

PRESEK LETNIK 43 (2015/2016) ŠTEVILKA 4

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

4



- STRIŽENJE NEENAKOSTI
- FOTOGRAFSKI OBJEKTIVI IN SCHEIMPFLUGOVO NAČELO
- POZABLJENA UMETNOST SFERNE TRIGONOMETRIJE
- IGRA ANGRY BIRDS V REALNEM ČASU IN PROSTORU

ISSN 0351-6652



9 770351 665340

Verjetnost zmage v primeru prednosti pred koncem tekme



→ Nekateri gledalci se sprašujejo, če bo tekme sploh kdaj konec, večina navdušencev pa želi vedeti le, kako se bo ta tekma končala. Skupina znanstvenikov je s pomočjo matematične ideje, ki ji pravimo naključni sprehod, ustvarila model, ki napoveduje, kako se pri tekmovalnem športu med tekmo spreminja prednost ene od ekip. Ugotovili so, da lahko verjetnost, da je prednost L točk t sekund pred koncem tekme varna (to je, ekipa s prednostjo bo na koncu zmagala), izračunamo s pomočjo izraza, ki vsebuje trigonometrične in eksponentne funkcije. Ta formula, recimo, predvideva, da bo z 90 % verjetnostjo zmagala ekipa, ki osem minut pred koncem vodi za 10 točk; ali pa npr. ekipa, ki ob polčasu vodi za 18 točk.

Morda se zdi nenavadno, da je rezultat tekem do neke mere naključen kljub natančno znanim izjemnim sposobnostim profesionalnih igralcev. Vendar izčrpani podatki z več kot 10 000 profesionalnih košarkarskih tekem potrjujejo, da je formula točna v približno 95 % primerov. Znanstveniki so formulo preizkusili tudi v primerih drugih športov in ugotovili, da se njena natančnost malenkost zmanjša pri športih, pri katerih je možno doseči bistveno manj točk.

Bolj radovedni bralci si lahko preberete članek *Safe Leads and Lead Changes in Competitive Team Sports*, ki so ga leta 2015 v reviji *Physical Review Letters* (E) objavili avtorji A. Clauset, M. Kogan in S. Redner.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

© 2016 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1983

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Verjetnost zmage v primeru prednosti pred koncem tekme

MATEMATIKA

- 4-7** Striženje neenakosti
(*Igor Klep*)
- 8-12** Sistemi linearnih enačb skozi zgodovino
(*Marjan Jerman*)

FIZIKA

- 13-15, 18** Fotografski objektiv in Scheimpflugovo načelo
(*Peter Legiša*)
- 18** Razmisli in poskusi
(*Mitja Rosina*)

SLIKA NA NASLOVNICI: Sonce prodira skozi meglo sivega zimskega dne. Več o sliki v rubriki Naravoslovna fotografija.
Foto: Aleš Mohorič

ASTRONOMIJA

- 19-25** Pozabljena umetnost sferne trigonometrije
(*Aleksander Simonič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 26-29** Igra Angry Birds v realnem času in prostoru
(*Dominik Robič in Robert Repnik*)

RAZVEDRILO

- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 43/3
(*Marko Bokalič*)
- 30-31** Naravoslovna fotografija – Sončeva pega
(*Aleš Mohorič*)

TEKMOVANJA

- priloga** Tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje
- priloga** 59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje
- priloga** 59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Striženje neenakosti



IGOR KLEP

→ V prispevku bomo pokazali, kako lahko s pomočjo striženja dokazujemo neenakosti.

Uvod

Ena izmed najbolj prepoznavnih neenakosti je neenakost med aritmetično in geometrično sredino dveh števil. Ta pravi, da za poljubni nenegativni realni števili x, y velja

$$\bullet \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad (1)$$

pri čemer velja enakost natanko takrat, ko je $x = y$. Torej imamo za $x \neq y$ v (1) strogo neenakost

$$\bullet \frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}.$$

Izrazu na levi strani neenakosti (1) pravimo **aritmetična sredina** števil x in y , desna stran pa je njuna **geometrična sredina**. Podajmo še enovrstični dokaz te neenakosti:

$$\bullet \frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Definiramo lahko tudi aritmetično in geometrično sredino za več števil. Naj bo podano naravno število n in nenegativna realna števila x_1, \dots, x_n . Potem izrazu

$$\bullet \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

pravimo **aritmetična sredina**, izrazu

$$\bullet \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

pa **geometrična sredina** števil x_1, x_2, \dots, x_n . Neenakost (1) velja tudi bolj splošno v primeru n spremenljivk.

Izrek 1 Neenakost med aritmetično in geometrično sredino. Naj bo n naravno število in naj bodo x_1, x_2, \dots, x_n nenegativna realna števila. Potem je

$$\bullet \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad (2)$$

pri čemer enakost v (2) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

V nadaljevanju si bomo ogledali enega izmed mnogih dokazov te neenakosti, ki sloni na tehniki striženja neenakosti. To tehniko bomo nato uporabili še na več primerih.

Striženje neenakosti

Načelo striženja v najpreprostejši obliki pove sledeče. Denimo, da želimo dokazati neenakost

$$\bullet f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3)$$

ki postane boljša, če zblížamo vrednosti dveh izmed spremenljivk x_i . Natančneje povedano, razlika $f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ postane manjša, če fiksiramo vse razen dveh spremenljivk, preostali dve spremenljivki pa zblížamo. Torej za y_1, y_2 z $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ velja

$$\bullet f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq f(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - g(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n). \quad (4)$$

Če velja $f(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) \geq g(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n)$, tedaj velja tudi začetna neenakost (3). Tako poskušamo (3) s pomočjo zvitih substitucij privedi do preprostejše neenakosti, ki jo znamo dokazati.

Poglejmo sedaj, kako lahko to načelo uporabimo v praksi.

Dokaz izreka 1 Napravili bomo vrsto substitucij, ki bodo ohranjale levo stran (aritmetično sredino $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$) in hkrati povečevale desno stran (geometrično sredino $g(x_1, \dots, x_n) =$

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$). Na koncu niza substitucij bodo vsi x_i enaki in leva stran neenakosti (2) bo enaka desni strani. S tem bomo dokazali neenakost med aritmetično in geometrično sredino.

Če so vsi izmed x_i enaki njihovi aritmetični sredini $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, ki jo bomo označili z \bar{x} , potem neenakost (2) očitno drži. V nasprotnem primeru pa obstajata indeksa i in j , za katera je $x_i < \bar{x} < x_j$. (Ne morejo biti vsi x_k večji od \bar{x} , prav tako pa ne morejo biti vsi x_k manjši od \bar{x} .) Par x_i, x_j zamenjamo z

$$x_i \rightsquigarrow x'_i = \bar{x}, \quad x_j \rightsquigarrow x'_j = x_i + x_j - \bar{x},$$

vse ostale spremenljivke x_k pa pustimo pri miru.

Očitno je $x'_i > 0$, $x'_j = x_i + x_j - \bar{x} \geq x_j - \bar{x} > 0$. Hkrati velja

$$x'_i + x'_j = \bar{x} + x_i + x_j - \bar{x} = x_i + x_j.$$

Torej z zamenjavo spremenljivk nismo spremenili vrednosti leve strani neenakosti (2). Pokažimo pa, da smo povečali vrednost desne strani:

$$x'_i x'_j = \bar{x}(x_i + x_j - \bar{x}) = x_i x_j + (\bar{x} - x_i)(x_j - \bar{x}) > x_i x_j.$$

Opisani postopek sedaj nadaljujemo. Opazimo, da i -te spremenljivke ne bomo nikoli več spremenili, ker je že enaka aritmetični sredini \bar{x} . Tako bomo po kvečjemu $n - 1$ koraku prišli do položaja, ko bodo vse spremenljivke enake, neenakost (2) pa bo izpolnjena, saj bosta obe strani enaki \bar{x} . Po načelu striženja je s tem neenakost med aritmetično in geometrično sredino dokazana.

Spotoma smo dokazali tudi, kdaj velja enakost: če sta imeli dve spremenljivki različni vrednosti, potem smo jih lahko zamenjali tako, da smo ohranili levo stran neenakosti in strogo povečali desno stran. Torej enakost v (2) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ■

Tukaj velja opozoriti, da izbira zamenjave $x_i \rightsquigarrow \bar{x}$ in $x_j \rightsquigarrow x_i + x_j - \bar{x}$ zgoraj ni bila naključna. Če bi na primer oba x_i in x_j zamenjali z njunim povprečjem $\frac{x_i + x_j}{2}$, potem bi bil postopek striženja neskončen (ne bi se končal po končno mnogo korakih) in bi se morali ukvarjati s konvergenco in drugimi tehničnimi zapletmi.

Nadaljnji zgledi potenčnih sredin

Oglejmo si še nekaj primerov uporabe striženja neenakosti.

Neenakost med geometrično in harmonično sredino

Nekoliko tehnično zahtevnejši, a vsebinsko podoben je dokaz neenakosti med geometrično in harmonično sredino. Se pravi, da za vsako naravno število n in pozitivna realna števila x_1, x_2, \dots, x_n velja

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \quad (5)$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Izrazu na desni strani neenakosti (4) pravimo **harmonična sredina** števil x_1, x_2, \dots, x_n .

Označimo harmonično sredino s h . Če so vsi izmed x_i enaki h , potem neenakost (4) očitno drži. V nasprotnem primeru pa obstajata indeksa i in j , za katera je $x_i < h < x_j$. Res, če bi bili vsi $x_j < h$, potem je

$$\begin{aligned} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} &< \frac{n}{\frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \cdots + \frac{1}{h}} = \\ &= h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \end{aligned}$$

kar je očitno protislovje. Podobno lahko vidimo, da niso vsi $x_i > h$.

Sedaj par x_i, x_j zamenjamo z

$$x_i \rightsquigarrow x'_i = h, \quad x_j \rightsquigarrow x'_j,$$

pri čemer x'_j izberemo tako, da se desna stran (4) ne spremeni:

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j} = \frac{1}{x'_i} + \frac{1}{x'_j} = \frac{1}{h} + \frac{1}{x'_j}.$$

Torej je

$$x'_j = \frac{hx_i x_j}{hx_i + hx_j - x_i x_j} > 0,$$

saj je imenovalec $hx_i + hx_j - x_i x_j = (h - x_j)x_i + hx_j = (h - x_i)x_j + hx_i$ pozitiven. Kot prej vse ostale spremenljivke x_k pustimo nespremenjene.





Poglejmo, kaj se ob tej zamenjavi spremenljivk zgodi z levo stranjo (4):

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x'_i x'_j - x_i x_j &= h \frac{hx_i x_j}{hx_i + hx_j - x_i x_j} - x_i x_j \\ &= x_i x_j \left(\frac{h^2}{hx_i + hx_j - x_i x_j} - 1 \right) \\ &= x_i x_j \frac{h^2 - (hx_i + hx_j - x_i x_j)}{hx_i + hx_j - x_i x_j} \\ &= x_i x_j \frac{(h - x_i)(h - x_j)}{hx_i + hx_j - x_i x_j} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pri čemer smo v zadnjem koraku upoštevali $x_i < h < x_j$ in

$$\blacksquare \quad hx_i + hx_j - x_i x_j > hx_i + x_i x_j - x_i x_j = hx_i > 0.$$

Opisani postopek sedaj nadaljujemo. Opazimo, da se i -te spremenljivke ne bomo več dotaknili, ker je že enaka harmonični sredini h . Tako bomo po kvečjemu $n - 1$ koraku prišli do položaja, ko bodo vse spremenljivke enake, neenakost (4) pa bo izpolnjena, saj bosta obe strani enaki h . Po načelu striženja je s tem neenakost med geometrično in harmonično sredino dokazana.

Spotoma smo dokazali tudi, kdaj velja enakost: če sta imeli dve spremenljivki različni vrednosti, potem smo jih lahko zamenjali tako, da smo ohranili desno stran neenakosti in strogo zmanjšali levo stran. Enakost v (4) velja natanko takrat, ko je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

Neenakost med kvadratično in aritmetično sredino

Povsem analogno je moč dokazati tudi neenakost

$$\blacksquare \quad \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (6)$$

kjer levo stran imenujemo **kvadratična sredina** števil x_1, \dots, x_n . To prepuščamo bralcu za vajo.

Kapitalistična neenakost

Izrek 2 Naj bo n naravno število in naj bosta $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ in $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ padajoči zaporedji realnih števil. Če je z_1, z_2, \dots, z_n poljubna permutacija (prerazporeditev) zaporedja y_1, y_2, \dots, y_n ,

potem velja

$$\blacksquare \quad x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Razložimo najprej od kod ime te neenakosti. Recimo, da trgovina prodaja banane po 1 EUR/kg, čokolado pa po 5 EUR/kg. Kdaj bodo prihodki trgovine večji, če proda 10 kg banan in 5 kg čokolade *ali* če proda 5 kg banan in 10 kg čokolade?

Dokaz izreka 2 Tudi to neenakost lahko dokažemo s striženjem. Oglejmo si levo stran neenakosti (6). Recimo, da permutirano zaporedje z_1, z_2, \dots, z_n ni padajoče. Potem ostajata indeksa i in j , za katera velja $i < j$ in $z_i < z_j$. Če ti števili med sabo zamenjamo, vse ostale z_k pa pustimo pri miru, potem se leva stran (6) poveča:

$$\blacksquare \quad x_i z_i + x_j z_j \leq x_i z_j + x_j z_i, \quad (7)$$

saj je zaradi monotonosti zaporedja x_i ,

$$\blacksquare \quad x_j(z_j - z_i) \leq x_i(z_j - z_i).$$

Opazimo, da velja enakost v (7) natanko tedaj, ko je $x_i = x_{i+1} = \dots = x_j$. To pomeni, da je leva stran neenakosti (6) največja tedaj, ko je zaporedje z_i padajoče, kar smo želeli dokazati. ■

Neenakosti (6) včasih pravimo tudi preureditvena neenakost.

Primer

Naj bodo x_1, \dots, x_{2015} realna števila, katerih vsota je vsaj 2015 in katerih vsota kvadratov je vsaj 2015^2 . Pokaži, da ne morejo biti vsi x_i manjši od 2.

Denimo, da trditev ne drži. V tem primeru obstajajo x_i , za katere je

$$\blacksquare \quad \sum_{i=1}^{2015} x_i \geq 2015, \quad \sum_{i=1}^{2015} x_i^2 \geq 2015^2 \quad \text{in} \quad x_i < 2 \quad \text{za vse } i.$$

Najprej opazimo, da mora biti vsaj eno od števil negativno. V nasprotnem primeru namreč velja

$$\blacksquare \quad 2015^2 > 2^2 \cdot 2015 > \sum_{i=1}^{2015} x_i^2 \geq 2015^2,$$

kar je protislovje. Sedaj lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\sum_{i=1}^{2015} x_i = 2015$; če je vsota x_i strogo večja od 2015, pomanjšamo kakšnega od negativnih x_i , da dobimo vsoto 2015. Ob tem se vsota kvadratov povečuje, torej je še vedno vsaj 2015^2 , hkrati pa so vsi x_i manjši od 2.

