mathcal{D}_\Lambda$ za direktne vsote sledi iz

$$\Lambda(X \oplus Y) = \Lambda(X) \oplus \Lambda(Y),$$

zaprtost za $*$-konjugiranje s skrčitvami pa iz

$$\begin{aligned} \Lambda(V^t X V) &= I \otimes I + \sum_j (V^t X_j V) \otimes A_j \\ &= (V \otimes I)^t \Big(I \otimes I + \sum_j X_j \otimes A_j \Big)(V \otimes I) + (I - V^t V) \otimes I \\ &= (V \otimes I)^t \Lambda(X)(V \otimes I) + (I - V^t V) \otimes I \succeq 0. \end{aligned}$$

Matrični šop (2) po navadi označimo z $\Lambda_A(x)$.

(e) Oglejmo si konkretna primera prostih spektraedrov. Definirajmo

$$\Delta(x_1, x_2) := I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(x_1, x_2) := I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Skalarne točke prostih spektraedrov $\mathcal{D}_\Delta$ in $\mathcal{D}_\Gamma$ je preprosto izračunati npr. s pomočjo minorjev (razdelek (Kroneckerjev) tenzorski produkt matrik). Velja

$$\mathcal{D}_\Delta(1) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1^2 + X_2^2 \leq 1\},$$
$$\mathcal{D}_\Gamma(1) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1^2 + X_2^2 \leq 1\}.$$

Množici $\mathcal{D}_\Delta(1)$ in $\mathcal{D}_\Gamma(1)$ sovpadata. Po drugi strani pa je preprosto videti

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{D}_\Delta \setminus \mathcal{D}_\Gamma,$$

zato iz $\Delta(X_1, X_2) \succeq 0$ ne sledi $\Gamma(X_1, X_2) \succeq 0$. Velja pa obratna implikacija: $\mathcal{D}_\Gamma \subset \mathcal{D}_\Delta$. To bomo podrobneje razložili v razdelku Uporaba Hahn-Banachovega izreka, glej zgled 17.

Ker je

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in je konjugacijska matrika obrnljiva,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

sledi

$$\mathcal{D}_\Delta = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{S}^2 \mid 1 - X_1^2 - X_2^2 \succeq 0\}.$$

(f) Iz matrično konveksnih množic lahko tvorimo nove matrično konveksne množice, npr. s preseki, kartezičnimi produkti, zaprtji. Tukaj vse te konstrukcije izvajamo stopničeno; npr. zaprtje $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ je

$$\overline{\mathcal{K}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{K}(n)},$$

pri čemer $\mathcal{K}(n) \subseteq \mathbb{S}_n^g$ opremimo z inducirano evklidsko topologijo.

Projekcija matrično konveksne množice je ponovno matrično konveksna: če je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^{g+h}$ matrično konveksna, potem je tudi

$$\operatorname{proj}_g \mathcal{K} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \mathbb{S}_n^g \mid \exists Y \in \mathbb{S}_n^h : (X, Y) \in \mathcal{K}\}$$

matrično konveksna.

(g) Podajmo še eno konstrukcijo matrično konveksnih množic. Za podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ označimo s

$$\mathcal{K}^\circ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A \in \mathbb{S}_n^g \mid \forall\, X \in \mathcal{K} :\, \Lambda_A(X) \succeq 0\}$$

njeno **polaro**. Opazimo, da bi lahko v definiciji namesto $\Lambda_A(X) \succeq 0$ zahtevali $\Lambda_X(A) \succeq 0$, saj sta matriki $\Lambda_A(X)$ in $\Lambda_X(A)$ ortogonalno ekvivalentni; prehodna matrika je celo permutacijska in realizira izomorfizem $A \otimes B \mapsto B \otimes A$.[3] Preprosto je videti, da je $\mathcal{K}^\circ$ matrično konveksna množica. Opazimo tudi, da $\circ$ obrača inkluzije: če je $\mathcal{K} \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}$, potem velja $\mathcal{K}^\circ \supseteq \widetilde{\mathcal{K}}^\circ$.

(h) Vrnimo se k prostim kroglam iz (c). Za $\varepsilon > 0$ velja

$$\mathcal{N}_{\frac{1}{g\varepsilon}} \subset \mathcal{N}_\varepsilon^\circ \subset \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{g}}{\varepsilon}}.$$

Pokažimo najprej prvo inkluzijo. Če je $\|A\| \leq \frac{1}{g\varepsilon}$, potem za vsak $X \in \mathcal{N}_\varepsilon$ velja

$$\|A_1 \otimes X_1 + \cdots + A_g \otimes X_g\| \leq g \max_j \|A_j\| \cdot \max_k \|X_k\| \leq 1.$$

Sledi

$$\Lambda_A(X) \succeq 0,$$

zatorej je $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^\circ$.

Za desno inkluzijo vzemimo poljuben $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^\circ$. Potem za vsak X_j norme ε velja

$$1 \geq \|A_j \otimes X_j\| = \|A_j\| \cdot \|X_j\| = \varepsilon \|A_j\|,$$

torej je

$$\Big\| \sum_j A_j^2 \Big\| \leq \frac{g}{\varepsilon^2}.$$

Osnovne lastnosti matrično konveksnih množic

Sedaj smo pripravljeni, da si ogledamo preproste lastnosti matrično konveksnih množic. Najprej razložimo, od kod ime.

Lema 4. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ matrično konveksna. Tedaj je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\mathcal{K}(n) = \mathcal{K} \cap \mathbb{S}_n^g$ konveksna.*

[3] V angleščini tej preslikavi rečemo *canonical shuffle.*

Dokaz. Vzemimo realni števili s, t, za kateri velja $s^2 + t^2 = 1$, in naj bosta $X, Y \in \mathcal{K}(n)$. Definirajmo skrčitev

$$V = \begin{pmatrix} sI_n \\ tI_n \end{pmatrix}$$

in poračunajmo:

$$s^2 X + t^2 Y = V^t \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} V = V^t (X \oplus Y) V \in \mathcal{K}(n). \qquad \blacksquare$$

Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ prosta množica. Pravimo, da je $\mathcal{K}$ **zaprta za zožitve na invariantne podprostore**, če za vsak $X \in \mathcal{K}(n)$ in vsak podprostor $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije m, ki je invarianten za X, velja

$$X|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{K}(m). \tag{3}$$

Strogo gledano $X|_{\mathcal{H}}$ seveda ni $m \times m$ matrika, temveč le linearna preslikava na m razsežnem podprostoru $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$. V izjavi (3) vsebovanost v $\mathcal{K}(m)$ preverjamo s kakšno od matrik, ki jih tej linearni preslikavi priredimo glede na ortonormirano bazo $\mathcal{H}$. Ali je dobljena matrika element $\mathcal{K}(m)$, je neodvisno od izbire baze, saj je množica $\mathcal{K}$ prosta in zato zaprta za ortogonalno $*$-konjugiranje.

Izrek 5. *Naj bo $0 \in \mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ prosta podmnožica, ki je zaprta za zožitve na invariantne podprostore. Potem je $\mathcal{K}$ matrično konveksna natanko takrat, ko je $\mathcal{K}(n)$ konveksna za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Implikacija ($\Rightarrow$) drži po prejšnji lemi. Poglejmo si še obrat. Vzemimo $X \in \mathcal{K}(n)$, podprostor $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ in naj bo $\mathcal{L}$ ortogonalni komplement $\mathcal{H}$ v $\mathbb{R}^n$. Glede na direktno vsoto $\mathbb{R}^n = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}$ naj ima X zapis

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}.$$

Če z V označimo izometrijo $\mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$, potem je $V^* X V = A$. Hkrati je

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

element $\mathcal{K}(n)$, saj je $\mathcal{K}(n)$ konveksna in je matrika $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ortogonalna.

Ker je $\mathcal{H}$ invarianten podprostor za $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, dobimo še $A = V^* X V \in \mathcal{K}$.

Od tod sledi, da je $V^* X V \in \mathcal{K}$ za vsako izometrijo V.

Naj bo $W : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$ poljubna skrčitev. Potem je

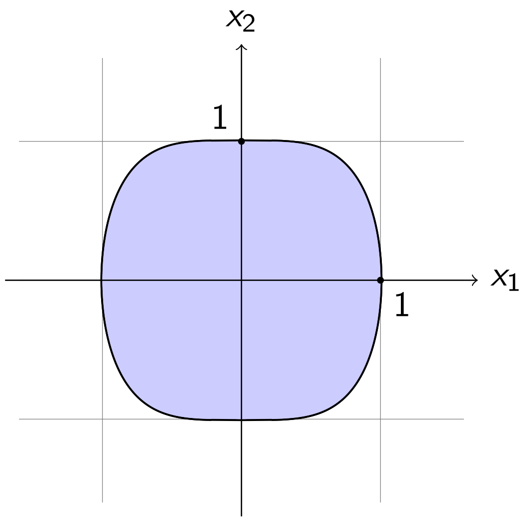
$$V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n \oplus \mathcal{H}, \quad x \mapsto \Big(Wx, \sqrt{I - W^tW}x\Big) = \Big(W, \sqrt{I - W^tW}\Big)\, x$$

izometrija. Ker je $0 \in \mathcal{K}$, za vsak $X \in \mathcal{K}(n)$ velja $X \oplus 0 \in \mathcal{K}$. Sledi

$$W^tXW = V^t \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V \in \mathcal{K}. \qquad \blacksquare$$

Zgled 6. Podajmo še primer nekonveksne proste množice v $\mathbb{S}^2$, katere skalarne točke tvorijo konveksno podmnožico v $\mathbb{R}^2$. (Nekomutativnemu) polinomu $p = 1 - x_1^4 - x_2^2$ priredimo **prosto semialgebraično množico**

$$\mathcal{D}_p := \{(X_1, X_2) \in \mathbb{S}^2 \mid p(X_1, X_2) \succeq 0\}.$$

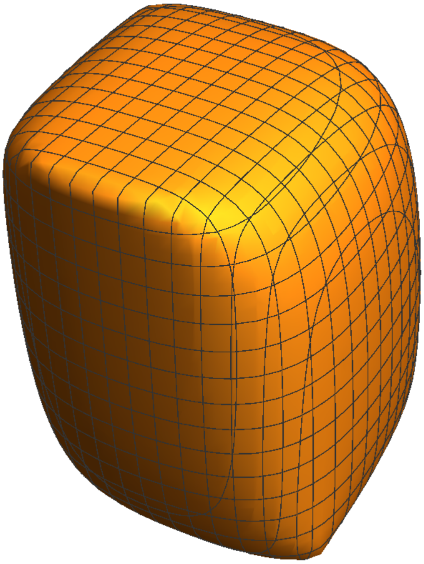


Slika 2. TV zaslon $\mathcal{D}_p(1) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x_1^4 - x_2^2 \geq 0\big\}$.

Čeprav je množica $\mathcal{D}_p(1)$ konveksna, $\mathcal{D}_p$ ni matrično konveksna. Z nekoliko računske spretnosti je možno pokazati, da podmnožica $\mathcal{D}_p(2)$ v 6-razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{S}_2^2$ ni konveksna. Res, za

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},\ Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

velja $(X_j, Y_j) \in \mathcal{D}_p(2)$ in $\big(\frac{1}{2}(X_1 + X_2), \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\big) \notin \mathcal{D}_p(2)$.



Slika 3. »Tipičen« trirazsežni prerez TV zaslona $\mathcal{D}_p(2)$.

Rečemo, da je 0 **v notranjosti** podmnožice $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, če je $\mathcal{N}_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}$ za kak $\varepsilon > 0$. Množica $\mathcal{K}$ je **omejena**, če obstaja $N \in \mathbb{N}$, za katerega je $\|X\| \leq N$ za vse $X \in \mathcal{K}$. Ekvivalentno: $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}_N$. (Tukaj velja opozoriti, da je ta zahteva močnejša od omejenosti vseh $\mathcal{K}(n)$.)

Lema 7. *Denimo, da je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$ matrično konveksna. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) $0 \in \mathbb{R}^g$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(1)$;

(ii) $0 \in \mathbb{S}^g_n$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(n)$ za kak $n \in \mathbb{N}$;

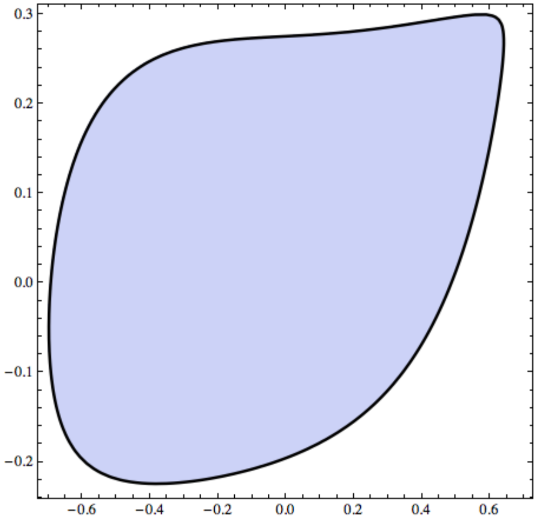
(iii) $0 \in \mathbb{S}^g_n$ je v notranjosti množice $\mathcal{K}(n)$ za vse $n \in \mathbb{N}$;

(iv) 0 je v notranjosti množice $\mathcal{K}$.

Dokaz. Očitno velja (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii). Predpostavimo, da drži (ii). Potem obstaja $\varepsilon > 0$ z $\mathcal{N}_\varepsilon(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$. Ker je

$$\mathcal{N}_\varepsilon(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(n),$$

in je $\mathcal{N}_\varepsilon$ zaprt za $*$-konjugiranje s skrčitvami, je tudi $\mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{K}(1)$, torej velja (i).



Slika 4. Nekonveksen 2-razsežni prerez $\mathcal{D}_p(2)$.

