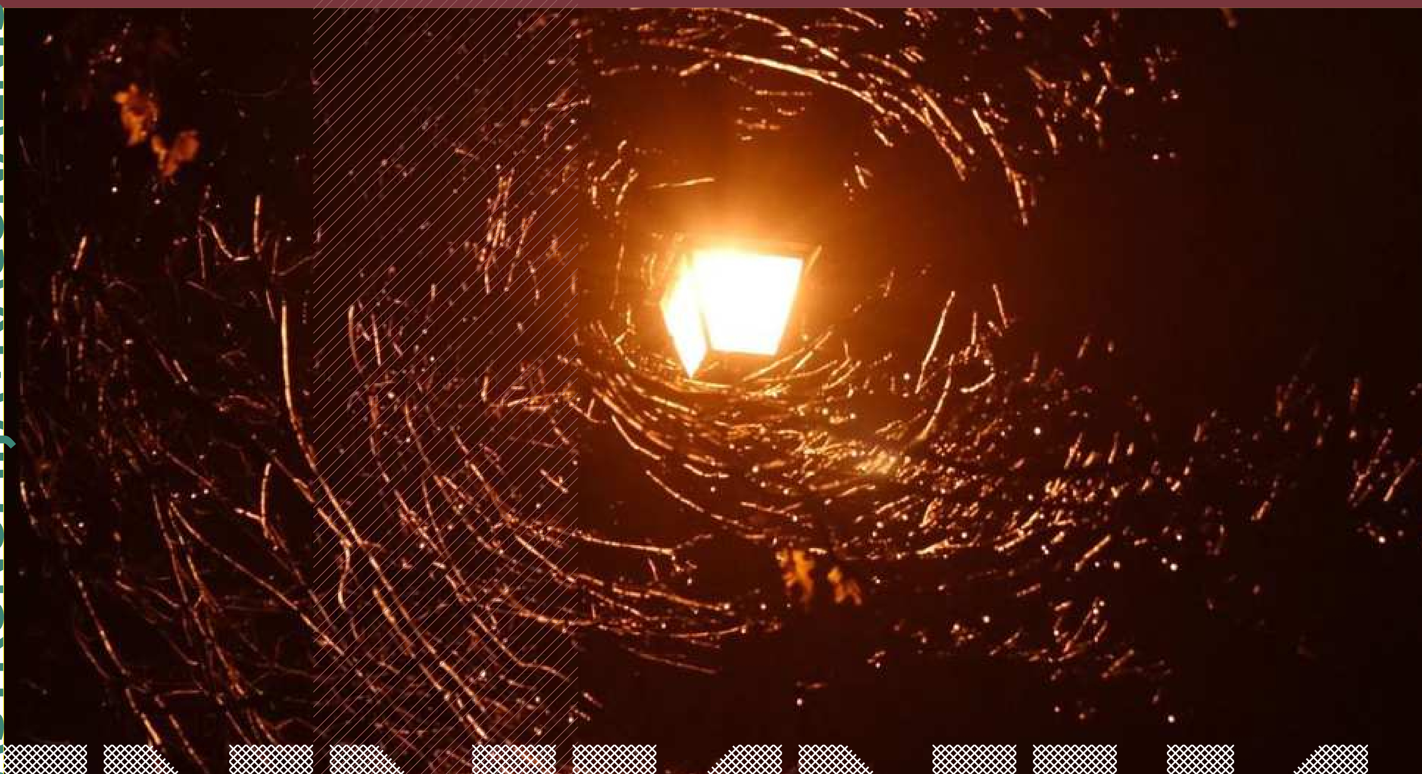
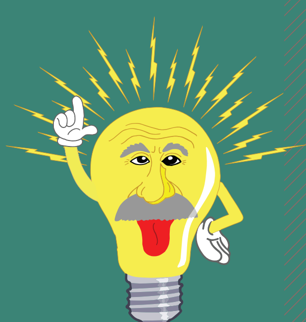
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

4

PRESEK LETNIK 45 (2017/2018) ŠTEVILKA 4



PRESEK



- APOLONIJEV PROBLEM
- PO SLEDI NEKE NEENAKOSTI
- LED SIJALKE
- MAGNETNE DOMENE V ŽELEZU
- TRI O ZEMLJI IN LUNI
- KONVEKSNA OVOJNICA

ISSN 0351-6652

9 770351 665548

MATEMATIČNI TRENUTKI

Uveljavljanje nestandardnih valut

Veliko finančnih transakcij je izvedenih preko spleta, večina jih poteka v uveljavljenih valutah. Bitcoin pa je primer kriptovalute, to je, sistema digitalnega plačila, ki obstaja le v elektronski obliki. Pri plačilu je zagotovljena anonimnost kupca. Nad plačili nimata nadzora niti centralna banka niti oblast. Sistem plačil temelji na mreži deljenih računalnikov, ki izvedejo in preverijo vsako transakcijo. Transakcije so zakodirane s pomočjo matematičnih formul in zapisane v elektronsko glavno knjigo, ki temelji na tehnologiji veriženja blokov, v angleščini blockchain. Glavna knjiga povezuje transakcije in zagotavlja, da uporabnik z istim denarjem ne more izvesti dveh plačil. Čeprav se bitcoini na prvi pogled zdijo manj varni od običajnih valut, so manj ranljivi za ponarejanje in kraje, če le uporabnik pazljivo ravna z gesli, ki so povezana z enotami kriptovalute.

Tehnologija veriženja blokov ima več možnih uporab, ena od njih je dostava. Trenutno je z vodenjem dokumentov o plačilih davkov in carine zelo veliko stroškov, ki so včasih primerljivi s ceno dostavljenega izdelka. Dokumenti na papirju se lahko tudi izgubijo ali ponaredijo. Matematične metode, ki sestavljajo tehnologijo, vsebujejo javni in zasebni ključ, ki ga je zelo težko razvozlati, in so zelo računsko kompleksne. Tako pošiljatelju zagotavljajo sledenje pošiljke in sprotno varno digitalno dokumentacijo. Ta tehnologija ni dobrodošla samo za velike kooperacije. Na primer, nekateri begunci, ki si zaradi razumljivih razlogov ne želijo razkriti svoje identitete oblastem, so si že oblikovali elektronsko identiteto, ki je zapisana s pomočjo veriženja blokov. S tem omogočijo ločenim članom družine najprej elektronsko povezavo, nato pa še fizično združitev, pri tem pa ne tvegajo težav z morebitno sovražno politiko oblasti.

Kogar tema bolj zanima, si lahko prebere prispevek *Bitcoins Maybe; Blockchains Likely*, ki sta ga v reviji American Scientist konec leta 2017 objavila Peter J. Denning in Ted G. Lewis.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 4

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Veje drevesa, ki obdajajo ulično svetilko, so na videz razporejene v krogih s središčem v svetilki. Zakaj, je opisano v rubriki Naravoslovna fotografija. (Vir in avtorska pravica: Gorazd Planinšič)

Apolonijev problem[1]

Petra Podlogar, Tamara Pogačar, Ana Štuhec
Mentorica: Tatiana Elisabet Sušnik

Za dane tri krožnice smo želeli konstruirati še eno, ki bi se dotikala vseh treh hkrati. Za rešitev tega problema smo spoznali invertiranje čez krožnico, uporabili pa smo tudi program GeoGebra, v katerem smo za boljšo predstavitev problematike rešitev tudi konstruirali.

Uvod

Marsovski vesoljski ladji se je na vzhodni medgalaktični obvoznici pokvarila navigacijska naprava in strmoglavila je neznano kam v Bermudski trikotnik. Iznajdljivi Marsovci so na hipernetu uspeli poiskati zemljevid območja in izbrskati, da se na Bermudskih otokih, Portoriku in obali Floride nahajajo trije svetilniki, ki sinhrono oddajajo signal. Kako se bodo opremljeni z zemljevidom, podatkih o časovnih razlikah med prispelimi signali in matematičnim znanjem rešili iz zagate?

Strmoglavljenci so se iskanja položaja lotili z geometrijo. Vedeli so, da je hiperbola množica točk, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj od dveh izbranih točk konstantna. Iz časovnih razlik v prejemu signalov so za vsak par svetilnikov izračunali razliko med razdaljama od njihovega nahajališča do posameznega svetilnika. Na zemljevidu so nato želeli narisati hiperbole z gorišči na mestu svetilnikov in konstantno razliko razdalj, ki ustreza razlikam med razdaljami do svetilnikov, ter poiskati njihovo presečišče (ki predstavlja lego Marsovcev). A kaj več od šestila in geotrikotnika med razbitinami niso našli. Newton jim je prišepnil, da se je z ekvivalentnim geometrijskim problemom ukvarjal Apolonij. Seveda smo jim tudi zemeljski MaRSovci priskočili na pomoč.

[1]Članek je nastal na poletnem taboru MaRS 2016 (Matematično Raziskovalno Srečanje za srednješolce).

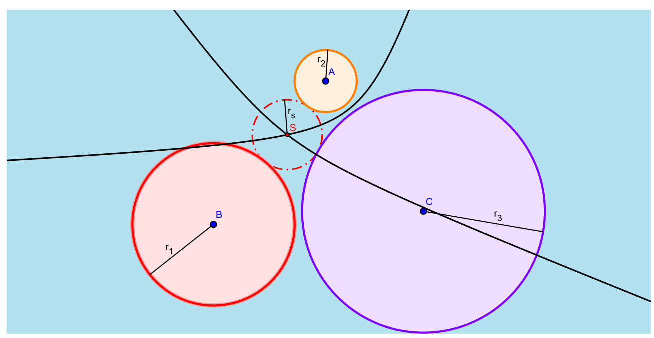
Apolonijeva krožnica

Apolonij iz Perge je v 3. stoletju pr. n. št. formuliral in rešil sledeči problem:

Problem. Načrtaj vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane krožnice v ravnini.

Kako sta Apolonijev problem in težave Marsovcev sploh povezana?

Recimo, da je razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika B enaka x ter razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika C enaka y. Ladja S je od točke A oddaljena za $r_s + r_2$, od točke B za $r_s + r_1$ in od točke C za $r_s + r_3$ (slika 1). Torej je razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika B enaka $r_1 - r_2 = x$ ter razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika C enaka



SLIKA 1.
Slika prikazuje oba načina iskanja lege Marsovcev. Ti se nahajajo na presečišču dveh hiperbol, ki je hkrati središče krožnice; ta je rešitev Apolonijevega problema.

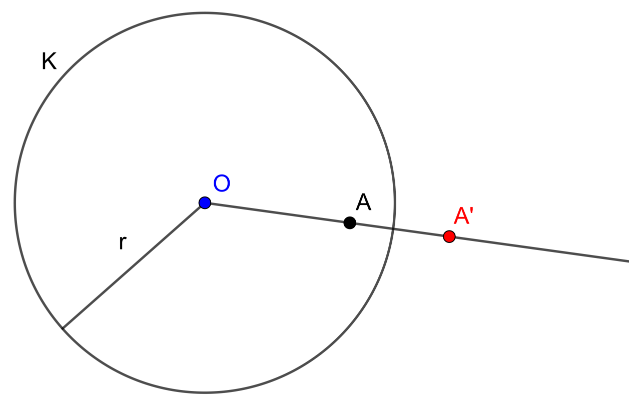
$r_3 - r_2 = y$. Izberemo poljubni r_2 in na zemljevidu narišemo krožnice s središči v svetilnikih in polmeri $r_1 = x + r_2$, r_2 in $r_3 = y + r_2$. Točka, kjer se nahajajo Marsovci, je središče krožnice, ki je tangentna na vse tri krožnice s središči v svetilnikih.

V zgodovini so se matematiki (in obupani brodolomci) naloge lotevali na različne načine; med drugim s hiperbolami, nekateri pa algebraično. Mi smo se konstrukcije krožnice lotili z inverzijo. Poglejmo si, kaj je inverzija.

Definicija. Inverzna točka točke A glede na krožnico K s središčem O in polmerom r je točka A', ki leži na poltraku OA tako, da velja

- $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

Na sliki 2 vidimo inverz točke A glede na krožnico K. Posebnost je središče O, katerega sliko nam definicija ne poda. Po dogovoru se preslika v neskončnost (in točka v neskončnosti v središče O).



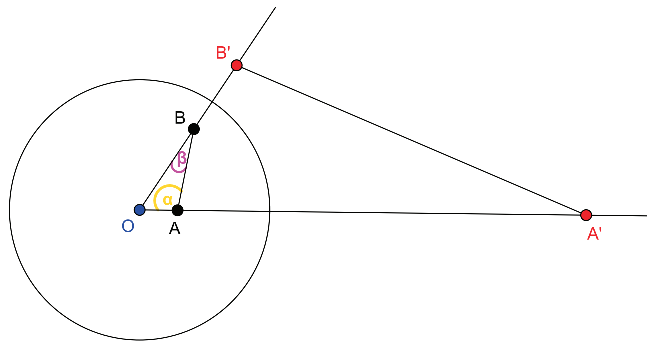
SLIKA 2.
Inverzna točka točke A

Navedimo nekaj lastnosti inverzije. Inverzija ohranja kote in preslika iz notranjosti krožnice K v njeno zunanjost (in iz zunanjosti v njeno notranjost).

Preslikava preslika

- točko, ki se nahaja na krožnici K, samo vase;
- premico, ki ne gre skozi središče O, v krožnico, ki poteka skozi središče O;
- premico, ki gre skozi središče O, samo vase;
- krožnico, ki gre skozi središče O, v premico;
- krožnico, ki ne gre skozi središče O, pa v krožnico.

Poglejmo si dokaz lastnosti ohranjanja kotov: Izberimo dve točki A in B. V trikotniku OAB označimo z α kot z vrhom v točki A in z β kot z vrhom v točki B. Narišimo še točki A' in B', ki sta inverzni točki točk A in B (slika 3).



SLIKA 3.
Točki A in B, pripadajoča kota in inverzni točki

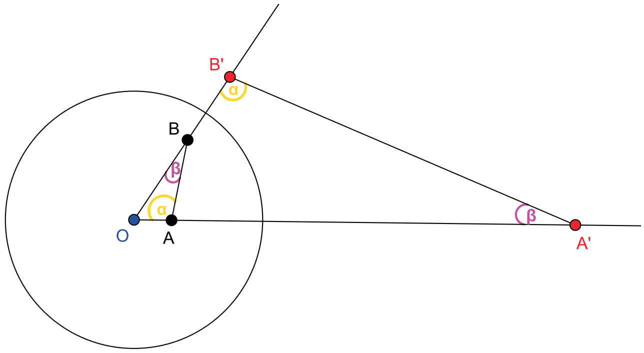
Oglejmo si trikotnik $OA'B'$. Vemo, da velja $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ in $|OB| \cdot |OB'| = r^2$, torej velja $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ ali drugače zapisano

- $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|OB'|}{|OA'|}$.

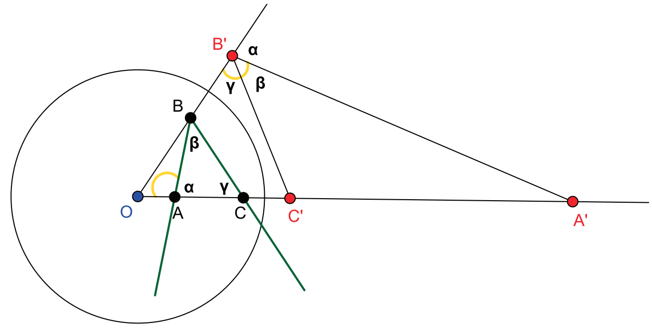
Izrek o podobnosti trikotnikov pravi, da sta si dana trikotnika podobna, če se ujemata v razmerju dveh stranic in kotu med njima. Ker je kot z vrhom v točki O trikotnikoma OAB in $OA'B'$ skupen, iz zgornjega razmerja sledi, da sta si trikotnika OAB in $OB'A'$ podobna. Kot z vrhom v točki A' je torej enak β, kot z vrhom v točki B' pa je enak α (slika 4).