Predpostavimo, da sta dva izmed x_i , npr. x_1 in x_2 , manjša od 2. Zamenjamo ju z 2 in $x_1 + x_2 - 2$. S tem se vsota števil x_i ne spremeni, vsota kvadratov pa se poveča za $2(2 - x_1)(2 - x_2)$. Postopek ponavljamo. Na koncu bodo vsa števila razen enega enaka 2, preostalo število pa bo -2013 . Vendar pa tedaj dobimo

$$\sum_{i=1}^{2015} x_i^2 = 2014 \cdot 2^2 + 2013^2 = 2015^2,$$

kar je v nasprotju s predpostavko, da je vsota vseh x_i^2 večja od 2015^2 .

Primer

Naj bodo x, y, z nenegativna realna števila, za katera je $x + y + z = 1$. Potem velja

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}. \quad (8)$$

Vsaj ena od spremenljivk je manjša od $\frac{1}{2}$. Ker je izraz na levi strani (8) simetričen, lahko po potrebi preimenujemo spremenljivke in dosežemo, da je $x \leq \frac{1}{2}$. Levo stran neenakosti (8) sedaj preuredimo v

$$x(y + z) + yz(1 - 2x). \quad (9)$$

Ker je $1 - 2x \geq 0$, lahko ostrižemo y in z . Obe spremenljivki postavimo na $\frac{y+z}{2}$. S tem se vrednost izraza (9) ni zmanjšala (uporabimo neenakost med aritmetično in geometrično sredino na yz). Hkrati pa smo dosegli, da so vse tri spremenljivke manjše ali enake $\frac{1}{2}$.

Izberimo si sedaj srednjo od spremenljivk; ponovno lahko po morebitnem preimenovanju spremenljivk predpostavimo, da je to x . Ena od spremenljivk y, z je tako vsaj $\frac{1}{3}$, druga pa kvečjemu $\frac{1}{3}$. Ponovno ostrižemo y in z - tisto spremenljivko, ki je bližje $\frac{1}{3}$, postavimo na $\frac{1}{3}$, preostalo pa na $y + z - \frac{1}{3}$. Tako povečamo levo stran (9), hkrati pa smo dosegli, da je ena od spremenljivk enaka $\frac{1}{3}$.

Po potrebi preimenujemo spremenljivke, da postane $x = \frac{1}{3}$. V zadnjem koraku ostrižemo y, z in dosežemo, da je $x = y = z = \frac{1}{3}$. Za to trojico v (8) velja enakost. S tem je naloga rešena. ■

Vaje

Bralca vabimo, da se preizkusi na naslednjih primerih.

1. Dokaži, da za vsa nenegativna realna števila a, b, c velja

$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

2. Za realna števila $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ poišči najmanjšo vrednost izraza

$$|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{2015}|.$$

Za katere vrednosti x je ta minimum dosežen?

3. Pokaži, da za pozitivna realna števila a, b, c velja

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

4. Naj za $a_1, \dots, a_{2015} \geq 0$ velja $a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = 1$. Poišči maksimum izraza

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2014} a_{2015}.$$

Literatura

- [1] Kiran Kedlaya, *A < B (A is less than B)*, <https://artofproblemsolving.com/articles/files/KedlayaInequalities.pdf>, ogled: 12. 1. 2016.
- [2] Thomas Mildorf, *Olympiad Inequalities*, <https://artofproblemsolving.com/articles/files/MildorfInequalities.pdf>, ogled: 12. 1. 2016.
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Mean>, ogled: 12. 1. 2016.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.obzornik.si

Sistemi linearnih enačb skozi zgodovino



MARJAN JERMAN

Uvod

Moderno reševanje sistemov linearnih enačb v veliki meri sloni na Gaussovem (1777–1855) članku iz leta 1809, ko je ob opazovanju asteroida Pallas rešil sistem enajstih enačb s šestimi neznankami. Njegovo metodo sta izpopolnila in modernizirala James Joseph Sylvester (1814–1897), ki je leta 1850 uvedel matrike, in Arthur Cayley (1821–1895), ki je matrike povezal s sistemi linearnih enačb.

Bralca na primeru spomnimo, kako danes poteka Gaussova eliminacija. Rešili bomo naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 3x + 2y + 2z + u = -1 \\ & x + y + z + 5u = 5 \\ & 2x + y + z + 5u = 3 \\ & x + 2y - 4z + 3u = 11 \end{aligned}$$

Postopoma bomo na videz zapleten sistem enačb pretvorili v ekvivalenten, a veliko bolj enostaven in lažje rešljiv sistem. Pri tem bomo izvajali t. i. Gaussove transformacije, ki ohranjajo množico rešitev sistema enačb:

- Vrstni red enačb lahko zamenjamo.
- Enačbo lahko pomnožimo s številom, ki ni enako 0.
- Poljubni enačbi smemo prišteti poljuben večkratnik kake druge enačbe.

Ker se želimo izogniti računanju z ulomki, najprej

zamenjajmo vrstni red prve in zadnje enačbe:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x + 2y - 4z + 3u = 11 \\ & x + y + z + 5u = 5 \\ & 2x + y + z + 5u = 3 \\ & 3x + 2y + 2z + u = -1 \end{aligned}$$

Prvo enačbo ohranimo in hkrati uporabimo zato, da z odštevanjem njenih večkratnikov odstranimo spremenljivko x iz ostalih enačb (od druge enačbe odštejemo prvo enačbo, od tretje dvakratnik prve in od četrte trikratnik prve):

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x + 2y - 4z + 3u = 11 \\ & -y + 5z + 2u = -6 \\ & -3y + 9z - u = -19 \\ & -4y + 14z - 8u = -34 \end{aligned}$$

Sedaj prepisemo prvo in drugo enačbo ter s pomočjo druge enačbe uničimo spremenljivko y v ostalih enačbah:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x + 2y - 4z + 3u = 11 \\ & -y + 5z + 2u = -6 \\ & -6z - 7u = -1 \\ & -6z - 16u = -10 \end{aligned}$$

Na koncu prepisemo prve tri enačbe in se s pomočjo tretje znebimo spremenljivke z v četrti enačbi:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x + 2y - 4z + 3u = 11 \\ & -y + 5z + 2u = -6 \\ & -6z - 7u = -1 \\ & -9u = -9 \end{aligned}$$

Sedaj rešujemo enačbe od spodaj navzgor: $u = 1$

$$\blacksquare \quad -6z - 7u = -1 \Rightarrow -6z = 6 \Rightarrow z = -1$$

- $-y + 5z + 2u = -6 \Rightarrow -y - 5 + 2 = -6 \Rightarrow y = 3$
- $x + 2y - 4z + 3u = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow x = -2$

Postopek je izjemno učinkovit. Tisti, ki jih zanima računalništvo, so morda opazili, da potrebujemo le eno tabelo za shranjevanje koeficientov, ki jih med postopkom zamenjujemo z novimi:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & -19 \\ 0 & -4 & 14 & -8 & -34 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -16 & -10 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Postopek odkrije tudi bolj neobičajne primere, ko sistem enačb bodisi ni rešljiv ali pa je rešitev več.

Gaussov postopek, recimo, sistem enačb

- $x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 7,$

prevede v sistem

- $x + 2y = 3, \quad 0 = 1,$

ki je očitno protisloven.

Sistem

- $x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 6$

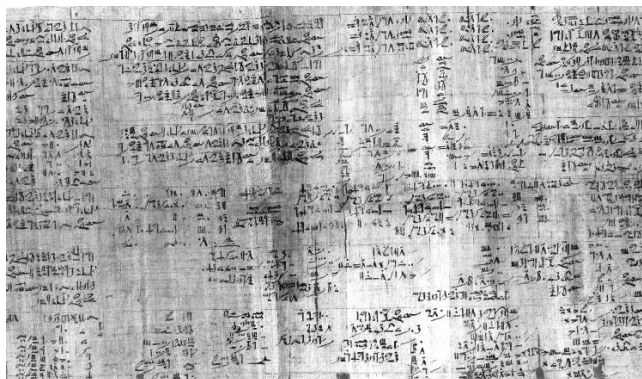
pa prevede na sistem

- $x + 2y = 3, \quad 0 = 0,$

ki ima neskončno rešitev oblike $x = 3 - 2y$.

Že zelo stare civilizacije so pri reševanju praktičnih problemov naletele na sisteme linearnih enačb. Poraja se zanimivo vprašanje, kako so jih reševali, če vemo, da niso premogli niti udobnega matematičnega zapisa niti osnovnega znanja linearne algebre. Poglejmo si nekaj najbolj zanimivih utrinkov iz zgodovine matematike.

Egipt



SLIKA 1.

Rhindov papirus je zvitek širine 32 cm in dolžine 536 cm. Na sliki je manjši sredinski kos papirusa.

Večino stare egipčanske matematike poznamo preko dveh papirusov, ki izvirata iz obdobja nekje med 1850 in 1650 let pr. n. št. Tako imenovani *Rhindov papirus* je škotski arheolog Alexander Henry Rhind (1833–1866) kupil v Luxorju, danes pa ga lahko najdete v Britanskem muzeju. Pisar Ahmes je zapisal 84 problemov. Štiriindvajseti se glasi:

Če neki količini dodamo njeno četrtno, dobimo 15. Kolikšna je ta količina?

Problem reši s tedaj običajno metodo napačne predpostavke. Najprej poskusi, če je morda 4 ustrezna rešitev. Ker je

$$\bullet \quad 4 + \frac{4}{4} = 5,$$

kar je trikrat manj kot zelenih 15, napačno rešitev poveča za trikrat in s tem dobi pravo rešitev 12. Res je

$$\bullet \quad 12 + \frac{12}{4} = 15.$$

Radovedni bralci, pomislite, ali lahko takšno sklepanje uporabimo za reševanje bolj zapletenih enačb!

Babilon

O babilonski matematiki vemo veliko več, ker so se dobro ohranili zapisi na glinenih ploščah. Iz pribli-





SLIKA 2.

Babilonska glinena ploščica VAT8389

žno istega obdobja kot Rhindov papirus izhajajo glinena tablica številka 8389, ki jo hranijo v Muzeju antičnega Bližnjega vzhoda v Berlinu. Da bo vsebina tablice lažje razumljiva, najprej navedimo babilonske merske enote: bur in sar sta ploščinski meri, bur = 1800 sar, sar = 36 m²; kur in sila pa prostorninski meri, kur = 300 sil, sila = liter.

Naloga se glasi takole:

Prvo polje da 4 kur/bur pšenice drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugega za 500 sil. Skupna površina obeh polj je 1800 sar. Koliko pridelka je zraslo na posameznem polju?

V današnjem matematičnem jeziku bi nalogo zapisali kot sistem dveh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x + y = 1800 \\ & \frac{4 \cdot 300}{1800}x - \frac{3 \cdot 300}{1800}y = 500 \end{aligned}$$

Babilonci takšnega zapisa niso poznali, prav tako niso poznali Gaussovega postopka eliminacije. Reševanja so se lotili zelo premeteno. Da bo njihova rešitev bolj jasna, jo zapišimo v današnji notaciji.

Najprej so izračunali

$$\blacksquare \quad \frac{x + y}{2} = 900.$$

Nato so uvedli novo spremenljivko

$$\blacksquare \quad z = \frac{x - y}{2}.$$

ki je z velikostima polj povezana z enostavnima zvezama

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x &= \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = 900 + z, \\ y &= \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = 900 - z. \end{aligned}$$

S pomočjo nove spremenljivke se druga enačba v sistemu prevede na linearno enačbo

$$\blacksquare \quad \frac{2}{3}(900 + z) - \frac{1}{2}(900 - z) = 500,$$

ki je ekvivalentna enostavnejši enačbi

$$\blacksquare \quad \frac{7}{6}z = 350.$$

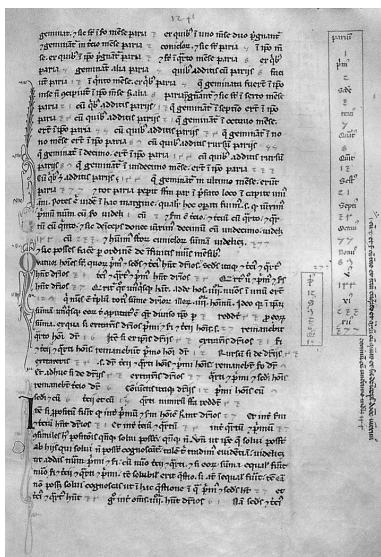
Od tod so dobili $z = 300$, $x = 900 + z = 1200$ in $y = 900 - z = 600$. Tako prvo polje meri 1200 sar, drugo pa 600 sar.

Pripomniti je treba, da je sistematično pridobivanje enostavnejših ekvivalentnih enačb opisal šele Al Khwarizmi (780–850) v svojem delu *Hisab al-jabr w'all-muqabala*. Postopek *al-jabr* v današnjem jeziku dopolni levo in desno stran enačbe tako, da izniči negativne člene, postopek *al-muqabala* pa enačbo uravnoteži, t. j. pokrajša enake vrednosti na obeh straneh enačbe. Radovedni bralec je morda iz nenavadnih arabskih besed razbral, od kod pride beseda algebra.

Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1175–1235) je v svoji knjigi *Liber abaci* zapisal naslednji nenavadni problem o (pozitivnem) premoženju petih mož in nepraznem mošnjičku:

Prvi in drugi mož imata skupaj z mošnjičkom dvakrat več denarja kot ostali trije skupaj. Drugi in tretji imata skupaj z mošnjičkom trikrat več denarja kot ostali trije; tretji in četrti skupaj z mošnjičkom štirikrat več kot ostali; četrti in peti skupaj z mošnjičkom petkrat več kot ostali; peti in prvi skupaj z mošnjičkom šestkrat več kot ostali. Koliko denarja je v mošnjičku?



SLIKA 3.