Naj sedaj drži (i), tj. $\mathcal{N}_\varepsilon(1) \subseteq \mathcal{K}(1)$ za kak $\varepsilon > 0$. Trdimo, da je $\mathcal{N}_{\varepsilon/g^2} \subseteq \mathcal{K}$. Vzemimo poljuben $X \in \mathcal{N}_{\varepsilon/g^2}$. Očitno je

$$\left[-\frac{\varepsilon}{g}, \frac{\varepsilon}{g}\right]^g \subseteq \mathcal{K}(1).$$

Ker ima vsak X_j normo $\leq \varepsilon/g^2$, imajo v njegovi diagonalizaciji $X_j = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U$ vse λ_j absolutno vrednost $\leq \varepsilon/g^2$. Zato je $(0, \ldots, 0, g\lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{K}(1)$ in nato zaradi zaprtosti za direktne vsote $\Bigg(0, \ldots, 0, g \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\Bigg) \in \mathcal{K}$. Samo še $*$-konjugiramo z U in dobimo

$$(0, \ldots, 0, gX_j, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{K}.$$

Sledi

$$X = \frac{1}{g}\big((gX_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, gX_g)\big) \in \mathcal{K}. \qquad \blacksquare$$

Opomba 8. Pri študiju matrično konveksnih množic se po navadi omejimo na takšne, ki vsebujejo 0 v notranjosti. Če ima $\mathcal{K}(1)$ kakšno notranjo točko, npr. $a \in \mathbb{R}^n$, potem preprosto s translacijo

$$\mathcal{K} - a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X - aI_n \mid X \in \mathcal{K}(n)\}$$

prevedemo na takšen primer. Če $\mathcal{K}(1)$ nima notranje točke, potem pa leži v kakšnem afinem podprostoru $\{\ell = 0\}$ [3, Theorem 2.4]. Kratek račun pokaže, da iz $\ell_{\mathcal{K}(1)} = 0$ sledi $\ell|_{\mathcal{K}} = 0$. Torej lahko iz enačbe $\ell = 0$ izrazimo kakšno od spremenljivk in s tem preidemo na nižje razsežen ambientni prostor. Postopek nadaljujemo, dokler $\mathcal{K}(1)$ nima notranje točke.

Trditev 9. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$.*

(1) *če je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}$, potem je $\mathcal{K}^\circ$ omejena;*

(2) *$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}$; z drugimi besedami, za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{K}(n) \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}(n)$;*

(3) *$\mathcal{K}$ je omejena natanko takrat, ko je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$.*

Dokaz. Če ima $\mathcal{K}$ izhodišče v notranjosti, potem je $\mathcal{N}_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}$ za neki $\varepsilon > 0$. Torej je $\mathcal{K}^\circ \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon^\circ \subset \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{g}}{\varepsilon}}$ omejena. Tukaj smo za zadnjo inkluzijo uporabili zgled 3(h).

Trditev (2) je tavtologija. Res, za $X \in \mathcal{K}(n)$ želimo pokazati $\Lambda_X(A) \succeq 0$, kadarkoli velja $\Lambda_A(Y) \succeq 0$ za vse $Y \in \mathcal{K}$. To pa je preprosta posledica dejstva, da sta matriki $\Lambda_X(A)$ in $\Lambda_A(X)$ ortogonalno ekvivalentni.

Če je $\mathcal{K}$ omejena, potem je 0 očitno v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$. Obratno, če je 0 v notranjosti množice $\mathcal{K}^\circ$, potem iz (1) sledi, da je $\mathcal{K}^{\circ\circ}$ omejena. Ker nam (2) pove, da velja $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}$, je tudi $\mathcal{K}$ omejena. ∎

Lema 10. *Za podmnožico $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^{g+h}$ si oglejmo njeno sliko $\operatorname{proj} \mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}^g$ pri projekciji $\operatorname{proj} : \mathbb{S}^{g+h} \to \mathbb{S}^g$. Terica $A \in \mathbb{S}^g$ je element $(\operatorname{proj} \mathcal{K})^\circ$ tedaj in le tedaj, ko je $(A, 0) \in \mathcal{K}^\circ$.*

Dokaz. $A \in (\operatorname{proj} \mathcal{K})^\circ$ natanko tedaj, ko za vse $X \in \operatorname{proj} \mathcal{K}$ velja $\Lambda_A(X) \succeq 0$. Slednje je ekvivalentno $\Lambda_{(A,0)}(X, Y) \succeq 0$ za vse $X \in \operatorname{proj} \mathcal{K}$ in vse $Y \in \mathbb{S}^h$, kar je ekvivalentno $\Lambda_{(A,0)}(X, Y) \succeq 0$ za vse $(X, Y) \in \mathcal{K}$. To pa se zgodi natanko takrat, ko $(A, 0) \in \mathcal{K}^\circ$. ∎

Matrični Hahn-Banachov izrek

V tem razdelku si bomo ogledali eno glavnih orodij pri delu z matrično konveksnimi množicami – analog Hahn-Banachovega izreka. Kot prva sta ga dokazala Effros in Wikler [5], alternativni dokaz pa si bralec lahko ogleda v [9]. Dokaz je razmeroma zapleten in predolg, da bi ga lahko tukaj predstavili. Podrobneje pa si bomo pogledali nekaj posledic in uporab tega izreka.

Izrek 11 (Matrični Hahn-Banachov izrek). *Naj bo $\mathcal{K}$ matrično konveksna množica, katere stopnice $\mathcal{K}(n)$ so zaprte. Če $X' \in \mathbb{S}_n^g$ ne leži v $\mathcal{K}(n)$, potem obstaja eničen matrični šop $\Lambda(x)$ velikosti n, za katerega je $\Lambda(Y) \succeq 0$ za vse $Y \in \mathcal{K}$ in $\Lambda(X') \not\succeq 0$.*

Naslednja posledica pove, v kakšnem smislu lahko izrek 11 razumemo kot matrični analog Hahn-Banachovega izreka. Hkrati nas prepriča, da so prosti spektraedri ustrezni analogi polprostorov iz klasične konveksnosti za univerzum $\mathbb{S}^g$.

Posledica 12. *Naj bo $\mathcal{K}$ zaprta matrično konveksna množica. Potem je $\mathcal{K}$ enaka preseku vseh prostih spektraedrov, ki jo vsebujejo.*

Nadaljnje lastnosti matrično konveksnih množic

Najmanjšo zaprto matrično konveksno množico, ki vsebuje $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, bomo označili z $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$.

Trditev 13. *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$.*

(1) *Če za neki $m \in \mathbb{N}$ velja $0 \in \mathcal{K}(m)$, potem je $\mathcal{K}^{\circ\circ} = \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$.*

(2) *Če je $\mathcal{K}$ zaprta matrično konveksna množica, tedaj velja $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\circ\circ}$;*

Dokaz. Začnimo s točko (1). Najprej opazimo, da je $0 \in \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}(m)$, in ker je $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$ matrično konveksna, dobimo $0 \in \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}(1)$. Denimo, da $W \notin \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$. Potem nam izrek (11) da obstoj eničnega matričnega šopa Λ_A (kjer velikost matrik A ni večja od velikosti W), ki loči W od $\overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$: $\Lambda_A(W) \not\succeq 0$ in $\Lambda_A(X) \succeq 0$ za vse $X \in \text{mat-konv}\,\mathcal{K}$. V posebnem je $A \in \mathcal{K}^\circ$. Ker sta matriki $\Lambda_W(A)$ in $\Lambda_A(W)$ ortogonalno ekvivalentni, sledi $\Lambda_W(A) \not\succeq 0$ in $W \notin \mathcal{K}^{\circ\circ}$. Torej je $\mathcal{K}^{\circ\circ} \subset \overline{\text{mat-konv}}\,\mathcal{K}$. Obratna inkluzija sledi iz trditve 9(2). Točka (2) je preprosta posledica točke (1). ■

Posledica 14. *Če je $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^g$, potem je $\mathcal{K}^{\circ\circ} = \overline{\text{mat-konv}}\big(\mathcal{K} \cup \{0\}\big)$.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{K}^\circ = (\mathcal{K} \cup \{0\})^\circ$, sledi

$$\mathcal{K}^{\circ\circ} = (\mathcal{K} \cup \{0\})^{\circ\circ}.$$

Po trditvi 9(1) in (13) sedaj dobimo

$$\overline{\text{mat-konv}}\big(\mathcal{K} \cup \{0\}\big) = (\mathcal{K} \cup \{0\})^{\circ\circ}.$$ ■

S pomočjo prostih spektraedrov, njihovih polar in projekcij lahko eksplicitno opišemo matrično konveksno ogrinjačo singletona, t. i. matrični ali prosti polieder:

Izrek 15. *Naj bo* $\Omega \in \mathbb{S}_n^g$.

(1) $\text{mat-konv}\{\Omega\} = \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_\Omega}$.

(2) *Zapišimo* $\Omega = \big((\omega_{ij}^\ell)_{i,j=1}^n\big)_{\ell=1,\dots,g} \in \mathbb{S}_n^g$. *Tedaj je* mat-konv$\{\Omega\}$ *enaka*

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big\{ \big(\sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell C_{ij}\big)_{\ell=1,\dots,g} \mid C_{ij} \in M_m(\mathbb{R}), \\ C = (C_{ij})_{i,j=1}^n \succeq 0, \sum_i C_{ii} \preceq I_n \Big\}. \qquad (4)$$

Dokaz. Oglejmo si najprej točko (2). Po zgledu 3(a) je $X \in (\text{mat-konv}\{\Omega\})(m)$ natanko takrat, ko velja

$$X = V^t(I_\mu \otimes \Omega)V \qquad (5)$$

za neki $\mu \in \mathbb{N}$ in $n\mu \times m$ skrčitev V. Vešči bralec bo na desni strani (5) prepoznal Choi-Krausov zapis povsem pozitivne preslikave. Linearna preslikava τ med končnorazsežnimi podprostori realnih simetričnih matrik je povsem pozitivna natanko tedaj, ko je oblike

$$\tau(x) = \sum_{j=1}^{\mu} V_j^t x V_j = V^t(I_\mu \otimes x)V$$

za matrike (ustrezne velikosti) V_j [14, Proposition 4.7]. Tukaj smo z V označili stolpec $(V_1, \dots, V_\mu)$. V našem primeru velja še $\sum_j V_j^t V_j \preceq I$, saj je V v (5) skrčitev. Tako vidimo, da je g-terica X element $(\text{mat-konv}\{\Omega\})(m)$ takrat in le takrat, ko je za vsak i matrika X_i slika $\tau(\Omega_i)$ povsem pozitivne preslikave $\tau : \text{Lin}\{I, \Omega_1, \dots, \Omega_g\} \to \mathbb{S}_m$, ki pošlje I v skrčitev. Po Arvesonovem razširitvenem izreku [14, Theorem 6.2] lahko τ razširimo do povsem pozitivne preslikave $\hat{\tau} : M_d(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{R})$. Sedaj pa uporabimo Choijevo matriko [14, Theorem 3.14]. Preslikava $\hat{\tau} : M_d(\mathbb{R}) \to M_m(\mathbb{R})$ je povsem pozitivna natanko takrat, ko je njena Choijeva matrika

$$C := (C_{ij})_{i,j=1}^n \succeq 0,$$

kjer je

$$C_{ij} = \hat{\tau}(E_{ij}).$$

Ker je

$$\hat{\tau}(\Omega_\ell) = \sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell \hat{\tau}(E_{ij}) = \sum_{i,j} \omega_{ij}^\ell C_{ij},$$

leži X v množici (4). S tem je točka (2) dokazana. Ugotovimo lahko tudi, da je množica mat-konv$\{\Omega\}$ zaprta, celo kompaktna, saj je slika kompaktne množice po (4).

Posvetimo se sedaj točki (1). Najprej dokažimo inkluzijo ($\subset$). Vzemimo poljuben $A = V^t(I \otimes \Omega)V \in$ mat-konv$\{\Omega\}$. Trdimo, da je $A \in \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_\Omega}$. Za vsak $X \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}$ velja

$$\begin{aligned} \Lambda_A(X) \overset{u}{\cong} \Lambda_X(A) = \Lambda_X\big(V^t(I \otimes \Omega)V\big) \succeq (V \otimes I)^t \Lambda_X(\Omega)(V \otimes I) \\ = (V \otimes I)^t P^t \Lambda_\Omega(X) P (V \otimes I) \succeq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

kjer smo z $\overset{u}{\cong}$ označili ortogonalno ekvivalenco, P pa je ortogonalna matrika, za katero velja $P^t \Lambda_\Omega(X) P = \Lambda_X(\Omega)$. Pri tem prva neenakost v (6) sledi z enakim računom kot v zgledu 3(d). Torej je $A \in \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_\Omega}$.

Za obratno inkluzijo bomo uporabili matrični Hahn-Banachov izrek 11. Denimo, da $X \notin$ mat-konv$\{\Omega\}$. Potem obstaja matrični šop Λ_A, za katerega velja

$$\Lambda_A|_{\text{mat-konv}\{\Omega\}} \succeq 0, \quad \Lambda_A(X) \not\succeq 0.$$

Prva neenakost je ekvivalentna $\Lambda_A(\Omega) \succeq 0$ in s tem $\Lambda_\Omega(A) \succeq 0$. V posebnem $A \in \mathcal{D}_{\Lambda_\Omega}$. Hkrati pa velja

$$\Lambda_X(A) \overset{u}{\cong} \Lambda_A(X) \not\succeq 0,$$

torej $X \notin \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_\Omega}$, kar smo želeli dokazati. ∎

Razred prostih spektraedrov ni zaprt za polare; je pa polara spektraedra projekcija spektraedra po izreku 15. Izkaže se, da je slednji razred zaprt za polare [8].

