

Dimenzije egipčanskih piramid



BORUT JURČIČ ZLOBEC

→ Soočili se bomo z večkrat ponovljeno trditvijo, da sta v dimenzijah Keopsove piramide zakodirani števili ϕ (razmerje zlatega reza) in število π (razmerje med premerom in obsegom krožnice), kljub temu, da razmerje zlatega reza v Egiptu ni bilo nikjer omenjeno in tudi števila π niso poznali tako natančno, kot ga najdemo zakodiranega v dimenzijah Keopsove piramide. Ali so graditelji piramid poznali dejstva, ki niso zgodovinsko izpričana, ali pa je to čisto naključje? Pokazali bomo, da je naključno sovpadanje mnogo bolj verjetno, kot se zdi na prvi pogled. Poskušali bomo razložiti, kako so graditelji določali dimenzije in zakaj so te takšne, kakršne so. Predvsem se bomo posvetili razmerju stranic v trikotniku, ki ga tvorijo polovica roba osnovne ploskve piramide, višina piramide in višina njene stranske ploskve (glej sliko 2 zgoraj). Naša predpostavka bo, da je mere piramid določala predvsem pragmatičnost, kompromis med fizikalnimi lastnostmi materiala, preprostim zapisom mer v navodilih za gradnjo in seveda omejenost sredstev.

Zlati rez v literaturi

Razmerje zlatega reza ima mnogo zanimivih lastnosti. Vendar pa se mu jih zelo rado pripisuje mnogo več, kot jih ima v resnici.

Razmerje zlatega reza je iracionalno in je v nekem smislu najbolj iracionalno število od vseh iracionalnih števil. Ta lastnost razmerja je odločilna, da naletimo nanj v naravi. Srečamo ga npr. pri proučevanju optimalne porazdelitve listov okoli stebela rastlin (filotaksa) in razporeditve semen v sončničnem cvetu.

Manj prepričljivo je povezovanje razmerja zlatega reza s sebi podobnimi spiralnimi strukturami v naravi, kot so spiralna struktura nautilusove hišice in spiralne strukture galaksij. Odločilna lastnost spirale pri nautilusovi hišici je njena sebi podobnost. Kot se je izrazil Jacob Bernoulli (1655–1705), *eadem mutata resurgo* (raste, vendar ostaja vedno enaka). Sebi podobnost v naravi je pogost pojav, verjetno zaradi ekonomičnosti genskega zapisa. Vendar pa sebi podobne spirale pripadajo razredu logaritemskih spiral, kjer je zlata spirala le poseben primer. Nastanek spiral v galaksijah se podreja drugačnim zakonom in v splošnem niso niti logaritemske.

Najbolj problematično pa je iskanje razmerja zlatega reza v glasbi, arhitekturi, slikarstvu, umetnosti in filozofiji nasploh. Pripisuje se mu močan pomen-ski naboj, ki velikokrat vodi v pretiravanje in napačne interpretacije. Zlati rez je bil predmet mistifikacij, tako v starem veku, pri grških filozofov, kot tudi v srednjem veku in je tudi v današnjem času. Poglejmo enega od sodobnih opisov zlatega reza.

Zlato razmerje pomeni vrata do razumevanja življenja. To razmerje imenujemo Zlato oziroma Božansko razmerje, ker predstavlja vrata za globlje razumevanje lepote, čudežnosti in duhovnosti življenja. Je skoraj neverjetno, da ima eno samo število tolikšen vpliv v naravi, človeški zgodovini, znanosti, umetnosti in v vsemirju v celoti.

Profesor računalniških znanosti univerze v Maine George Markowsky je preveril nekatere najbolj znane trditve na temo zlatega reza, zapisane v šolskih uč-

benikih in člankih. Presenečen je opazil, kako malo resnice je v teh trditvah. O svojih ugotovitvah je napisal članek z naslovom »Misconceptions about the Golden Ratio«, ki ga lahko najdete na naslovu <http://www.umcs.maine.edu/~markov/GoldenRatio.pdf>.