Stran iz Fibonaccijeve knjige *Liber Abaci* iz leta 1202

Z x_1, \dots, x_5 označimo premoženja posameznih mož, z y pa vsebino mošnjička. Danes bi problem zapisali s sistemom enačb:

- $x_1 + x_2 + y = 2(x_3 + x_4 + x_5)$
- $x_2 + x_3 + y = 3(x_1 + x_4 + x_5)$
- $x_3 + x_4 + y = 4(x_1 + x_2 + x_5)$
- $x_4 + x_5 + y = 5(x_1 + x_2 + x_3)$
- $x_5 + x_1 + y = 6(x_2 + x_3 + x_4)$

Tudi z današnjimi metodami bi nas ta sistem petih enačb s šestimi neznanikami kar precej namučil. Leonardo pa se je sistema lotil veliko bolj zvito. Opažil je veliko simetrijo v sistemu in vsaki enačbi prištel premoženja mož, ki se nahajajo na desni strani enačbe in hkrati manjkajo na levi. Tako je npr. prvi enačbi prištel na obeh straneh $x_3 + x_4 + x_5$, drugi $x_1 + x_4 + x_5$, ..., zadnji pa $x_2 + x_3 + x_4$. Vsoto $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ označimo z s . S tem sistem enačb prepisemo v obliko:

- $s + y = 3(x_3 + x_4 + x_5)$
- $s + y = 4(x_1 + x_4 + x_5)$
- $s + y = 5(x_1 + x_2 + x_5)$
- $s + y = 6(x_1 + x_2 + x_3)$
- $s + y = 7(x_2 + x_3 + x_4)$

Ta sistem je ekvivalenten sistemu:

- $\frac{1}{3}(s + y) = x_3 + x_4 + x_5$
- $\frac{1}{4}(s + y) = x_1 + x_4 + x_5$
- $\frac{1}{5}(s + y) = x_1 + x_2 + x_5$
- $\frac{1}{6}(s + y) = x_1 + x_2 + x_3$
- $\frac{1}{7}(s + y) = x_2 + x_3 + x_4$

Če seštejemo vse enačbe, se na desni strani premoženje vsakega od mož pojavi natanko trikrat. Tako je

- $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(s + y) = 3s,$
- $\frac{459}{420}(s + y) = 3s,$

torej

- $s + y = \frac{420}{153}s.$

Premoženje prvega moža dobimo s seštetjem druge in četrte enačbe:

- $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)(s + y) = x_1 + s,$
- $x_1 = \frac{5}{12} \frac{420}{153}s - s = \frac{22}{153}s.$

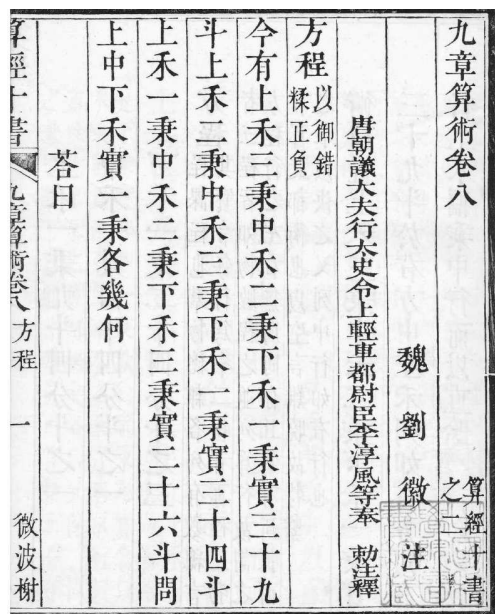
Podobno dobimo premoženje drugega moža s seštetjem tretje in pete enačbe:

- $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)(s + y) = x_2 + s,$
- $x_2 = \frac{12}{35} \frac{420}{153}s - s = -\frac{9}{153}s.$

Ta vrednost pa pomeni, da je drugi mož zadolžen, zato naloga sploh ni rešljiva!

Zaradi spoštovanja zgodovine povejmo, da je Leonardo zadnji del problema rešil malenkost drugače. Ko so se v tretjem sistemu pojavili ulomki, je kar privzel, da je $s + y = 420$. To je storil zato, da se je izognil računanju z ulomki. Število 420 je namreč najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev 3, 4, 5, 6 in 7. Njegov na videz napačen privzetek lahko opravičimo z linearnostjo sistema. Finančno gledano je Leonardo znesek $s + y$ zamenjal v valuto, v kateri je znesek vreden 420 enot.





SLIKA 4.

Prva naloga osmega poglavja kitajske knjige Devet poglavij matematične umetnosti

Kitajska

Največje presenečenje pa se skriva v kitajski knjigi *Devet poglavij matematične umetnosti*, ki verjetno izvira približno iz let 170–150 pr. n. št.

Prva naloga v osmem poglavju sprašuje takole:

Iz treh snopov najboljše žitarice, dveh snopov slabše in enega snopa najslabše dobimo 39 skodelic moke; iz dveh snopov najboljše, treh slabše in enega najslabše 34 skodelic in iz enega snopa najboljše, dveh slabše in treh najslabše 26 skodelic. Koliko skodelic moke dá posamezen snop vsake od žitaric?

Danes bi nalogo napisali kot sistem enačb:

- $3x + 2y + z = 39$
- $2x + 3y + z = 34$
- $x + 2y + 3z = 26$

Kitajci so za zapis števil uporabljali desetiški sistem in bambusove palčke, ki so jih polagali vodoravno ali navpično. Palčke so polagali na nekakšno ploščo, podobno veliki šahovski tabli. V knjigi je zapisana rešitev naloge, ki je sestavljena iz navodil za prestavljanje palčk.

Najprej je predstavljena tabela, ki bi jo z arabskimi števili zapisali takole:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Če pozorno pregledate tabelo, boste opazili, da se v stolpcih od desne proti levi skriva vsebina naloge.

Navodilo pravi, naj se najprej pomnoži vse elemente v drugem stolpcu s prvim elementom tretjega stolpca, potem pa naj se tretji stolpec odšteva od drugega, vse dokler na vrhu drugega stolpca ne dobimo ničle. Tako dobimo novo tabelico:

1	$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$	3
2	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$	1
3	$1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$	1
26	$34 \cdot 3 - 39 \cdot 2 = 24$	39

V jeziku moderne matematike so Kitajci naredili Gaussovo eliminacijo. Mi jo delamo po vrsticah od zgoraj navzdol, oni pa so jo naredili po stolpcih od desne proti levi. Postopek so nadaljevali tako, da so najprej s pomočjo tretjega stolpca uničili zgornji element v prvem stolpcu, na koncu pa še s pomočjo novega drugega stolpca drugi element v novem prvem stolpcu:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

→

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Tako so prišli do tablice, ki predstavlja analogijo našim zgornje trikotnimi matrikam: Iz tablice lahko preberemo, da iz enega snopa najslabše žitarice dobimo $z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$ skodelic moke. Do ostalih dveh donosov so prišli Kitajci podobno kot mi. S pomikanjem proti desni so vsakič dobili vrednost še ene, do sedaj neznanne spremenljivke, izražene z znanimi:

- $5y + \frac{11}{4} = 24 \Rightarrow y = \frac{17}{4},$
- $3x + 2\frac{17}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow x = \frac{37}{4}.$

× × ×

Fotografski objektivni in Scheimpflugovo načelo



PETER LEGIŠA

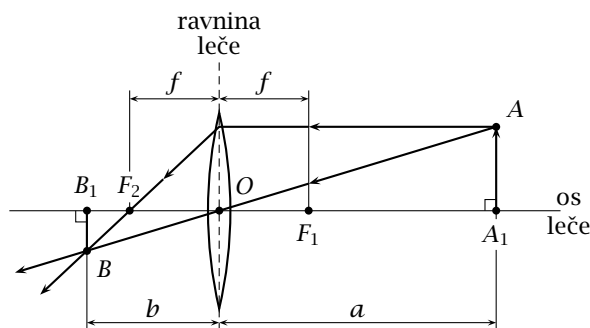
→ V srednji šoli pri fiziki zveste nekaj o lastnostih tanke leče z dvema sferičnima površinama. Taka leča je neobčutljiva za vrtenje okrog svoje osi, ki je zveznica središč ustreznih sfer. Zbiralna leča žarke, vzporedne z osjo leče, zbere v gorišču.

Taka leča ima dve gorišči: F_1 in F_2 (slika 1). Optično središče O leče leži na osi in ima lastnost, da žarki, ki gredo skozi O , ne spremenijo smeri. Goriščna razdalja f je razdalja med goriščem in optičnim središčem. Ravnina skozi O , pravokotna na os leče, je ravnina leče. Na sliki 1 je A_1 pravokotna projekcija točke A na os leče. Točko A leča upodobi v točko B , katere pravokotna projekcija na os je B_1 . Naj bosta $a = |OA_1|$ in $b = |OB_1|$ razdalji točk A, B od ravnine leče. Enačba leče pravi, da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Imejmo (ne preveliko) krožno ploščo K s središčem v točki A_1 , pravokotno na os leče. Leča jo upodobi na krožno ploščo L s središčem v B_1 , pravokotno na os leče.

Enostavna leča v praksi navadno ne daje zadovoljivih rezultatov. Snov, iz katere je leča, lomi svetlobo različnih valovnih dolžin bolj ali manj različno in je zato goriščna razdalja odvisna od valovne dolžine – temu pravimo *razklon* ali *disperzija* bele svetlobe. Ker leča ni idealno tanka, ima še druge napake. Tako je iluzorno pričakovati, da se bo snop bele svetlobe, vzporeden z osjo leče, res zbral v eni točki. Zato so že pred tremi stoletji začeli uporabljati sestave leč iz stekel z različnimi lastnostmi. Na ta način so bistveno izboljšali upodobitvene lastnosti. Že z zlepljenjem dveh primernih enostavnih leč je mogoče doseči, da ima sestav enako goriščno razdaljo za modro in za rdečo svetlobo. Takemu sestavu re-

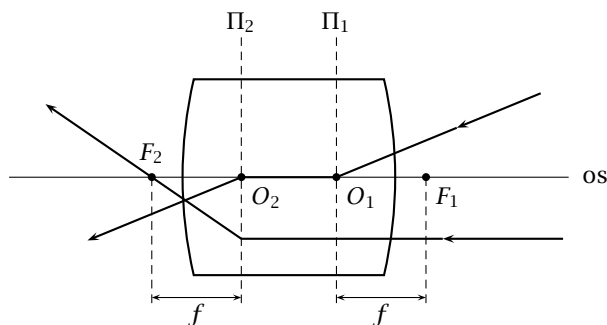


SLIKA 1.

čemo *akromat*. Če iščete predlečo za slikanje iz bližine, vzemite akromat, ki daje neprimerno boljše rezultate od enostavne leče. V konstrukcijo večlečnih objektivov že stoletja vlagajo ogromno truda, matematičnega znanja in računanja. Veliko sredstev gre tudi v razvoj posebnih stekel, ki, denimo, manj razklonijo svetlobo (gre za t. i. UD – ultra-low dispersion stekla). V zadnjem času pa nove tehnologije omogočajo tudi izdelavo *asferičnih* leč, katerih površina se posebno na robu precej razlikuje od površine krogle. Napredek v kakovosti in zmogljivosti je velik, še posebno pri zoom objektivih s spremenljivo goriščno razdaljo. Nove konstrukcije objektivov so potrebne tudi zato, ker je zaželeno, da svetloba na robne dele tipala ne pada preveč poševno. Zahteve so torej nekoliko drugačne kot pri slikanju na film.

Risanje poti žarkov skozi sistem leč s sferičnimi površinami, ki niso nujno tanke, je bilo pred obdobjem računalnikov naporno. Če pa se omejimo na t. i. *priosne* žarke, se pravi žarke, ki potekajo blizu osi sistema in so skoraj vzporedni osi, pa obstaja zelo lepa teorija, t. i. *Gaussova ali paraksialna optika*. Z uporabo 2×2 matrik bi jo danes lahko hitro razložili študentom drugega letnika na naravoslovnih ali tehničnih fakultetah (vtipkajte v iskalnik Matrix me-





SLIKA 2.

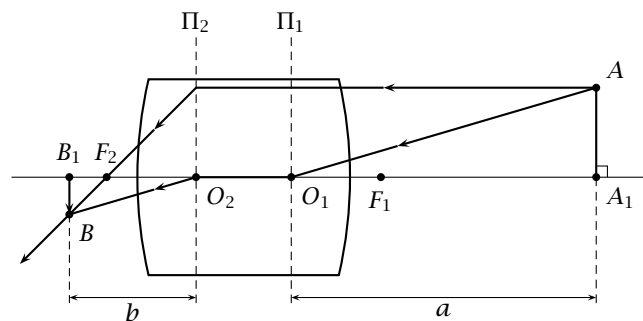
thods in paraxial optics, pa dobite več zadetkov, recimo [1].) Omejili se bomo na primer, da je naš sestav leč v zraku. Če bi bila recimo na eni strani voda – kot pri slikanju pod gladino – se stvari nekoliko zapletejo. Teorija (glej tudi [2], str. 41–43) nam pove, da za vsak tak fiksni sestav leč ali za vsak objektiv obstajata dve *glavni ravnini* Π_1 in Π_2 , pravokotni na os leče (slika 2). Ti ravnini sekata os leče v *glavnih točkah* O_1, O_2 . Mimogrede, za objektiv v zraku se glavni točki ujemata s t. i. *voziščema*. Žarek skozi O_1 izhaja iz objektiva kot žarek iz O_2 , vzporeden prvotnemu žarku. Sestav ima tudi dve gorišči, F_1 in F_2 . Razdalja $f = |F_1 O_1| = |F_2 O_2|$ je *goriščna razdalja*. Žarek, ki prihaja z desne vzporedno z osjo objektiva, je videti, kot da potuje neovirano skozi objektiv do druge glavne ravnine in se nato lomi tako, da gre skozi gorišče F_2 . Opozoriti moramo, da je slika 2 shematična: žarki niso priosni in dejanske poti žarkov *znotraj* objektiva so mnogo bolj zapletene od narisanih. Če na sliki 2 vzporedno premaknemo desni del slike, tako da O_1 preide v O_2 , dobimo običajen diagram za tanko lečo. Torej na sliki 3 za upodabljanje s sestavom leč velja še zmeraj enačba

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

le da je a razdalja med točko A in Π_1 , število b pa je razdalja med sliko B točke A in ravnino Π_2 .

Povejmo, da sta glavni ravnini lahko tudi zunaj objektiva. To je še posebno značilno za teleobjektive, ki so fizično krajši od svoje goriščne razdalje. Pri njih sta glavni ravnini pred objektivom. Pogosto sta glavni točki blizu skupaj in tako sestav upodablja skoraj tako kot tanka leča.

Če slikamo zelo zelo oddaljen objekt, je v enačbi



SLIKA 3.