Uporaba Hahn-Banachovega izreka

V tem razdelku si oglejmo presenetljivo uporabo izreka 11. Opisali bomo, kdaj za enična matrična šopa Λ_A in Λ_B velja $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Ekvivalentno, $\Lambda_B|_{\mathcal{D}_{\Lambda_A}} \succeq 0$.

Posledica 16 (Linearni Positivstellensatz [7]). *Naj bo $A \in \mathbb{S}_d^g$ in $B \in \mathbb{S}_e^g$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$;

(ii) $B \in \text{mat-konv}\{A\}$, *tj. obstaja* $\mu \in \mathbb{N}$ *in skrčitev* V, *da velja*

$$B = V^t (I_\mu \otimes A) V.$$

Dokaz. Uporabimo izrek 15, ki nam poda naslednjo verigo ekvivalenc:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_A} \supseteq \mathcal{D}^\circ_{\Lambda_B} \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{mat-konv}\{A\} \supseteq \text{mat-konv}\{B\} \quad \Longleftrightarrow \quad B \in \text{mat-konv}\{A\}. \end{aligned}$$ ∎

Omenimo, da v točki (ii) posledice 16 lahko postavimo meje na μ. Brez škode za splošnost lahko namreč zahtevamo $\mu \leq de$. Dokaz tega ni prezapleten, a uporabi teorijo povsem pozitivnih preslikav in ga zato izpuščamo. Bralec lahko podrobnosti najde v [7]. Posledica ima vedno preprosto interpretacijo v jeziku povsem pozitivnih preslikav: $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B}$ natanko takrat, ko obstaja povsem pozitivna preslikava, ki pošlje $A_i \mapsto B_i$ in slika I v skrčitev.

Zgled 17. Vrnimo se k zgledu 3(e). Pokažimo, da velja $\mathcal{D}_\Gamma \subseteq \mathcal{D}_\Delta$. Definirajmo

$$V_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad V_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$2\Delta(x_1, x_2) = V_1^t \Gamma(x_1, x_2) V_1 + V_2^t \Gamma(x_1, x_2) V_2,$$

kar s pomočjo posledice 16 da iskani zaključek.

Nadaljnje teme

Prispevek sklenemo s kratko diskusijo oz. kažipotom za nadaljnje teme.

Gleichstellensatz

Naravno vprašanje je, kdaj dva matrična šopa določata enak prost spektraeder, tj. $\mathcal{D}_{\Lambda_A} = \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Najprej opazimo, da je to vprašanje nekako ekvivalentno vprašanju obstoja vložitve med spektraedroma:

$$\mathcal{D}_{\Lambda_A} \subset \mathcal{D}_{\Lambda_B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}_{\Lambda_{A \oplus B}} = \mathcal{D}_{\Lambda_A}.$$

Rečemo, da je matrični šop Λ_A **minimalen**, če za vse terice matrik B, ki so manjše velikosti od A, velja $\mathcal{D}_{\Lambda_A} \neq \mathcal{D}_{\Lambda_B}$. Z nekaj truda je mogoče dokazati, da je dovolj, če minimalnost preverjamo le za »podšope« Λ_A. Tukaj podšop označuje skrčitev matričnega šopa Λ_A na skupen invariantni podprostor za A.

Izrek 18 (Linearni Gleichstellensatz [7]). *Naj bosta $A \in \mathbb{S}_d^g$ in $B \in \mathbb{S}_e^g$. Predpostavimo, da sta matrična šopa Λ_A in Λ_B minimalna. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{D}_{\Lambda_A} = \mathcal{D}_{\Lambda_B}$;

(ii) $d = e$ *in obstaja ortogonalna matrika* $U \in M_d(\mathbb{R})$, *za katero velja*

$$B = U^t AU.$$

Izrek 18 poda geometrijsko karakterizacijo teric matrik glede na ortogonalno konjugiranje. Dokaz tega izreka uporabi Arvesonovo nekomutativno Choquetjevo teorijo [1, 2] in ga bomo izpustili. Bralec ga lahko najde v [7].

Na tem mestu omenimo še algebraično karakterizacijo teric matrik glede na ortogonalno konjugiranje. Procesijev izrek [15] pove, da sta g-terici $A_1, \ldots, A_g \in M_d(\mathbb{R})$ in $B_1, \ldots, B_g \in M_d(\mathbb{R})$ ortogonalno ekvivalentni natanko takrat, ko velja

$$\operatorname{sled} w(A, A^t) = \operatorname{sled} w(B, B^t)$$

za vse besede w v x, x^t dolžine d^2.

Konveksni Positivstellensatz

Posledica 16 opiše matrične šope Λ_B, ki so pozitivno semidefinitni na spektraedru $\mathcal{D}_{\Lambda_A}$. V tem smislu gre za tipičen izrek iz realne algebraične geometrije [4], ki se ukvarja s polinomskimi neenakosti. Zanimiva je tudi naslednja posplošitev na nekomutativne polinome p, ki so pozitivno semidefinitni na prostem spektraedru $\mathcal{D}_{\Lambda_A}$.

Izrek 19 (Konveksni Positivstellensatz [6]). *Naj bo p nekomutativen matrični polinom in Λ enični matrični šop. Potem je $p|_{\mathcal{D}_\Lambda} \succeq 0$ tedaj in le tedaj, ko je*

$$p = h^t h + \sum f_j^t \Lambda f_j \tag{7}$$

za matrične polinome (ne nujno kvadratne) h, f_j. Če je stopnja p kvečjemu $2r+1$, potem je v (7) stopnja h kvečjemu $r+1$, stopnje f_j pa so vse omejene z r.

Izrek 19 je »perfekten« Positivstellensatz, saj potrebuje le nenegativnost, certifikat (7) ima optimalne meje na stopnje, možno pa je izpeljati tudi meje na velikost matrik, ki jih potrebujemo za $p|_{\mathcal{D}_\Lambda} \succeq 0$. Hkrati lahko izrek razumemo kot nelinearno algebraično posplošitev povsem pozitivnih preslikav. Dokaz [6] tega izreka je povsem drugačen od dokaza posledice 16, ki smo ga predstavili zgoraj. Sloni namreč na separaciji konveksnih množic in Gelfand-Naimark-Segalovi konstrukciji ter reši nekomutativen problem momentov.

C*-konveksnost

Matrični konveksnosti soroden pojem najdemo tudi v kontekstu C*-algeber. Tam govorimo o C*-konveksnih množicah [12, 11].

LITERATURA

[1] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras*, Acta Math. **123** (1969), 141–224.

[2] W. B. Arveson, *The noncommutative Choquet boundary*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 1065–1084.

[3] A. Barvinok, *A course in convexity*, Amer. Math. Soc., 2002.

[4] J. Bochnack, M. Coste in M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**, Springer, 1998.

[5] E. G. Effros in S. Winkler, *Matrix convexity: operator analogues of the bipolar and Hahn-Banach theorems*, J. Funct. Anal. **144** (1997), 117–152.

[6] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The convex Positivstellensatz in a free algebra*, Adv. Math. **231** (2012), 516–534.

[7] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The matricial relaxation of a linear matrix inequality*, Math. Program. **138** (2013), 401–445.

[8] J. W. Helton, I. Klep in S. McCullough, *The Tracial Hahn-Banach Theorem, Polar Duals, Matrix Convex Sets, and Projections of Free Spectrahedra*, sprejeto v objavo v J. Eur. Math. Soc., `http://arxiv.org/abs/1407.8198`, ogled: 1. 8. 2016.

[9] J. W. Helton in S. McCullough, *Every free basic convex semi-algebraic set has an LMI representation*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), 979–1013.

[10] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi in V. Vinnikov, *Foundations of free noncommutative function theory*, Amer. Math. Soc., 2014.

[11] B. Magajna, *On C^*-extreme points*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 771–780.

[12] P. B. Morenz, *The structure of C^*-convex sets*, Canad. J. Math. **46** (1994), 1007–1026.

[13] Y. Nesterov in A. Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, 1994.

[14] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Univ. Press, 2002.

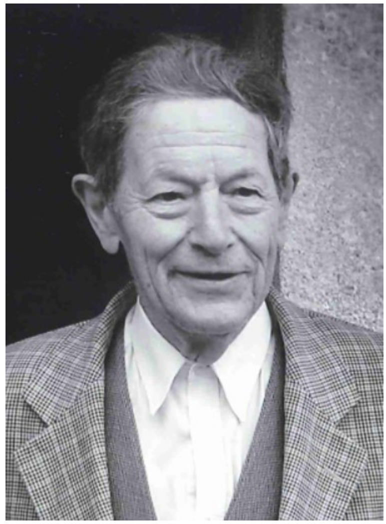
[15] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Adv. Math. **19** (1976), 306–381.

[16] L. Vandenberghe in S. Boyd, *Semidefinite programming*, SIAM Review **38** (1996), 49–95.

[17] D.-V. Voiculescu, *Free analysis questions II: The Grassmannian completion and the series expansions at the origin*, J. reine angew. Math. **645** (2010), 155–236.

[18] G. Wittstock, *On matrix order and convexity*, North-Holland Mathematics Studies **90** (1984), 175–188.

POGOVOR S PROFESORJEM JOSIPOM GRASSELLIJEM



O mirnem, preudarnem, vedno nevsiljivo prijaznem in natančnem ter priljubljenem profesorju Josipu Grasselliju smo ob njegovi devetdesetletnici in ob njegovi smrti januarja 2016 lahko prebrali že marsikaj. Ker je bil med kolegi in sodelavci znan po svoji veliki delavnosti in skromnosti, ni čudno, da o splošnejših izkušnjah njegovega pestrega in tudi preizkušenj polnega življenja ni veliko znanega. V skladu z njegovim prepričanjem, da »to najbrž za druge ni bilo zanimivo«.

Pričujoči pogovor z njim je nastajal več let. Pisec teh spominov sem se s profesorjem Grassellijem zadnjič srečal 23. 12. 2015. Vselej, tudi še na zadnjem srečanju tik pred božičem, je bil veder in bister, natančnega spomina in vsaj za zunanjega opazovalca vedno dobrovoljen. Zdel se je neizčrpen vir informacij, ki pa jih je vedno odmerjal zadržano s premišljeno preudarnostjo in skrbjo, da sogovornika ne bi obremenjeval z nepomembnimi podrobnostmi. Ob želji, da bi o kakem dogodku ali izkušnji povedal kaj več, je vsaj s kretnjo nakazal pomislek, ali je to res dovolj zanimivo, in ob primernem vztrajanju je z mirno lahkotnostjo iz prej nepomembne opombe nastala cela zgodba. Glede natančnosti opisovanja dogodkov so se te zgodbe zdele podobne ›fokusiranju in zumiranju‹ posameznih podrobnosti fraktalne strukture. Josip Grasselli je bil tudi predan družinski človek. Z ženo Ano sta imela dva sinova, devet vnukov in devet pravnukov.

Po pogovorih z njim sem dobil občutek, da pogled na življenje, ki se mirno in sprijaznjeno ozira bolj v preteklost kot v prihodnost, in lucidna vitalnost ter modrost devetdesetletnika drug drugega dopolnjujejo in tvorijo nerazdružljivo harmonijo.

Spoštovani profesor Josip Grasselli, ko ste študirali vi, je bil študij precej drugačen, kot je danes. Doštudirali ste leta 1951. Kakšni so vaši spomini na leta študija? Na vaše učitelje? Na kolege študente v tistih letih?

Jeseni leta 1945 sem se vpisal na filozofsko fakulteto, smer matematika s fiziko. Tiste čase so študenti matematike skupaj s študenti tehnike poslušali predmet Matematika I v prvem letniku in predmet Matematika II v drugem letniku. Ta dvoletni predmet sta izmenoma vodila profesorja Josip Plemelj in Rihard Zupančič. Jeseni leta 1945 bi moral začeti Zupančič, a ker je maja ob koncu vojne odšel v Avstrijo, so se predavanja iz Matematike I začela šele okrog novega leta 1946, ko je njegovo mesto prevzel profesor Anton Vakselj. Spomladi 1946 je začel predavati profesor Ivan Vidav. Za drugi, tretji in četrti letnik matematikov so bila predavanja skupna. V triletnem ciklu je profesor Plemelj zaporedoma predaval Algebro s teorijo števil, Diferencialne enačbe in variacijski račun ter Teorijo analitičnih funkcij; profesor Vidav pa Projektivno geometrijo, Diferencialno geometrijo in Izbrana poglavja iz matematike. Tudi predavanja iz fizike so se leta 1945 zakasnila, ker so profesorja Antona Peterlina zadržali v Italiji, kamor je šel po nakupih opreme za fizikalni laboratorij. On je v prvem letniku za študente matematike in tehnike predaval predmet Eksperimentalna fizika, v triletnem ciklu pa spet združeno za drugi, tretji in četrti letnik skupaj Elektromagnetno polje in optiko, Kvantno teorijo I in II ter Mehaniko in statistično mehaniko s termodinamiko. Vaje so imeli profesorji sami.

Za študente drugih, tretjih in četrtih letnikov so vsa predavanja in vaje potekale v takratnem matematičnem seminarju nad vratarjevo ložo v poslopju Univerze na Kongresnem trgu. V prostoru je bilo kakih 25 sedežev. Profesor Plemelj je med predavanji hodil od table do okna, ki je gledalo na Kongresni trg. Bil je pravi umetnik v zapisovanju gotskih tiskanih črk, ki jih je uporabljal npr. za označevanje grup. Nekoč je na tablo napisal potenco in namesto »na« rekel »hoch«; takoj je to opazil in pripomnil: »Pred tridesetimi leti sem predaval nemško.« Vedno je predaval brez kakršnihkoli zapiskov, kakor tudi profesor Vidav. Profesor Peterlin je zelo poredko na predavanje s seboj prinesel kak listič in kdaj nanj tudi pogledal. Bili so izjemni učitelji. Ohranjam spoštovanje in hvaležen spomin do vseh.