Vzemimo zdaj kot, katerega krak ne prečka središča krožnice. Označimo vrh kota z B in po eno točko na vsakem kraku z A in C ter njihove inverzne točke B', A' in C' (slika 5).

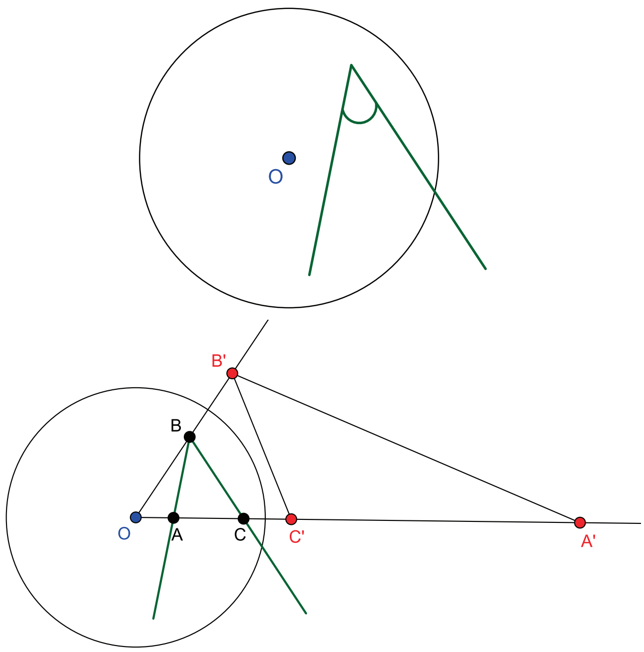
Označimo kote v trikotniku ABC z α, β in γ. Iz prvega dela dokaza sledi, da je kot $OB'C'$ enak γ, zunanji kot kota $OB'A'$ pa je enak α (slika 6). Ker je vsota kotov v trikotniku enaka iztegnjenemu kotu, sledi, da je kot $C'B'A'$ enak β; torej inverzija res ohranja kote.



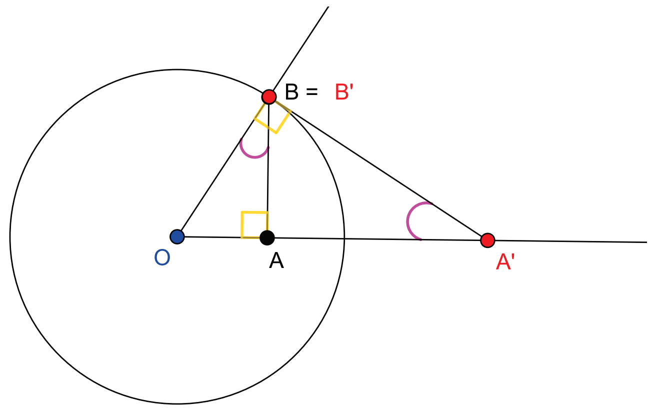
SLIKA 4.
Trikotnika OAB in $OB'A'$ sta si podobna.



SLIKA 6.
Pari skladnih kotov v začetni in inverzni sliki



SLIKA 5.
Opazovani kot (zgoraj) in pripadajoče točke, s katerimi si pomagamo pri opazovanju kota (spodaj).



SLIKA 7.
Konstrukcija inverzne točke.

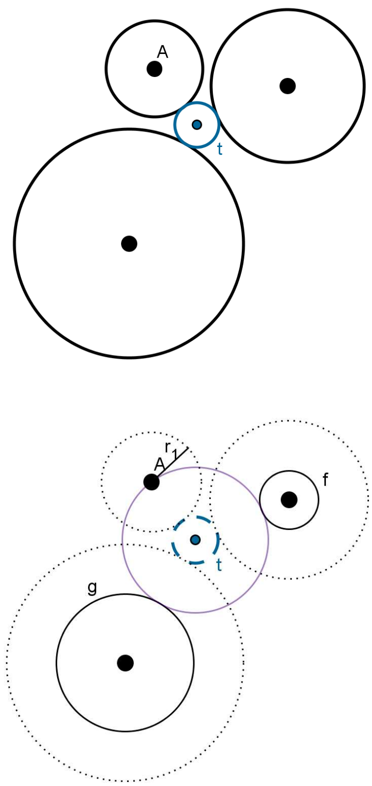
Dokaze preostalih lastnosti lahko bralec najde v [4, poglavje 1].

Oglejmo si še poseben primer slike 4. Kot α naj bo pravi kot, točka B pa naj se nahaja na krožnici K, kot prikazuje slika 7. Slika nam pravzaprav prikazuje zamisel, kako skonstruiramo inverzno točko A' točke A. Kakšen je torej postopek konstrukcije? Najprej narišemo poltrak OA, nato pa pravokotnico na poltrak skozi točko A. V točki, v kateri pravokotnica seka krožnico K, narišemo tangento na K. Presečišče tangente in poltraka OA je inverzna točka A'.

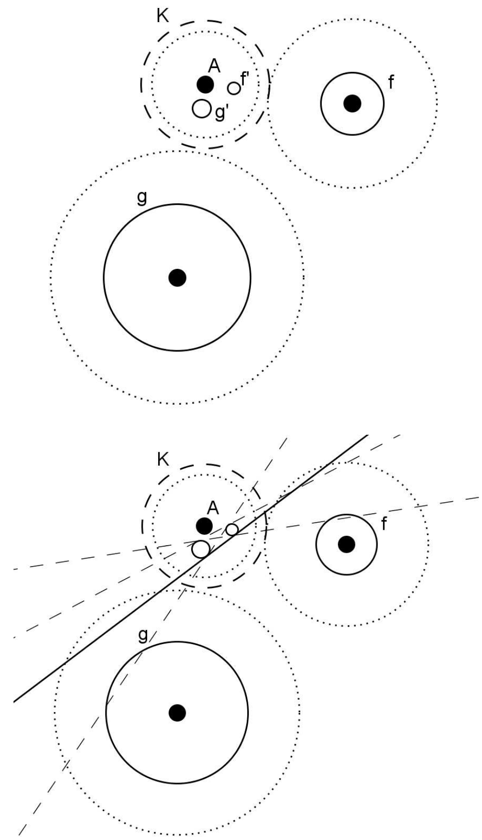
Opremljeni z novim znanjem se lahko zdaj lotimo reševanja našega problema (in brodolomcev).

Rešitev problema. Iskanja rešitve se lotimo po korakih:

(i) Posamezno krožnico zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. S tem najmanjšo krožnico zmanjšamo v točko, ki jo označimo z A, namesto drugih dveh krožnic pa imamo zdaj dve manjši krožnici, ki ju poimenujemo f in g. Krožnica, ki se do-



SLIKA 8.
Zgoraj: Začetne krožnice in rešitev Apolonijevega problema (modra krožnica t). Spodaj: Začetne in zmanjšane krožnice ter rešitev začetnega in poenostavljenega problema.



SLIKA 9.
Zgoraj: Inverzija krožnic f in g preko krožnice K. Spodaj: Skupne tangente krožnic f' in g'.

tika krožnic f in g ter gre skozi točko A, ima središče v isti točki kot rešitev našega problema, polmer pa ima za r_1 večji. S tem smo problem poenostavili na iskanje krožnice, ki se dotika dveh krožnic in gre skozi dano točko (slika 8).

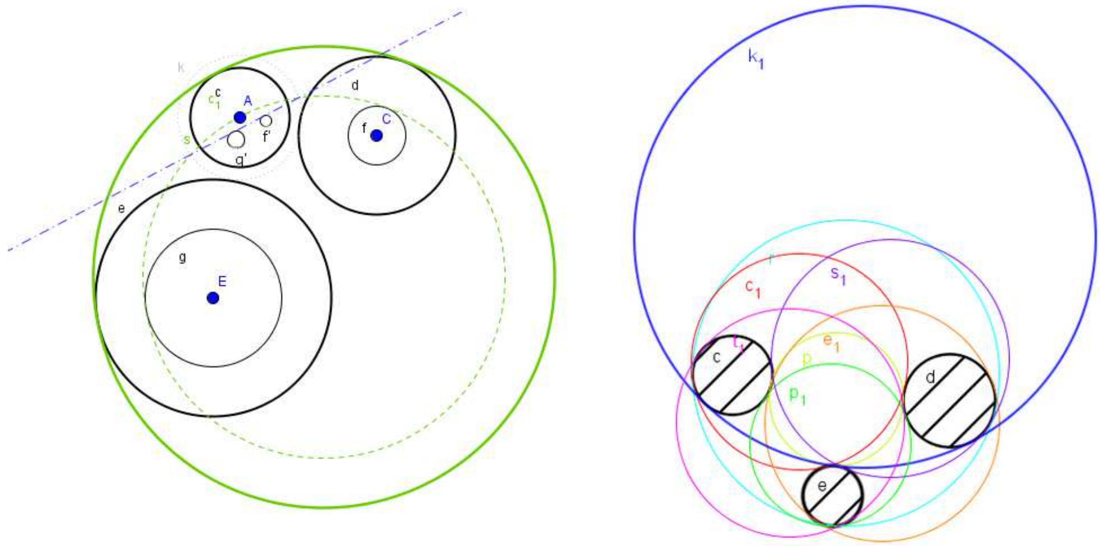
(ii) Preko krožnice K s središčem v točki A in poljubnim polmerom invertiramo krožnici f in g ter točko A. Sliki krožnic f in g sta krožnici, ki ju označimo f' in g', slika točke A pa je točka v neskončnosti. Krožnica, ki reši poenostavljen problem, poteka skozi točko A, ki smo jo izbrali za središče inverzije, zato je njena slika premica. Ker se ta krožnica dotika krožnic f in g, se njena slika dotika krožnic f' in g', torej mora biti skupna tangenta f' in g' (slika 9 spodaj).

(iii) Na invertirani krožnici q' in f' narišemo skupno tangento. Možne tangente so štiri, izbrali pa bomo tisto, ki se krožnic q' in f' dotika na zunanji strani glede na središče krožnice K [2] (slika 9 spodaj).

(iv) Tangento invertiramo preko krožnice K. Slika tangente je krožnica, ki se dotika krožnic f in g ter poteka skozi točko A.

(v) Dobljeno krožnico nato zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Tako dobimo krožnico t, ki je rešitev začetnega problema.

[2] Če bi izbrali tangento, ki se krožnic q' in f' dotika na notranji strani glede na središče krožnice K, bi dobili drugo rešitev. Premislite lahko, zakaj preostali dve tangenti v tem primeru ne dasta rešitve.



SLIKA 10.
Možne rešitve Apolonijevega problema za tri krožnice

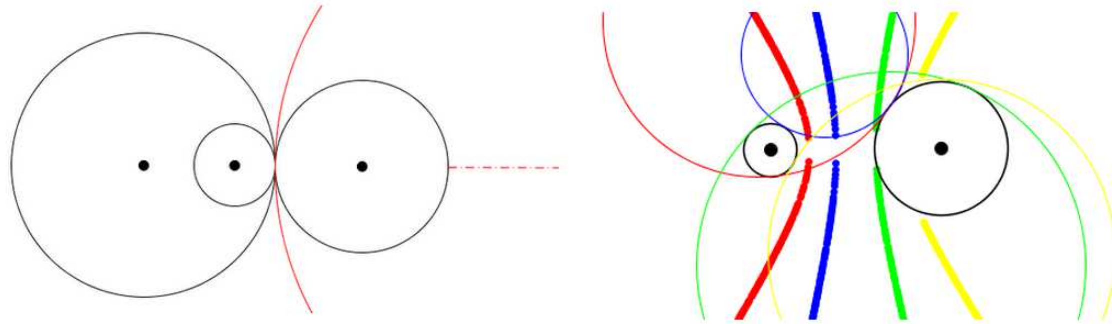
Marsovci so tako sporočili, kam jih lahko MaRSovci pridemo iskat. Po uspešni reševalni akciji smo se skupaj usedli za mizo in vneto premlevali, če je za dani problem na voljo več rešitev. Ugotovili smo, da ima problem osem rešitev.

Preostale rešitve problema. V koraku (iii) konstrukcije rešitve lahko na invertirani krožnici g in f narišemo skupno tangento, ki se krožnic q' in f' dotika na *notranji* strani glede na središče krožnice K. Tangento invertiramo preko krožnice K in dobljeno krožnico povečamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Tako dobljena krožnica je druga rešitev Apolonijevega problema, ki prvotne krožnice zaobjame v svoji notranjosti. Možnih je nadaljnih šest rešitev, ki se prvotnih krožnic dotikajo izmenično na zunanji ali notranji strani. Konstrukcije teh rešitev se razlikujejo v tem, da v koraku (i) v rešitvi problema ne zmanjšamo vseh treh krožnic, temveč eno ali obe izmed večjih dveh krožnic povečamo za polmer r_1 in v izbiri tangente v koraku (iii) (slika 10).

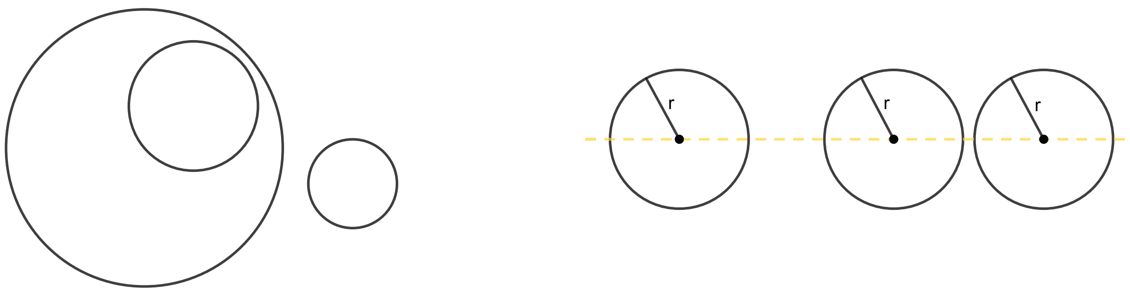
Število možnih rešitev je v splošnem osem, vendar je to odvisno od razporeditve objektov v ravnini. V nekaterih primerih je tako mogoče dobiti neskončno rešitev. Predstavimo jih nekaj:

- Tri krožnice, ki sovpadajo. Izberemo lahko poljubno točko, skozi katero načrtamo krožnico, katere polmer naj bo razdalja od krožnice do točke. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev.
- Tri poljubne krožnice, ki se stikajo v eni točki, pri čemer mora vsaj ena ležati znotraj druge. Za središče rešitve si izberemo poljubno točko na premici, ki povezuje središča krožnic. Rešitvena krožnica poteka skozi dotikališče krožnic. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev (slika 11 levo).
- Dve poljubni krožnici, ki sovpadata, ter ena, ki leži zunaj njiju in se ju ne dotika. Središči krožnic sta gorišči hiperbol, ki imata stalno razliko razdalj do gorišč enako vsoti oz. razliki polmerov danih krožnic. Tako dobimo dve hiperboli, na katerih ležijo središča krožnic, ki so rešitve tega primera (slika 11 desno).