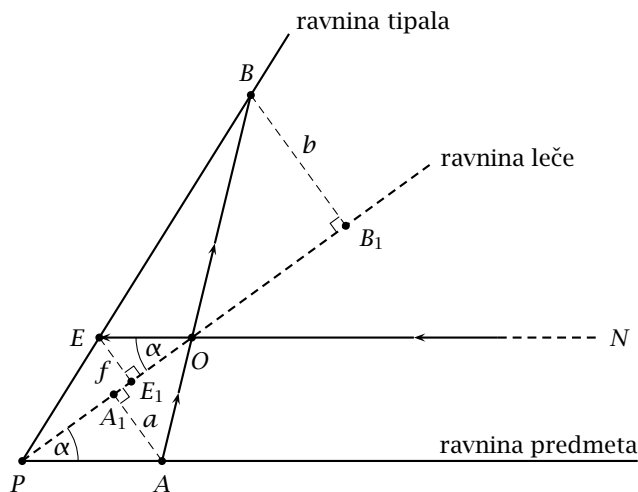
a ogromen, zato je $1/a$ praktično 0 in tako $b = f$. Slika neskončno oddaljene točke tako nastane v goriščni ravnini, ki vsebuje gorišče in je pravokotna na os. Pri fotoaparatu bo v tem primeru zadnje gorišče objektiva na tipalu. Če pa slikamo točke, ki so nam bližje, je a manjši, zato je $1/a$ večji in torej $1/b$ manjši, torej je b večji od f . Da bo na tipalu nastala ostra slika, moramo klasični objektiv nekoliko odmakniti od tipala.

Denimo, da slikamo tla v dolgi dvorani, ne moremo pa doseči, da bi bil senzor vzporeden tlom. Izostriamo nekam na sredino. Potem se bodo teoretično povsem ostro upodobile le točke na tej razdalji, praktično pa – saj ostrino slike omejuje velikost pikslov na tipalu – vse točke na nekem pasu okrog te razdalje. Govorimo o *globinski ostrini*. O tem sem pred leti pisal v Preseku [3]. (Članek je prosto dostopen na spletu in je še zmeraj aktualen, le da je – če je naš kriterij ostrina pri 100-odstotnem pogledu na zaslonu – za največji dovoljeni premer razmazanega krožca treba vzeti dve dolžini piksla na tipalu.) Pas globinske ostrine lahko razširimo, če zapremo zaslonko. Če pa preveč zapremo zaslonko, zaradi *uklona* trpi celotna ostrina slike. Zato imajo, recimo, aparati z majhnim tipalom (velikosti nohta) navadno zaslonko število največ 8, pa že tu je slika precej degradirana.

Že pred več kot sto leti sta francoski fotograf Carpentier in avstrijski častnik Scheimpflug odkrila, da z nagibanjem objektiva glede na ravnino filma (tipala) lahko včasih dosežemo, da so na sliki – ne glede na zaslonko – ostra celotna tla dvorane. Take nagibe objektiva s takratno opremo ni bilo težko doseči. Film (ali plošča) je bil v veliki leseni škatli, med objektivom in škatlo pa je bil gibljiv meh. Z nekaj

preproste mehanike je bilo mogoče doseči nagibanje in druge premike objektiv. Tudi sam imam zelo kakovostno sliko iz prvega razreda osnovne šole, ki je bila narejena okrog leta 1957 s tako škatlo, ki pa ni imela možnosti nagibanja objektiv.

Scheimpflugovo načelo za slikanje ravninskega predmeta pravi: **če se ravnina predmeta, zadnja glavna ravnina objektiv in ravnina tipala sekajo v isti premici, lahko ravnino predmeta v celoti ostro upodobimo na tipalu.**



SLIKA 4.

Dokažimo to. Na sliki 4 imamo narisano situacijo za primer enostavne leče. (Dokaz za sestavljen objektiv je praktično enak.) Omenjene tri ravnine se sekajo v premici, ki se na sliki projicira v točko P. Privzemimo, da smo izostrili tako, da je zelo zelo (neskončno) oddaljena točka N v ravnini predmeta ostro upodobljena na tipalu. Žarek iz N skozi optično središče O je (praktično) vzporeden z ravnino predmeta in seka tipalo v točki E, ki je slika točke N. Točka E je seveda za f oddaljena od ravnine leče. Zato na sliki 4 velja $|EE_1| = f$.

Naj bo A poljubna nadaljnja točka v ravnini predmeta, za $a = |AA_1|$ oddaljena od ravnine leče. Žarek iz A skozi O seka tipalo v točki B, ki je za $b = |BB_1|$ oddaljena od ravnine leče.

Na sliki 4 imamo dva podobna pravokotna trikotnika s kotom α . Zato je

$$\frac{|EO|}{f} = \frac{|PA|}{a},$$

od koder je

$$\frac{1}{a} = \frac{|EO|}{f|PA|}.$$

Podobna sta tudi pravokotna trikotnika PEE_1 in PBB_1 . Zato je

$$\frac{|PE|}{f} = \frac{|PB|}{b}.$$

Od tod je

$$\frac{1}{b} = \frac{|PE|}{f|PB|}.$$

Ker je $EN \parallel PA$, je

$$\frac{|EO|}{|PA|} = \frac{|EB|}{|PB|}.$$

Zato je

$$\frac{1}{a} = \frac{|EB|}{f|PB|}.$$

Od tod je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f|PB|} (|EB| + |PE|) = \frac{1}{f|PB|} |PB| = \frac{1}{f}.$$

Torej je točka B res ostra slika točke A na tipalu.

Objektiv lahko nagibajo nekatere profesionalne kamere velikega formata (na film), ki imajo še zmeraj meh med telesom kamere in objektivom. Take kamere so seveda danes že redkost. Za mnoge aparate z izmenljivo optiko obstajajo posebni objektiv, ki omogočajo nagib vse do kakih 6,5–8,5 stopinj. (Angleška beseda za nagib je *tilt* in to najdemo v njihovih opisih.) Takih objektivov ni veliko in so dragi. Ostrimo lahko le ročno. Večinoma jih uporabljajo na stojalu in za nastavitve si je potrebno vzeti čas. Ko slikajo tla v dvorani ali pogrnjeno mizo, objektiv nagnejo navzdol in tako povečajo območje globinske ostrine. V idealnem primeru, ko je izpolnjeno Scheimpflugovo načelo, je ostro vse. Če naredijo nasprotno – objektiv nagnejo navzgor – se bo območje globinske ostrine zmanjšalo in oster bo le ozek pas. To je uporabno v umetniške namene. Vse to seveda velja, če slikajo ravninski objekt. Če so, recimo, na pogrjnjeni mizi visoki objekti, bo zelo težko ali nemogoče izostriti vse.



Objektivi, ki omogočajo nagib, navadno omogočajo tudi premik (shift) vzporedno senzorju. O tem kdaj drugič. Z običajnimi objektivi nagibov in premikov – vsaj na kamerah polnega formata – večinoma ni mogoče doseči, saj slika, ki jo naredijo, komajda pokrije vogale tipala. Ob nagibu ali premiku bi bil del slike črn. Omenjeni tilt-shift objektivi naredijo sliko, ki je precej večja od tipala, tako da imajo potrebne rezerve za pomike.

Literatura

- [1] University of New Mexico, Lecture notes, Chapter 18, *Matrix Methods in Paraxial Optics*, <http://physics.unm.edu/Courses/Thomas/Phys463fa11/Ch18.pdf>, ogled 3. 11. 2015.
- [2] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995, 452–454.
- [3] P. Legiša, *Fotografija in matematika, 3. del - globinska ostrina*, Presek 25, 1998, 194–201. <http://www.presek.si/25/1340-Legisa.pdf>

× × ×

Razmisli in poskusi

↓↓↓

MITJA ROSINA

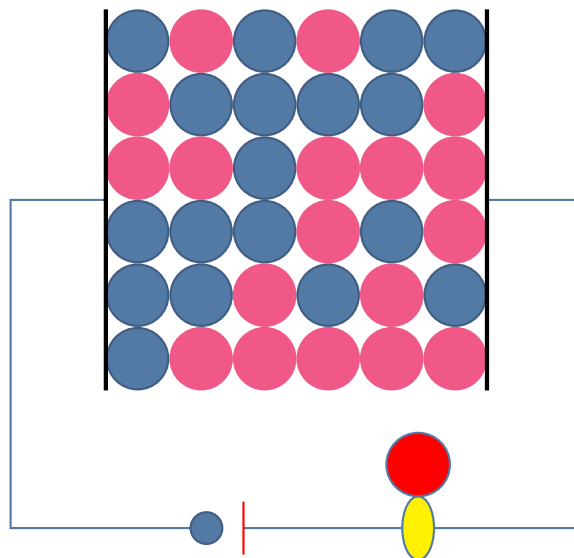
→

60. Perkolacija

Zgled za perkolacijo (pronicanje) je povezava med elektrodama preko prevodnih kroglic.

NALOGA. V kvadratno škatlo nasuj na dno slučajno mešanico kovinskih in steklenih kroglic. Zloži jih v pravokotno mrežo tako, da je dno ravno napolnjeno. Na nasprotni ploskvi škatle daj kovinski plošči in ju zveži preko baterije in žarnice tako, da bo žarnica svetila, če množica kroglic prevaja (če so kovinske kroglice sklenjene v verigo).

Verjetnost za perkolacijo je odvisna od razmerja p med številom prevodnih in neprevodnih kroglic.



SLIKA 1.

Ali sistem perkolira? (Modre kroglice so prevodne)

Poskus ponovi večkrat, tudi z različnimi razmerji, vsakič dobro premešaj. Za vsak p zapiši število perkoliranih razporeditev $N_{\text{per}}(p)$ in število vseh razporeditev $N_{\text{vsi}}(p)$. Nariši diagram

$$w(p) = N_{\text{per}}(p) / N_{\text{vsi}}(p),$$

kolikokrat pri danem razmerju p sistem perkolira.

Smiselno je vzeti vsaj $10 \times 10 = 100$ kroglic in škatlo s stranico 10 premerov kroglic. Za neenako razmerje potrebuješ seveda več kot 50 vsakih kroglic. Za »ogrevanje« smeš seveda vzeti tudi manj kroglic v manjši škatli. Če si dober v računalništvu, lahko poskus simuliraš z računalnikom.

Poskus lahko ponoviš še za gosto (trigonalno) mrežo kroglic, pri kateri ima vsaka kroglica 6 sosedov.

Primerjaj diagrama $w(p)$ za pravokotno in trigonalno mrežo. Zanimiva je zlasti kritična vrednost p_c , pri kateri naraste $w(p)$ razmeroma hitro od 0 proti 1.

To je bil dvodimenzionalni model. Trodimenzionalni model, pri katerem bi nasuli kroglice v več plasteh, je mnogo zahtevnejši.

Zanimiv zgled so gozdni požari. Če so drevesa dovolj na redko, se požar nekje ustavi (ne perkolira), če so na gosto, pa zajame ves gozd.

× × ×

Pozabljena umetnost sferne trigonometrije¹



ALEKSANDER SIMONIČ

→ Znete določiti smer in izračunati dolžino najkrajše zračne poti do poljubnega kraja na Zemlji? Bi se znali orientirati po zvezdah? Če ne, je ta prispevek kot nalašč za vas.

Uvodne probleme lahko rešimo z uporabo sferne trigonometrije, vede, ki se ukvarja s trigonometrijskimi relacijami med stranicami in koti v sfernem trikotniku. To matematično področje je staro in se je razvijalo vzporedno z ravninsko trigonometrijo. Za začetnika trigonometrije štejemo grškega astronoma **Hiparha iz Nicae** (ok. 150 pr. n. št.). Njegovo delo se je ohranilo v Ptolemajevem *Almagestu*, knjigi s podobnim statusom kakor Evklidovi Elementi. Arabski matematiki so v »zlato dobi islama« (750–1257) grško znanje ohranili, nadgradili in povezali z dognanji indijskih astronomov. V nadaljevanju bomo videli, da so osnovne izreke odkrili prav arabski matematiki.

Iz vsega povedanega lahko razberemo, da je bil povod za uvedbo sferne trigonometrije prav geografske in astronomske narave. S tem se bomo ukvarjali v razdelku Uporaba sferne trigonometrije, kjer bomo tudi razrešili uvodna vprašanja. Za to potrebujemo nekaj matematične teorije. Žal ne bomo sledili zgodovinskemu razvoju. Kogar bi to zanimalo, mu priporočamo odlično knjigo [5], od koder smo si izposodili tudi naslov tega članka. Avtor knjige ugotavlja, da je »skoraj čez noč« iz učnih programov srednjih šol izginila sferna trigonometrija. Zato je namen tega članka privabiti nadobudne dijake, da poleg obvezne ravninske trigonometrije spoznajo tudi nekaj osnov sferne.

¹Članek je namenjen predvsem srednješolcem, ki tekmujejo iz znanja astronomije in se potegujejo za udeležbo na mednarodnih astronomskih tekmovanjih, kjer je namreč zahtevano osnovno znanje sferne trigonometrije.

Kaj je sferni trikotnik?

Vzemimo poljubni točki A in B na sferi s središčem v O . Točke A , B in O določajo natanko eno ravnino, če le niso kolinearne. Presečišče te ravnine s sfero je krožnica, ki jo imenujemo **glavni krog**. Z \widehat{AB} označujemo krajši krožni lok med A in B na glavnem krogu. Razdalje merimo v radianih, zato velja $0 < \widehat{AB} < \pi$. **Sferni trikotnik** $\triangle ABC$ je območje na sferi, omejeno s **stranicami** $c := \widehat{AB}$, $a := \widehat{BC}$ in $b := \widehat{AC}$. **Koti** $\alpha := \sphericalangle BAC$, $\beta := \sphericalangle CBA$ in $\gamma := \sphericalangle ACB$ so koti med ravninami, ki oklepajo te kote. Tako je α kot med ravninama OAB in OAC . Zahteva po dolžinah stranic nam da pogoj na velikost kotov, saj se ne more zgoditi, da bi kot sfernega trikotnika presegel π . V nasprotnem primeru bi imel trikotnik $\triangle ABC$ z $\alpha \geq \pi$ stranico $\widehat{BC} \geq \pi$.

Ta članek ni namenjen proučevanju geometrijskih lastnosti sfernih trikotnikov, kot sta znani dejstva, da je vsota stranic manjša od 2π in da je vsota kotov med π in 3π . Kljub temu pa ne moremo preko naslednje pomembne konstrukcije, ki vsakemu sfernemu trikotniku priredi nov sferni trikotnik. Bralcu priporočamo, da si v nadaljevanju pomaga s programom *GeoGebra*.

Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik. S C' označimo tisti presek normale na ravnino ABO in sfere, ki leži na isti hemisferi kakor točka C . Podobno storimo še za preostali stranici in dobimo točki A' in B' . Sfernemu trikotniku $\triangle A'B'C'$ pravimo **polarni trikotnik** od $\triangle ABC$. Konstrukcijo polarnega trikotnika je predlagal arabski matematik **Abu Nasr Mansur ibn Ali ibn Irak** (ok. 950–ok. 1036). Neposredno iz poteka konstrukcije je razvidno, da je polarni trikotnik od polarnega trikotnika spet prvotni trikotnik. Taki lastnosti pravimo dualnost. Najpomembnejša lastnost polarnih trikotnikov pa je zajeta v naslednjem izreku, imenovanem tudi **princip dualnosti**.