Diplomski izpit je bil sestavljen iz treh delov A, B in C. Del C je zajemal eksperimentalno fiziko in ga je bilo mogoče opravljati po drugem letniku. Del B, ki je obsegal uporabno matematiko in teoretično fiziko, je bilo mogoče opravljati po tretjem letniku, del A, ki je obsegal teoretično matematiko, pa po četrtem letniku.

Koliko slušateljev je bilo v moji generaciji vpisanih na matematično fizikalno smer, ne vem. Na predavanja in vaje nas je hodilo le pet: Lado Kuster, Frantar … imena se ne spomnim, Ivanka Habej in Bibijana Dobovišek Čujec. Od omenjenih sva med živimi le še dva, jaz in Bibijana Dobovišek Čujec, ki je že od šestdesetih let v Kanadi, kjer se je uveljavila kot profesorica in raziskovalka v jedrski fiziki. Sedaj je seveda že upokojena. Leto za našo generacijo in v višjih letnikih na skupnih predavanjih sta bila tudi poznejša kolega na fakulteti Rajko Jamnik in France Križanič. Nekoliko poseben status je imel tudi Saša Ravter. On je že med vojno študiral matematiko v Gradcu in ne vem točno, kaj so mu od tega priznali.

Bil je zelo dober računar in vem, da ga je profesor Peterlin vabil na neki urad zaradi njegovih velikih sposobnosti računanja. Kot otrok je preživel meningitis in je imel trajno poškodbo obraza. Videti je bilo, kot bi se stalno smejal. Najbrž je tudi zato imel kot učitelj težave z avtoriteto. Pozneje je sicer odšel v duhovniški poklic.

Kaj pa rana mladost in spomini na gimnazijska leta? Ste obiskovali gimnazijo v Celju? Spomini na takratne učitelje? Vas je druga svetovna vojna doletela kot gimnazijca?

V osnovno šolo sem hodil v Šentjurju, deška in dekliška osnovna šola sta bili ločeni. V letih 1935 do 1941 sem obiskoval škofijsko klasično gimnazijo[1] v Šentvidu nad Ljubljano. Starši za to šolo niso niti vedeli, svetoval mi jo je župnik Peter Švegelj, ki je takrat vodil župnijo v moji domači vasi na Kalobju[2]. Dijaki smo stanovali v Zavodu sv. Stanislava in smo se le za božične, velikonočne in poletne počitnice vračali domov. Šola je bila precej stroga. V 1. razredu nas je bilo v dveh paralelkah 80, v 4. razredu nas je ostalo le še 30. Med mojimi profesorji so bili: prevajalca iz grščine in latinščine Frančišek Jere in Franc Omerza, skladatelj Matija Tomc, slikar Stane Kregar; matematiko me je učil Ivan Knific, ki je veliko potoval po svetu in o tem pisal in predaval; zgodovino in zemljepis je učil Maks Miklavčič, po vojni profesor zgodovine na teološki fakulteti v Ljubljani. Jezikoslovec Anton Breznik je bil ravnatelj. Na voljo smo imeli bogato knjižnico. V raznih krožkih od prirodoslovnega do šahovskega smo lahko dopolnjevali znanja, pridobljena pri rednem pouku. S pevskim zborom, ki ga je vodil prof. Tomc, smo nastopali na radiu, v unionski in frančiškanski dvorani (ki je sedaj del Mestnega gledališča). Obvezno smo se učili tudi nemščino, ki sicer v spričevalu ni bila niti navedena; prostovoljni (in brezplačni) so bili tečaji italijanščine, češčine, angleščine in stenografije.

Pogosto so prihajali predavat o raznih temah zanimivi zunanji gosti. Naj omenim le tri. Pisatelj F. S. Finžgar je govoril o Prešernovi literarni zapuščini in kako je bila tiste dni s prispevki šolarjev odkupljena Prešernova rojstna hiša v Vrbi. Svetopisemski strokovnjak Andrej Snoj je prikazal svoj obisk Palestine in tamkajšnje razmere. Planinski pisec Janko Mlakar je šaljivo pripovedoval svoje spomine.

Na dan 31. marca 1941 se je vse to v hipu končalo. Ob petih popoldne je v učilnico, v kateri smo se po pouku oskrbovanci učili, stopil prefekt[3] in rekel, da moramo po višjem ukazu v eni uri zapustiti hišo. Teden dni

[1] To je bila osemletna gimnazija, enakovredna današnjim zadnjim štirim letom OŠ in štiriletni gimnaziji.

[2] Kalobški rokopis je nastal med letoma 1643 in 1651. Vsebuje pesmi z molitvami in katekizmom v slovenskem jeziku.

[3] ›prefekt‹: glavni nadzorni učitelj/vzgojitelj v dijaškem domu.

pozneje se je začela vojna. Od tedanjih osemnajstih sošolcev jih je vojna vzela 9. In to na vseh straneh. Umrli so kot vpoklicani nemški vojaki, kot domobranci, kot partizani. Nečak znanega umetnostnega zgodovinarja in akademika Franceta Steleta, s katerim sva bila prijatelja in sva si še nekaj časa dopisovala, je bil tudi vpoklican v nemško vojsko. Tega ni želel, pa je bil – verjetno tudi kot visok, postaven in blond – dodeljen v SS.

Zadnja dva letnika takratne osemletne gimnazije sem pod okupacijo dokončal v Celju. Dobil sem nove sošolce in prvič sošolke. Prostori gimnazije so bili takrat v neki vili. Gimnazijsko poslopje (danes nasproti celjskega gledališča), v katerem so bili prej le zadnji trije razredi gimnazije, je namreč zasedla nemška vojska. Profesorji so bili iz Avstrije in Nemčije. Učili so dobro, ideološke propagande se ne spomnim. Slovenščina je bila prepovedana. Vozači iz vse šole smo prihajali uro ali več pred poukom v šolo. Vsi smo se zbrali v eni od učilnic, kjer nas je nadzoroval dežurni profesor. Kar nas je bilo iz našega razreda, smo sedeli čisto zadaj; namesto da bi ponavljali učno snov, smo klepetali slovensko. Nadzorujoči, ki je sedel spredaj pri katedru, nas ni slišal ali pa se za to ni zmenil. Nekoč smo bili morda preglasni in se je oglasil: »Ich höre eine fremde Sprache« – slišim tujo govorico. Utihnili smo, posledic pa ni bilo. Naslednje jutro je spet vse potekalo po starem. Vpoklic k vojakom je tudi to šolanje prekinil.

Bili ste vpoklicani v nemško vojsko in kot vojak ranjeni. Kdaj je bilo to? Kako ste doživljali ta vpoklic? Ste takrat kot mlad in občutljiv človek sploh vedeli, kaj se je dogajalo pod nacistično Nemčijo po vsej Evropi in v okviru svetovne vojne po vsem svetu? Kako in kje ste doživeli konec druge svetovne vojne? Bi lahko vsaj nekatere izmed teh kompleksnih spominov delili z mlajšimi rodovi?

Konec novembra 1942 je po pošti prispel poziv, naj se 9. 12. 1942 do 12. ure javim v Strasbourgu (kjer sedaj zaseda Evropski parlament). Čez dober mesec dni je bila matura; vpoklicanim so bila takrat poslana maturitetna spričevala, ocene so bile vzete iz redovalnic. Po vojni je bilo treba za veljavnost tega spričevala opraviti nekaj dodatnih izpitov. Poziv je štel obenem za vozovnico po progi Maribor–Celovec–München–Stuttgart–Strasbourg. Potovala sva skupaj s sosedovim Ivanom, ki je dobil enak poziv. Na vožnji po južni Nemčiji sva se v kupeju pogovarjala. Ko so sopotniki slišali, da prihajava kot rekruta iz Spodnje Štajerske, je nekdo prezirljivo rekel, da se bomo taki sedaj naučili kulturnega življenja. V vojaških enotah pozneje sicer prezirljivega odnosa nisem nikoli zaznal. Na železniški postaji v Strasbourgu se nas je znašlo pet Slovencev, vojaška kontrola nas je napotila v Manteuffelkaserne. Čez dva, tri dni je prišel večji transport novincev, med njimi precej Slovencev. Začel se je dril. Zelo naporno, vežbanje dopoldne in popoldne, vežbališče precej iz mesta, bril je strupeno mrzel veter. Ponoči nas je zbujal letalski alarm; zatekali smo se v zaklonišča, ki so bila del francoske Maginotove obrambne črte in dobro urejena. Januarja 1943 so našo stotnijo premestili v Francijo, v mestece Saint Die pod Vogezi. Ena od vojašnic je nosila ime po generalfeldmaršalu Wiztlebnu, ki je bil med zarotniki proti Hitlerju leta 1944 po mučenju obešen. Vojaške vaje so bile tu lažje, bilo je topleje. Dobivali smo plačo 1,10 marke na dan. Ta denar je četni ekonom kar obdržal in brez nasprotovanja vojakov za priboljšek običajni prehrani kdaj kupil kaj dobrega, predvsem dodatne porcije mesa, včasih pa tudi vino. Vedeli smo, da so si nadrejeni oficirji in drugi, ki so bili ›pri koritu‹, privoščili kaj več kot preostali, a mladi in lačni, kot smo bili, s tistim denarjem tako ne bi imeli kaj početi in smo bili zadovoljni, da smo kdaj dobili kak priboljšek. Spomnim se tudi na primer, da je ob porazu pri Stalingradu poveljnik čete prijezdil na vežbališče in nam to sporočil. Zanimivo je, da je bilo v njegovem sporočilu in našem doživljanju novice polno mešanih občutkov. Po eni strani veselje ob znamenju, da se vojna mogoče le bliža koncu, po drugi strani pa strah, saj smo hočeš nočeš bili nemški vojaki.

V desetniji smo bili štirje Slovenci in šest Nemcev. Mi smo med sabo govorili slovensko. Pri vsakodnevnem čiščenju puške je bilo za pogovor dovolj časa. Nekoč sem rekel, da na fronti ne bom mogel streljati na človeka. Razprava o tem se ni nadaljevala, dobil sem le kratek odgovor: »Bo pa on nate.« Čeprav sem bil potem na fronti in celo ranjen, pa je bila moja služba bataljonskega kurirja takšna, da mi ni bilo treba sprožiti niti enega samega strela.

V začetku pomladi 1943 se je naša četa znašla v Heilbromnu, mestu severno od Stuttgarta. Poslali so nas na štiridnevni dopust. Po vrnitvi se je šušljalo, da bomo šli na afriško fronto. A se je obrnilo drugače. Posamezne skupine so pošiljali na razne kraje, največ na atlantsko obalo. V vojašnici nas je bilo ogromno Slovencev. Potem ko so oblikovali razne čete, ki so bile poslane v različnih smereh – med vojaki je bilo seveda polno Slovencev – nas je v vojašnici ostalo le nekaj deset, in to sami Slovenci. Jaz sem imel nekakšno neuradno vlogo prevajalca, saj sem dobro govoril tudi nemško[4]. Zanimivo je tudi, da smo v vojski pogosto prepevali v slovenskem jeziku in nihče ni temu nasprotoval. Povsem drugače je bilo kot doma, kjer so nemške oblasti preganjale slovenščino. Pogosto se je zgodilo, da so nas slovenske fante, ki smo znali lepo zapeti, celo spodbujali k petju tudi drugi, ki jezika niso razumeli. V vojski smo bili sicer fantje vseh narodnosti. Dobro se spomnim skupine nemških vojakov, ki je zelo lepo prepevala po rusko. Pozneje

[4] Ana Grasselli, soproga profesorja Grassellija, upokojena anglistka, je ob priliki povedala, da je bil Josip zelo nadarjen za jezike. Govoril je gladko nemško, francosko in tudi angleško.

sem izvedel, da so bili oblikovani iz skupine ruskih ujetnikov, ki so verjetno iz pragmatizma in obupa nad nesmiselnostjo vojne sprejeli uniformo, ki jim je omogočila vsaj začasno znosno življenje. Zanimivo je tudi, da nas je v Heilbromnu, ko nas je, kot rečeno, v vojašnici ostalo le nekaj deset Slovencev, nekoč nagovoril neki major, ki je govoril slovensko. Navduševati nas je začel za ›nemško stvar‹ in omenjal celo hrabrost naših očetov v prvi svetovni vojni. Bili smo tiho kot grob, saj se je začetno navdušenje nad slovenščino ob vsebini nagovora hitro poleglo. To ga je ujezilo, začel nas je zmerjati in togoten je odšel.

Pozneje smo bili v mestu Karlsruhe na Bodenskem. Tam se je sestavljala marškompanija (oz. maršbataljon) za odhod na rusko fronto, spet smo bili skupaj z Nemci in vojaki drugih narodnosti. Dopolnjevali smo opremo, dobili železno porcijo (Eisen Portion), ki je bila po strogem ukazu namenjena za skrajno stisko, a so jo nekateri kljub temu takoj pojedli. Vsebovala je konzervo, nekaj prepečenca in mogoče še kaj – ne spomnim se več natančno. Imeli smo tudi zadnji zdravniški pregled. Potrdili so mi kratico »k.v.«, ki je bila zapisana v vojaško knjižico že ob naboru. Kratica »k.v.« je pomenila »kriegsverwendungsfähig« – sposoben za frontno službo. Ker se črka »v« v nemščini bere kot »f«, je nemški matematik Carl Siegel[5] za kratico »k.v.« rekel, da pomeni »Kanonenfutter«. Odhod na rusko fronto smo doživljali kot usoden dogodek, njegovega konca smo se bali in se ga nismo upali izgovoriti. Dobro se spomnim, da je bil organiziran obred sv. maše, na kateri nam je vojaški kurat podelil skupinsko odvezo; malo jih je bilo, ki se tega obreda niso udeležili. (Najbrž so bile čete sestavljene predvsem iz pripadnikov katoliške veroizpovedi.)