Po drugi strani pa problem nima rešitve, kadar so središča enako velikih krožnic, ki se ne stikajo, kolinearna. Druga možnost, kjer rešitev ni, je, kadar ena krožnica leži v notranjosti druge in se krožnice ne dotikajo (slika 12).



SLIKA 11.
Primera s neskončno rešitvami. Na levi je množica vseh središč rešitev Apolonijevega problema premica na desni pa središča rešitev ležijo na hiperbolah.



SLIKA 12.
Primera, kjer rešitve ni.

Zaključek

Skonstruirali smo rešitev Apolonijevega problema, premislili, koliko različnih rešitev ima problem v splošnem primeru, in našli nekaj posebnih primerov z neskončno rešitvami in brez rešitev. V tem trenutku se nam lahko porodi vprašanje, kako bi rešili t. i. posplošeni Apolonijev problem, ki nas sprašuje, kako poiskati vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane objekte v ravnini, pri čemer so ti objekti lahko točka, premica ali krožnica. Če vas je Apolonijev problem pritegnil, lahko sami poskusite rešiti še posplošeni problem.

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

Literatura

[1] Wikipedia (2016), *Problem of Apollonius*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius`, ogled 17. 8. 2016.

[2] J. Cox in M. B. Partensky, *Spatial Localization Problem and the Circle of Apollonius*, 2009, dostopno na `arxiv.org/ftp/physics/papers/0701/0701146.pdf`, ogled 17. 8. 2016.

[3] M. Hladnik, *Grška matematika po Evklidu*, 2012, dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Arhimed(b).pdf`, ogled 17. 8. 2016.

[4] K. Kozai in S. Libeskind, *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry*, 2009, dostopno na `jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf`, ogled 17. 8. 2016.

× × ×

Po sledi neke neenakosti

Marija D. Milošević

Na pripravah za tekmovanje iz matematike so Zoran, Irena, Marjan in Zdenka reševali naslednjo nalogo:

Dokaži, da za $a > b > 0$ velja naslednja neenakost:

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b. \tag{1}$$

Zoranova rešitev. Iz pogoja naloge $a > b$ sledi $a - b > 0$. Z množenjem te neenakosti z $\frac{a}{b}$ in z $\frac{b}{a}$ dobimo $\frac{a^2}{b} - a > 0$ in $b - \frac{b^2}{a} > 0$. Če seštejemo ti dve neenakosti, dobimo $\frac{a^2}{b} - a + b - \frac{b^2}{a} > 0$, od koder sledi iskana neenakost (1).

Irenina rešitev. Zaradi $a > b$ je $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ oz. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$. Če to neenakost pomnožimo z $a^2 + b^2$, dobimo $\frac{a^2+b^2}{b} - \frac{a^2+b^2}{a} > 0$ ali $\frac{a^2}{b} + b - a - \frac{b^2}{a} > 0$ oz. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b$, tj. (1).

Marjanova rešitev. Pogoj $a > b$ nam da $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Z množenjem te neenakosti po vrsti z a^2 in b^2 dobimo $\frac{a^2}{b} > a$ in $b > \frac{b^2}{a}$. Če seštejemo ti dve neenakosti, dobimo $\frac{a^2}{b} + b > a + \frac{b^2}{a}$, od tod pa je $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} > a - b$.

Zdenkina rešitev. Iz $a > b$ sledi $a - b > 0$. Potem je $(a - b)(a^2 + b^2) > 0$ in od tod $a^3 - b^3 - a^2b + ab^2 > 0$, ali $a^3 - b^3 > ab(a - b)$. Z deljenjem zadnje neenakosti z ab dobimo $\frac{a^3-b^3}{ab} > a - b$, od tod pa končno sledi neenakost (1).

Poglejmo, če je neenakost (1) mogoče še izboljšati. Za $a \geq b > 0$ velja bolj natančna neenakost

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \geq a - b. \tag{2}$$

Rešitev. Iz neenakosti $(a - b)^2 \geq 0$ sledi $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$. Če to neenakost pomnožimo z $a - b \geq 0$, dobimo $(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geq 3ab(a - b)$, tj. $a^3 - b^3 \geq 3ab(a - b)$. Po deljenju z $3ab$ sledi $\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \geq a - b$, (za $a \geq b > 0$), kar je bilo treba dokazati.

Naloge za samostojno delo

- Za pozitivni števili a in b dokaži naslednji neenakosti:
  - $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$;
  - $\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{b} - \frac{b^3}{a}\right) \geq a^2 - b^2$, za $a \geq b$.
- Dokaži, da za pozitivni števili a in b velja naslednja neenakost $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) \geq \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

× × ×

Rešitvi nalog iz prejšnje številke

Marko Razpet

1. Za peterico

$$(2n, 2n+1, 2n+2, 6n^2+6n+2, 6n^2+6n+3)\,, \tag{1}$$

ki ima očitno za vsako naravno število n naravne koordinate, moramo preveriti enakost

$$(2n)^2 + (2n+1)^2 + (2n+2)^2 + (6n^2+6n+2)^2 = (6n^2+6n+3)^2\,. \tag{2}$$

Spomniti se je treba, da je kvadrat tročlenika enak vsoti kvadratov posameznih njegovih členov in vseh dvakratnih produktov po dva člena. Račun poteka tako:

$$4n^2 + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 8n + 4) + (36n^4 + 36n^2 + 4 + 72n^3 + 24n^2 + 24n) = \\ = 36n^4 + 36n^2 + 9 + 72n^3 + 36n^2 + 36n = (6n^2 + 6n + 3)^2 .$$

S tem je enakost (2) preverjena.

Največja je peta koordinata $6n^2 + 6n + 3$, ki ne presega 100 samo za $n = 1, 2, 3$. Tedaj dobimo pitagorejske peterice:

$$(2, 3, 4, 14, 15), \ (4, 5, 6, 38, 39), \ (6, 7, 8, 74, 75) .$$

Opomba.

Z uporabo peterice (1) ne dobimo vseh pitagorejskih peteric. Pitagorejske peterice $(2, 4, 6, 13, 15)$, npr. ni med njimi.

2. Uporabimo enakost $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ in dobimo:

$$6^2 - 5^2 = (6 - 5)(6 + 5) = 1 \cdot 11 = 11,$$
$$56^2 - 45^2 = (56 - 45)(56 + 45) = 11 \cdot 101 = 1111,$$
$$556^2 - 445^2 = (556 - 445)(556 + 445) = 111 \cdot 1001 = 111111,$$
$$5556^2 - 4445^2 = (5556 - 4445)(5556 + 4445) = 1111 \cdot 10001 = 11111111.$$

Predvidevamo, da velja enakost

$$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2} . \qquad (3)$$

Če hočemo (3) zares izpeljati, ne le uganiti, se moramo spomniti, kaj desetiški mestni zapis števil sploh pomeni. Primer: 1949 je le krajši zapis števila $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9$. Brez težav pa lahko krajše izrazimo vsoto $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, kjer je q poljubno število, ki ni enako 1, n pa poljubno naravno število. Ker je $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$, dobimo S_n iz enačbe $qS_n = S_n + (q^{n+1} - 1)$:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} .$$

V posebnem primeru $q = 10$ je

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1) . \qquad (4)$$

Enakost (3) lahko sedaj z uporabo mestnega zapisa in (4) preverimo tako:

$$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 =$$
$$= (\underbrace{55\ldots5}_{n}6 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5)(\underbrace{55\ldots5}_{n}6 + \underbrace{44\ldots4}_{n}5) =$$
$$= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n}1 =$$
$$= (10^n + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 1) =$$
$$= \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1) =$$
$$= \frac{1}{9}((10^{n+1})^2 - 1) = \frac{1}{9}(10^{2n+2} - 1) =$$
$$= 1 + 10 + \ldots + 10^{2n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2} .$$

×××

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.
Bitcoin je primer kriptovalute, to je, sistema digitalnega plačila, ki obstaja le v elektronski obliki. Več lahko izveste v matematičnem trenutku na strani 2.

×××

Led sijalke

Peter Legiša

Napajalniki in utripanje

Svetleče diode (angleško LED, *light emitting diode*) so polprevodniški elementi. Kot druge diode prepuščajo tok le v eni smeri; ampak, kot ime pove, LED pri tem oddajajo svetlobo.

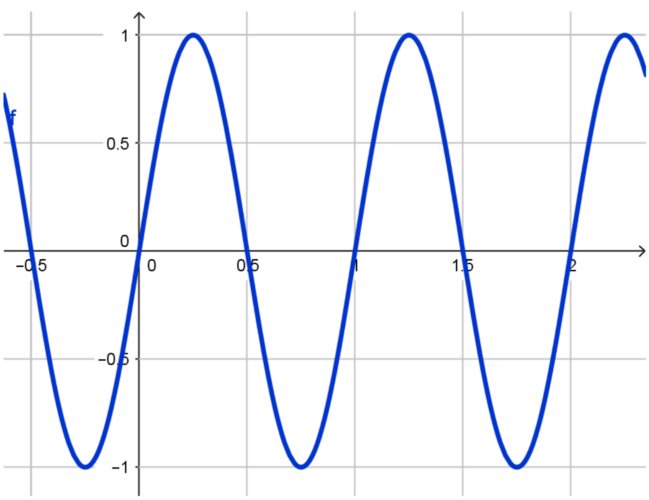
Če na diodo, ki prepušča tok le v eni smeri, priključimo izmenično napetost $U(t)$, pride skoznjo idealizirana napetost $U^+(t)$. Ta je enaka $U(t)$, kadar je $U(t) \geq 0$, in enaka 0, kadar je $U(t) < 0$. Pravimo, da je U^+ *pozitivni del* funkcije U. Če je U periodična, ima U^+ enako periodo kot U. (V resnici dioda potrebuje neko minimalno napetost, da začne prevajati.)

Na sliki 1 je $U(t) = \sin(2\pi t)$. Za ta primer imamo na sliki 2 narisan graf za U^+. V praksi tak preprost *polvalni usmernik* uporabljamo le redko, za kaka nezahtevna opravila. Svetleče diode praktično trenutno reagirajo na spremembe toka. Če LED priključimo neposredno na izmenično napetost, bo svetila le takrat, ko bo napetost pravega predznaka (in dovolj velika), sicer pa bo temna. Svetloba bo torej zelo močno utripala s frekvenco priključne napetosti. Najcenejše LED verige, ki jih obešajo za praznike, so sestavljene iz velikega števila zaporedno vezanih diod (in morda še upornika za omejitev toka), neposredno priključenih na omrežno napetost. Posledično taka veriga zelo močno utripa s frekvenco 50 Hz. To je vidno zlasti, če se verige premikajo v vetru ali če jih oplazimo s pogledom. V povprečju je taka veriga več kot pol časa temna. Tudi zaradi varnosti odsvetujemo nakup in uporabo takih izdelkov. (Še bolj nevarne in zelo potratne so verige z zaporedno vezanimi klasičnimi žarnicami ali halogenkami, pri katerih lahko nastanejo visoke temperature.)

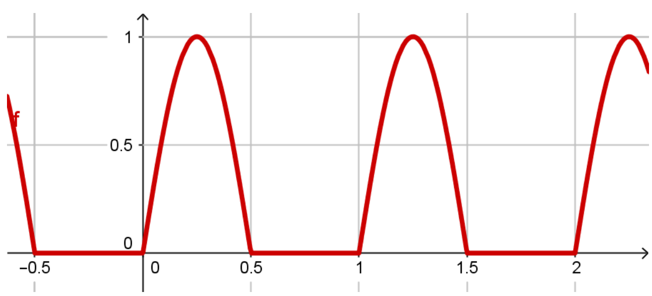
Z malo bolj zapletenim »mostičnim« vezjem s štirimi diodami (angleško *bridge rectifier*) – glejte recimo [1] – dobimo t. i. *polnovalni usmernik*, ki nam daje na izhodu idealizirano napetost $V(t) = |U(t)|$. Velja:

- $U(t) + |U(t)| = 2U^+(t)$.

Na sliki 3 imamo narisan graf za V, če je $U(t) = \sin(2\pi t)$. Če je $U(t) = \sin(2\pi\nu t)$, se pravi, ima frekvenco ν, ima V pol krajšo periodo in frekvenco 2ν. V našem omrežju imamo napetost s frekvenco



SLIKA 1.
Sinusna izmenična napetost $U(t) = \sin(2\pi t)$



SLIKA 2.
Pozitivni del funkcije $U(t) = \sin(2\pi t)$

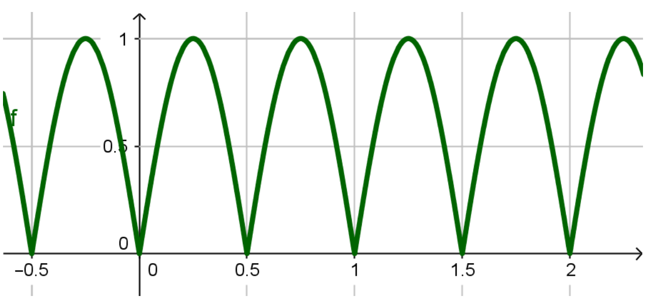
50 Hz. Torej enosmerna napetost iz polnovalnega usmernika niha s 100 Hz in stokrat na sekundo pade na vrednost 0. Smiselno je svetlečo diodo priključiti na tak usmernik. Pred usmernikom potrebujemo navadno še transformator, ki zniža napetost; kombinacija obojega je najpreprostejši *napajalnik*. Prej smo omenili LED verige. Danes za zmerno ceno dobimo take verige, pri katerih so posamezni elementi vezani vzporedno na polnovalni napajalnik. To pomeni zaradi nizke napetosti v verigi bistveno večjo varnost.

Napajalnik je lahko kot zgoraj skupen za več sijalk ali pa vgrajen v okov sijalke. Če polnovalni napajalnik usmerjenega toka ne gladi, svetlobni tok stokrat na sekundo pade praktično na nič (glejte tudi [2]). Taka razsvetljava torej spominja na stroboskop s frekvenco 100 Hz in je nevarna v bližini strojev. (Če recimo šivalni stroj deluje s 100 vbodi na sekundo, je ob vsakem zaporednem svetlobnem impulzu igla na istem mestu in je tako videti, kot da stroj stoji. Podobni problemi lahko nastopijo pri vrtečih se napravah.) Čeprav tega utripanja večina ne zazna neposredno, določenemu delu populacije predstavlja težave. Tako utripanje ni primerno za pisarne, učilnice.

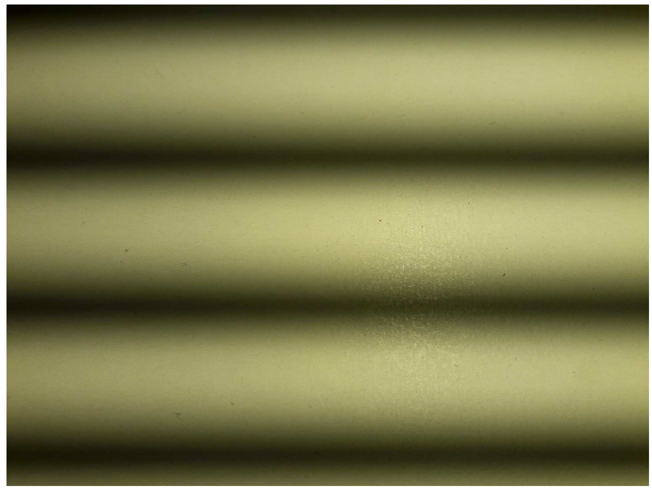
Dobri napajalniki zgladijo tok in dobimo praktično konstantno svetlobo, bolj stalno kot klasična ali halogenska žarnica.