→ **Izrek 1.** Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik in $\triangle A'B'C'$ pripadajoči polarni trikotnik. Potem velja $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$ in $c' = \pi - \gamma$ ter $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$ in $\gamma' = \pi - c$.

Po principu dualnosti je razvidno, da je prvi nabor enakosti v izreku ekvivalenten drugemu naboru enakosti. Zato zadošča dokazati prvi nabor enakosti. Naj bo D presečišče glavnega kroga AC in glavnega kroga $A'B'$. Podobno naj bo E presečišče glavnega kroga BC in glavnega kroga $A'B'$. Po definiciji polarnega trikotnika imamo $\widehat{DC} = \widehat{EC} = \pi/2$, od koder sledi $\widehat{DE} = \gamma$. Prav tako je $\widehat{DB'} = \widehat{A'E} = \pi/2$. Imamo

$$\blacksquare c' = \widehat{A'B'} = \widehat{A'E} + \widehat{DB'} - \widehat{DE} = \pi - \gamma.$$

Podobno dobimo še preostali enakosti.

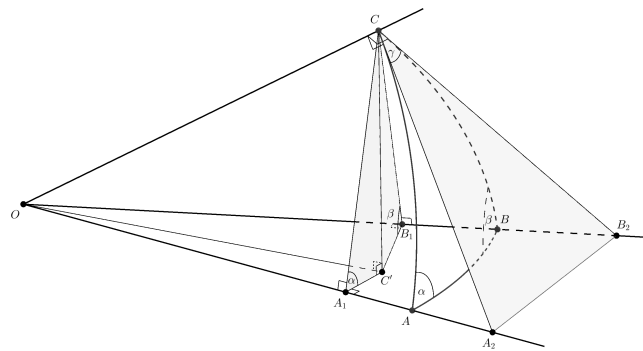
Če privzamemo, da poznamo neenakost $a+b+c < 2\pi$, lahko z uporabo principa dualnosti pokažemo, da mora biti vsota kotov večja od 180° . Za polarni trikotnik prav tako velja $a' + b' + c' < 2\pi$. Po izreku 1 imamo $3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi$, od koder sledi $\pi < \alpha + \beta + \gamma$.

Temeljna izreka sferne trigonometrije

Najpomembnejša izreka trigonometrije ravninskega trikotnika sta zagotovo sinusni in kosinusni izrek. Prvi opisuje razmerja med stranicami in koti v trikotniku, drugi pa predstavlja posplošitev Pitagorovega izreka. Zato bi bilo dobro, če bi podobna izreka imeli tudi za sferne trikotnike. Za razliko od ravninske različice bomo v sfernem primeru imeli trigonometrijske funkcije tudi pri stranicah, zato pride izrek 1 do izraza v naslednjem smislu: *če dokažemo trigonometrijsko identiteto in v njej zamenjamo stranice s suplementi kotov in kote s suplementi stranic, dobimo prav tako veljavno trigonometrijsko identiteto*. Tudi temu pravilu pravimo princip dualnosti.

Najprej se bomo omejili na trikotnike, katerih dva kota sta manjša od $\pi/2$. Bralca naprošamo, da si pri naslednjem besedilu pomaga s sliko 1. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik, O pa središče sfere. Označimo s C' pravokotno projekcijo točke C na ravnino ABO , z A_1 pravokotno projekcijo točke C' na premico OA in z B_1 pravokotno projekcijo točke C' na premico OB . Ker je

$$\blacksquare |OA_1|^2 + |A_1C|^2 = |OA_1|^2 + |A_1C'|^2 + |C'C|^2 \\ = |OC'|^2 + |C'C|^2 = |OC|^2,$$



SLIKA 1.

Izpeljava sinusnega in kosinusnega izreka v sfernem trikotniku ABC

sledi, da je premica OA pravokotna na premico A_1C . Podoben razmislek nam da pravokotnost premic OB in CB_1 . Torej sta trikotnika $\triangle A_1CO$ in $\triangle B_1OC$ pravokotna, zato imamo $|CA_1| = \sin b$ in $|CB_1| = \sin a$. Pravokotni trikotnik $\triangle C'CA_1$ nam zagotavlja $|CC'| = |CA_1| \sin \alpha = \sin b \sin \alpha$. Po drugi strani pa imamo $|CC'| = |CB_1| \sin \beta = \sin a \sin \beta$. Obe zvezi nam podajata razmerje $\sin a / \sin \alpha = \sin b / \sin \beta$. Začeli smo s projekcijo točke C in dobili razmerje med stranicami a, b in koti α, β . Če bi začeli s projekcijo točke A , bi dobili podobno razmerje le med stranicami b, c in koti β, γ . Rezultatu

$$\blacksquare \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \quad (1)$$

pravimo **sinusni izrek**, zaradi očitne podobnosti z istoimenskim izrekom iz ravninske trigonometrije. Najverjetneje sta bila ibn Irak in **Mohamed al-Buzjani al-Hasib Abul Vefa** (940-997) prva, ki sta sinusni izrek eksplicitno zapisala. Na žalost nam princip dualnosti na sinusnem izreku ne razkrije nič novega.

Naj bo A_2 taka točka na premici OA in B_2 taka točka na premici OB , da bosta trikotnika $\triangle COA_2$ in $\triangle COB_2$ pravokotna. Zato imamo

$$\blacksquare |OA_2|^{-1} = \cos b, \quad |OB_2|^{-1} = \cos a, \quad (2)$$

$$\frac{|CA_2|}{|OA_2|} = \sin b, \quad \frac{|CB_2|}{|OB_2|} = \sin a, \quad (3)$$

$$|OA_2|^2 = 1 + |CA_2|^2, \quad |OB_2|^2 = 1 + |CB_2|^2. \quad (4)$$

Za trikotnik $\triangle A_2B_2C$ uporabimo kosinusni izrek.

Dobimo

$$\blacksquare |A_2B_2|^2 = |CA_2|^2 + |CB_2|^2 - 2|CA_2||CB_2| \cos \gamma.$$

Po drugi strani pa nam kosinusni izrek za trikotnik $\triangle A_2B_2O$ in zvezi (4) podajata

$$\blacksquare |A_2B_2|^2 = |OA_2|^2 + |OB_2|^2 - 2|OA_2||OB_2| \cos c \\ = |CA_2|^2 + |CB_2|^2 + 2(1 - |OA_2||OB_2| \cos c).$$

Torej velja $|OA_2||OB_2| \cos c = 1 + |CA_2||CB_2| \cos \gamma$. Enačbo delimo z $|OA_2||OB_2|$ in uporabimo zveze (2) in (3). Dobimo **kosinusni izrek za stranico c**

$$\blacksquare \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (5)$$

Z ustrezno zamenjavo stranic in kotov dobimo še kosinusna izreka za a in b . Uporabimo princip dualnosti na (5) in dobimo **kosinusni izrek za kot γ**

$$\blacksquare \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Podobna izraza dobimo še za kota α in β . Kosinusni izrek za kote nam razkrije nekaj, kar za ravninske trikotnike ni res: *sferni trikotnik je natanko določen s svojimi koti*. Začetki kosinusnega izreka so bolj nejasni kakor pri sinusnem izreku. Največkrat se omenjajo tri imena: **Mohamed ibn Musa al-Hvarizmi** (ok. 780–ok. 850), **Abu'Abdalah Mohamed ibn Džabir ibn Sinan al-Batani al-Harani al-Sabi'** (ok. 858–929) in indijski astronom **Somayaji Nilakantha** (1444–ok. 1501). Pri nobenem od njih pa izrek ni zapisan eksplicitno, vedno pomešan med astronomskimi izračuni.

Dokaz

Spomnimo se, da smo pri izpeljavi sinusnega in kosinusnega izreka dodali nekaj pogojev na kote v trikotniku. Z obravnavanjem vseh možnosti bi lahko po prikazani poti dokazali izreka v vsej splošnosti. Z uporabo sfernih koordinat in skalarnega produkta vektorjev pa lahko dokaz občutno poenostavimo.

Najprej bomo pokazali, da iz (5) sledi (1). Enostravno se lahko prepričamo, da za vse $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$\blacksquare \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 z = \\ = 1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z.$$

Ker je izraz na desni simetričen v spremenljivkah, za vse $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$\blacksquare \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 z = \\ = \sin^2 z \sin^2 y - \cos^2 z \cos^2 y - \cos^2 x.$$

Slednjo enakost uporabimo v (5) in dobimo

$$\blacksquare \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c} \\ = \frac{\sqrt{\sin^2 a \sin^2 c - \cos^2 a \cos^2 c - \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c} \\ = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Spomnimo se sfernih koordinat (φ, λ) , kjer je φ geografska širina in λ geografska dolžina. Parametrizacija sfere je

$$\blacksquare (\varphi, \lambda) \mapsto (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi),$$

kjer je $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ in $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Sferne koordinate niso poenoten pojem, zato velja previdnost, ko se z njimi srečamo v matematični ali fizikalni literaturi. Glede ostalih definicij bralca naprošamo, naj si prebere članek [6].

Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik, kjer lahko brez posledic enačimo točko C s severnim polom. Preostali oglišči naj bosta $A = (\varphi_1, \lambda_1)$ in $B = (\varphi_2, \lambda_2)$. Potem je

$$\blacksquare \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - b, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - a \text{ in } \lambda_2 - \lambda_1 = \gamma.$$

Ker je $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos c$, sledi

$$\blacksquare \cos c = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \\ + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \\ + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ = \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ = \cos \gamma \sin b \sin a + \cos b \cos a,$$

kar je ravno kosinusni izrek (5).

Kako naprej?

S sinusnim in kosinusnim izrekom se trigonometrija sfernih trikotnikov seveda ne konča. Bralcu poleg že omenjene knjige [5] priporočamo še prosto dostopni učbenik sferne trigonometrije [4] iz leta 1886. Da



→ bralcu potešimo radovednost, navedimo dve znameniti formuli.

Recimo, da imamo v sfernem trikotniku podani stranici a in b ter kot, ki ga ne oklepata, npr. α . Tako kot v ravnini tudi ta trikotnik v splošnem ni enolično določen: iz sinusnega izreka izračunamo kot β , ki pa je lahko tudi $\pi - \beta$. Toda kako določiti stranico c in kot γ ? Lahko bi vzajemno uporabili sinusni in kosinusni izrek, da bi prišli do kvadratne enačbe. Toda obstaja identiteta, imenovana *Neparjeva analogija*

$$\bullet \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}},$$

od koder zlahka izračunamo stranico c .

Ni težko pokazati, da je ploščina sfernega trikotnika P enaka $P = \varepsilon := \alpha + \beta + \gamma - \pi$, kjer se količina ε imenuje **sferni presežek**. Ploščina sfernega trikotnika na sferi s polmerom R je $R^2 \varepsilon$. Kako pa bi najenostavneje izračunali ε , če poznamo stranice a, b, c ? Velja

$$\bullet \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}},$$

kjer je $s = (a + b + c)/2$. Formulo je odkril švicarski matematik **Simon Antoine Jean L'Huilier** (1750–1840) in zelo spominja na Heronovo formulo za izračun ploščine ravninskega trikotnika.

Uporaba sferne trigonometrije

Spomnimo se temeljnih izrekov sferne trigonometrije, ki smo jih dokazali: sinusni izrek

$$\bullet \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

in kosinusni izrek za stranico c

$$\bullet \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

kjer z ustrezno zamenjavo stranic in kotov dobimo še izreka za a in b . Omenjena izreka bomo uporabili pri izračunu dolžine zračne poti med dvema krajema na Zemlji in določitvi geografskih koordinat opazovalca nočnega neba. Ker imamo opravka s količinami, merjenimi v stopinjah, bomo vse trigonometrijske funkcije računali v teh enotah.

Uporaba v geografiji

Osrednji problem arabske astronomije je bila določitev **kible**, t. j. smeri romarskega mesta Meka, natančneje kockaste stavbe imenovane Kaba. Po zahtevah muslimanskega obreda se mora vernik med molitvijo obrniti v smeri Kabe, za kar je potrebno poznavanje kible za poljubno mesto na Zemlji. O pomembnosti tega podatka priča dejstvo, da je astronom iz Damaška **Šams al-Din Abu Abdalah Mohamed ibn Mohamed al-Kalili** (ok. 1365) izdelal tabelo kibel za kar 2880 mest na Zemlji.

Matematična formulacija problema je naslednja. Naj bosta $A(\varphi_1, \lambda_1)$ in $B(\varphi_2, \lambda_2)$ poljubna kraja na Zemlji, kjer je φ geografska širina in λ geografska dolžina. S P označimo severni pol. Obravnavamo sferni trikotnik $\triangle ABP$, kjer je $\widehat{AP} = 90^\circ - \varphi_1$, $\widehat{BP} = 90^\circ - \varphi_2$ in $\sphericalangle APB = \Delta\lambda := \lambda_2 - \lambda_1$. Opazimo, da je $\Delta\lambda > 0$ natanko tedaj, ko kraj B leži vzhodno od kraja A . Dolžina stranice \widehat{AB} je zračna razdalja med krajema A in B , kot $\sphericalangle BAP$ pa je smer kraja B glede na kraj A , merjena od severnega pola.