Po vsem tem smo se vkrcali na vlak, v živinske vagone z napisom: 8 konj ali 40 mož. V našem vagonu smo bili le štirje Slovenci. Na dolgi vožnji smo si zapeli, spominjajoč se domačih krajev; ko smo zapeli prvič, so bili glasovi tihi; a nemški tovariši so nas spodbujali, naj pojemo glasneje. Radi so nas poslušali, čeprav niso razumeli niti besedice. Srečevali smo se s transporti italijanskih vojakov, ki jih je rimska vlada odpoklicala z vzhodnih bojišč. S pikrimi pripombami na italijansko hrabrost so ta srečanja spremljali stari frontni vojaki v vagonu. Deveti dan vožnje se je vlak ustavil v Kerču na Krimu. Z ladjo smo nadaljevali pot čez Kerčka vrata na azijsko stran, na polotok Taman, na kubansko mostišče (ime po reki Kuban). Fronta je potekala v loku od Temrjuka ob Azovskem morju do Novorossijska ob Črnem morju, kakšnih 30 do 40 km od Kerčkih vrat. Na novo so nas porazdelili.

[5] Carl Ludwig Siegel (1896–1981): pomemben nemški matematik, posebej aktiven na področju teorije števil in mehanike. Bil je študent Maxa Plancka in Georga Frobeniusa. Kot velik nasprotnik nacizma je drugo svetovno vojno preživel na Institute for Advanced Study, Princeton, ZDA. V Nemčijo se je vrnil po vojni in leta 1951 postal profesor na Univerzi v Göttingenu.

Dodeljen sem bil v bataljonski štab kot kurir. Najbrž zato, da bi bil po potrebi tolmač Slovencem, ki nas je bilo v bataljonu precej. Stotnik Hauptman Boli je bil prijazen in razumevajoč mož iz Kölna. Do takrat nisem bil v osebnem stiku z nobenim od nadrejenih vojakov. Zato me je presenetilo, da se je on rad pogovarjal z mano. Izvedel sem, da se je njegova enota ob napadu na Jugoslavijo ustavila v Središču ob Dravi. V pogovorih sem mu povedal marsikaj. Med drugim, da so okupacijske oblasti izselile mojo teto z družino v Srbijo, da so bratranca zaprli v koncentracijsko taborišče Matthausen, kjer je umrl, in še marsikaj drugega. Občutil sem, da mi je bil naklonjen. V času vojnega zatišja in ko smo bili prosti, smo včasih celo šli na kopanje blizu znanega letovišča Anapa. Bilo nas je kakih pet ali šest kurirjev in stotnik Hauptman je vedno povabil koga izmed nas, da je šel z njim. Na teh ›izletih‹ so potekali vsi tisti bolj zaupni pogovori. Pozneje so se bataljonski poveljniki zamenjali; novi major Wentzel je bil zadržan, z njim nikoli nisem imel nobenega osebnega pogovora.

Dne 26. julija 1943 popoldne sem majorja Wentzela in njegovega namestnika spremljal v neki bunker. Stopal sem nekaj korakov za njima in njunega pogovora nisem razumel. Ko smo se vračali, je priletela granata in dva velika drobca sta me zadela v kolk. Oficirja pred mano sta odhitela, morda me nista opazila. Dobro se spomnim, kako sem se ranjen plazil po strelskem jarku mimo mrtveca. Na nekem mestu sem izmenjal par besed s stražarjem Slovencem, ki je moral nadzirati območje, vidno iz jaška. Ko sem se zvlekel nekoliko naprej, je tudi njega zadelo. Priplazil sem se do bunkerja z romunskimi vojaki. Vzeli so me medse in me za silo obvezali. Ko se je znočilo, so me spravili do glavne bolniške postaje. Tu so nas vse ranjene cepili proti tetanusu, nas oskrbeli in poslali naprej. Ležali smo po tleh tovornjaka, cesta je bila luknjasta in ob vsakem sunku se je zaslišalo stokanje. Zbudil sem se v zasilni vojaški bolnici (Feldlazarett) v Anapi, turističnem mestu ob Črnem morju. Spomnim se, da sem čez dan ali dva skupaj z nekaterimi drugimi ranjenci ležal na nosilih na letališču pri Anapi. Po radiu je bilo slišati poročila in prav takrat sem slišal novico, da so v Rimu odstavili Mussolinija. Spomnim se, da sem razmišljal, da to najbrž pomeni skorajšnji konec vojne. Žal pa je vojna trajala še skoraj dve leti. Iz Anape so nas z letalom prepeljali v Kerč, kjer so me operirali. Spomnim se dolge sobe, v kateri je bila vrsta (kakih šest) operacijskih miz, pri dveh sta delali ruski zdravnici. Ker sem dobil anestezijo, ne vem, kdo me je operiral. Mogoče sta bili prav ruski zdravnici. Izrezali so mi granatna drobca, oba velika kot prst, eden je bil ostro zakrivljen. Izrezana drobca so mi zavita v gazo obesili okrog vratu. Po operaciji so me z daljšimi in krajšimi presledki in predvsem z bolniškimi vlaki pošiljali iz ene vojaške bolnice v drugo. Najprej v Kherson ob Dnjepru, kjer so me od pasu navzdol obdali z mavcem, tako da se nisem mogel nič premikati. Naslednji postanek je bil Lvov, pa potem Belaja Cerkov južno od Kijeva. Sledila je vrnitev v Nemčijo, kjer so nas ranjence razporedili na razna mesta. Znašel sem se v kraju Traben-Trarbach ob reki Moselle med mestoma Trier in Koblenz. Vojaška bolnica je bila lepo urejena, videti je bila kot počitniški dom. Bila je v prostorih tovarne Mannesman, ki je izdelovala cevi. V okolici je bilo veliko vinogradov, bila je že jesen in letina je bila dobra. Spomnim se, kako so domačini prinesli sladkega grozdja. Za božič 1943 sem – šepajoč in s palico – že hodil. Po priporočilih zdravnikov sem bil v letu 1944 premeščen v vojaško bolnico v Novem Celju blizu Žalca. Prihajali so ranjenci z italijanske fronte in tudi udeleženci spopadov s 14. partizansko divizijo (ki se je prek Hrvaške prebila na Štajersko). Med ranjenimi vojaki na nemški strani sta bila vsaj dva Slovenca. Izhoda nismo imeli. Ob nedeljah se je bilo mogoče pod vodstvom oficirja udeležiti maše v Žalcu. Takrat sem lahko hodil z berglo in pozneje s palico.

V marcu 1944 sem dobil kratek dopust. Bili so posebni občutki priti domov kot invalid. Na dom so takrat prišli partizani, prvič sem se srečal z njimi. Trije mladi fantje, s seboj me niso vzeli, ker sem bil »neuporaben«. Odnesli so mi vojaško uniformo in v njenem žepu granatne drobce iz moje rane. Eden mi je rekel: »Zakaj si šel v nemško vojsko? Boš videl, kaj bo po vojni s teboj.« Odgovoril sem: »Kje ste bili, ko sem moral v nemško vojsko? Nikjer vas ni bilo.« Naša vas je tedaj premogla 26 hišnih številk, 14 nas je bilo mobiliziranih v nemško vojsko. Raztresenih po vsej Evropi; od dveh bratov je bil eden na severu Finske, drugi v Atenah; naš sosed v Trondheimu na Norveškem, tretji pri izstreljevanju V1 in V2 itd. Štirje so padli, eden se je konec leta 1944 ob dopustu pridružil partizanom. Bili so res hudi časi. Spomnim se, da so partizanski fantje bratu hoteli vzeli birmansko uro, pa se je z njimi (nasmeh) ›uspešno‹ skregal in uro obdržal.

Junija 1944 so me odpustili iz vojaške bolnice. Napoten sem bil v Konstanco ob Bodenskem jezeru na švicarski meji, kjer je bila »Genesungskompanie« (četa okrevanja). Vozil sem se po tirolski železnici skozi Innsbruck in naprej čez Bregenz in Lindau. V kasarno v Konstanci sem prišel 12 ur prepozno, a kazni za ta prestopek ni bilo. Kmalu po prihodu je bil atentat na Hitlerja, čez noč so se straže podvojile, salutiranje je nadomestil hitlerjanski pozdrav. Ponovno prestavljen sem se skozi slikoviti Schwarzwald pripeljal v vojašnico blizu letovišča Baden-Baden. Kasarna je bila nova, a polna stenic; zadovoljen sem bil, da jim moja kri ni prijala. Spet je bilo treba na pot, tokrat v avstrijski Gradec k »Heeresentlassungsstelle« (vojaški urad odpustitve iz vojne službe). Prek Dunaja sem se pripeljal tja. Po raznovrstnih zdravniških pregledih so me konec avgusta 1944 kot invalida odpustili iz vojske. Dali so mi dva para perila, nakaznico za obleko in plašč, čevlje sem dobil že prej. Invalidnina je znašala 45 takratnih nemških mark mesečno. Dobival sem jo le osem mesecev. Leta 1946 sem moral na nabor jugoslovanske armade; dali so mi izkaznico: stalno nesposoben. Z leti se je stanje toliko popravilo, da sem brez težav hodil celo v hribe. Se mi je pa pozneje, leta 1957, na ranjenem mestu noga ognojila, nujna je bila ponovna operacija. Rentgenska slika je pokazala, da so tam še ostanki granate. Kirurg je našel še en majhen del granate, vsega pa menda ne. Še danes, če ležim na ranjenem boku, me boli.

Kako in kje ste dočakali konec vojne?

Konec vojne sem dočakal doma. Bil je čuden vakuum. Mučno obdobje negotovosti ... in kaotičnih razmer.

Ste kot bivši nemški vojak zaradi tega po vojni kdaj imeli težave?

Tista grožnja partizanskih fantov marca 1944 me je ves čas vznemirjala. Se pa po koncu vojne ni uresničila. Tudi nobenih drugih težav nisem imel.

Ko sem nekoč šepal po stopnicah, me je dohitel prof. Peterlin in me vprašal, kaj mi je. Povedal sem mu, da sem bil ranjen v nemški vojski. Rekel je: »Imam rešpekt pred vami.« Če sem v seminarju sedel v prvi klopi, je noga molela pred klop, ker je nisem mogel skrčiti. Prof. Plemelj je ob neki priliki malo butnil vanjo. Pripomnil je: »Ali čutite vreme?« Ko sem se ob nastopu službe javil pri predstojniku oddelka za splošne predmete prof. Ervinu Prelogu, ki je bil pozneje tudi rektor Univerze, sem omenil, da sem bil v nemški vojski. Sicer je iz življenjepisa, ki ga je bilo treba priložiti prijavi na razpis, to že vedel. Dejal je (zdelo se mi je, da z nekim posebnim razumevajočim tonom) le: »Takrat je bilo pač tako.« Pozneje sem izvedel, da je bil tudi on mobiliziran v nemško vojsko.

Kdo so bili vaši starši? Kakšno družino ste imeli? Je bil za vašo družino vaš odhod v gimnazijo in internat v Ljubljano težka in finančno zahtevna odločitev? Kako je vaša družina preživela vojno?

Imeli smo nekaj malega zemlje, sicer pa je imel oče trgovino in gostilno. Zaradi mojega odhoda v Ljubljano je bilo kar težko, saj je bila šolnina visoka. Vsak mesec, če se prav spomnim, je bilo treba plačati okrog 500 dinarjev. Vsaj na začetku je bilo tako, pozneje pa mislim, da se je šolnina nekoliko znižala. Za primerjavo, učiteljeva mesečna plača je bila okrog 800 dinarjev. To je bil za starše velik zalogaj. So bili pa mojemu šolanju naklonjeni in zelo zaskrbljeni, ker je bilo znano, da so se mnogi mladi, ki so odšli na šolanje v Celje, ›pokvarili‹ in postali ›barabini‹. Župnikova zagotovila o dobri šoli in vzgoji v internatu so jih nekoliko pomirila. Vojna je našo družino pošteno zaznamovala. Mama je ob začetku vojne zaradi neke infekcije umrla. Oče je ostal sam. Bilo nas je sedem otrok. Bil sem najstarejši. Najmlajši brat še ni dopolnil dveh let. Čeprav je oče zavzeto pomagal partizanom[6], so

[6]Zaradi pomoči partizanom je od njih celo dobil papirje – nekakšne delnice, ki naj bi

ga ob koncu leta 1944 ubili. Še vedno ni povsem znano, zakaj. Najbrž je šlo za kake povsem osebne zamere. Da ne bi prihajalo do zlorab, je vsako ›partizansko naročilo‹ imelo uradno ›potrdilo‹. Menda se je oče zameril lokalnemu človeku, ker je zahteval ›potrdilo o partizanskem naročilu‹. Očeta so odpeljali ponoči in na čuden način. Takrat sem že bil doma. Prišli so trije in menda so celo govorili nemško. Oče je namreč ob odhodu rekel, da ga je prišla iskat policija. Naslednji dan je sestra na policiji v Celju izvedela, da ga tam nimajo. Po poizvedbah pri partizanih pa smo ›izvedeli, da je v brigadi‹. Dolgo je šlo za zavajanje, saj so od njega prihajali ›pozdravi iz brigade, kateri naj bi se bil priključil‹. Jaz sem že od začetka slutil, da se je zgodilo nekaj drugega. Pozneje se je izkazala resnica. Moj brat je namreč prepoznal očetovo uro in škornje, ki jih je nosil njegov zelo verjetni morilec. Zanimivo, da je bratu celo uspelo dobiti nazaj očetovo uro. Pozneje je bilo med ljudmi znano, kdo in kje ga je ubil, pa si v vseh teh letih iz strahu nismo upali ničesar storiti vsaj za očetov dostojni pokop. Nekateri v družini si še vedno prizadevamo, da bi to storili. S sinom sem že obiskal mesto, kjer je bil oče ubit in zakopan. Od pričanj do dovoljenj in odkopa pa je dolga pot. Takrat so bile zelo kaotične razmere, ko je vsakdo počel, kar je hotel. Spomnim se tudi kaosa proti koncu vojne. V Šentjurju se je ustavil vlak, na katerem so bili hrvaški ustaši, ki so se verjetno že umikali proti severu. V naši hiši so se znašli trije mladi fantje v ustaških uniformah in sosedov partizan je začel streljati v našo hišo. Na srečo ni bil nihče od nas zadet. Potem je partizan prišel v hišo in zajel ter odpeljal tri fante. Seveda nismo nikoli več slišali zanje. No, saj se ve, kaj se je zgodilo. To je bil tisti partizan, ki je ›poročal‹ o našem očetu iz brigade. Toda tudi njega je doletela kruta usoda vojne. Bilo je že marca 1945, ko so se Nemci umikali, mislim, da prav na Jožefovo. Zjutraj sem okoli hiše opazil polno nemških vojakov. Ne vem točno, kaj se je zgodilo, a Nemci so zajeli oziroma ubili tudi nekaj partizanov. Verjetno so se spopadli z njimi. Padel je tudi omenjeni partizan. Zanimivo in žalostno je, da je ta partizan imel dva brata. Oba sta padla kot mobiliziranca v nemški vojski. Ja, bili so zelo hudi časi in veliko nedolžnih ljudi je nastradalo in celo izgubilo življenje, vključno z mojim očetom.