Za glajenje toka uporabljamo kondenzatorje ali pa bolj zapletena vezja, ki tudi vsebujejo kondenzatorje. Elektrolitski kondenzatorji pa so najbolj pokvarljivi del elektronike. To je eden od razlogov, zakaj nekateri izpuščajo glajenje. Drugi je ta, da se pri glajenju izgubi nekaj energije. Vendar se da, kot zatrjujejo, izgube pri glajenju zmanjšati na nekaj (3–5) odstotkov, ne da bi to bistveno podražilo sijalko. Boljši kondenzatorji so fizično večji, zato predstavljajo problem pri miniaturizaciji.

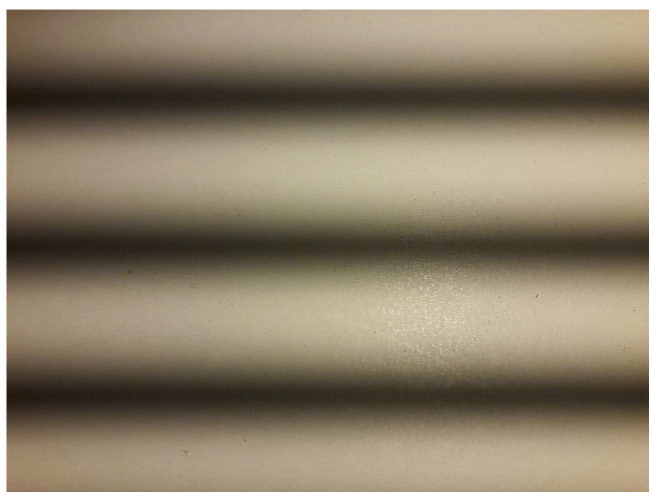
LED sijalke znanih znamk navadno nimajo večjih težav z utripanjem, čeprav nekatere v tem pogledu niso idealne. Drugače pa je s cenenimi izdelki.



SLIKA 3.
Funkcija V je absolutna vrednost funkcije $U(t) = \sin(2\pi t)$.



SLIKA 4.
Utripanje svetlobe pri ceneni LED sijalki 4 W, 3000 K



SLIKA 5.
Utripanje poceni LED sijalke 3 W, 2700 K

V naši znani internetni trgovini smo kupili dve LED sijalki manj znanih znamk z navojem E27. Prva ima ugodno ceno in daje povsem konstantno svetlobo, ki pa vleče na rumeno-zeleno. Druga, še cenejša, utripa kot za stavo s 100 Hz (posnetek njene svetlobe je na sliki 4). Fotografija je bila posneta s pametnim telefonom, usmerjenim na bel karton, ki smo ga postavili tik zraven sijalke. Vidimo, da svetloba sijalke stokrat na sekundo pade praktično na nič. (Več o fotografiranju utripanja bomo povedali v članku *Žarnice in sijalke*. Uporabljamo efekt zavesnega zaklopa, o katerem je nedavno [3] pisal Presekov urednik dr. Aleš Mohorič. Če izvor svetlobe ni ravno točkast in zelo intenziven, lahko telefon usmerimo neposredno na sijalko in vidimo morebitno utripanje.)

Žal smo zamudili štirinajstdnevni rok, ko lahko stvari, kupljene na daljavo, vrnemo brez razlage. Enako močno utripa poceni LED sijalka iz diskontne trgovine. Njeno utripanje je zabeleženo na sliki 5.

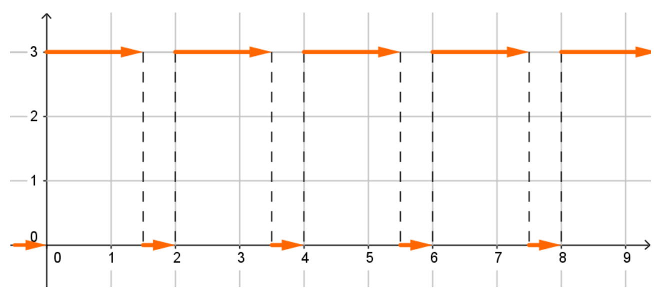
Utripanje svetlobe lahko odkrijete tudi tako, da s svinčnikom ali roko mahate sem ter tja blizu svetila. Če vidite zaporedje zamaknjenih slik, je sum potrjen.

Uporaba in težave

Z LED sijalkami so tudi težave. Pri visokih temperaturah imajo večinoma manjši izkoristek in se lahko pokvarijo. Diode so sicer pritrjene na aluminijast nosilec, ki odvaja toploto. Starejše sijalke so imele večinoma tudi hladilna rebra. Uporaba v svetilkah brez ventilacije je vseeno problematična, če ni poskrbljeno za odvajanje toplote iz svetilke. V takem primeru moramo poiskati LED sijalke, ki bolje prenašajo višje temperature. To lahko piše na deklaraciji ali pa to razberemo iz neodvisnih testov. Prav tako »ledice« ne prenašajo prenapetostnih sunkov. Že mala povečanja napetosti nad normalo lahko povzročijo velike spremembe v toku skozi diodo. Zato imajo navadno vgrajen stabilizator toka – podobno kot fluorescenčne svetilke. O utripanju smo že govorili. Napajalniki nekaterih sijalk oddajajo zvoke. Mnoge sijalke svetijo le v eni smeri. To lahko deloma ugotovimo že iz podobe sijalke. Če je svetleči del omejen le na vrh sijalke, bomo navadno imeli bolj malo svetlobe v smeri od vrha nazaj. Danes lahko dobimo »ledice« s svetlečimi nitkami (filamenti), s prozorno ali le rahlo matirano hruško, ki so zelo podobne klasični žarnici in svetijo skoraj v vse smeri. Primer imamo na sliki 6.

Za zatemnjevanje so primerne le z *dimmable* označene sijalke, in to le z nekaterimi zatemnilnimi stikali (»dimerji«). Ena rešitev je napajalnik z vgrajenim zatemnjevanjem za več sijalk. Uporablja PWM metodo. Kratica pomeni *Puls Width Modulation* ali *pulzna širinska modulacija*. To zveni silno učeno, a gre le za to, da pri zatemnjevanju periodično izključujemo tok. Tako enosmerni tok razsekamo na

SLIKA 6.
LED sijalka z nitkama daje 250 lumnov pri 2 W.



SLIKA 7.
Pulzno širinska modulacija periodično blokira tok skozi porabnik.

pulze. Za večjo zatemnitev skrajšamo širino tokovnih pulzov, tako da so diode dalj časa temne. Na sliki 7 vidimo primer poteka toka. Plošče na steklokeramičnem štedilniku delujejo na pulzno širinsko modulacijo: grelni elementi se v taktu nekaj sekund prižigajo in ugašajo. Podobno je pri indukcijskih ploščah. Na najnižji stopnji je plošča dolgo izključena in le kratek čas vključena.

Da ne občutimo utripanja svetlobe, se morajo pri LED sijalkah cikli prižiganja in ugašanja ponavljati vsaj petstokrat v sekundi. Ker so zatemnjevalniki lahko tudi glasni, nekateri prisegajo na frekvenco 30 kHz, ker zvoka s to frekvenco ne slišimo več. Žal se nekateri proizvajalci zadovoljijo s 100 Hz ali še manj. Primer so zavorne LED luči na nekaterih avtomobilih. Da te luči delujejo kot pozicijske, jih zatemnijo s pulzno metodo, kar pa pri nizkih frekvencah moti druge udeležence v prometu.

Od 16 kupljenih LED sijalk z navojem E27 sta dve začeli migotati v prvi minuti, štiri pa so se pokvarile po nekaj mesecih uporabe. Vsekakor nima smisla kupovati poceni. Testi žal kažejo, da so tudi med dragimi sijalkami črne ovce, ki že po nekaj sto urah svetijo bistveno šibkeje. Mnoge firme dajejo dvo ali štiriletno garancijo, zato spravimo račun. Navadno se napake pokažejo že v prvih nekaj mesecih uporabe.

Nemška potrošniška revija je leta 2011 izbrala deset LED sijalk, ki so se dobro izkazale na nekajmesečnem testu. Pustili so jih prižgane noč in dan šest let. Vmes so vsako približno milijonkrat prižgali in ugasnili. Izbrane sijalke so to brez težav prestale. Njihova svetlobni tok se je po 45 tisoč urah zmanjšal za manj kot 20 odstotkov, le svetloba je sčasoma postala nekoliko toplejša. Za primerjavo: navadna žarnica zdrži kakih tisoč ur, halogenska okrog dva tisoč.

Problem je lahko zamenjava malih halogenskih žarnic (na napetost 12 V) z LED sijalkami. Večina takih ledic je sicer primernih za izmenično napetost, kar pomeni, da vsebujejo polnovalni usmernik in lahko tudi glajenje. Halogenke so pogosto priključene na visoko učinkovit elektronski transformator, ki dobro deluje le pri precejšnji obremenitvi. (Minimalna in maksimalna obremenitev sta na transformatorju vidno zapisani.) Ledice predstavljajo – ob istem svetlobnem toku – bistveno manjšo, večkrat premajhno obremenitev za elektronski transformator. Nekateri si menda pomagajo tako, da pustijo priključeno vsaj eno požrešno in zelo vročo halogenko. Najvarneje je transformator zamenjati s stabiliziranim napajalnikom za »ledice«. Napajalnik z zatemnjevanjem je le nekaj dražji. Upoštevati moramo še, da so ledice večinoma večje.

Večni problem je oblikovanje svetilk. Slaba konstrukcija pogosto poskrbi za to, da v svetilki »izgine« (se pretvori v toploto) velik del svetlobe, da svetilke povzročajo bleščanje, sijalke v njih zaradi pregrevanja odpovedujejo.

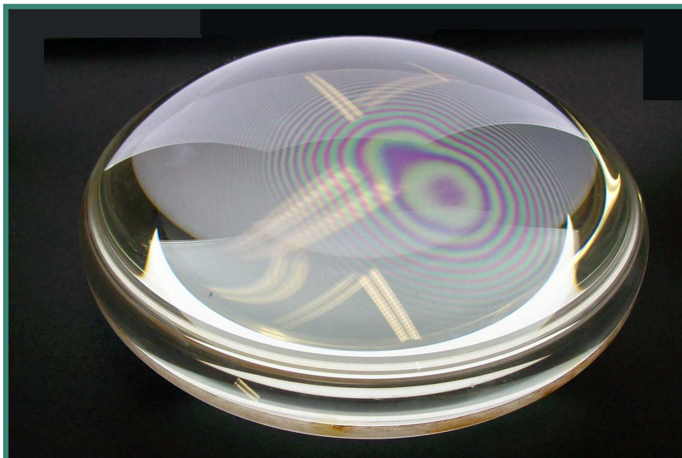
Prednosti in paleta možnosti

Kakovost LED sijalk se izboljšuje in cene padajo. Najboljša sijalka z navojem E27 in močjo 9 W je imela že poleti 2016 izkoristek skoraj 90 lumnov na watt, indeks barvne vernosti (videza) Ra = 94, konstantno svetlobo in dolgo življenjsko dobo. Tu je Ra, *indeks barvnega videza (barvne vernosti)*, ki je lahko največ 100 in pove, kako dobro svetloba podaja barve. (Klasične žarnice in halogenke imajo Ra enak 100 ali praktično 100. Nekateri namesto Ra uporabljajo oznako CRI, *Color rendering index*.) V isti kategoriji je navišji izkoristek imela zelo kakovostna sijalka s svetlečimi nitkami s 130 lumni na watt konstantne svetlobe in Ra = 82, ki pa ni bila povsem neslišna. Za primerjavo: halogenske žarnice z navojem E27 dajejo okrog 15 lumnov na W.

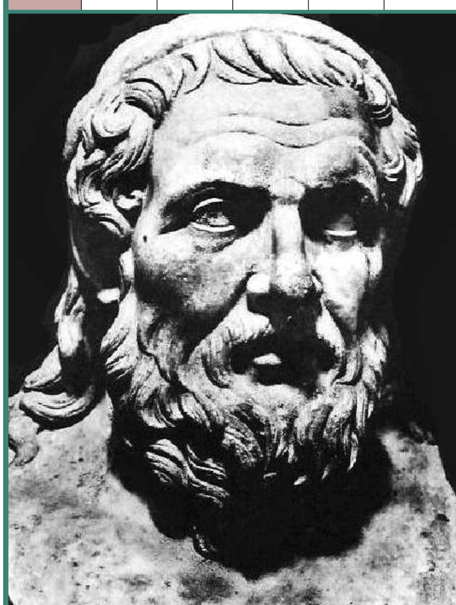
Svetleče diode same po sebi oddajajo enobarvno svetlobo. Spekter je sicer zvezen, a navadno zelo ozek. Rdeče LED so idealne za zadnje in zavorne luči na vozilih. Klasične luči uporabljajo žarnice, pokrite z rdečo plastiko. Ta prepušča manj kot 20 odstotkov svetlobe, torej gredo vsaj štiri petine svetlobe žarnice v nič. Denimo, da žarnica oddaja 15 lumnov na watt. Skozi pokrov pride kvečjemu 3 lumne rdeče svetlobe na W. Rdeča LED ne potrebuje filtra in daje 35 ali več lumnov na watt. Tudi če je rdeča LED (po nepotrebnem) pokrita z rdečo plastiko (ali steklom), ta prepušča veliko večino njene svetlobe. Tako so rdeče LED luči vsaj desetkrat učinkovitejše. Tudi pri semaforjih so prihranki veliki. V njih so včasih uporabljali žarnice z zelo nizkim izkoristkom, da bi imele daljšo življenjsko dobo. Problem z LED semaforji lahko nastane le pozimi, saj ne oddajajo toliko toplote, da bi stalili sneg, napihan na luči.

nadaljevanje na strani 18

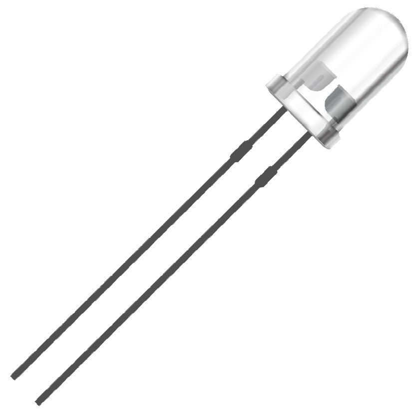
Nagradna križanka



KOLIČINA TEKOČINE, KI STEČE SKOZI IZBRANI PRESEK V ČASOVNI ENOTI
TRTA, KI ZGODAJ DOZORI IN VINO IZ NJE
MESTO V SREDNJEM DELU NIZOZEMSKE
SLAP POTOKA GLIJUN PRI BOVCU
STROKOVNJAK ZA PRAVILNO SKLEPANJE
POKOJNI AMERIŠKI BOKSARSKI ŠAMPION (MOHAMED)
HRANJENJE OTROKA NA MATERINIH PRSIH
NAŠA MLADA TEKAČICA ČEZ OVIRE ZUPIN
PREMOČ
STROKOVNJAK ZA UPORABO SEVANJA V MEDICINI
1
SKALARNA FIZIKALNA KOLIČINA
TITAN
NASPROTJE POTENCE V MATEMATIKI
JURE IVANUŠIČ
PREŠERNOVA ROJSTNA VAS
LATINSKI VEZNIK
FOND
AVTOR MARKO BOKALIČ
LEPILO IZ ŽIVALSKIH SNOVI
POLJŠČINA ZA KRMO IN KISANJE
LASTNOST TKANINE, KI SE ZAZNA Z DOTIKOM
PREDPONA ZA MILIJARDINKO OSNOVNE ENOTE
DELOVNI POLET, VNEMA
DESKARKA NA SNEGU SADAR
NAŠ PISATELJ (DANILO) KARMEN ŠVEGL
GRŠKI MITIČNI PEVEC, EVRIDIKIN MOŽ
KLEMEN JANEŽIČ
PRIPRAVA ZA TEHTANJE
ŽIVILO IZ GROBO ZMLETEGA ŽITA
NEMŠKI MATEMATIK (LEOPOLD)
FRANC. SKLADATELJ IN DIRIGENT (PIERRE)
DESNI PRITOK LOARE IN PROVINCA V ZAHODNI FRANCIJI
7
AERODROM
PEVKA ZORE
9
LADIJSKA PLOŠČAD, PALUBA
REŽISER ŽIVADINOV
NAJVEČJA REKA V KATALONIJI
SREDIŠČE FR. DEPARTMAJA VOSGES OB MOZELI
3
NOVINARKA PIRŠ
TOČKA NAD ŽARIŠČEM POTRESA
DRŽAVNA UREDITEV
MESTO NA AZURNI OBALI
POLETNO OBUVALO
TOVARNA GRADBEN. MATERIALA IZ ŽGANE GLINE
BULDOŽER
NAŠA PISAVA
NEM. PISAT. (FIREDRICH)
PRITOK GARONE PRI AGENU
IZBOKLINA NA HRBTU
TKANINA ZA VEZENJE