Razmerje zlatega reza, zlati pravokotnik in zlati trikotnik

To poglavje je namenjeno spoznavanju razmerja zlatega reza, zlatega pravokotnika in zlatega trikotnika.

Definicija 1 (Razmerje zlatega reza). *Razdelimo daljico na dva neenaka dela tako, da je razmerje med večjim in manjšim delom enako razmerju med celotno daljico in večjim delom. To razmerje imenujemo razmerje zlatega reza.*

V našem sestavku bomo razmerje zlatega reza označili s črko ϕ , v čast grškega filozofa in matematika Fidesa (500–432), ki je prvi omenil to razmerje. Če vzamemo, da je dolžina prvotne daljice enaka ϕ in dolžina večjega dela enaka 1, potem gornjo definicijo lahko zapišemo v matematični obliki takole:

$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi}{1},$$

od tod dobimo zvezo

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \quad (1)$$

Pozitivna rešitev enačbe je enaka

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989 \dots \quad (2)$$

Pravokotnik z razmerjem stranic, ki je enako razmerju zlatega reza, ima naslednjo lastnost: če mu odstranimo kvadrat s stranico, enako krajši stranici, ostane pravokotnik, katerega razmerje stranic je ravno tako enako razmerju zlatega reza. Tak pravokotnik bomo imenovali *zlati pravokotnik*. Na sliki 1 zgoraj je prikazan postopek za načrtanje zlatega pravokotnika.

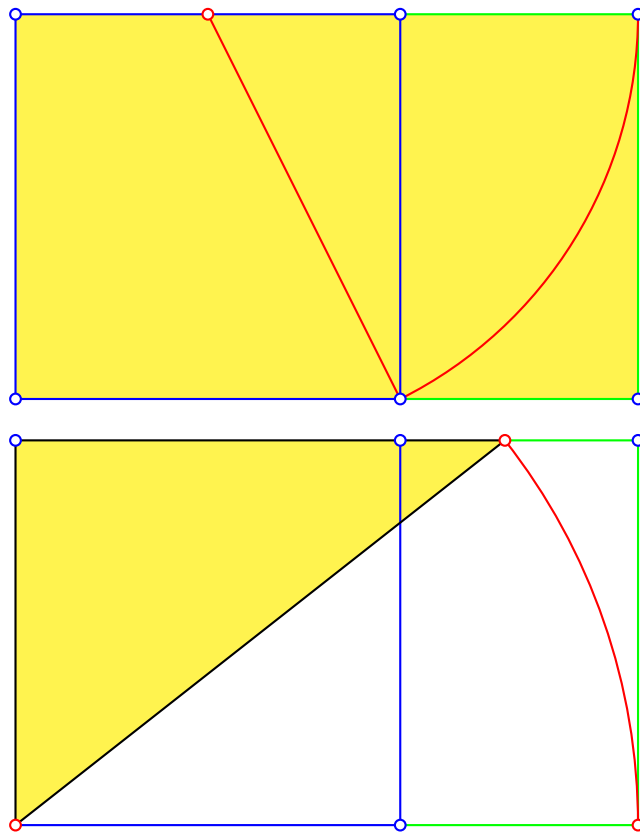
1. Najprej načrtamo kvadrat, nato razpolovimo eno od stranic.
2. Izberemo enega od nasprotnih oglišč, nato načrtamo krožnico s središčem v razpolovišču in izbranim ogliščem na obodu.

3. Presečišče krožnice z nosilko razpolovljene daljice je eno od oglišč zlatega pravokotnika.
4. Ostalo preberemo s slike 1 zgoraj.

Prepričajmo se, da je to res zlati pravokotnik. Naj bo dolžina stranice kvadrata enaka 1. Po Pitagorovem izreku je polmer krožnice enak $\sqrt{1 + 1/4} = \sqrt{5}/2$. Daljša stranica pravokotnika meri $(1 + \sqrt{5})/2 = \phi$. Razmerje stranic je resnično enako razmerju zlatega reza.