Kako ste se po vojni vrnili k študiju in matematiki? S študijem ste začeli jeseni 1945 in doštudirali leta 1951. Skupaj s pokojnima prof. Rajkom Jamnikom in prof. Nikom Prijateljem ste leta 1957 dobili asistentsko mesto na Univerzi. Ste v času 1951–1957 poučevali v gimnaziji? Imate kake zanimive spomine na delo z dijaki in učitelji v tistih časih?

Oktobra 1950 sem nastopil službo na gimnaziji v Murski Soboti. Službena

jih lahko vnovčil po vojni. Oče je bil po vojni tudi uradno rehabilitiran oziroma odvezan vsake krivde.

mesta je dodeljevalo ministrstvo za prosveto v Ljubljani. Želel sem si na Ptuj; najbrž pod vplivom romana Noetova barka, v katerem Stanko Cajnkar opisuje dogajanje na tamkajšnji gimnaziji pred začetkom druge svetovne vojne. A sta bili prosti mesti le v Novem mestu in v Murski Soboti. Ker sem v Novem mestu, čeprav le na izletu, že bil, v Murski Soboti pa še ne in sem tudi sicer veliko slišal in bral o Prekmurju, sem se odločil, da grem v Mursko Soboto. Ti kraji so bili res odmaknjeni; do Maribora je trajala vožnja z vlakom štiri ure, do Ljubljane osem ur. Gimnazijsko poslopje je bilo novo, ravnokar vseljeno. Na poti iz središča mesta do gimnazije se je na obzorju videla Kapela pri Radencih kot visok hrib, čeprav le 100 m nad prekmursko ravnino. Iz zbornice sta se ob jasnem vremenu na južni strani kazali hrvaški Ivanščica in Medvednica pri Zagrebu. Proti severu je ležalo Goričko; gričevnata pokrajina, a najvišji vrhovi so komaj presegali 400 m nadmorske višine. Oko je takrat opazilo na hribčku vas Bodonci. Ranjene noge še nisem mogel skrčiti, a sem se kljub temu veliko vozil s kolesom; ne spomnim se, da bi kdaj srečal kakšen avto. Ljudje so bili prijazni; narečju sem se moral privaditi, da sem jih lahko razumel; mnogi so govorili tudi madžarsko. V mestu je poleg katoliške in evangeličanske cerkve stala tudi velika judovska sinagoga[7].

Učiteljski zbor gimnazije Murska Sobota je bil zelo raznolik. Spomnim se na primer profesorja geografije, po rodu Rusa, ki je po prvi svetovni vojni pred Stalinom pribežal v Jugoslavijo, in mlade Rusinje, ki je še leta 2003 (na neki obletnici mature, kjer smo se srečali) hvalila Stalina. Mislim, da se v tistih časih ta dva nista nikoli pogovarjala. V tem obdobju je začela oblast zastraševati obiskovalce cerkvenih obredov. Nekatere so doletele kazni, kot so odpoved službe in premestitve. Gimnazija je takrat štela osem razredov; učil sem v višjih, in to zelo rad. Dijaki so prihajali iz kmečkega okolja, nekaj iz mestnih družin. Bili so spoštljivi in prizadevni. V šolskem letu 1951/52 me je ravnatelj določil za razrednika osmošolcev. Učil sem jih fiziko. Bili so zelo sposobni dijaki. Vsi so končali univerzitetni študij in se v poklicu uveljavili. Pri opravičevanju izostankov sem bil pa preveč popustljiv in se dobro spomnim, kako me je ravnatelj kregal, ker je hotel biti bolj strog. Dobro se še spomnim, kako so ob zaključku šolskega leta pripravili domiselno in dobro izpeljano predajo ključa sedmošolcem. Uradno ta stvar ni bila zaželena in je veljala za nepotrebno »buržujsko« dediščino.

Murska Sobota je spadala pod tako imenovani obmejni pas; blizu sta bili madžarska in avstrijska meja. Naš dijak sedmošolec se je odločil za pobeg v Avstrijo; na meji so ga ustrelili naši graničarji. V šoli se o tem ni smelo javno govoriti, nobene žalne slovesnosti ni bilo za njim. Mislim, da je bil ustreljen dijak Erik Koltaj, ali pa je bil Erik njegov brat. V gimnazijo sta hodila dva

[7] Porušena leta 1954

brata. Njegovo izginotje, čeprav smo vsi vedeli, kaj se je zgodilo, je bilo tabu. Nihče si ni upal niti govoriti o tem. Prizadel nas je ta brezčuten[8] odnos.

Na gimnaziji v Murski Soboti sem bil do leta 1953. Od jeseni 1953 do jeseni 1957 sem službоval na tedanji 2. gimnaziji v Celju. To so bile še stare osemletne gimnazije. V zadnjem letu tega časa se je na zborovanjih veliko razpravljalo o predvideni šolski reformi. Gimnazija naj bi se skrčila na štiri letnike, vpeljana naj bi bila osemletka, klasična gimnazija pa odpravila. Veliko je bilo glasov proti taki spremembi, nestrinjanje so v časopisih objavljale znane osebnosti. Kot po navadi pri šolskih reformah[9] pa to ni nič zaleglo. Takrat smo v Celju doživeli tudi veliko poplavo[10]. Spomnim se, da je bilo več mrtvih in seveda ni bilo pouka.

Kako se spominjate začetka dela kot asistent na univerzi? Takrat ste se najprej zaposlili na tehnični fakulteti. Se je delo s študenti zelo spremenilo od takrat do vaše upokojitve?

Septembra 1957 sem začel asistentsko službo na takratni Tehnični fakulteti, ki jo je sestavljalo več po stroki ločenih oddelkov. Med njimi je bil oddelek za splošne predmete, ki je združeval predavatelje matematike, fizike in mehanike; prostore je imel na Lepem potu z lastno matematično knjižnico. Kmalu zatem so oddelki Tehnične fakultete postali samostojne fakultete, oddelek za splošne predmete pa je bil priključen Fakulteti za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo (FARUMEKETE). Ker se je profesor Anton Vakselj upokojil, je predavanja iz matematike I in II prevzel profesor Ivan Vidav. S kolegom Nikom Prijateljem sva vodila vaje; istočasno je kolega Rajko Jamnik dobil asistentsko mesto na predhodnici sedanje Biotehniške fakultete.

Podobno kot matematika in fizika so bile nekatere druge naravoslovne stroke zastopane na več fakultetah. Leta 1960 je prišlo do nove preureditve. Vsi ti predmeti so se pridružili Fakulteti za rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo in nastala je Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo (FNT). Eden njenih oddelkov je bil Oddelek za matematiko in fiziko (z odseki za matematiko, fiziko in mehaniko), pod njegovim okriljem sta se združili obe matematični knjižnici. Prostori za matematiko na Kongresnem trgu 11 so bili izpraznjeni leta 1970, ko je bila zgrajena stavba na Jadranski 19.

[8]Soproga Ana Grasselli, ki je takrat na isti šoli poučevala angleščino, se nama ob čaju pridruži in dopolni, kako grozni so bili tisti občutki. Pove, da je bila praktično odločena, da bo brez uvoda pri uri z minuto molka počastila Erikov spomin. Ko pa je prišla v razred, tega ni mogla storiti. In doda, da še dobro, da ni, saj bi se gotovo njuno življenje zaradi tega zasukalo zelo drugače.

[9]Z zakonom je bila leta 1958 uvedena osemletna osnovna šola, gimnazije pa so postale štiriletne.

[10]4. junija 1954 je bila v Celju in okolici velika poplava. Umrlo je 22 ljudi.

Doktorirali ste pri prof. Vidavu leta 1961 na področju funkcionalne analize. Slovenska matematična strokovna javnost vas bolje pozna po delih s področja algebre in teorije števil. Lahko poveste kaj več o tem, kako, kdaj in zakaj je teorija števil pritegnila vašo pozornost? Leta 2009 je izšlo vaše zadnje delo Elementarna teorija števil, leta 2008 pa obsežna Enciklopedija števil s skoraj 700 stranmi. To je zagotovo najobsežnejše delo s področja teorije števil v slovenskem jeziku. Najbrž gre za delo, ki je nastajalo že dolgo prej?

Že kot študentu mi je prišla v roke knjiga *Synthetische Zahlentheorie* švicarskega matematika Rudolfa Fueterja. Obravnava obseg $K = \mathbb{Q}^{(2\pi i/p)}$ (kjer je p liho praštevilo) in aritmetiko v njem (definicija celega števila, ideal, razcepitev ideala na praideale, kvadratni in kubični reciprocitetni zakon). Rad sem jo prebiral. Ko je začela izhajati knjižnica Sigma, me je prof. Prijatelj nagovoril, da bi napisal kaj o številih. Tako je nastala knjižica *Osnove teorije števil.* Najbrž me je oboje spodbudilo k večjemu zanimanju za probleme okrog števil. Po upokojitvi sem začel sestavljati opise nekaterih števil, ki nosijo posebna imena; opisi so zbrani v *Enciklopediji števil.* Naslov je izbralo uredništvo, sam sem predlagal naslov *Število se predstavi.* Seznam števil, ki sem jih želel predstaviti, je bil večji od v knjigi zajetih števil. Nekaterih opisov nisem vključil, drugih nisem dokončal. Koristno bi bilo tudi stvarno kazalo, ki ga nisem sestavil.

Menda ste skupaj s profesorjema Rajkom Jamnikom in Nikom Prijateljem ter s profesorjem Ivanom Vidavom, ki je bil vaš učitelj in mentor, tudi prijateljevali ter družno hodili v hribe. Nam lahko zaupate kake spomine in skupna doživetja? Kake vtise in misli, ki ste jih skupaj doživeli ...?

Po končanih spomladanskih predavanjih smo vsako leto junija napravili celodnevni izlet. V začetku smo se z avtobusom ali vlakom odpeljali do kakšne postaje in od tod pešačili do druge postaje, pozneje smo se vozili z avtomobili. Obiskovali smo Gorenjsko, Dolenjsko, Notranjsko in si ogledovali znamenitosti. Pogovor je tekel o strokovnih vprašanjih, takratnih družbenih razmerah, tudi kakšno smešnico in anekdoto je bilo slišati; zmeraj je bil pogovor odkrit in prostodušen. Tako je bilo tudi, ko smo se po seminarju iz novejše matematike pri prof. Vidavu ali po sejah Društva matematikov, fizikov in astronomov dostikrat preselili k omizju v kavarni. Naj iz naših izletov omenim le dva doživljaja. Ko smo se iz Cerknice peljali proti Rakitni, vozil je profesor Prijatelj, se je za blagim ovinkom, ko se je avto znašel na travi pod cesto, debata hitro končala. Vsi smo bili nepoškodovani. Avto nam je bližnji kmet s traktorjem pomagal zvleči nazaj na cesto in pot smo lahko nadaljevali, a vozili smo zelo počasi, ker je bil avto poškodovan in je moral v popravilo. Najbrž nas je zaradi prepočasne vožnje ustavila celo policija. Drugikrat smo bili v Tamarju in smo se ustavili v hotelu blizu skakalnice v Planici. Pozneje smo v avtu ugotovili, da nas je natakarica pri računu »prinesla okrog«. Prof. Vidav je pripomnil: »Vsem nam bi morali vzeti diplome.«

Tisti, ki vas poznamo kot učitelja, se vas spominjamo kot človeka, ki s sklonjeno glavo preudarno, natančno in obzirno naslavlja soljudi, probleme in življenje na sploh. S to preudarnostjo ste doživeli in zabeležili človeško zgodovino od nepopisne stiske ljudi v drugi svetovni vojni in revščine, ki jo je le-ta povzročila, do današnjega tehnološkega napredka in globoke ekonomske in moralne krize. Kako bi vi komentirali ›napredek‹ oziroma razvoj človeške družbe? Se splača biti pošten in kaj to sploh pomeni? Kako bi komentirali vlogo in pomen matematike pri vzgoji mladih?