DRUŽINA NAŠIH SKLADATELJEV
SKLADAT. DELIBES
ODVETNIKOVA STRANKA
GOZDNI SADEŽ
OD NJE JE ODVISNA SILA
TEKOČE POMIVALNO SREDSTVO
KORINTSKI KRALJ, KI JE VZGAJAL OJDIPA
ANGLOAM. ENOTA ZA POVRŠINO
DRŽAVA V INDIJI
DEŽNIK (LJUDSKO)
STARORUS. VELEPOSESTNIK
MOŠTVO, TIM
HVALISANJE
NIKOLA TESLA
NAOČNIKI ZA NA NOS, ŠČIPALNIK
DEL OBRAZA
IGRALKA DOLINAR
2
TRISTRANSKO SODELOVANJE
4
BELJAKOVINA, KI SODELUJE PRI PRESNOVI
IGRALKA RAKOVEC
ITALIJANSKI NARAVOSLOVEC
NEMŠKO IME REKE RABE
NAŠA POKOJNA SOPRANISTKA (IRENA)
KOLIČINA Z ENOTO PASCAL
NABRUŠENOST REZILA



PREHLADNO STANJE S SLUZASTIM IZCEDKOM IZ NOSU

PRIZEMSKI DALJNOGLED

RAVNOTEŽNI KAMENČEK V UŠESU

LOJZE VODOVNIK

ZELO ČLENOVIT JADRANSKI OTOK

ELEGANTNA LAHKOŽIVKA V FRANCOSKEM OKOLJU

NOSIJO JIH SLABOVIDNI

OBČUTEK NEMIRA, ODGOVORNOSTI

PROGRAMSKI JEZIK, IMENOVAN PO ANG. MATEMATIČARKI IN PROGRAMERKI LOVELACE

ALJAŽEV STOJI NA TRIGLAVU, EIFFLOV V PARIZU

ARKTIČNI JELEN Z LOPATAST. ROGOVJEM

MRAČNOST

MESTO ZASTOJA AKTIVNOSTI

REKA V ŠPANSKIH IMENIH

FRANCOSKI IGRALEC (PHILIPPE)

UGRABLJENKA

PREDNIK IRCEV

AVSTRAL. SOPRAN. (NELLIE)

ŠVIC. FIZIK IN MATEM.

8

KRIVULJA V TERMODINAMIKI

IME VEČ PAPEŽEV

5

MAJHEN DEČEK V REJI

VRANI SORODNA PTICA

ZAPOREDNI ČRKI

ŽENSKA BELIČNICA

MITIČNI KRALJ NA KRETI, MINOSOV BRAT

RAZISKOVALNI FILMSKI DETEKTIV VENTURA

ŽGANA PIJAČA Z OKUSOM PO BRINU

STAROGRŠKI TRAGIK

JEZUSOV UČENEC, KI GA ENAČIJO Z JERNEJEM

FRANCOSKI MODNI KREATOR (CHRISTIAN)

VRH V JULIJCIH

VISOK PLEMIŠKI NASLOV

ZRAK (LAT.)

SEZNAM MOŽNOSTI NA EKRANU, IZBIRNIK

ČRKA, KI PREDSTAVLJA NEZNANKO

DOLINA IDRIJSKEGA PRELOMA

GRŠKI BOG SONCA

6

11

NAŠ IGRALEC (BORIS)

NEVTRAL ZA MNOŽ.

SUBJEKT

SREDSTVO, KI ZMANJŠUJE OTEKLINE

KOKOŠI, PERJAD

KOREJSKA DENARNA ENOTA

GLAVNA JUNAKINJA IZ DOGODKA V MESTU GOGI

KRAJ PRI ŽALCU

AM. FIZIK, NOBELOVEC (DAVID M.)

POMORSKA ENOTA ZA HITROST

PREGANJANJE

PALEC

SPLAVARSKI DROG Z ŽELEZNO KLJUKO

SPLETNA DOMENA AVSTRIJE

ŠPORTNI ZADETEK

ŠAHOVSKA OTVORITEV

MOČNO POŽELENJE

NAŠA PESNICA (META)

UGASLI VULKAN NA HAVAJIH (MAUNA)

BOLNIK, KI IMA GONOREJO

LONDONSKI DNEVNIK

URADNA LISTINA

NASIČEN OGLJIKOVODIK

UPOŠTEVANJE

PRINC IZ MAHABHAR.

NEKD. IZR. POLITIK (ABA)

10

KRAJ PRI PODČETRTKU

REKA V ROMUNIJI

IVAN VIDAV

NEKDANJI TURŠKI VELIKAŠ

KMEČKO VOZILO

JAPONSKA MISELNA IGRA

GLAVNO MESTO SVAZIJA

LARS ONSAGER

MESTO OB GARONI V JUŽNI FRANCIJI

12

DEL STOPALA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **15. marca 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani

Astronomi pri nočnih opazovanjih uporabljajo svetilke s šibko rdečo svetlobo, saj ta ne moti prilagoditve na temo. Z LED tehnologijo se je poraba baterij v prenosnih svetilkah izredno zmanjšala, pri svetilkah z rdečo svetlobo pa še toliko bolj, kot smo izračunali malo prej.

Vendar pa enobarvna svetloba včasih povzroči nepričakovane učinke. Na sliki 8 imamo isti objekt slikan v svetlobi bele LED in rdeče LED. V rdeči svetlobi del informacije izgine. Očitno rdeči napis odbija prav toliko rdeče svetlobe kot belo ozadje.

V nekaterih domovih za ostarele uporabljajo ponoči šibko oranžno ali rumeno razsvetljavo. Modra komponenta svetlobe je namreč ponoči nezaželena, saj nas popolnoma »zbudi«. Na sliki 9 imamo karton s slike 8 v svetlobi rumene LED.

Modrih resnično svetlih diod dolgo niso znali izdelati. Preboj so naredili okrog leta 1994 trije japonski znanstveniki: Isamu Akasaki, Hiroshi Amano in Shuji Nakamura. Leta 2014 so zato dobili Nobelovo nagrado za fiziko. Ta iznajdba je šele omogočila pravi razvoj LED razsvetljave.

Bele LED sijalke lahko kombinirajo diode raznih barv (rdeče, modre in zelene). To omogoča izdelavo svetilk, ki spreminjajo barvo. Druga možnost za belo svetlobo so modre diode, pokrite s fluorescenčnim slojem (kratko: *fosforjem*), ki del svetlobe pretvori v rumeno in rdečo. Fluorescenčna prevleka razširi spekter, ki pa ima vrh v modrem delu, se pravi, da dioda oddaja še zmeraj precej modre svetlobe. Spekter je zvezen, a opazno drugačne oblike kot spekter halogenke. Fluorescenčni sloj zmanjša učinkovitost sijalke. Zadnji krik so ledice, ki imajo modre diode z zelenim fosforjem z minimalnimi izgubami in zraven zelo dobre rdeče diode. To omogoča visoko učinkovitost in visoko barvno vernost.

Na embalaži LED sijalk imamo podatke o barvni temperaturi. Tudi o tem bomo več povedali v članku *Žarnice in sijalke*. Tako sijalka z barvno temperaturo 3000 K oddaja približno tako svetlobo kot črno telo s temperaturo 3000 K ali halogenska žarnica s 100 W. Višja temperatura pomeni večji delež modre in manjši delež rdeče svetlobe. Svetloba pod 3300 K je »toplo bela« in primerna za večino področij v stanovanju, za hodnike v stavbah. Od 3300 K in pod 5000 K imamo »hladno belo« ali »nevtralno belo« ali »naravno belo«, primerno za delovne prostore. Nad 5000 K je »dnevno bela«.

Uspešna rešitev za primere, ko potrebujemo več svetlobe, so svetilke z vgrajenimi izmenljivimi LED moduli. Dobre svetilke so konstruirane tako, da omogočajo odvajanje toplote z naravnim kroženjem

SLIKA 8.
Embalaža, osvetljena z belo in rdečo LED.

SLIKA 9.
Karton, osvetljen z rumeno LED.

zraka skozi svetilko. Če so zaprte, pa imajo aluminijasto ohišje v tesnem stiku z LED moduli in morda tudi hladilna rebra. Aluminij je namreč zelo dober prevodnik toplote, rebra pa povečujejo površino, ki oddaja toploto. To ščiti svetleče diode in elektroniko. Na evropskem trgu obstajajo cenovno dostopne svetilke brez utripanja, z daljincem, s katerim lahko prilagajamo barvno temperaturo, denimo od 2200 K do 5000 K, in svetilko tudi zatemnjujemo.

Zunanja LED razsvetljava

Zunanja razsvetljava naj bi bila prilagodljiva, topla in ne premočna. Modra svetloba ima namreč negativen vpliv na astronomska opazovanja in spanec. Žal so do nedavnega hladno bele sijalke imele višji izkoristek. Tako so prodajalci cestne razsvetljave ponujali hladno bele svetilke, saj je bilo z njimi laže delati reklamo o prihrankih energije.

Avtorju tega članka je ponoči modra svetloba LED prikazovalnika na glasbenem stolpu izrazito neprijetna. Obrtnik mu je odrezal kos temnordečega pleksi stekla za pokritje prikazovalnika in povedal, da k njemu pride precej strank s podobnimi naročili.

Zdaj lahko dobimo zelo učinkovite zunanje LED svetilke z 2700 K in menda celo 2200 K, primerne za osvetlitev pločnikov in cest v naseljih. V kalifornijskem mestu Davis so zaradi pritožb stanovalcev morali cestno LED razsvetljavo s 4000–5000 K zamenjati za toplejšo z 2700–3000 K. V Sacramentu je močna razsvetljava mosta z belimi LED skoraj popolnoma ustavila selitev lososov pod njim. Svetilke so zato morali izključiti. Tudi v New Yorku so morali močno LED razsvetljavo nekoliko zatemniti.

Zunanjo LED razsvetljavo cest lahko naredimo tako, da se njena intenzivnost hitro prilagaja gostoti prometa, kar je ugodno v vseh pogledih. Lahko jo celo prižigamo za posameznega pešca.

Bele LED sijalke imajo na nočni živi svet – metulje in druge žuželke, netopirje – negativen vpliv, bolj kot oranžno-rumene visokotlačne natrijeve sijalke, ki so bile do zdaj precej običajne. Bele LED imajo namreč vrh v modrem delu spektra, kar pomeni, da tam oddajajo precejšen del svetlobe. Na srečo pa ne oddajajo za okolje še bolj moteče UV svetlobe. Pri toplo belih LED sijalkah je modri vrh precej manj izrazit.

Za bližino narodnih parkov in astronomskih observatorijev več podjetij ponuja [4] oranžno-rumene (jantarne) ali rumeno-zelene LED svetilke, pri katerih je količina modre svetlobe zanemarljiva. To dosežejo, recimo, z dodatnim fluorescenčnim slojem na toplo beli LED ali pa z rumenim filtrom na beli LED. Rumena je komplementarna k modri in jo blokira. (Tudi na sliki 9 so modri deli absorbirali rumeno svetlobo in postali črni.) Izkoristek se nekoliko zmanjša, vendar doseže še zmeraj 80 lm/W ali več. Indeks barvne vernosti znaša v enem primeru okrog 40 [5], kar je še zmeraj več kot skromnih 25 pri visokotlačni natrijevi razsvetljavi.

Raziskava podjetja Cree je pokazala, da velika večina cestne razsvetljave, stare in nove, utripa z dvakratnikom frekvence električnega omrežja. Vendar pa lahko kupimo danes tudi LED svetilke za razsvetljavo brez utripanja, primerno za prometnice in javne površine. Športne dvorane in stadioni so že pred časom ugotovili, da potrebujejo razsvetljavo brez utripanja, saj sicer ni mogoče zagotoviti kakovostnih upočasnjenih posnetkov dogajanja.

Literatura

[1] M. Bezjak: Usmerniki, dostopno na `www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2001/di/bezjak/apo_sipos/5.htm`, ogled 29. 12. 2017.

[2] Utripanje žarnic in sijalk, Flickern (Flackern oder Flimmern) von Glühbirnen und Lampen, Energie-Umwelt.ch, dostopno na `www.energie-umwelt.ch/beleuchtungundbatterien/gluehbirnen-und-lampen/1425`, ogled 29. 12. 2017.

[3] A. Mohorič, *Zavesni zaklop*, Presek **44** (2016/17), 2, 30–31.

[4] Réserve internationale de CIEL ÉTOILE du Mont-Mégantic, Priporočene svetilke, dostopno na `ricemm.org/en/documentations/recommended-fixtures/`, ogled 29. 12. 2017.

[5] Ignialight: Cestna razsvetljava, dostopno na `www.ignialight.com/content/files/downloads/13/ignialight-street-lighting-pdf.pdf`, ogled 29. 12. 2017.

× × ×

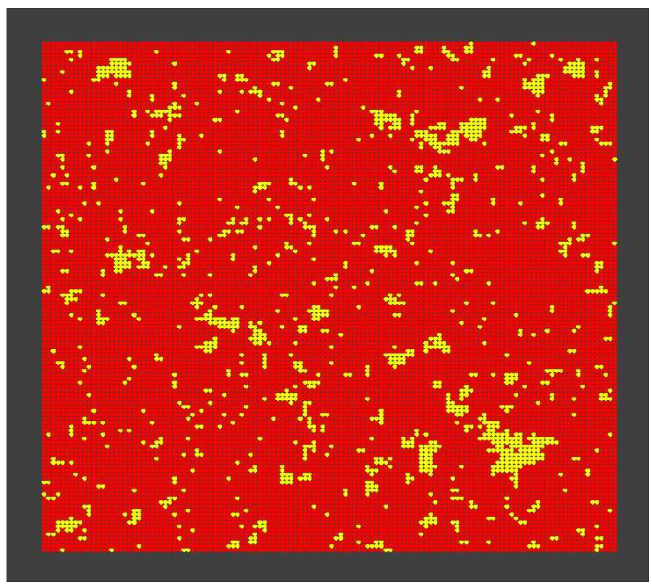
Magnetne domene v železu

Andrej Likar

Železo, kobalt in nikelj so znane feromagnetne snovi – magnet jih močno privlači. Ker v atomu elektroni krožijo okrog jedra, pa tudi sami so drobni magnetki zaradi spina, to je vrtenja okrog lastne osi, so atomi lahko majhni magneti. Tudi atomsko jedro je lahko majhen magnet, a je tako šibek, da ga vedno lahko zanemarimo. V drobnem kristalu železa so ti atomski magnetki poravnani in vsi kažejo v isto smer. Zunanji elektroni sosednjih atomov se namreč med seboj odbijajo, zato se v kristalu železa postavijo na največjo možno medsebojno razdaljo, taka postavitev pa prisili poravnanost magnetkov. Če bi na magnetke deloval le magnetni navor sosednjih magnetkov, bi se ti postavili eden proti drugemu. A medsebojni magnetni navor je le kak promil navora, ki nastane zaradi odboja med elektroni. Zato so atomski magnetki v železu trdno povezani in vsi kažejo v isto smer.