Dolžino stranice zlahka izračunamo, uporabimo kosinusni izrek za stranico \widehat{AB} in dobimo

$$\bullet |\widehat{AB}| = R \cdot \arccos(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda),$$

kjer je $R \approx 6378$ km polmer Zemlje. Izračun kota je malo težje opravilo. Najprej iz kosinusnega izreka za stranico \widehat{BP} izrazimo $\cos \sphericalangle BAP$. Nato vanj vstavimo izraz za $\sin \widehat{AB}$, ki ga dobimo iz sinusnega izreka. Sledi

$$\bullet \cos \sphericalangle BAP = \frac{\cos \widehat{BP} - \cos \widehat{AP} \cos \widehat{AB}}{\sin \widehat{BP} \sin \widehat{AB}} = \left(\frac{\sin \widehat{AP} \cot \widehat{BP} - \cos \widehat{AP} \cos \sphericalangle APB}{\sin \sphericalangle APB} \right) \sin \sphericalangle BAP.$$

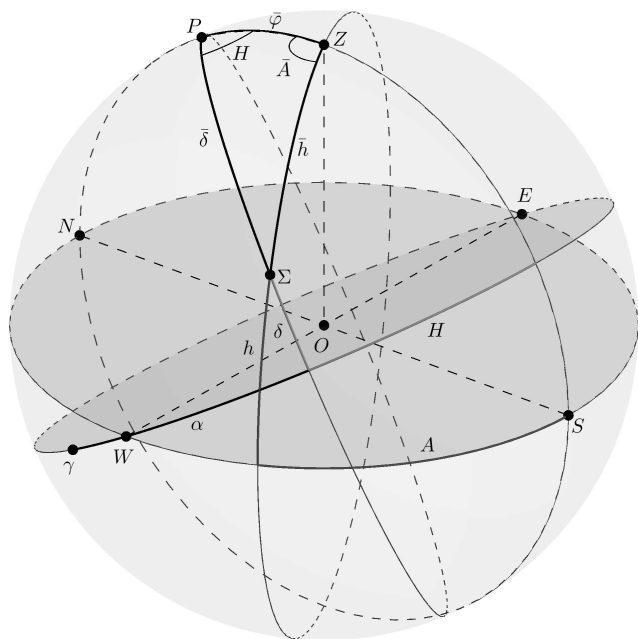
Slednji izraz olepšamo z znanimi količinami in dobimo

$$\bullet \cot \sphericalangle BAP = \frac{\cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \Delta\lambda}{\sin \Delta\lambda}.$$

Izračunajmo kiblo za Ljubljano z geografskimi koordinatami $\varphi_1 = 46^\circ 03' 20''$ in $\lambda_1 = 14^\circ 30' 30''$. Geografske koordinate Kabe so $\varphi_2 = 21^\circ 25' 21''$ in $\lambda_2 = 39^\circ 49' 34''$. Dobimo $\cot \sphericalangle BAP = -0.8853$, od koder sledi $\sphericalangle BAP = 131.518^\circ$. Zaključimo lahko, da je Kaba od Ljubljane oddaljena približno 3575 km v smeri $48^\circ 29'$ jugovzhodno.

Uporaba v astronomiji

Uporaba sferne trigonometrije v astronomiji zahteva poznavanje nebesnih koordinatnih sistemov (glej npr. [1]). Najbolj pogosta sistema sta **horizontski in ekvatorski koordinatni sistem** (slika 2). Naj bo $O(\varphi, \lambda)$ točka opazovalca. Horizontski sistem je sestavljen iz horizonta in nebesnega meridiana, t. j. glavnega kroga SZN , kjer je S jug, Z zenit in N sever. Naj bo E vzhod in W zahod horizontske ravnine. Ekvatorski sistem je sestavljen iz nebesnega ekvatorja, t. j. glavnega kroga WE , ki oklepa kot $\tilde{\varphi} := 90^\circ - \varphi$ s horizontom, in glavnega kroga, ki gre skozi severni pol P in je pravokoten na nebesni ekvator.



SLIKA 2.

Horizontski (A, h) in ekvatorski (α, δ) koordinatni sistem ter astronomski trikotnik $\triangle ZP\Sigma$

Horizontski koordinati nebesnega telesa Σ sta **azimut** A in **višina** h (rdeča loka na sliki 2). Azimut merimo pozitivno od južišča S proti zahodu W in negativno proti vzhodu E . Koordinatni začetek ekvatorskega sistema je **pomladišče** γ , t. j. točka nebesnega ekvatorja, v katero pride Sonce pri svojem navideznem gibanju med zvezdami ob spomladanskem enakonočju. Ekvatorski koordinati sta **rekta-**

scenzija α in **deklinacija** δ . Rektascenzijo merimo pozitivno od pomladišča proti vzhodu, deklinacijo pa pozitivno proti severnemu polu P nebesne sfere.

Za določanje dnevnega položaja nebesnih teles uporabljamo **časovni kot** H , ki ga praviloma štejemo v časovnih enotah, pozitivno od meridiana proti pomladišču. Časovni kot ima to lastnost, da ena ura ustreza petnajstim stopinjam. Večina astronomskih efemerid (npr. [2]) podaja **srednji zvezdni čas** $SZ\check{C}_0$ opolnoči svetovnega časa (0h UT) za meridian Greenwicha. Srednji zvezdni čas za poljubni svetovni čas a dobimo po obrazcu

$$\blacksquare \quad SZ\check{C}_a = 1,00273791a + SZ\check{C}_0. \quad (6)$$

Pravi zvezdni čas $PZ\check{C}_0$ ob 0h UT pa je Greenwiški časovni kot pravega pomladišča. Njegov izračun je težaven, saj upošteva nutacijo Zemlje in nagnjenost ekliptike (za algoritem glej npr. [3]). Srednji in pravi zvezdni čas se dnevno zelo malo razlikujeta (praviloma za nekaj sekund), in če ne potrebujemo pretirane natančnosti, lahko predpostavimo $SZ\check{C}_0 = PZ\check{C}_0$. Kako pa bi določili časovni kot nebesnemu telesu Σ z rektascenzijo α_Σ ob času a UT, kot ga vidi opazovalec v O ? Brez dokaza povejmo, da velja

$$\blacksquare \quad H_\Sigma = PZ\check{C}_a + \lambda - \alpha_\Sigma, \quad (7)$$

kjer ponovno imamo $1h = 15^\circ$.

Cilj je podati formule, po katerih lahko pretvorimo koordinate (A, h) v (H, δ) in obratno. Za doseg tega cilja je priporočljivo uvesti **astronomski trikotnik** (slika 2). To je sferni trikotnik $\triangle ZP\Sigma$, kjer je $\delta := \widehat{P\Sigma} = 90^\circ - \delta$, $\tilde{h} := \widehat{Z\Sigma} = 90^\circ - h$ in $\tilde{\varphi} = \widehat{PZ}$ s kotoma $\sphericalangle \Sigma PZ = H$ in $\sphericalangle \tilde{A} := \sphericalangle PZ\Sigma = 90^\circ - A$. Uporabimo kosinusna izreka za stranici $\tilde{\delta}$ in \tilde{h} v astronomskem trikotniku $\triangle ZP\Sigma$:

$$\blacksquare \quad \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A = \sin \delta, \quad (8)$$

$$\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H = \sin h. \quad (9)$$

V (8) zamenjajmo $\sin h$ z izrazom (9). Dobimo

$$\blacksquare \quad \cos A \cos h = \cos H \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi. \quad (10)$$

Uporabimo še sinusni izrek za $\triangle ZP\Sigma$:

$$\blacksquare \quad \sin A \cos h = \sin H \cos \delta. \quad (11)$$



→ Zaradi preglednosti zapišimo enačbe (10), (11) in (9) na enem mestu:

- $\cos A \cos h = \sin \varphi \cos H \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta,$
- $\sin A \cos h = \sin H \cos \delta,$
- $\sin h = \cos \varphi \cos H \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta.$

Te enačbe nam omogočajo izračunati azimut in višino nebesnega telesa ob poznavanju časovnega kota in deklinacije. Kaj pa obratno? Bralec lahko brez težav preveri, da velja

- $\cos H \cos \delta = \sin \varphi \cos A \cos h + \cos \varphi \sin h,$
- $\sin H \cos \delta = \sin A \cos h,$
- $\sin \delta = -\cos \varphi \cos A \cos h + \sin \varphi \sin h.$

V resnici je nova samo prva enačba.

Predno se lotimo navigacije po zvezdah, bomo za »ogrevanje« izračunali dolžino dneva. Recimo, da smo v kraju z geografsko širino φ_0 izmerili višino h_0 nebesnemu telesu Σ , za katerega vemo, da ima deklinacijo δ_0 . Kako bi izračunali časovni kot H ? Uporabimo enačbo (9) in dobimo

- $\cos H = \frac{\sin h_0}{\cos \delta_0 \cos \varphi_0} - \operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{tg} \varphi_0.$

Na prvi pogled bi rekli, da Sončev vzhod (ali zahod) ustreza pogoju $h_0 = 0$. Torej bi tedaj dobili za dolžino dneva \bar{D} (merjena v urah) izraz

- $\bar{D} = \frac{2}{15} \arccos(-\operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{tg} \varphi_0).$

Poskusimo našo formulo na konkretnih podatkih. Dne 21. junija 2015 je bil poletni Sončev obrat. Tedaj je Sonce imelo največjo možno deklinacijo $\delta_0 = 23^\circ 26'$. Za Ljubljano dobimo $\bar{D} = 15,563$ h, kar pomeni, da je bil dan dolg 15 ur in 34 minut. Toda uradna vrednost (glej npr. [2]) znaša 15 ur in 45 minut. Kje smo se zmotili? Edini privzetek, ki smo ga naredili, je bil $h_0 = 0$. Ta predpostavka je napačna iz dveh razlogov. Prvi razlog je ta, da po dogovoru za Sončni vzhod štejemo trenutek, ko se rob Sončevega diska dotakne horizonta. Ker je navidezni Sončev polmer $16'$, moramo vzeti $h_0 = -16'$. Toda pozabili smo na pomemben astronomski pojav – **atmosfersko refrakcijo**. Pri tem pojavu gre za lom svetlobe pri potovanju skozi ozračje. Zato je Sonce še vedno pod horizontom, ko ga mi zaradi refrakcije že

vidimo na nebu. Približna formula za izračun prave višine h_P nebesnega telesa ob horizontu z navidezno višino h_N je

- $h_P \approx h_N - \cot \left(h_N + \frac{7,31}{h_N + 4,4} \right),$ (12)

kjer je drugi člen merjen v minutah. Torej moramo vzeti $h_0 = -16' - 34' = -50'$. Popravljen formula za dolžino dneva je

- $D = \frac{2}{15} \arccos \left(-\frac{\sin 50' + \sin \delta_0 \sin \varphi_0}{\cos \delta_0 \cos \varphi_0} \right).$

In res, za D dobimo 15 ur in 45 minut. Ker je velikost atmosferske refrakcije odvisna tudi od višine opazovališča ter temperature in gostote ozračja, se čas Sončevega vzida in zaida (ter posledično tudi dolžino dneva) podaja le do minute natančno.

Za določitev geografskih koordinat potrebujemo podatke o položaju dveh nebesnih teles. Zadošča že poznavanje višine ob nekem svetovnem času. Recimo, da smo ob času a UT izmerili višini h_1 in h_2 nebesnima telesoma z znanima deklinacijama δ_1 in δ_2 ter znanima rektascenzijama α_1 in α_2 . Po enačbah (9) in (7) dobimo sistem dveh enačb z neznankama φ in λ :

- $$\begin{cases} \sin h_1 = \cos \varphi \cos (\lambda + \text{PZ}\check{C}_a - \alpha_1) \cos \delta_1 + \\ \quad + \sin \varphi \sin \delta_1, \\ \sin h_2 = \cos \varphi \cos (\lambda + \text{PZ}\check{C}_a - \alpha_2) \cos \delta_2 + \\ \quad + \sin \varphi \sin \delta_2. \end{cases}$$

Sistem lahko rešujemo po kateri od numeričnih metod, vendar obstaja še boljše približna metoda, ki ne sloni na reševanju sistema. Metodo, ki jo bomo opisali, je odkril francoski kontraadmiral **Adolphe Laurent Anatole Marcq de Blond de Saint Hilaire** (1832–1889). Recimo, da slutimo, da se nahajamo na geografskih koordinatah (φ_0, λ_0) . Temu položaju P_0 pravimo **domnevni položaj**. Sedaj lahko iz enačbe (9) izračunamo višini \bar{h}_1 in \bar{h}_2 nebesnima telesoma, opazovana ob času a UT iz *domnevne*ga položaja:

- $\bar{h}_i = \arcsin \left(\cos \varphi_0 \cos (\lambda_0 + \text{PZ}\check{C}_a - \alpha_i) \cos \delta_i + \sin \varphi_0 \sin \delta_i \right)$

za $i \in \{1, 2\}$. Izračunani višini uporabimo v enačbi (11) za izračun azimutov \bar{A}_1 in \bar{A}_2 nebesnima tele-

soma, opazovana ob času a UT iz domnevnega položaja:

$$\bar{A}_i = \arcsin \frac{\sin(\lambda_0 + \text{PZ}\check{C}_a - \alpha_i) \cos \delta_i}{\cos \bar{h}_i}$$

za $i \in \{1, 2\}$. Zamislimo si, da se sprehajamo po premici v smeri azimuta \bar{A}_1 . Če gremo proti nebesnemu telesu, se njegova višina povečuje. Če pa se oddaljujemo, se njegova višina zmanjšuje. Torej obstaja točka P_1 na tej premici, od koder je višina nebesnega telesa prav h_1 . Elementarna geometrija nas prepriča, da velja $\overline{P_0P_1} = |\bar{h}_1 - h_1|$. Postavimo se v točko P_1 in se sprehajamo po pravokotnici na azimutno premico. Višina h_1 se zelo malo spreminja, zato lahko privzamemo, da je na tej pravokotnici kar konstantna. Tej premici pravimo **premica položaja**. Vse korake ponovimo še za azimutno premico \bar{A}_2 . Sedaj je jasno, da je približen položaj naših meritev prav presečišče premic položajev. Vaja iz enačbe premice nam da uporabna obrazca za izračun pravega položaja:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\bar{h}_2 - h_2) \sin \bar{A}_1 - (\bar{h}_1 - h_1) \sin \bar{A}_2}{\sin(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)},$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{(\bar{h}_1 - h_1) \cos \bar{A}_2 - (\bar{h}_2 - h_2) \cos \bar{A}_1}{\sin(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)}.$$

Recimo, da smo nekje v Sloveniji dne 7. 8. 2015 ob 22. uri po lokalnem času izmerili višino $\bar{h}_1 = 36^\circ 40,9'$ zvezde Arktur in višino $\bar{h}_2 = 80^\circ 23,6'$ zvezde Vega¹. Po enačbi (12) sta pravi višini enaki $h_1 = 36^\circ 39,6'$ in $h_2 = 80^\circ 23,4'$. Morda je koga zmotila uporaba refrakcijskega popravka, saj se vrednosti razlikujeta za manj kot $1,5'$. V bran tej odločitvi naprošamo bralce, naj naslednje postopke naredijo na nepopravljenih višinah. Iz namiga o lokaciji razberemo, da je čas izmere $a = 20$ h UT in koordinate domnevnega položaja $\varphi_0 = 46^\circ$, $\lambda_0 = 14,5^\circ$ so kar približne koordinate Ljubljane. Ker ne potrebujemo pretirane natančnosti, bomo predpostavili $\text{SZ}\check{C}_0 = \text{PZ}\check{C}_0$. Iz [2] preberemo $\text{SZ}\check{C}_0 = 21$ h 0m 48,2s. Po predpostavki in formuli (6) imamo $\text{PZ}\check{C}_a = 17$ h 4m 5,3s. Potrebujemo še rektascenziji in deklinaciji

zvezd: $\alpha_1 = 14$ h 16m 22,1s in $\delta_1 = 19^\circ 6' 8''$ za Arktur ter $\alpha_2 = 18$ h 37m 27,8s in $\delta_2 = 38^\circ 47' 56''$ za Vega. Vse te podatke dobimo v [2].