Doma sem z dežele. Spominjam se beračev, ki so hodili posamič od hiše do hiše, v kriznih letih po 1932 tudi brezposelnih, prihajajočih v skupinah tudi do deset. Oboji so prosili pomoči. Dobivali so v glavnem kruh in hrano, včasih kakšen dinar. Veljalo je nenapisano pravilo: proseči ne sme oditi od hiše praznih rok. Ko sedaj hodim po ljubljanskih ulicah, tudi srečujem proseče dlani. Isto se mi je zgodilo v Moskvi leta 1970. Videti je, da je človeška družba zelo zapleten organizem in ga je težko urediti tako, da ne bi bilo pomoči potrebnih. S tem ni rečeno, da si za izboljšanje stanja ni treba prizadevati ali da v tej smeri ni bilo nič storjenega.

V mojih otroških letih sta bila avto in radio redkost. Imeti kolo je bilo bogastvo. Kmečka opravila, kot so košnja, oranje, okopavanje v vinogradu, mlačev, molža so zahtevala precej napora in truda. Današnji stroji so ta dela zelo olajšali. Podobno velja za gospodinjska opravila, industrijo, gradbeništvo. Vse to je prinesel tehnološki napredek. A žal tudi jedrsko in biološko orožje, izpopolnjene možnosti vohunjenja in vdiranja v človekovo zasebnost. Fizik Louis de Broglie v knjigi *Matière et lumière* ugotavlja, da človeški razum v znanju, iznajdbah in izumih napreduje v velikih korakih, vzgoja srca pa zaostaja. Izgubila se je zavest, da se ne sme vse, kar se more. Veliko je dejavnikov, ki vplivajo na vzgojo srca: družina, šola, okolje. Tudi pouk matematike, ki navaja učence na natančnost, sprotno preverjanje rezultatov, spoštovanje pravega spoznanja. V vsakdanjem življenju so natančnost, ocenjevanje lastnih dejanj in trud za resnico pomembne lastnosti. Želeti je, da te vrline učencem preidejo v navado. Poštenost je osnovna dolžnost družbi služečega posameznika. Ne smemo se ji izmikati.

Pogovor pripravil Damjan Kobal

SREČANJE EVROPSKIH MATEMATIČARK V BERLINU

Društvo evropskih matematičark z imenom *European Women in Mathematics (EWM)* [1] je bilo ustanovljeno leta 1986 in ima nekaj sto članic iz 33 evropskih držav. Slovenska koordinatorka združenja je Polona Oblak. Društvo EWM tesno sodeluje z žensko sekcijo pri društvu evropskih matematikov *European mathematical society (EMS)*. Leta 2008 sta društvi skupaj ustanovili znanstveni odbor *EMS/EWM Scientific Committee*, ki ga sestavlja 12 vodilnih evropskih matematičark. Odbor svetuje npr. pri izboru predavateljic na različnih znastvenih srečanjih bodisi v organizaciji EWM, EMS ali drugih.

Društvo EWM je ob 7. kongresu evropskih matematikov (7EMC) organiziralo tudi srečanje evropskih matematičark. Glavni del srečanja je potekal dan pred kongresom, to je 17. julija 2016, na Tehnični univerzi v Berlinu. Najprej se je zvrstilo 5 vabljenih predavanj uglednih evropskih matematičark:

- Fanny Kassel (CNRS in Université de Lille), *Tessellations of the plane and beyond*;
- Hannah Markwig (Universität des Saarlanden), *Tropical Geometry*;
- Carola Bibiane Schönlieb (University of Cambridge), *Seing more in pictures – a mathematical perspective*;
- Britta Späth (Technische Universität Kaiserslautern), *Theory of finite groups: Old conjectures, new Challenges*;
- Sarah Zerbes (University College London), *Elliptic curves and the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*.

Sledila je predstavitev raziskave o spolnih vzorcih pri znanstvenih objavah v matematiki, ki jo je pripravila Helena Mihaljevic-Brandt, zaposlena pri zbMATH. Zanimiva predstavitev je, skupaj z nekaj podobnimi statistikami, na voljo tudi na spletu [2].

Predstavitvi je sledila burna diskusija o še vedno majhnem deležu žensk med matematiki. V večini evropskih držav je med vpisanimi na študij matematike približno polovica študentk, a se ta delež z vsako naslednjo stopnico v akademski karieri drastično zmanjšuje. Naj za primerjavo navedem podatke Fakultete za matematko in fiziko Univerze v Ljubljani za obdobje od

2011–16: delež diplomantk na 1. stopnji je 57 %, diplomantk na 2. stopnji je 54 %, doktorantk na 3. stopnji pa 46 %. Pomemben preskok se zgodi v nadaljevanju: med habilitiranimi učitelji matematike na Univerzi v Ljubljani je le 14 % žensk, natančneje vsega skupaj 13, od katerih je le 1 redna profesorica.

Glavna naloga društva EWM je tako po eni strani spodbujati ženske, da vztrajajo na znastveni poti, in po drugi pomagati ustvarjati akademsko okolje, ki to omogoča.

Ob koncu predavanj in diskusije je potekala skupščina društva, na kateri je bilo predstavljeno delo v zadnjih dveh letih ter načrti za prihodnost. Odločeno je bilo, da bo naslednje srečanje EWM septembra 2018 na Dunaju. Za novo predsednico društva je bila izbrana Carola-Bibiane Schönlieb.

Drugi sklop dogodkov na 7EMC v organizaciji EMW je potekal v sredo, 20. julija 2016. Takrat sta zbrane matematičarke pozdravila Pavel Exner, predsedujoči EMS, ter Volker Mehrman, vodja lokalnega organizacijskega odbora 7ECM. Sledilo je javno predavanje Alessandre Celleti (Università degli Studi di Roma Tor Vergata) z naslovom *Chaotic routes that shaped the universe: a history of some outstanding women scientists.*

V matematični knjižnici je nato potekalo slavnostno odrtje razstave *Women of mathematics throughout Europe. A gallery of portraits* [3], na kateri so bili govorniki: predsednik Matematičnega inštituta TU Berlin, prodekanja za mednarodno sodelovanje in izobraževanje TU Berlin, nemška zvezna ministrica za izobraževanje in raziskave, predsednik Evropskega raziskovalnega sveta ter predsednik Fundacije Alexandra von Humboldta.

Izjemno zanimivo razstavo sta pripravili Sylvie Paycha in Sara Azzali skupaj s fotografinjo Noel Tovia Matoff. Razstavljenih je trinajst portretov matematičark iz različnih delov Evrope na različnih stopnjah znastvene kariere z različnih matematičnih področjih. Prikazuje žensko perspektivo poklica in upamo, da bodo prikazane znanstvenice in njihove zgodbe vzor in spodbuda bodočim mladim matematičarkam.

LITERATURA

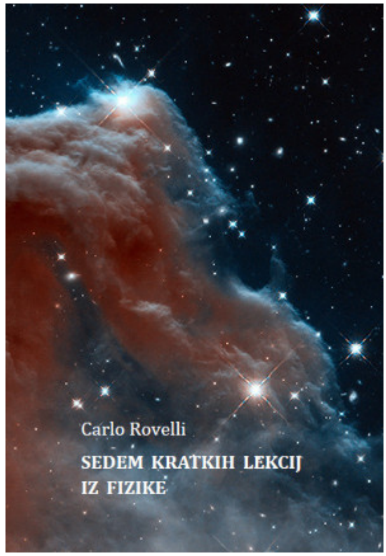
[1] *European Women in Mathematics*, `http://www.europeanwomeninmaths.org`, ogled: 5. 8. 2016.

[2] *Women in math – reports*, `http://www.europeanwomeninmaths.org/women-in-math/report`, ogled: 5. 8. 2016.

[3] *Women of mathematics throughout Europe. A gallery of portraits*, `http://womeninmath.net`, ogled: 5. 8. 2016.

Marjeta Kramar Fijavž

Carlo Rovelli, Sedem kratkih lekcij iz fizike, DMFA – založništvo, 2016, 74 strani.



Pri DMFA–založništvu je v Presekovi knjižnici izšla knjižica Carla Rovellija »Sedem kratkih lekcij iz fizike« v prevodu A. Kodreta. Omemba »lekcij« v naslovu naj nikogar ne oplaši: avtor je na zgolj sedemdesetih straneh malega formata, z nekaj skicami o zgodovinskih predstavah o vesolju in z eno samo enačbo, še to le kot ilustracijo skrajno elegantne teoretične zamisli, pokazal, kako se je s fiziko XX. stoletja razvijalo naše razumevanje sveta. Osrednji temi sta teorija splošne relativnosti in kvantna mehanika, iz njiju porojeni makrokozmos sveta zvezd in galaksij ter mikrokozmos osnovnih delcev, pa poskus premostitve njunih nasprotij. Predzadnje poglavje popelje bralca od pojma toplote prek termodinamike do črnih lukenj. V zaključku pa najdemo sijajno razmišljanje o nas samih, o razvoju človeške vrste k razumu, ki hoče razvozlati zapleteno sliko sveta.

Knjižica je bila več mesecev na seznamu najbolje prodajanih italijanskih knjig. Od izida v novembru 2014 do letošnjega maja so prodali 150 tisoč izvodov. Prevedena je že v blizu 30 jezikov.

Avtorja je v svoji oceni za založbo predstavil prof. Strnad:

»Carlo Rovelli je bil rojen leta 1956. Diplomiral je leta 1981 na univerzi v Bologni in doktoriral leta 1986 na univerzi v Padovi. Zaradi političnega delovanja je imel težave z oblastjo. Ker je odklonil služenje v vojski, je bil nekaj časa zaprt. Po doktoratu je bil raziskovalec na univerzah v Rimu in Trstu ter na univerzi Yale. Med letoma 1990 in 2000 je bil profesor na univerzi v Pittsburghu, kjer je bil dalj časa tudi pridruženi profesor na oddelku za zgodovino in filozofijo znanosti. Leta 1988 je z Leejem Smolinom in Abhayem Ashtekarjem uvedel [zankovno] kvantno teorijo gravitacije. Vodi skupino za kvantno gravitacijo na oddelku za fiziko univerze Aix-Marseille.«

O delu pa:

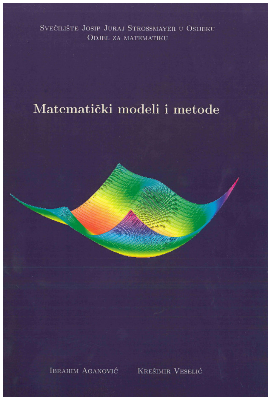
»... O knjižici »Sedem kratkih lekcij iz fizike« vse dobro ... Namenjena je nefizikom in fizik najbrž iz nje ne bo zvedel veliko novega ... Red bi bil, da bi tako knjižico izdala splošna (nefizikalna) založba. Na vprašanje, ali [potrebujemo] slovenski prevod ali ne, pa je odgovor odločen da ... Založništvu

DMFA priporočam, da knjižico izda, a jo pospremi s precej večjo reklamo med ljudmi zunaj Društva, kot jo sicer namenja svojim knjigam.«

Omenjeno knjižico lahko kupite pri DMFA – založništvu po ceni 9,50 EUR.

Alojz Kodre

Ibrahim Aganović, Krešimir Veselić, Matematičke metode i modeli, Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014, 432 str.



Knjiga *Matematički modeli i metode* avtorjev Ibrahima Aganovića in Krešimira Veselića je nova v seriji učbenikov teh dveh avtorjev, ki obravnavajo uporabo matematičnih metod v fiziki. Podobno kot prejšnje je tudi ta knjiga napisana zelo zanimivo in razumljivo. Na začetku vsakega poglavja avtorja na kratko orišeta fizikalno ozadje problema, nato pa se temeljito posvetita njegovemu matematičnemu modelu. Večina trditev je dokazanih, dodanih pa je tudi veliko rešenih primerov. V vsakem poglavju so tudi naloge za samostojno delo.

Glavna tema knjige je obravnava ravnotežja mehanskih sistemov in majhnih nihanj okoli ravnovesnih leg. Avtorja se pri tem omejita na sisteme s končno mnogo prostostnimi stopnjami in pa na enodimenzionalne kontinuume. Analogno se na hitro dotakneta tudi enačbe za prevajanje toplote.

V prvem poglavju začneta z obravnavo ravnotežja sistema točk, ki so med sabo povezane z vzmetmi ali pa s palicami. Z uporabo Newtonovega zakona tako v preprostih primerih pridemo do sistema linearnih enačb, katerega matrika je simetrična in tridiagonalna. V splošnem pa se je problema bolje lotiti tako, da poskusimo minimizirati potencialno energijo sistema. Tako hitro pridemo do problema iskanja stacionarnih točk funkcije več spremenljivk in karakterizacije lokalnih minimumov. Velik del poglavja je namenjen študiju simetričnih in pozitivnih matrik ter reševanju sistemov enačb. Pri linearnih sistemih so opisani numerični algoritmi za čim bolj natančno in stabilno reševanje, bolj splošnih sistemov pa se lotita z Newtonovo metodo.

Drugo poglavje avtorja začneta z obravnavo dušenega in vsiljenega nihanja vzmeti. Podrobno opišeta in ilustrirata različne tipe dušenja ter pojav resonance. Nato začneta obravnavati majhna nihanja sistemov z večimi prostostnimi stopnjami. Tako prideta do problema simultane diagonalizacije para simetričnih matrik, ki mu posvetita velik del poglavja.