Vsak kos železa bi bil glede na povedano zelo močan magnet. Vemo, da to ni res. Da dobimo iz kosa železa magnet, se je potrebno posebej potruditi. Atomski magnetki so v železu res poravnani, a le v drobnih področjih, ki jim pravimo domene. Te obsegajo le 10^{17} do 10^{21} atomov in jih je mogoče videti pod mikroskopom. V različnih domenah pa so smeri poravnave različno in se njihov vpliv v kosu železa povsem izniči. V eni sami veliki domeni, veliki kot kos železa, bi bilo magnetno polje tako veliko, da bi domena sama razpadla, prav zaradi magnetnega navora na atomske magnete, ki bi premagal poravnalni navor. Če želimo iz kosa železa narediti magnet, moramo trajno povečati delež domen z magnetki v izbrani smeri na račun ostalih domen. Kar nekaj zanimivih pojavov pri proučevanju feromagnetnih snovi v magnetnem polju je povezanih z rastjo in upadanjem domen ter njihovimi skokovitimi zasuki.

A ostanimo pri domenah. Magnetki so poravnani le pri dovolj nizki temperaturi. Pri temperaturah, ki smo jih vajeni, so magnetki skoraj povsem poravnani. Kaj pa se zgodi, ko začnemo domeno segrevati? Vse bolj kaotično gibanje vpliva tudi na poravnanost magnetkov. V domeni nastanejo gručice, kjer



SLIKA 1.
Pod kritično temperaturo nastajajo območja z obrnjemini magnetki (rumene pike).

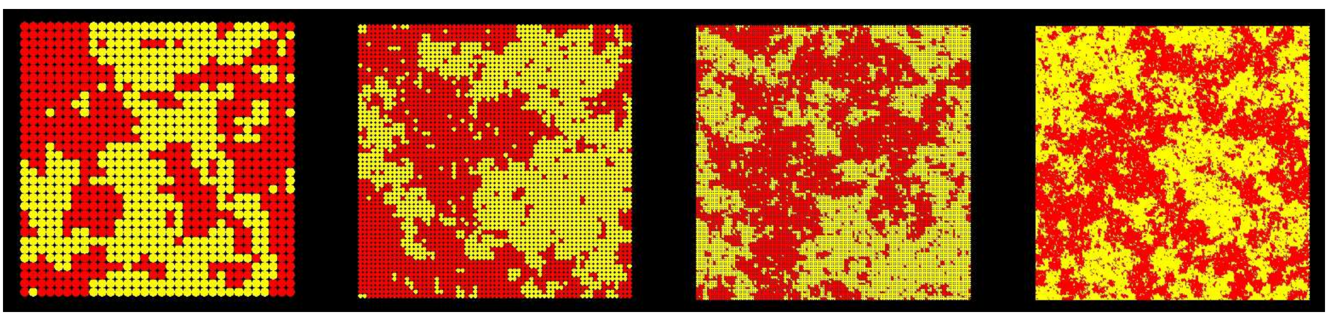
so magnetki bolj ali manj obrnjeni glede na staro lego. Z naraščajočo temperaturo se gručice večajo in vse več jih je. Pri tako imenovani kritični temperaturi poravnanosti ni več in domena izgubi magnetne lastnosti. Kritična ali Curiejeva temperatura je pri železu 1043 K, pri kobaltu je še višja (1388 K), pri niklju pa precej nižja (627 K). Nekaj uvida v pestro dogajanje v domeni dobimo s preprostim modelom. Magnetke postavimo v kvadratno mrežo in jim dovolimo le dve stanji – obe pravokotno na ravnino mreže, eno v izbrani smeri in drugo v nasprotni smeri. Razmere tako res do skrajnosti poenostavimo. Modelu pravimo dvodimenzionalni Isingov model, po fiziku Ernstu Isingu, ki ga je prvič opisal. A kljub temu je model dovolj bogat, da v grobem pokaže bistvene lastnosti razmer v domenah pri segrevanju in ohlajanju.

O vplivu temperature na stanje magnetka odloča njegova energija v obeh legah, recimo jima gor in dol. O energiji odločajo neposredni sosedje magnetka. Če so vsi štirje sosedje usmerjeni gor, čuti magnetek največji navor, ki ga sili v zasuk v smeri gor, in ima zato, postavljen v to smer, najnižjo energijo, v nasprotni smeri pa najvišjo. Če je eden od sosedov obrnjen navzdol, magnetek še vedno čuti navor, ki ga suče navzgor, le da je ta navor sedaj pol manjši kot prej. Pri dveh sosedih obrnjenih dol pa magnetek ne čuti navora in ima enako energijo ne glede na to, kako je obrnjen. Pri treh ali štirih sosedih obrnjenih navzdol se razmere ponovijo, le da v nasprotni smeri. Pri dani temperaturi se magnetki obračajo gor in dol glede na energijo v teh legah. Čim višjo energijo terja obrat, manj je verjetno, da se bo magnetek tako tudi obrnil. Prehod v nižjo energijo pa je bolj verjeten. V modelu pogledamo stanje sosednjih magnetkov in določimo energiji pri nespremenjenem in obrnjenem magnetku. Izračunamo ustrezne verjetnosti in potem z žrebom določimo, ali se bo magnetek obrnil ali ne.

Legam magnetkov v danem trenutku lahko nazorno sledimo s sliko, kjer lego gor ponazorimo z eno barvo, lego dol pa z drugo. Na sliki 1 smo tako predstavili lege magnetkov pri povišani temperaturi, a nižji od kritične. Večina magnetkov je torej v legi gor (rdeče pike), nekaj pa jih je tudi v legi dol (rumene pike). Tu je v mreži 128×128 magnetkov.

Izjemo zanimive pa postanejo slike pri kritični temperaturi. Tu sta deleža magnetkov v eni in drugi smeri v povprečju prvič enaka, kar se nadaljuje tudi pri višjih temperaturah. Domena izgubi magnetno urejenost. A pri kritični temperaturi opazimo poleg majhnih tudi velike gruče z urejenimi magnetki, ki se raztezajo preko celotnega območja. Na sliki 2 smo zajeli stanja magnetkov pri različnih velikostih domene. Na levi smo z najmanjšo mrežo 32×32 magnetov zajeli majhen drobec domene, sledijo ji mreže s 64×64, potem s 128×128 in končno z 256×256 magneti. Opazimo, da so razmere v vseh teh mrežah kvalitativno podobne. Pri najmanjši mreži ne moremo opaziti večjih podrobnosti, pri vsaki nadaljnji je majhnih urejenih gručic vse več, a tudi večjih sklopov ne manjka. Pravimo, da si je pri kritični temperaturi domena podobna na vseh merskih lestvicah.

Ker so slike stanj različno velikih področij nujno različne zaradi verjetnostne narave pojava, si oglej-

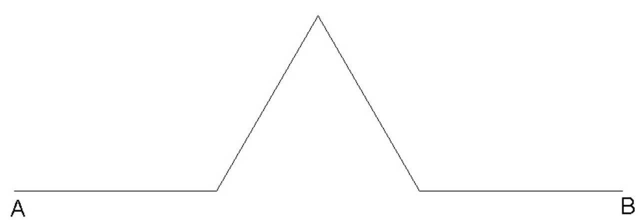


SLIKA 2.
Stanje magnetkov na različno velikih področjih domene

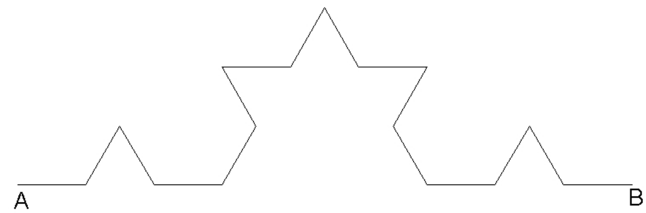
mo primer iz matematike, pri katerem ni naključij. Med krivuljami, ki so enake na vseh merskih lestvicah, je posebno preprosta Kochova krivulja. O njej je Presek že pisal (Matija Lokar, Presek **26** (1998/99), stran 274). Nastane postopoma iz daljice, ki ji na sredi narišemo trikotno izboklino. Ravni odseki tako dobljene lomljene krivulje naj bodo enako dolgi. Potem postopek ponovimo na vsakem ravnem odseku in nadaljujemo risanje izboklin v nedogled. Slike 3, 4, 5 in 6 ponazarjajo ta postopek, ki vodi do vse bolj zavite krivulje.

Če usmerimo mikroskop v vrh te krivulje, vidimo vedno eno in isto sliko ne glede na povečavo mikroskopa. Krivulja je torej na vseh prostorskih merskih lestvicah povsem enaka. Seveda pri zares narisani krivulji ne bo tako, saj je debelina črte končna, zato zelo finih grb pri dovolj veliki povečavi ne vidimo več (glej sliko 7, leva krivulja). Prav tako je pri zelo grobi mreži, ki predstavlja zelo majhen del domene z nekaj sto atomi. Tudi tu podrobnosti pod razdaljo med atomi seveda ni. Te zaznamo pri večjih mrežah.

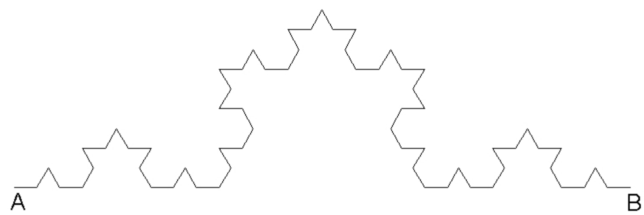
Računalniški program, s katerim smo računali lege magnetkov, je preprost in ga lahko bralec, če ga te stvari seveda zanimajo, sam napiše. Pri tem bo uvidel, kako zamudni so taki računi pri nekoliko večjih mrežah. Tu še tako hitri računalniki ne pomagajo. V računih ni možno zajeti vseh atomov realne domene. A spoznanje, da si je sistem pri kritični temperaturi podoben na vseh smiselnih merskih lestvicah, je privedlo fizike do novih teoretičnih in računalniških prijemov. Seveda si sistem na vseh merskih lestvicah ni podoben le pri kritični temperaturi. Prav tako si je podoben pri temperaturi blizu absolutne ničle, ko so vsi magnetki poravnani v vsej domeni. Tudi pri zelo visokih temperaturah je tako, saj vezi med atomi takrat niso več pomembne. A ta dva primera za fizika pač nista zanimiva.



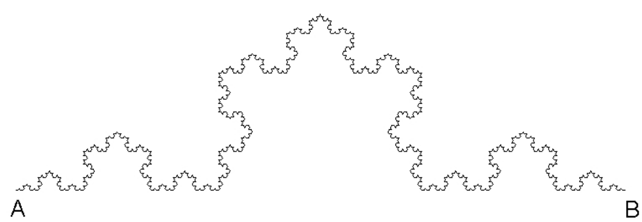
SLIKA 3.
Pri Kochovi krivulji daljica AB dobi na sredi grbo.



SLIKA 4.
Ravni deli se ponovno ogrbijo.



SLIKA 5.
In spet ...



SLIKA 6.
Končno je krivulja hudo nazobčana.

SLIKA 7.
Zaradi končne debeline črte vidimo pod mikroskopom pri največji povečavi (levo) le medlo sliko, pri manjših povečavah pa je krivulja ostrejša.

× × ×

Tri o Zemlji in Luni

Marijan Prosen

Presek je že večkrat pisal o Zemlji in Luni. Vendar pa nikoli ne o vsebinah, ki bi tesno povezovale obe nebesni telesi. Tokrat paberek o tem. Gre za tri vsebine, pravzaprav bolj za zanimive raziskovalne naloge, ki me spremljajo že dalj časa. Zdaj, ko imam časa najmanj, pa sem se odločil, da jih napišem.

Prva je o težišču sistema Zemlja-Luna, druga o točki, iz katere bi videli Zemljo in Luno v enakem zornem kotu, tretja pa o tem, kako močno Zemlja osvetljuje Luno okoli mlaja in tako povzroča pojav pepelnate svetlobe na Luni.

Težišče sistema Zemlja-Luna

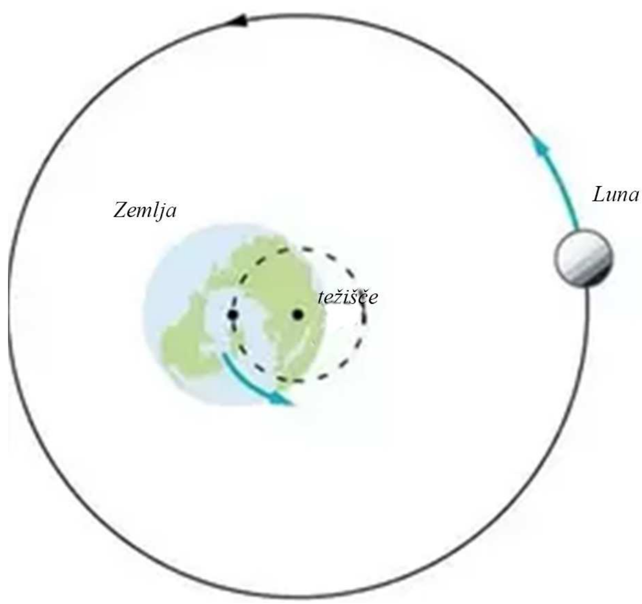
Razmerje mas Lune in Zemlje je $m/M = 1/81$, razdalja med njima pa $r = 60R$, če pomeni $R = 6400$ km radij Zemlje. Kje leži težišče mas teh dveh vesoljskih teles, ki ju skupaj lahko obravnavamo kot tesen sistem (par) dveh teles?

Težišče leži nekje na zveznici središč obeh teles, ne na sredini, ampak po občutku bližje Zemlji, ker je masivnejša od Lune.

Predstavljajmo si ravno trdno oz. togo palico (drog, vzvod), v krajišči katere postavimo središči Lune in Zemlje. Obravnavajmo ju kot masivni krogli, ki ju vsako na svojem koncu palice vleče navzdol sila teže (težo smo si izmislili, da lažje rešimo nalogo).

Vprašamo se, v kateri točki T moramo podpreti palico, da bosta telesi v ravnovesju. V tej točki namreč leži težišče mas obeh teles. Podobno kot na gugalnici, kjer se gugata dve osebi z različno maso. Oseba z večjo maso mora biti bližje osi, okoli katere se gugata, kot oseba z manjšo maso, da je na gugalnici ravnovesje. Os vrtenja tedaj predstavlja težišče mas obeh oseb. Kje moramo torej palico podpreti, da bosta masi teles v ravnovesju?