Po Hilairovi metodi imamo $\varphi_1 = 45^\circ 57' 43''$ in $\lambda_1 = 14^\circ 36' 8''$. Metodo lahko ponovno uporabimo na novih koordinatah. Tako dobimo še boljši približek $\varphi_2 = 45^\circ 57' 42''$ in $\lambda_2 = 14^\circ 38'$. Uporaba metode tretjič nam da $\varphi_3 = 45^\circ 57' 42''$ in $\lambda_3 = 14^\circ 38' 34''$. Kaj pa, če uporabimo sistem enačb? Program *Mathematica* nam poda nekaj rešitev, smiselna med njimi je $\varphi = 45^\circ 57' 42''$ in $\lambda = 14^\circ 38' 47''$. Tretji približek po metodi Saint Hilaire se zelo malo razlikuje od prave rešitve sistema, v prostoru sta si oddaljena za manj kot tristo metrov. Tudi drugače smo zelo dobro ocenili naš pravi položaj, saj sta oba približka od njega oddaljena za manj kot pol kilometra.

Literatura

- [1] F. Avsec, M. Prosén, *Astronomija*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2006.
- [2] B. Dintinjana, D. Fabjan, H. Mikuž, T. Zwitter, *Naše nebo 2015: astronomske efemeride*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2014.
- [3] J. Meeus, *Astronomical algorithms*, 2nd ed., Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, 1998.
- [4] I. Todhunter, *Spherical trigonometry: for the use of colleges and schools*, <https://www.gutenberg.org/files/19770/19770-pdf.pdf>, ogled: 21. 1. 2016.
- [5] G. Van Brummelen, *Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry*, Princeton University Press, Princeton, 2013.
- [6] E. W. Weisstein, *Spherical coordinates*, From MathWorld-A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>, ogled: 21. 1. 2016.

× × ×

www.dmfa.si

www.presek.si

¹V resnici avtor tega ni lastnoročno izmeril, temveč se je poslužil brezplačnega astronomskega programa *Stellarium*.

Igra Angry Birds v realnem času in prostoru



DOMINIK ROBIČ IN ROBERT REPNIK

→ Vsi najverjetneje poznamo igro Angry Birds, ki velja za eno najbolj priljubljenih iger. Namen igre je, da s čim manj jeznimi ptiči (od tod ime igre), ki jih izstrelimo iz ogromne frače, zadenemo čim več tarč - zelenih prašičev, pri čemer nas ovirajo pregrade iz različnih materialov [1]. S kasnejšo analizo se sicer da ugotoviti, da bi bili ptiči v igri veliki okoli 0,5 m, kar je nerealno, pa tudi zelenih prašičev ne poznamo, zato moramo upoštevati zabavni namen te računalniške igre. Zato bomo izstreljene ptiče v nadaljevanju obravnavali kot izstrelke v fizikalnem smislu. Igra je sicer namenjena predvsem zabavi, a le malokdo se zaveda, da igra temelji na fizikalnih zakonih o gibanju izstrelka. Kar pomeni, da se lahko ob uporabi programske opreme tudi kaj naučimo. V našem primeru nas zanima, kako bi se igra Angry Birds odvijala v realnih razmerah in kako bi to ob uporabi brezplačnih računalniških programov preverili.

Kaj potrebujemo?

Za analizo podatkov potrebujemo programa LoiLo Game Recorder in Tracker, ki ju lahko snamemo s spleta iz njunih uradnih spletnih strani.

LoiLo Game Recorder

LoiLo Game Recorder (slika 1) je brezplačen program, ki nam omogoča, da lahko posnamemo posnetek leta izstrelka, s katerim bomo izvajali meritve [2]. Ker nas zanima, kje se izstrelek nahaja v nekem trenutku, je pomembno, da izstrelek izstrelimo tako, da ne zadene pregrade in da se v času snemanja zaslon osvežuje s hitrostjo najmanj 30 slik na sekundo. To nam omogoča prikaz tekočega gibanja izstrelka na



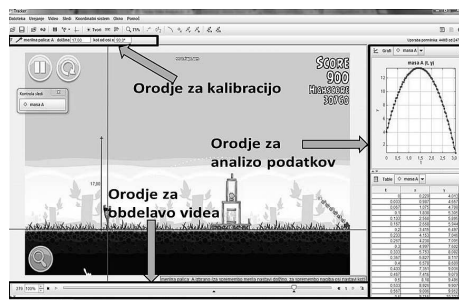
SLIKA 1.

Grafični vmesnik programa LoiLo Game Recorder, kjer lahko nastavimo število slik pri osveževanju zaslona ter datoteko kamor posnetek shranimo.

zaslonu [3]. Posnetek shranimo in ga uporabimo za analizo podatkov s programom Tracker.

Tracker

Tracker, prikazan na sliki 2 [4], je brezplačen program, ki se pogosto uporablja za analizo podatkov pri fizikalnih eksperimentih. Zaženemo ga lahko kar iz našega USB diska in ga ni potrebno nameščati na trdi disk računalnika. Obvezno pa moramo imeti na računalniku nameščen program Java 1.6 ali kasnejše različice ter program za predvajanje videov QuickTime7 ali Xuggle, ki sta tudi brezplačna. Ponuja nam več orodij, med katere spadajo orodje za kalibracijo, s katerim lahko poljubno določimo enoto razdalje (v našem primeru smo za enoto uporabili višino frače) in lego opazovanega telesa glede na koordinatni sistem, orodje za analizo podatkov, ki nam omogoča beleženje podatkov v grafu in tabeli, orodje za obdelavo videov, s katerim popravimo napake posnetkov, ter orodje za sledenje predmetov na posnetku. Pred-



SLIKA 2.

Grafični vmesnik programa Tracker ponuja več orodij. Pri izvajanju meritev smo uporabljali: orodje za kalibracijo, orodje za analizo podatkov, orodje za obdelavo videa ter orodje za sledenje predmetov [4].

postavili smo, da je čas v igri enak času v realnosti ter da bi bili enaki razdalji iz realnosti v x in y smeri tudi v igri prikazani kot enako dolgi v obeh smereh. V našem primeru smo najprej uvozili posnetek, ki smo ga posneli s programom LoiLo Game Recorder v program Tracker, kjer smo z orodjem za sledenje analizirali let izstrelka.

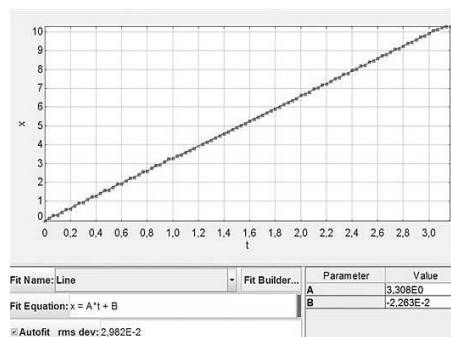
Gibanje izstrelka v realnem prostoru

Pri izstrelitvi izstrelka s frače pod kotom glede na smer gravitacijskega pospeška vemo, da obravnavamo poševni met, ki je primer gibanja v dveh dimenzijah. Izstrelko izstrelimo z začetno hitrostjo pod nekim kotom. Kot običajno merimo glede na vodoravnico. Začetna hitrost (\vec{v}_0) ima vodoravno in navpično komponento:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}), \quad (1)$$

kjer je v_{0x} velikost vodoravne in v_{0y} velikost navpične komponente začetne hitrosti izstrelka [5]. Če zanemarimo upor zraka, je edina sila, ki deluje na izstrelko med gibanjem skozi zrak, gravitacijska sila. Zato je pospešek izstrelka (\vec{a}) enak gravitacijskemu pospešku na površju Zemlje, čigar smer kaže navpično navzdol [6]. Ker ima pospešek le navpično komponento, se med letom vodoravna komponenta hitrosti s časom ne spreminja. Premik izstrelka v vodoravni smeri ob nekem času t zapišemo kot:

$$x - x_z = v_{0x}t, \quad (2)$$



SLIKA 3.

Vodoravna komponenta lege (x) v odvisnosti od časa (t). Odvisnost je linearna; vodoravna komponenta hitrosti (koeficient A) znaša 3,31 enot/s.

kjer je x komponenta lege v vodoravni smeri ob času t in x_z začetna komponenta lege (ob času $t = 0$). Upoštevamo kot Θ , pod katerim smo izstrelko izstrelili, in dobimo vodoravno komponentno lege ob času t :

$$x = (v_0 \cos \Theta)t + x_z, \quad (3)$$

pri čemer je vodoravna komponenta hitrosti enaka $v_{0x} = v_0 \cos \Theta$. Odvisnost vodoravne komponente lege od časa je linearna, kar potrjujejo tudi meritve, kjer izmerimo v_{0x} , ki v našem konkretnem primeru znaša 3,31 enot/s (slika 3).

Gibanje izstrelka v navpični smeri je enakomerno pospešeno, zato lahko premik ptiča v navpični smeri zapišemo:

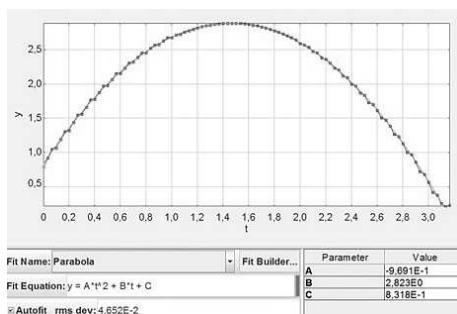
$$y - y_z = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2, \quad (4)$$

kjer je y_z začetna komponenta lege izstrelka v navpični smeri ob času $t = 0$ in y komponenta lege v navpični smeri ob času t . Iz enačbe (4) izrazimo navpično komponento lege ob času t :

$$y = (v_0 \sin \Theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + y_z, \quad (5)$$

kjer upoštevamo, da je $a = -g$ in $v_{0y} = (v_0 \sin \Theta)$ [5]. Vidimo, da je odvisnost navpične komponente lege od časa kvadratna, kar smo dobili tudi pri meritvah. Izmerili smo $a/2$ (koeficient A na sliki 4), ter izračunali pospešek, ki znaša $-1,9$ enot/s². Izmerili smo tudi navpično komponento začetne hitrosti (koeficient B na sliki 4), ki znaša 2,8 enot/s, in višino,





SLIKA 4.

Iz koeficienta A določimo pospešek, koeficient B je enak navpični komponenti začetne hitrosti, koeficient C pa je enak višini izstrelitve.

od koder smo izstreljek izstrelili, ki znaša 0,8 enote (koeficient C na sliki 4).

Postavitev igre Angry birds v realni čas na Zemlji

Meritve so pokazale, da je pospešek izstrelka v navpični smeri enak $-1,9$ enot/ s^2 (slika 4). Če bi okolje igre preselili v realni čas in prostor, lahko koeficient A na sliki 4 povežemo z gravitacijskim pospeškom na Zemlji, ki znaša $9,8$ m/ s^2 [6]. Vrednost koeficienta A je podana v enotah in je enaka $-g/2$. Tako dobimo velikost enote v igri, ki znaša 5,1 m v naravi. Ker smo višino frače izbrali kot osnovno enoto, bi bila frača v naravi visoka kar 5,1 m. Sedaj lahko izračunamo navpično komponento začetne hitrosti, tako, da koeficient B na sliki 4 pomnožimo s 5,1 m in dobimo $v_{0y} = 14,2$ m/s. Enako storimo za komponento hitrosti v vodoravni legi (A na sliki 3) in dobimo $v_{0x} = 16,7$ m/s. Sedaj lahko izračunamo velikost začetne hitrosti izstrelka:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}, \quad (6)$$

ki v našem primeru znaša $= 21,9$ m/s. Zanima nas tudi začetna višina (y_z), s katere smo izstreljek izstrelili. Ta je 0,8 enote (slika 4), torej je $y_z = 4,2$ m. Ko smo izračunali začetno višino, lahko izračunamo maksimalno višino leta (h), ki jo izstreljek doseže:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_z. \quad (7)$$

Iz meritev (slika 5) razberemo maksimalno višino, ki znaša 2,9 enot, kar ustreza 14,5 m. Opazimo, da se

meritve ujemajo z izračunano vrednostjo. Zanimalo nas je tudi, kako daleč smo izstreljek izstrelili. Preden lahko izračunamo domet izstrelka, potrebujemo kot (Θ), pod katerim smo ga izstrelili. Kot izračunamo iz razmerja komponent začetne hitrosti:

$$\Theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) \quad (8)$$

in v našem primeru dobimo $\Theta = 40,4^\circ$ [5]. Za izračun dometa potrebujemo enačbo za tir gibanja. Iz enačbe (2) izrazimo čas leta:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \Theta}, \quad (9)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $x_z = 0$ in vodoravna komponenta hitrosti $v_{0x} = v_0 \cos \Theta$. Izraz vstavimo v enačbo (5) in dobimo enačbo za tir gibanja, ki je parabola:

$$y = (\tan \Theta)x - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \Theta} + y_z. \quad (10)$$

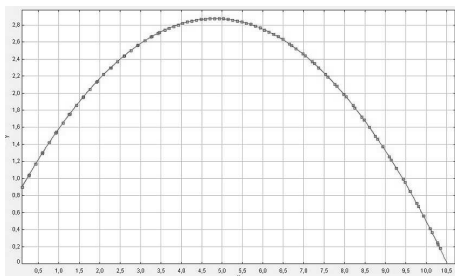
V našem primeru so tla vodoravna, zato predpostavimo, da je navpična komponenta lege enaka nič v trenutku, ko izstreljek trči ob tla, ta pa so vodoravno vzporedna s spodnjim delom frače. Razdalja v vodoravni smeri, ki jo izstreljek pri tem prepotuje, je enaka dometu (d). Po izračunu diskriminante kvadratne enačbe izrazimo domet:

$$d = \frac{v_0 \cos \Theta}{g} \left(v_0 \sin \Theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \Theta + 2g y_z} \right). \quad (11)$$

Izračunamo domet in dobimo $d = 52,8$ m [7]. Podoben rezultat dobimo pri meritvah, kjer izmerimo domet 10,5 enot, kar ustreza 53,0 m (slika 5). Domet, ki smo ga izračunali, ni povsem enak izmerjenemu dometu, kar je odraz napake meritev. Se pa obe vrednosti dobro ujemata.

Kaj smo se naučili?

S pomočjo igre Angry Birds smo obravnavali gibanje ptiča (oziroma izstrelka) v igri in ugotovili, da ga lahko opredelimo kot poševni met. Iz meritev smo razbrali, da je gibanje izstrelka brez upoštevanja zračnega upora v vodoravni smeri enakomerno, v navpični smeri pa je enakomerno pospešeno, saj



SLIKA 5.