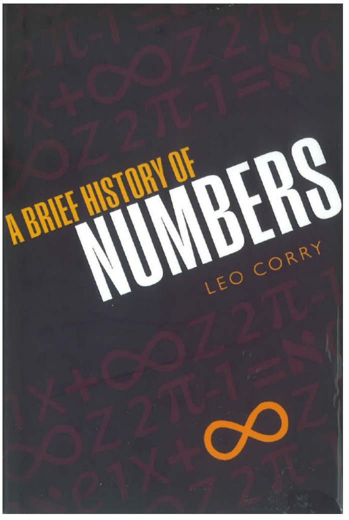
Preostali dve poglavji obravnavata podobno tematiko kot prvi dve, le da gre tokrat za kontinuume. Velik del tretjega poglavja je tako posvečen enačbam elastostatike, ki so zapisane z uporabo energijskega funkcionala. Avtorja bralcu predstavita osnove variacijskega računa in metodo končnih elementov za približno reševanje integralskih enačb.

V zadnjem poglavju je obravnavana valovna enačba, ki opisuje nihanje žice oziroma elastičnih nosilcev. Najprej je izpeljana D'Alembertova rešitev valovne enačbe, nato pa še Fourierova metoda. Naj omenim, da se mi zdi tako računska kot grafična obravnava valovne enačbe še posebej zanimiva. Na kratko je opisana tudi diskretna Fourierova transformacija in algoritem FFT. Poglavje in knjiga se končata z obravnavo transportne enačbe.

Po besedah avtorjev je knjiga namenjena predvsem študentom višjih letnikov tehniških fakultet in študentom matematike. Zaradi elegantnega in razumljivega sloga pa jo priporočam vsem, ki uživajo v študiju uporabe matematičnih metod in modelov za reševanje fizikalnih problemov.

Jure Kališnik

Leo Corry, A Brief History of Numbers, Oxford University Press, Oxford 2015, 309 strani.



Stare, predgrške civilizacije so števila uporabljale le za praktične, prozaične namene, npr. za meritve zemljišč, gradnjo piramid ali štetje denarja. Corryjeva knjiga pripoveduje zgodbo o razvoju pojma števila od časa pitagorejcev (ki so števila prvi dvignili iz utilitarne sfere v območje večnih idej oziroma entitet z bogatimi simboličnimi in celo mističnimi pomeni in so jih prvi študirali zaradi njih samih, v njih pa so prepoznali tudi ključ do skrivnosti kozmosa) do začetka 20. stoletja, ko so se v delih Peana, Fregeja, Cantorja, Dedekinda in drugih matematikov izkristalizirali trenutno prevladujoči nazori o številih (tako npr. v knjigi niso obravnavani različni novejši sistemi števil, še bogatejši kot realna števila, npr. Conwayeva surrealna števila). Čeprav to zgodbo vsi matematiki bolj ali manj dobro poznamo, jo vselej radi slišimo povedano še enkrat – prav kakor otroci, ki se nikoli ne naveličajo poslušati eno in isto pravljico! Corryjeva pripoved te zgodbe je za matematike še posebej privlačna zato, ker se nedvoumno osredinja na razvoj matematičnih idej; ne izgublja se v nebistvenih biografskih podrobnostih o prepirih, dvobojih in drugih prigodah iz življenja matematikov, ne kupuje pozornosti bralca s poceni anekdotami o njihovih čudaštvih ali značajskih posebnostih, ampak se posveča predvsem njihovemu izvirnemu matematičnemu prispevku, ki ga skuša predstaviti kar se da zgoščeno in razumljivo.

Da danes števila (kot temeljni matematični objekt) prežemajo in uravnavajo (še posebej prek informacijske tehnologije) naše vse bolj nadzorovano in digitalizirano življenje tako rekoč na vsakem koraku, je rezultat dolgega zgodovinskega procesa, v katerem so v različnih kontekstih privzemala različne vloge (npr. v znanosti, tehniki, organizaciji družbe, itd). Vzporedno s tem pa so se spreminjala tudi naziranja o tem, kaj je število in kakšne so njegove uporabe znotraj matematike same. Različni matematični problemi so terjali kot rešitve števila različnih vrst in jih s tem priklicali v zavest ljudi oziroma spodbudili njihovo odkritje. Ta zgodovinski proces pa nikakor ni bil premočrten, temveč vijugav, poln dilem, oklevanj, negotovosti, nepričakovanih obratov in dolgo zasledovanih slepih poti. Da bi bralec lažje sledil prikazu tega razvoja, avtor v uvodnem poglavju najprej na kratko predstavi sistem števil, kot ga poznamo danes, odnose med različnimi vrstami števil $(\mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{C})$ ter nekaj osnovnih lastnosti števil.

V drugem poglavju obravnava različne načine zapisovanja števil. Pozicijski decimalni sistem, kot se uporablja danes, primerja s sistemi zapisovanja na Zahodu, ki so mu najbližji oziroma predstavljajo določene njegove predstopnje. Tako so npr. v Egiptu uporabljali posebne hieroglife za zapis prvih desetiških potenc $1, 10, 100, \ldots, 1000000$, poznali pa so tudi že ulomke s števcem 1. Stari Grki so (podobno kot Hebrejci) za zapis enic 1–9, desetic 10–90 in stotic 100–900 uporabljali 27 črk abecede. Šestdesetiški sistem Babiloncev, ki se pod vplivom Ptolemejevega Almagesta iz leta 130 še vedno uporablja v trigonometriji in astronomiji, ima to posebnost, da za zapis števk 1–59 uporablja le dva različna simbola (za 10 in 1). Celo za preprosto seštevanje precej nerodni sistem starih Rimljanov je uporabljal črke za števila po ključu I za 1, V za 5, X za 10, C za 100, D za 500 in M za 1000. Na kratko je omenjen tudi Arhimedov sistem zapisovanja velikih števil ter (od drugih astronomov in matematikov) razmeroma prezrt Ptolemejev prispevek uvedbe ničle v okviru babilonskega šestdesetiškega sistema.

V tretjem poglavju je lepo razložena temeljna distinkcija, ki je veljala v starogrški matematiki med aritmetičnimi, diskretnimi števili (aritmos), ki so bila vselej večkratniki neke osnovne količine, enote, oziroma so predstavljala določeno število določenih stvari (npr. jabolk), in geometrijskimi, zveznimi magnitudami (megethos), ki so predstavljale bodisi dolžine daljic bodisi ploščine likov bodisi volumne teles, in so bile neskončno deljive. Grki so, podobno kot Egipčani, poznali tudi koncept ulomkov s števcem 1, niso pa imeli še povsem izčiščenega pojma racionalnega števila, saj npr. števila, ki ga mi označujemo z ulomkom m/n, niso interpretirali kot produkt $m(1/n)$, ampak kot vsoto m enakih vrednosti $1/n$. Po odkritju iracionalnih števil je krizo v pitagorejski koncepciji števil razrešil Evdoks. Vpeljal je jasno razlikovanje med količinami in razmerji, ki se je obdržalo še dolgo v zgodovini matematike. To poglavje je pomembno, ker v njem Corry polemizira s prevajalcem Evklida v angleščino in siceršnjo avtoriteto za starogrško matematiko Heathom in njegovo algebraično interpretacijo nekaterih izrekov iz Evklidovih Elementov, za katero dokazuje, da je (kljub svoji matematični smiselnosti) neprimerna, saj v zgodovinskem smislu nasprotuje sami koncepciji števil pri starih Grkih. Na tem primeru lepo vidimo, da matematike preteklosti (in problemov, ki jih je reševala s svojimi specifičnimi metodami) ne moremo pravilno razumeti, če si jo zgolj prevedemo v današnji pojmovni aparat in simbolično pisavo, ampak moramo, da bi jo lahko resnično razumeli, razmišljati v njenih izvornih pojmih. Podobno Corry argumentirano zavrača tudi anahronizem, ki skuša rezultate starogrških geometrijskih konstrukcij iz Evklidovih Elementov interpretirati kot zametke nekakšne geometrijske algebre. Grki so v teh problemih razmišljali geometrijsko, ne pa algebraično, in če iz pozicije sedanjosti (ki je do skrajnosti poenostavila zapletenejše koncepte in načine mišljenja iz preteklosti) po Descartesovi algebraični revoluciji arogantno verjamemo, da jih lahko razumemo (in celo odpravimo kot trivialne!) s prevodom geometrijskega v algebraični jezik, se zelo motimo. Prav razumevanje nians, ki jih omogočajo različni jeziki in modusi mišljenja, torej posluh tudi za finejše ravni in dimenzije matematičnega besedila, ne le hitenje k rezultatu po grobi algebraični poti, je tisto, kar ostaja skrito pragmatičnemu matematiku, matematičnemu zgodovinarju, katerega misel je veliko globlja in zahteva veliko več časa in truda, pa ne.

Podobno zgoščeno in kritično poglobljeno obravnava Corry tudi druga obdobja v zgodovini števil. Tako je npr. v srednjeveški arabski matematiki geometrija veljala za zanesljivejši izvor matematičnih trditev v primerjavi z aritmetiko in algebro (to se kaže npr. v priznavanju le pozitivnih rešitev enačb), ta nazor pa se je v matematiki obdržal vse do konca 19. stoletja. Različne algebraične enačbe (kot npr. $x^2+10x = 39$) in identitete so reševali in dokazovali s pomočjo metode dopolnjevanja do popolnega kvadrata in ustreznih geometrijskih diagramov.

Med 12. in 16. stoletjem so v Evropi najprej sholastiki zavzeto razčlenjevali Evklidove Elemente v logičnem in strukturnem smislu in posamezne dele dokazov opremljali z referencami na že dokazane trditve z namenom, da bi izvirno besedilo, ki ga poleg vsebine odlikuje tudi zgoščen slog, didaktično izboljšali (to je podobno jalovo početje, kot če bi kdo hotel popravljati Prešernove verze)! To niso bili zgodovinsko in jezikovno zvesti prevodi izvirnika, ampak učbeniki, namenjeni praktični uporabi v razredu. Predgovori in komentarji k tem prevodom so dragoceni dokumenti, ki zgodovinarjem matematike med drugim omogočajo tudi primerjavo različnih koncepcij o številih. V obdobju renesanse in po iznajdbi tiska se je število prevodov Evklida še povečalo. Prva tiskana verzija Elementov se je pojavila v Benetkah leta 1482. Prva objavljena latinska verzija, ki je bila neposreden prevod iz grškega izvirnika, je bila objavljena 1505, prav tako v Benetkah. Predstave o zgodovini matematike so bile v tem času precej poenostavljene, zlasti prispevek arabskih matematikov je bil precej podcenjevan. Podobno se v zgodovini matematike dostikrat prezre pomembne prispevke t. i. manjših narodov. Tej pomanjkljivosti se ne izogne tudi ta knjiga, ko v poglavju o znanstveni revoluciji, uvedbi decimalnega sistema in iznajdbi logaritmov poudarja vlogo, ki so jo pri vsem tem odigrali Viéte, Stevin, Neper in Briggs, pri tem pa Vege in njegovega logaritmovnika niti ne omeni! Ob tem bi se Slovenci še enkrat morali globoko zamisliti, ali storimo dovolj za prepoznavnost naše matematike v svetu. Ali naj zgodovino matematike pišejo le t. i. veliki narodi v t. i. velikih jezikih, ali pa se bomo končno zavedeli tudi pomembnosti promoviranja dosežkov naših matematikov v svetu, prav tako pa tudi vrednosti ohranjanja in razvijanja lastnega znanstvenega jezika? Zgodovina razvoja števil, kot je predstavljena v Corryjevi knjigi, nas namreč tudi opominja, da nikoli ni bilo ene same globalne matematike, enake pri vseh kulturah, in da so dragocene in vredne posebne pozornosti prav lokalne posebnosti v načinu mišljenja, ki jih pomembno omogočajo prav različni jeziki, v katerih je ubesedena matematična misel. Vsak jezik namreč odpre novo alejo razmišljanja, podobno kot nov matematični koncept omogoči nove raziskave in opustitev starih dogem – tako je npr. Hamiltonovo odkritje kvaternionov leta 1843 pokazalo, da množenje ni vselej komutativno!

Knjiga *Kratka zgodovina števil* bralcu poleg pregleda razvoja števil, ki se v podobnem kritičnem tonu do uveljavljenih, a ne dovolj reflektiranih pogledov v zgodovini matematike razteza vse do začetka 20. stoletja, ponuja številna izhodišča za razmišljanje o matematiki preteklosti in sedanjosti ter vlogi, ki je odrejena matematiki v današnji orwellowski družbi, ki človeka vse bolj reducira na številko v računalniku – kar je morda le še ena od številnih slepih ulic uporabe in razumevanja števil v kratki zgodovini človeštva!

Čeprav se je avtor zavestno omejil na zgodovino števil v okviru evropske matematike, ta odločitev morda ni bila najboljša; zgodba bi bila veliko zanimivejša in tehtnejša, če bi vključevala tudi poročilo o razvoju števil v okviru drugih starih civilizacij in kultur.

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2016
Letnik 63, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Slika na naslovnici je nastala med prvim feminističnim tednom na Fakulteti za matematiko in fiziko UL (april 2015), ki je bil posvečen Emmy Noether in ga je organiziralo študentsko društvo Iskra. Na sliki so upodobljene Emmy Noether (nemška matematičarka, delovala na področju abstraktne algebre), Simone de Beauvoir (francoska filozofinja, poleg književnosti študirala tudi matematiko), Sofia Kovalevskaja (ruska matematičarka, ukvarjala se je s parcialnimi diferencialnimi enačbami), Marie Curie (poljska fizičarka in kemičarka, prva ženska, ki je prejela Nobelovo nagrado) in Angela Piskernik (botaničarka, prva Slovenka z doktoratom iz naravoslovja). Portretiranke so naravoslovke, ki so s svojim delom zaznamovale svoja raziskovalna področja. Za upodobitev samih žensk smo se odločili, saj so še zmeraj prepogosto zapostavljene in njihovi doprinosi k razvoju, posebej na naravoslovnih področjih, pogosto pozabljeni oziroma se jim ne da zadostne teže in pozornosti. Avtorice slike: Polona Drobnič, Martina Jurak in Nana Wolke.