Ravnovesje na palici, ki je vrtljiva okoli osi, je, kadar je navor večje mase enak navoru manjše mase. Navor je zmnožek sile teže in ročice, ki je pravokotna na smer sile. Sila teže pa je zmnožek mase telesa m in pospeška prostega pada $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Navor suka oz. vrti vzvod v določeno smer (v levo ali v desno).



SLIKA 1.
Težišče sistema Zemlja-Luna je okoli 4700 km oddaljeno od središča Zemlje. To težišče se pri gibanju Zemlje okrog Sonca giblje po elipsi, medtem ko Zemljino središče vijuga oz. opleta okoli nje (zelo povečano).

Naj bo dolžina vzvoda $r = 60R$, Zemlja z maso M v levem krajišču vzvoda, Luna z maso m v desnem krajišču, obe masi vleče sila teže navzdol, naj bo razdalja središča Zemlje od osi oz. od težišča T obeh mas enaka x. Potem lahko zapišemo: prvi navor je Mgx in suka vzvod v desno, drugi navor pa $mg(r - x)$ in suka vzvod v levo. Za ravnovesje ju moramo izenačiti: $Mgx = mg(r - x)$. Po krajšanju z g dobimo $Mx = m(60R - x)$ in od tod $x = \frac{m}{M+m}60R = (60/82)R = 4700$ km, kar je okoli $3/4R$.

Odgovor. Težišče sistema mas Zemlja-Luna leži znotraj Zemlje, približno $1/4R$ pod njenim površjem. Dobili smo kar presenetljiv rezultat, mar ne?

Vidni v enakem zornem kotu

Iz katere točke v vesolju bi Zemljo in Luno videli v enakem zornem kotu? Razdalja med Zemljo in Luno je $60R$, če je $R = 6400$ km radij Zemlje, radij Lune pa je $r = 1/4R$.

Točka, iz katere bi videli obe okrogli vesoljski telesi v enakem zornem kotu, leži nekje na zveznici središč Zemlje in Lune, ne na sredini, ampak precej bližje Luni, ker je manjša od Zemlje. Označimo razdaljo te točke od središča Lune z x. Potem je razdalja te točke od središča Zemlje $(60R - x)$. Ker sta Zemlja in Luna majhni glede na njuno medsebojno oddaljenost, lahko za zorni kot vzamemo kar količnik med premerom Zemlje ali premerom Lune in njunima ustreznima razdaljama od izbrane točke.

Za Luno je količnik $2 \cdot 1/4R/x$, za Zemljo pa $2R/(60R - x)$. Izraza izenačimo $2 \cdot 1/4R/x = 2R/(60R - x)$, krajšamo in dobimo $x = 12R = 76\,800$ km in $60R - 12R = 48R = 307\,200$ km.

Zorni kot je $2 \cdot 1/4R/x = 1/2R/12R = 1/24$ rad. $= (1/24) \cdot 57{,}3° = 2{,}4°$.

Odgovor. Zemljo in Luno vidimo v enakem zornem kotu 2,4° iz točke, ki je od središča Lune oddaljena 76 800 km oz. od središča Zemlje 307 200 km.

Zemljino osvetljevanje Lune okoli mlaja

Izračunajmo osvetljenost Luninega površja, ki jo povzroča od Sonca osvetljena Zemlja blizu mlaja. Osvetljena Zemlja deluje kot svetilo. V prostor oddaja svetlobni tok in tako osvetljuje k nam obrnjeno temno, od Sonca neosvetljeno stran Lune.

SLIKA 2.
Zemlja na Luninem nebu (Foto: NASA)

Recimo, da poznamo gostoto svetlobnega toka, ki ga Zemlja sprejema od Sonca $j_0 = 1400\ \mathrm{W/m^2}$ (solarna konstanta), radij Zemlje $R = 6400$ km, razdaljo Lune od Zemlje $r = 60$ R in albedo (odbojnost) Zemlje $\delta = 0{,}3$.

Naloga se »dogaja« ob mlaju ali zelo blizu mlaja (± nekaj dni), ko je Luna med Soncem in Zemljo in jo osvetljuje od Sonca osvetljena Zemlja.

S Sonca pada na Zemljo gostota svetlobnega toka j_0. Zato od Sonca obsijana polovica Zemlje sveti. Vsa vpadna svetloba se ne odbije, ampak del, kar pove albedo Zemlje. Od Zemlje se odbije oz. gre stran v prostor svetlobni tok $j_0\pi R^2\delta$, na Luno v razdalji r pa pade tok z gostoto

- $j_0\pi R^2\delta/2\pi r^2 = j_0R^2\delta/2(60R)^2 =$
  $= 1400\ \mathrm{W/m^2}\ 0{,}3/2 \cdot 3600 = 0{,}06\ \mathrm{W/m^2}$.

Odgovor. Dobili smo vrednost svetlobnega oz. energijskega toka na kvadratni meter, ki jo lahko vzamemo za osvetljenost Luninega površja, seveda samo v energijskem smislu. Pri računu smo upoštevali le tisto polkroglo $2\pi r^2$, ki je od osvetljene polovice Zemlje obrnjena proti od Sonca neosvetljeni po-

SLIKA 3.
Pepelnata svetloba Lune – osvetljenost Luninega površja okoli »polne zemlje« (Foto: Andrej Guštin)

lovici Lune in jo Zemlja osvetljuje. Če preračunamo, Zemlja v tem primeru osvetljuje Luno približno tako, kot 100 W žarnica osvetljuje predmete na razdalji okoli 12 m. Še enkrat poudarimo, da gre zgolj za osvetljenost površja v energijskem, ne pa v fiziološkem pogledu.

Zaradi osvetljenosti, ki jo na Luni povzroča svetla, od Sonca osvetljena Zemlja, nastane pojav Lunine pepelnate svetlobe. Z Zemlje jo opazujemo v jasnih nočeh malo pred mlajem (zjutraj) in/ali malo po njem (zvečer).

Polna luna osvetljuje Zemljino ozračje in površje, ki odbija svetlobo. Tako nastane mesečina. Podobno kot polna luna osvetljuje Zemljo in povzroča mesečino, tudi »polna zemlja« osvetljuje temno Lunino površje in povzroča osvetljenost temne polovice Lune, to je njeno pepelnato svetlobo.

Če bi se lahko namestili na površju Lune v tistih krajih, od koder z Zemlje vidimo pepelnato svetlobo, bi od tam na Luninem nebu videli našo Zemljo kot veliko svetlečo okroglo ploskvico, okoli 4-krat večjo, kot mi vidimo polno luno. »Polna zemlja« bi svetila tudi dosti močneje na Luninem nebu, kot nam sveti polna luna. Zdela bi se nam najmanj 16-krat svetlejša, kot je z Zemlje vidna polna luna. Po nekaterih računih pa bi Zemlja svetila na Luninem nebu še dosti svetlejše.

Treba bi bilo iti tja in se o tem prepričati na lastne oči. Račun večkrat laže, ne prikaže resničnega oz. dejanskega stanja. Vsega, kar vpliva na rezultat, pa ni mogoče upoštevati.

Naloge

- Izračunajte težišče sistema Jupiter-Saturn, če sta v Osončju med seboj oddaljena 5 a.e. (astronomskih enot, to je razdalj Zemlja-Sonce), masa Jupitra je 315 mas Zemlje, masa Saturna pa 95 mas Zemlje. [Težišče je oddaljeno 1,2 a.e. od središča Jupitra.]
- Iz katere točke v vesolju bi videli Zemljo in Sonce v enakem zornem kotu? Razdalja med Soncem in Zemljo je okoli 215 radijev Sonca, radij Sonca pa je okoli 100*R*, če je *R* radij Zemlje. [Iz točke, ki je 2,13 radija Sonca oddaljena od središča Zemlje, zorni kot pa je 0,54°.]
- Kolikokrat močnejše sveti Zemlja na Luninem nebu kakor Luna na Zemljinem? Radij Zemlje je štirikrat večji od radija Lune. Albedo Zemlje je 0,3, albedo Lune 0,12. Vpliv Zemljinega ozračja zanemarimo. [Kar okoli 40-krat; če bi upoštevali absorpcijo (vpojnost) svetlobe v ozračju, pa okoli 30-krat.]
- S kolikšno osvetljenostjo osvetljuje polna luna Zemljino površje? [Med eno in dvema tisočinkama W/m^2.]

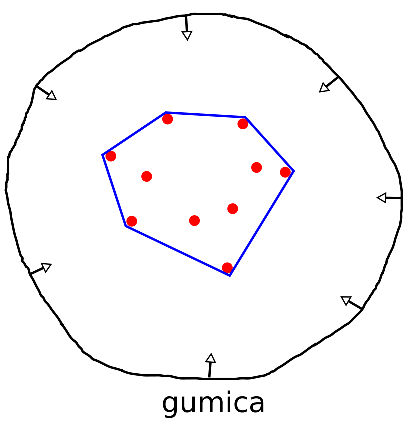
× × ×

Konveksna ovojnica

Igor Pesek

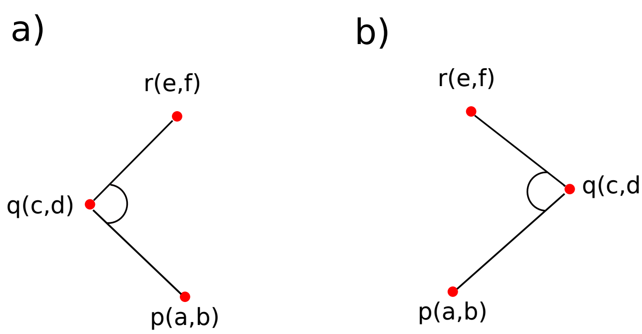
Predstavljajte si, da ste v mizarski delavnici in da na velik kos lesene deske s kladivom nabijete kup žebljičkov. Nato poiščete gumico, jo napnete z rokami okrog žebljičkov in jo spustite. Kaj se bo zgodilo? Gumica se bo napela izključno okrog zunanjih žebljičkov, notranjih se sploh ne bo dotikala. Slika 1 prikazuje gumico, ki jo s prsti napnemo okrog žebljičkov in jo spustimo (moder mnogokotnik).

Formalno izraženo bodo naši žebljički točke v ravnini, gumico pa bomo imenovali konveksna ovojnica. Konveksna ovojnica (ang. convex hull) množice točk M, označimo s $KO(M)$ in je najmanjši konveksni večkotnik P, za katerega je vsaka točka iz M bodisi na robu P bodisi je vsebovana v njegovi notranjosti. Pri tem konveksnost pomeni, da za vsaki dve različni točki a in b iz poligona P, daljica $\overline{ab}$ leži v celoti v poligonu P.



SLIKA 1.
Žebljički (rdeče pike) in gumica

Pred začetkom reševanja, je potrebno pogledati še nekaj elementarnih primerov. Računanje konveksne ovojnice za eno točko je trivialno, vrnemo to točko. Podobno velja za konveksno ovojnico dveh točk. Kaj pa konveksna ovojnica treh točk? Imamo dve možnosti. Bodisi so točke v seznamu zapisane v smeri urinega kazalca (ang. clockwise oz. CW) bodisi v nasprotni smeri urinega kazalca (ang. counter clockwise oz. CCW). Predpostavimo, da imamo tri točke $p(a,b)$, $q(c,d)$ in $r(e,f)$ podane v tem vrstnem redu. Zanima nas torej, ali je točka p v smeri ali nasprotni smeri urinega kazalca od točke q glede na točko r, kar je prikazano na sliki 2. Poenostavljeno povedano, zanima nas, kakšen obrat moramo narediti pri točki q, ko gremo od točke p proti točki r. Ali naredimo obrat v levo ali desno?



SLIKA 2.
a) v smeri urinega kazalca b) v nasprotni smeri urinega kazalca

Za trenutek predpostavimo, da je prva točka najbolj leva v ravnini (primer b na sliki 2), torej $a < c$ in $a < e$. Potem so točke urejene v nasprotni smeri urinega kazalca natanko tedaj, ko je naklon premice skozi točki $p(a,b)$ in $q(c,d)$ manjši od naklona premice skozi točki $p(a,b)$ in $r(e,f)$:

- v nasprotni smeri urinega kazalca CCW(p,q,r)

$$\iff \frac{d-b}{c-a} < \frac{f-b}{e-a}$$

Ker sta oba imenovalca pozitivna, lahko neenakost napišemo tudi kot:

- v nasprotni smeri urinega kazalca CCW(p,q,r)
  $$\iff (f-b)(c-a) > (d-b)(e-a)$$

Opazimo, če je zadnja neenakost obrnjena, potem so točke zapisane v smeri urinega kazalca.

Preverjanje usmeritve treh točk ima v algoritmih za izračun konveksnih ovojnic popolnoma enako vlogo kot ga ima primerjanje v algoritmih urejanja. Računanje konveksne ovojnice na treh točkah je analogno urejanju dveh različnih števil: bodisi sta v padajočem vrstnem redu bodisi naraščajočem.

Jarvisov obhod

Jarvisov obhod je preprost algoritem, ki za določitev konveksne ovojnice uporablja tehniko znano kot *ovijanje darila*. Pri tem uporablja dve dejstvi:

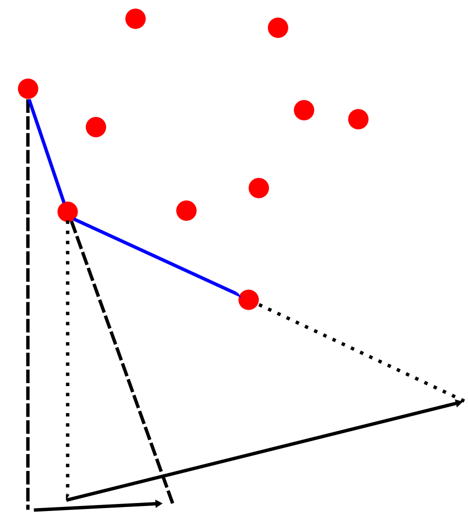
- skrajno leva točka je zagotovo vozlišče v konveksni ovojnici,
- če je točka p vozlišče v konveksni ovojnici in q točka, ki ima najmanjši relativni polarni kot glede na p. Potem je tudi q vozlišče na konveksni ovojnici.

Polarni kot med poljubno točko r glede na p, je kot, ki ga oklepata desni del vodoravne osi in daljica med točkama p in r. Bralcu prepuščamo, da razmisli, zakaj zapisani dejstvi držita.

Če spet uporabimo analogijo z žeblji, si lahko Jarvisov obhod predstavljamo tako, da najprej poiščemo skrajno levi žebelj (po x-koordinati) in nanj navežemo vrvico in jo potegnemo pravokotno na x-os. Sedaj začnemo vleči vrvico v nasprotni smeri urinega kazalca. Prvi žebelj, ki ga zadanemo, je naslednje vozlišče na konveksni ovojnici. Slika 3 prikazuje prve korake Jarvisovega obhoda.

Algoritem kot vhodna podatka sprejme seznama koordinat točk množice M in kot rešitev vrne seznam točk, ki tvorijo konveksno ovojnico.

V prvem koraku algoritem najprej poišče skrajno levo točko, ki jo najdemo v času $O(n)$. Potem sledijo koraki, v katerem zaporedoma iščemo naslednja vozlišča v konveksni ovojnici s pregledom vseh vozlišč. To storimo v času $O(n)$, kar pomeni, da je skupna časovna zahtevnost $O(n^2)$. S pazljivim načrtovanjem in pravilno izbiro podatkovnih struktur, je mogoče ta algoritem implementirati s časovno zahtevnostjo $O(n \cdot h)$, kjer je h število vozlišč konveksne ovojnice.