Odvisnost navpične komponente lege izstrelka (y) od vodoravne komponente lege (x). Opazimo, da je tir gibanja parabola. Iz grafa odčitamo domet, ki znaša 10,5 enot ter maksimalno višino, ki jo izstrelak doseže, to je 2,9 enot.

je pospešek konstanten. Pri meritvah smo najprej izbrali enoto (izbrali smo višino frače), nato pa izmerili pospešek v navpični smeri ($-1,9$ enot/ s^2), navpično komponento začetne hitrosti (2,8 enot/ s) ter višino (0,8 enot), s katere smo izstrelak izstrelili (slika 4). Ugotovili smo, da je odvisnost navpične komponente lege y od vodoravne komponente lege x kvadratna, zato je tir gibanja parabola. Igro smo nato predstavili v realen čas in prostor, pri čemer smo v analizi gibanja izstrelka predpostavili, da je čas v igri enak času v realnosti in da ni razlik v merilih prikazovanja razdalj v x in y smeri v igri glede na realni prostor. Tako smo izračunali, kolikšna bi bila realna dimenzija izbrane enote razdalje v igri in ugotovili, da ena enota v našem primeru ustreza 5,1 m. Nato smo lahko izračunali začetno hitrost (21,9 m/ s), kot ($40,4^\circ$), pod katerim smo izstrelak izstrelili, maksimalno višino (14,5 m) in domet (52,8 m). Rezultate smo primerjali z meritvami, in dobili dobro ujemanje.

Uporabnost igre

S fizikalnim znanjem in uporabo programske opreme smo pokazali, da igra Angry Birds ni zgolj igra za zabavo v prostem času, ampak tudi igra, ki je zasnovana po fizikalnih zakonih in se lahko ob njej marsikaj naučimo, in sicer uporabe različnih računalniških orodij in seveda fizike. V našem primeru smo analizirali poševni met. Igra pa vsebuje tudi primere iz mnogih drugih fizikalnih področij, kakor na pri-

mer delovanje sil, uporabo Newtonovih zakonov, gibanje, trenje, kroženje, spreminjanje gravitacijskega pospeška, delo, energije in vzgon [8].

Naloga

Predlagamo, da bralec poskusi ponoviti postopek in z izbiro neke druge enote izvede kalibracijo igre ter iz meritev izračuna velikost svoje izbrane enote razdalje v igri, začetno hitrost izstrelka, kot, pod katerim je izstrelak izstrelil, maksimalno višino leta izstrelka in domet. Lahko pa preveri tudi druga fizikalna področja, ki jih igra vsebuje.

Literatura

- [1] Angry Birds Ltd, Rovio Entertainment, Elektronski, <http://www.rovio.com/en/our-work/games/view/1/angry-birds>, ogled: 21. 9. 2014.
- [2] LoiLo, *LoiLo Game Recorder*, Elektronski, <http://loilo.tv/us/>, ogled: 31. 1. 2015.
- [3] V. Beal, *fps/FPS*, QuinStreet Inc., Elektronski, <http://www.webopedia.com/TERM/F/fps.html>, ogled: 23. 8. 2014.
- [4] D. Brown, *Tracker: Video analysis and modeling tool*, elektronski, <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>, ogled: 5. 5. 2014.
- [5] D. Haliday, R. Resnick in J. Walker, *Fundamentals of Physics*, 8th edition, Cleveland: John Wiley & Sons, 2007.
- [6] R. Allain, *The Physics of Angry Birds*, WIRED.com, elektronski, <http://www.wired.com/2010/10/physics-of-angry-birds/>, ogled: 10. 2. 2015.
- [7] D. McClung, *Projectile of a Cliff*, Elektronski, http://www.themcclungs.net/physics/download/H/2_D_Motion/Projectile\%20Cliff.pdf, ogled 18. 1. 2016.
- [8] R. Repnik, D. Robič in I. Pesek, *Physics Learning in Primary school with Computer Games-An Example-Angry Birds*, v E-Learning - Instructional Design, Organizational Strategy and Management, InTech, 2015.

× × ×

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju matematike in fizike. Za lažjo pripravo vam ponujamo nekaj zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami, ki so na voljo pri DMFA-založništvu.



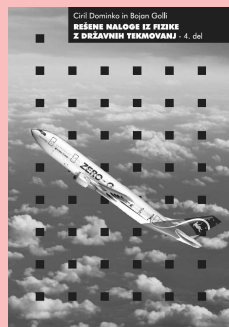
Matjaž Željko:

**REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE
S SREDNJEŠOLSКИH TEKMOVANJ**

Izb. in drž. tekm. 1997–2006

142 strani, format 14 × 20 cm

12,49 EUR



Ciril Dominko in Bojan Golli

**REŠENE NALOGE IZ FIZIKE
Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ
- 4. del**

Državna tekmovanja 1999–2013

408 strani, format 14 × 20 cm

25,00 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvu 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



	P	R	I	S	O	T	N	O	S	T
	R	E	Z	U	L	T	A	N	T	A
	A	P	O	R	T	C	I	R	K	
	V	E	T	O	M	I	K	I	S	
	F	O	T	O	G	R	A	F	S	K
	O	E	P	A	K	T	A	T	S	
	N	O	T	R	A	N	J	O	S	T
	A	R	A	M	P	E	R	E	O	D
	D	E	A	B	U	K	J	U	R	E
	V	A	L	L	E	T	A	R	A	M
	O	D	B	O	R	I	Z	S	E	Č
	Z	E	I	S	T	V	N	U	K	T
	K	V	A	D	R	A	T	N	I	J
	K	O	R	E	N	A	A	R	E	P
	U	T	R	I	P	K	E	T	T	E
	R	O	Č	K	A	A	L	A	R	M

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 43/3

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz druge
številke 43. letnika Pre-
seka je **Scheimpflug**.
Izmed pravilnih rešitev
so bili izžrebani MATIC
ARKO iz Logatca, TJAŠA
BIZJAK iz Branika in ANA
HRIBERŠEK Mislinje, ki
so razpisane nagrade
prejeli po pošti.



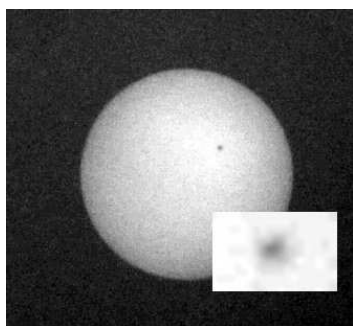
Sončeva pega



ALEŠ MOHORIČ

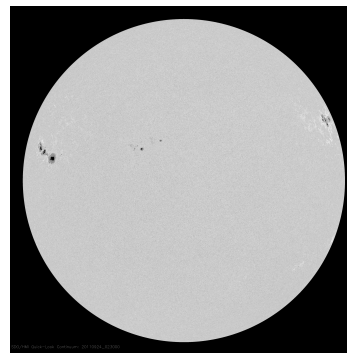
→ Tudi v izjemno dolgočasni fotografiji na naslovnici se skriva nekaj zanimivega. Fotografija je nastala zgodaj popoldne na meglen decembrski dan. Megle je bilo ravno toliko, da se je skozi slutil obris Sonca. Fotografijo sem posnel z goriščno razdaljo 105 mm, z največjo povečavo, ki jo premore kit objektiv mojega fotoaparata. Za menjavo s teleobjektivom ni bilo časa, saj se je megla v nekaj minutah toliko razkadila, da je bilo Sonce premočno. Ker sem slikal iz roke, brez stojala, sem zaslonko odprl do konca in tako skrajšal čas osvetlitve na tri milisekunde. Kratek čas osvetlitve je potreben tudi zaradi slikanja z dolgo goriščno razdaljo, saj se tako zmanjša vpliv premikanja fotoaparata. Sliko sem nekoliko podosvetlil, zato da se je na svetli ploskvi Sonca še videlo pegico blizu sredine. Pegica postane vidna šele v povečanem izrezu (slika 1), na katerem je povečan tudi kontrast. Ta drobni, komaj vidni zmazek je Sončeva pega.

O Sončevih pegah, njihovem odkritju in opazovanju smo v Preseku že poročali (Andrej Guštin, Velike Sončeve pege, Presek 41 (2013/2014) 5, 30-31). Sončeve pege se na površju Sonca pojavljajo in izginjajo. Največ jih je takrat, ko je Sonce najbolj aktivno. Nastanejo tam, kjer se Sončevo magnetno polje zgosti. Zelo gosto polje otežuje konvekcijo snovi na površju. Zato se tam snov bolj ohladi in je ob-



SLIKA 1.

Sončeva ploskev z izsekom, v katerem je povečano območje Sončeve pege. Kontrast slike je močno povečan. Kar je na sliki videti temno, je v resnici zelo svetlo.

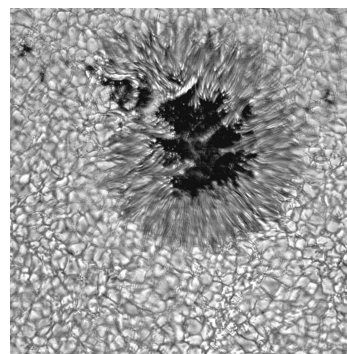


SLIKA 2.

Množica Sončevih peg, ki jih je septembra 2011 posnel Nasin satelit SDO.

močje videti temnejše. Posamezne pege so vidne od nekaj dni do nekaj mesecev in se lahko selijo po površju. Velike so lahko čez sto tisoč kilometrov – to je več kot desetkrat večje od Zemlje. Velikost pege na sliki 1 ocenimo tako, da preštejemo število slikovnih elementov (pikslov) po premeru pege (5) in število elementov po premeru Sonca (203). Pega na sliki je torej velika pet dvestotretjin premera Sonca oz. 34 000 km, skoraj trikrat večja od Zemlje.

Na sliki 2 je boljša fotografija Sonca z več pegami, na sliki 3 pa so podrobnosti ene od peg. Mrežasta struktura, ki jo opazimo na površju, so konvektivske celice – to so področja, kjer se plazma v sredini dviga, na robovih pa spušča.



SLIKA 3.

Povečava Sončeve pege narejena s sončnim teleskopom Richard B. Dunn ameriškega Nacionalnega sončnega observatorija (NSO). Mrežasta struktura so konvektivske celice, območja, kjer se plazma v sredini dviga, na robovih pa spušča.



Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996-2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002-2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011*.

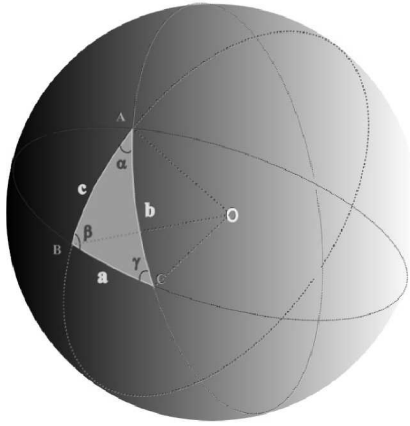
Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



Nagradna križanka



							UNIČEVANJE KLIC, KI POVZROČAJO BOLEZNI, RAZKUŽEVANJE	ESTETSKE UREJEVALECE	AMERIŠKI IGRALEC (ALAN, DRŽAVLJAN KANE)	7. GRŠKA ČRKA	GLAVNO MESTO KOMOROV V INDIJ. OCEANU	BENCINSKI SERVIS	SKLADBA ZA VADBO TEHNIKE IGRANJA	STAR AVSTRIJ. SREBRNIK ZA ŠTIRI KRAJCARJE	KLADA ZA SEKANJE DRV						
							FRANCOSKI FILOZOF IN MATEMATIK (JEAN)														
							TVOREC PRVE METODE ZA ODKRIVANJE PRAŠTEVIL														
							SREDIŠČE SEVERNE DALMACIJE						PRITOK OKE, OB KATEREM LEŽI TULA RDEČI KRIŽ					1			
							VELETOK NA INDIJSKI PODCELINI												2		
							NEJC ŽNIDARŠIČ VZPOREDNO VEZAN UPOR												BOŽJA SODBA IGRALKA HATHAWAY GL. MESTO TURČIJE STIK DVEH PLOSKEV TELESA		
																			KANDIDAT ZA ŽENINA NEKDANJI SRBSKI DOLGO-PROGAŠ (DANE)		
AVTOR MARKO BOKALIČ	LUČ UTRIPALKA PRI MOTORNEM VOZILU	OODALJENOST TOČKE OD ABSOCSNE OSI	RUSKI AVTO	SKLON V HRV. IN SRB. JEZIKU, VOKATIV	ALUMINIJ	JUŽNO-AFRIŠKA IGRALKA (CHARLIZE)						ZAPOREDJE UKAZOV PRI PROGRAMIR. RUDOLF MAISTER							11		
KAPLJICA TEKOCINE, KI JO IZLOČA OKO						ČAS PARITVE JELENOV POLJSKA KRALJICA					ŠVICARSKI MATEMATIK POLI-SAHARID FRUKTAN										
NEUGODEN OBUČTEK OTRPLOSTI IN RAHLEGA ZBADANJA																				ŽLEBIC V STROJNEM DELU FINO USNJE	
ZBIRKA IZ STARO-NORDIJSKE KNJIŽEVNOSTI						RADIOAKT. PRODUKT RAZPADA URANA	4													ZIVLJENJE-PISEK BENEŠKI SLIKAR (PAOLO)	
IRANSKA DENARNA ENOTA	7					1. SOLMI-ZACIJSKI ZLOG EMANUEL LASKER														NAŠ PLESNIK (JOSIP) PLETENO VRHNE OBLAČILO	
VKLJUČEN, POVEZAN (ANG.)				ELEMENT, KI NE SPREMEMI OPERANDA																NAŠ ARHITEKT (OTON) MESNA OMAKA	
OBUBOŽAN RIMSKI PLEMIC, CEZARJEV ZAROTNIK				KATRAN																GORA V VZH. KARAVANKAH SOCIALNI POLOŽAJ	
OČKA, ATI						VELIKAN, ORJAK, KOLOS POLMER														REKA V MÜNCHNU ALFRED NOBEL	
DOLGO VRHNE OBLAČILO MUSLI-MANK						AMERIŠKI MALI MEDVED														AKADEMSKA IN RAZISKOVALNA MREŽA SLOVENIJE	
																				? SREDI JEZERA BRAZILSKI DENAR	
																					14
																					POLITIK SLOVENSKE POMLADI (IVAN) ČASOPISNO PODJETJE GRŠKA BOGINJA NESREČE
																					PREMICA, KI SE JI KRIVULJA PRILJUŽUJE PREPROSTA VRATA IZ LAT V LESENI OGRAJI
																					SESTAVNI ELEMENT MOLEKULE