SLIKA 3.
Prva dva koraka Jarvisovega obhoda. Črtkana črta pomeni vrvico, črna polna črta smer v katero vlečemo vrvico, modra polna črta delno konveksno ovojnico

```
jarvis (X[1,..,n],Y[1,..,n]):
  resitev = array()
  k = 1
  za (i = 1, i <= n, i++):
    če (X[i] < X[k]) potem:
      k = i

  resitev[] = k
  p = k
  ponavaljaj
    q = p + 1
    za (i = 2, i <= n, i++):
       če CCW(p, i, q) potem
         q = i

    resitev[] = q
    p = q
  dokler p = q

  rezultat = resitev
```

V algoritmu najprej poiščemo skrajno levo točko, ki jo označimo s k. Nato jo dodamo v seznam rešitev, določimo da je $p = q$ (potrebujemo zaradi zanke v nadaljevanju) in nadaljujemo z naslednjo zanko *ponavaljaj* (vrstica 8). V zanki določimo točko q, ki bo označevala trenutno najbolj desno (v smeri CCW) točko glede na p. V notranji zanki pregledamo vse točke in če najdemo točko i, ki je še bolj desno od točke p, kot je trenutno q, potem i postane novi q. Ko se notranja zanka zaključi, je v q dejansko shranjena najbolj desna točka od točke p in jo zato shranimo v rešitev, q pa postane nova točka p. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo spet do začetne točke k. V seznamu so tako vse točke, ki tvorijo konveksno ovojnico množice M.

Grahamov pregled

Grahamov pregled je algoritem, ki spet uporablja lastnost CCW glede na urejenost treh točk. V prvem koraku podobno kot v Jarvisovem obdhodu poiščemo najnižjo ali najbolj levo točko p. Nato uredimo vse ostale točke glede glede na lastnost CCW in točko p, kar lahko naredimo s poljubnim algoritmom za urejanje (hitro urejanje, urejanje z zlivanjem, ..). Ko v urejanju primerjamo dve točki i in q, preverimo ali je trojica p, i, q urejena v smeri ali nasprotni smeri urinega kazalca glede na p.

V algoritmu uporabljamo podatkovno strukturo *sklad* in dve metodi, ki sklada ne spreminjata. To sta

- metoda *vrh()*, ki vrne točko z vrha sklada,
- metoda *naslednjaPodVrhom()*, ki vrne točko, ki sledi točki na vrhu sklada,

ter metodi, ki sklad spreminjata:

- *push()*, kjer damo točko na sklad,
- *pop()*, kjer vzamemo točko iz vrha sklada.

Sledi algoritem, ki kot vhodne podatke sprejme seznama X in Y koordinat, vrne pa sklad, ki vsebuje seznam točk, ki tvorijo konveksno ovojnico.

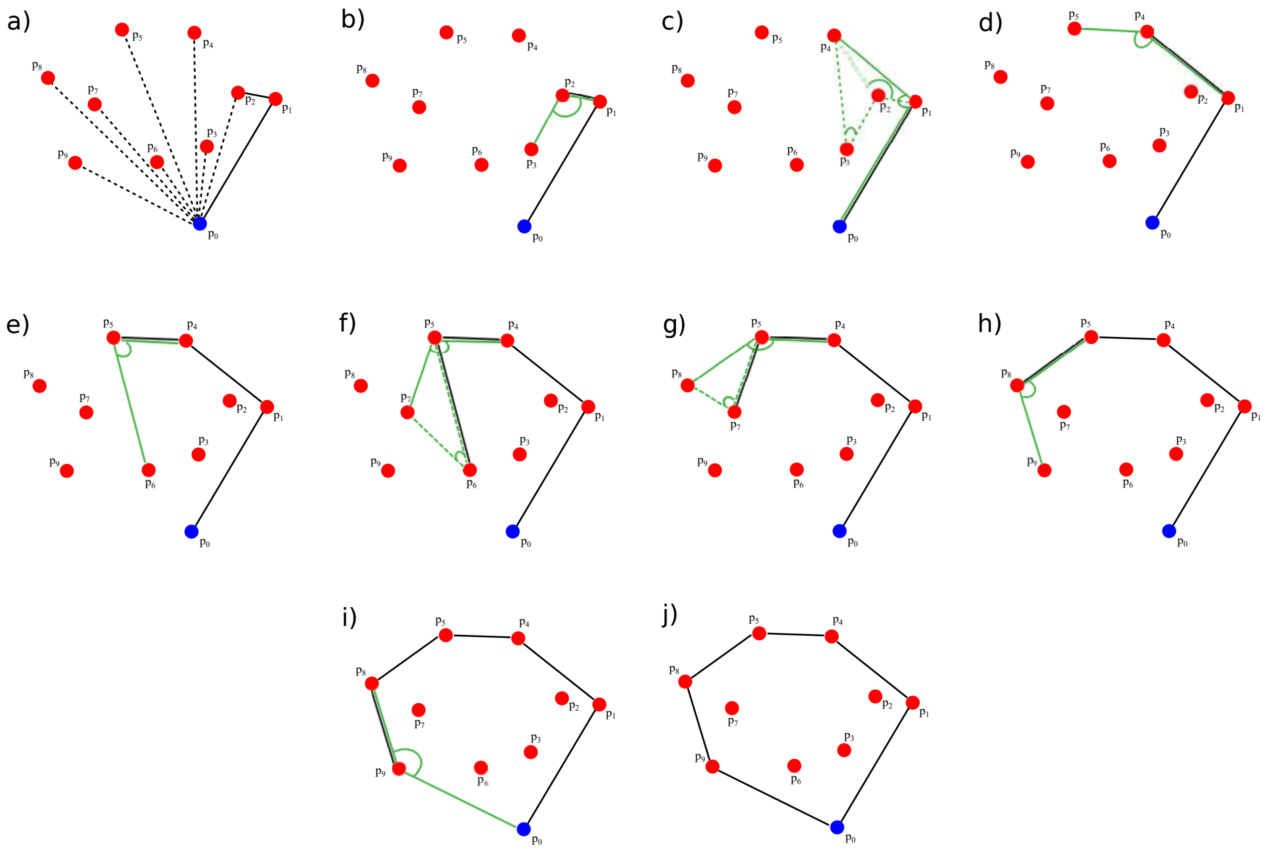
```
graham (X[1,..,n],Y[1,..,n]):
1   p_0 = točka z najmanjšo y-koordinato
2   P[i] = urejen seznam preostalih točk
3           // točke so urejene v CCW smeri
            // glede na p_0,
4           // i = 1 .. n - 1
5   S = prazen sklad
6   S.push(p_0)
7   S.push(P[1])
8   S.push(P[2])
9   za (i = 3, i <= n-1, i++)
10    dokler CCW(S.naslednjaPodVrhom(),
              S.vrh(), P[i]) == false)
11      S.pop()
12    S.push(P[i])

13  rezultat = S
```

Slika 4 prikazuje posamezne korake algoritma do končne določitve konveksne ovojnice. Najprej na sklad naložimo p_0 in naslednji dve točki iz seznama P. V zanki pregledamo vse točke (vrstica $9-11$), pričnemo s točko ($P[3]$) in jo primerjamo s $P[1]$ (*S.naslednjoPodVrhom()*) in $P[2]$ (*S.vrh()*), kot je prikazano na sliki 4b). Ker smo zavili v levo (CCW je *true*), dodamo točko $P[3]$ na sklad. Nadaljujemo s točko $P[4]$ in najprej preverimo CCW($P[2]$, $P[3]$, $P[4]$), ki je *false* (zavijemo v desno), zato točko $P[3]$ odstranimo iz sklada S. Ponovimo zanko (vrstica 10) z CCW($P[1]$, $P[2]$, $P[4]$), ki je spet *false*, saj zavijemo v desno, zato iz sklada S odstranimo točko $P[2]$. Nadaljujemo s preverjanjem CCW($P[0]$, $P[1]$, $P[4]$), ki je *true*, saj zavijemo levo, zato zanko (vrstica 10) zaključimo in dodamo točko $P[4]$ na sklad. Celoten korak je prikazan na sliki 4c). Postopek ponavljamo, dokler ne pregledamo vseh točk.

Ko pregledamo vse točke, na skladu ostanejo točke, ki tvorijo konveksno ovojnico, ki je prikazana na sliki 4j).

Časovna zahtevnost algoritma je $O(n \log n)$. Zakaj? Najprej poiščemo točko z najmanjšo koordinato x, označimo jo z p_0, za kar potrebujemo $O(n)$ časa. Sledi urejanje vseh točk glede na p_0 z upoštevanjem lastnosti CCW, za kar potrebujemo $O(n \log n)$ časa. Sledi določanje konveksne ovojnice, kjer pregledamo vsako točko (vrstice $9-11$) natančno enkrat, medtem ko se zanka dokler (vrstica $10-11$), kjer jemljemo točke iz sklada, izvede $n-h$, kjer je h število točk v konveksni ovojnici, zato vzame ta pregled $O(n)$ časa. Skupaj ima algoritem Grahamov pregled časovno zahtevnost $O(n \log n)$.



SLIKA 4.
Potek določanja konveksne ovojnice z Grahamovim pregledom. Črtkane zelene črte pomenijo, da v nekem koraku točka ni bila sprejeta, polna zelena črta pomeni, da je bila sprejeta.

Zaključek

Kje je konveksna ovojnica uporabna? Uporabimo jo lahko kot vmesni korak pri določitvi najbolj oddaljenih točk v ravnini. Dokazano je, da ti dve točki ležita na konveksni ovojnici, torej vemo med katerimi točkami moramo iskati. V programih za grafično obdelavo (Gimp, idr.) je zelo uporabna čarobna palčka (ang. Magic wand). Ko uporabnik klikne na neko točko na sliki, program poišče vse sosednje točke z enako barvo (ali tiste z določenim odstopanjem) in na njih uporabi algoritem za konveksno ovojnico. Rezultat je izbira v obliki poligona, katerega meje so točke konveksne ovojnice. Uporabljajo jo tudi vremenoslovci za določanje področja, kjer je neka vremenska sprememba (npr. dež). Najprej zberejo podatke vseh senzorjev na nekem širšem področju in nato izračunajo konveksno ovojnico okrog vseh senzorjev, ki sporočajo to spremembo. Rezultat je najmanjše konveksno področje, kjer se pojavlja ta sprememba (npr. dežuje).

Literatura

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, London, 2009.

[2] Dostopno na `wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Grahamov_pregled`, ogled 22. 1. 2018.

× × ×

SLIKA 1.
Vir in avtorska pravica: Gorazd Planinšič

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

PRESEK 45/3

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz tretje številke Preseka je **Leksikografska ureditev.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Alen Đudarić iz Celja, Jani Čede iz Petrovč in Ana Knap iz Preserj, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

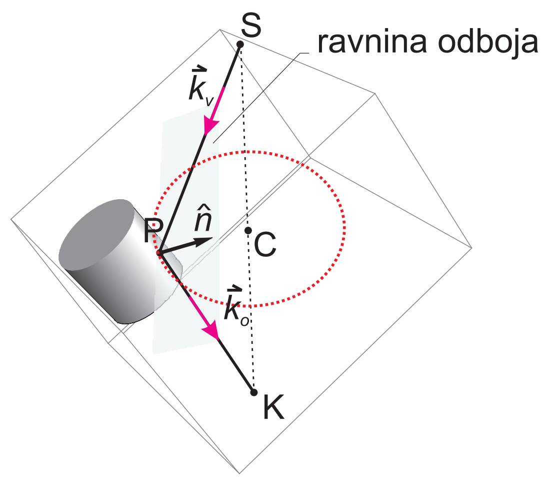
× × ×

Krožne veje

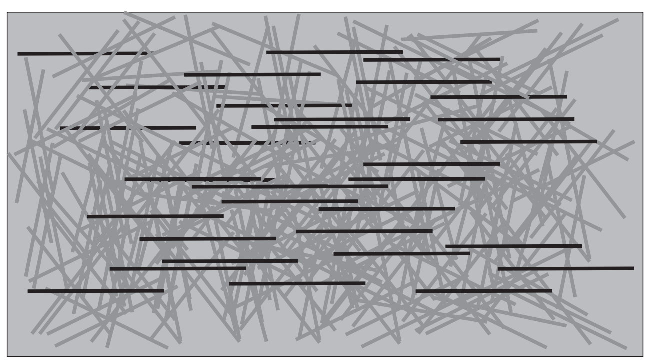
Aleš Mohorič

→ **Slika na naslovnici kaže zanimiv svetlobni pojav. Ulična svetilka se skriva med drevesnimi vejami, ki so na videz razporejene okoli svetilke v krogih. Fotografija je bila narejena v deževni noči, ko mokre veje v temi osvetljuje le svetilka. Dan razkrije, da veje ne rastejo v krogih, temveč neurejeno, kot bi pričakovali (slika 1, desno). Zakaj pa ponoči vidimo veje, razporejene v kroge?**

Pojav pojasnimo z odbojem. Odbojni zakon opišimo nekoliko bolj natančno, kot je opisan običajno: odbojni kot je enak vpadnemu. V tej izjavi zamolčimo, da ležijo vpadni žarek, ki ga ponazori valovni vektor $\vec{k}_v$, odbiti žarek $\vec{k}_o$ in enotski vektor $\hat{n}$, pravokoten na odbojno ploskev, vsi v isti ravnini, kakor kaže slika 2. Odbojni zakon pove, da se komponenta vpadnega valovnega vektorja, ki je vzporedna z odbojno ploskvijo, po odboju ne spremeni, komponenta pravokotna nanjo pa spremeni predznak. Med žarkoma torej velja zveza $\vec{k}_o = \vec{k}_v - 2(\vec{k}_v \cdot \hat{n})\hat{n}$. Svetloba, ki izhaja iz svetilke S, se do kamere K lahko odbije le od tistih točk na vejah P, v katerih $\hat{n}$ kaže proti središču namišljene krožnice C. C leži na zveznici kamere in svetilke, krožnica pa ima polmer CP. Torej je veja v točki P tangentna na to krožnico, ki obdaja pogled na svetilko. Drevesne veje seveda niso čisto gladke kot zrcalo ali zglajena kovina, ampak hrapave in odboj je razpršen. Pri suhih vejah odboja ne opazimo, opazimo ga pa takrat, ko so veje mokre. K interpretaciji slike doprinese tudi to, da oči razločijo le osvetljene dele vej, ostali pa se zlijejo z ozadjem. Lastnost možganov, da interpretira sliko s poenostavitvami, demonstrira računalniško generirana slika 3. Na sivi ploskvi so enakomerno razporejene naključno usmerjene daljice v nekoliko temnejšem odtenku sive. Na prvi pogled izstopajo vodoravne daljice, ki pa so narisane črno.



SLIKA 2.



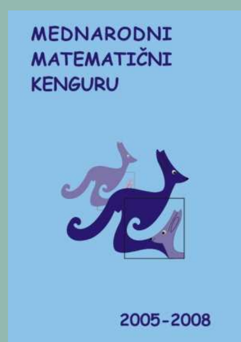
SLIKA 3.

Matematični kenguru

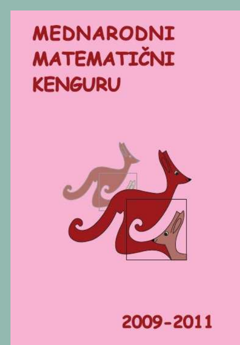
Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!