V geometriji poznamo še en lik, ki je tesno povezan z razmerjem zlatega reza, to je *zlati trikotnik*. V knjigi *Mysterium Cosmographicum* (Skrivnosti sveta) Johannes Kepler (1571–1630) omenja razmerje zlatega reza v stavku:

V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorov izrek, drugi je razmerje zlatega reza.



SLIKA 1.

Zgoraj: zlati pravokotnik, spodaj: zlati trikotnik



Keplerjev trikotnik, včasih tudi zlati trikotnik, povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic

$$1 : \sqrt{\phi} : \phi.$$

Slika 1 spodaj prikazuje, kako načrtamo zlati trikotnik.

1. Najprej načrtamo zlati pravokotnik in si izberemo eno od oglišč.
2. Načrtamo krožnico s središčem v izbranem oglišču in polmerom, enakim daljši stranici.
3. Ostalo je razvidno s slike 1 spodaj.

Prepričajmo se, da smo res načrtali zlati trikotnik. Vzemimo, da je dolžina daljše stranice pravokotnika enaka ϕ in dolžina krajše enaka 1. V trikotniku označimo neznano kateto z x . Po Pitagorovem izreku je $\phi^2 - 1 = x^2$. Iz enačbe (1) sledi, da je $x^2 = \phi$ oziroma $x = \sqrt{\phi}$.

Zlati rez, zapisan v merah Keopsove piramide

Sledi ena od najpogostejše citiranih neresničnih zgodb v zvezi z dimenzijami egipčanskih piramid, ki jo pripisujejo grškemu zgodovinopiscu Herodotu (484-425). Zgodba pravi, da je ob neki priliki egipčanski svečenik zaupal Herodotu skrivnost Keopsove piramide v Gizi.

Svečenik: *Dimenzije Velike piramide so izbrane tako, da je površina kvadrata s stranico, enako višini piramide, enaka površini stranske ploskve.*

Egipčanske piramide so pokončne, pri večini od njih je osnovna ploskev kvadrat. Taka je tudi Keopsova piramida (glej sliko 2 zgoraj). Označimo višino piramide s h , stranico osnovnega kvadrata z b in višino stranske ploskve z s . Preprost račun nam da

$$h^2 = \frac{bs}{2}, \quad s^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Delimo zadnjo enačbo z $b^2/4$ in dobimo

$$\left(\frac{2h}{b}\right)^4 = \left(\frac{2h}{b}\right)^2 + 1,$$

označimo $r = \left(\frac{2h}{b}\right)^2$ in dobimo

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Edina pozitivna rešitev gornje enačbe je $r = \phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Od tod sledi, da je $2h/b = \sqrt{\phi}$. Trikotnik $(b/2, h, s)$ je zlati trikotnik, dolžine njegovih stranic so v razmerju $1 : \sqrt{\phi} : \phi$.

V resnici pa je v Herodotovi knjigi Zgodovina en sam odstavek, ki govori o veliki piramidi (glej zgoraj omenjeni članek Georgea Markowskega), ta pa se glasi:

Herodot: *Veliko piramido so gradili dvajset let. Stranica osnovnega kvadrata meri osemsto čevljev, njena višina meri ravno tako osemsto čevljev, površina je bila pokrita z gladkimi ploščami, ki so se natanko prilegale druga drugi. Kamniti bloki, iz katerih je narejena, merijo vsak od njih več kot trideset čevljev v dolžino.*

Herodot je napisal te vrstice dva tisoč let po izgradnji piramide. Mere, ki jih je podal, ne ustrezajo dejanskemu stanju. Z nekaj domišljije lahko zaključimo, kako s prevračanjem besed iz gornjega odstavka pridemo do trditve o zvezi med kvadratom višine in ploščino stranske ploskve. Tu imamo ključne besede kvadrat, višina in površina, ostalo pa naredi domišljija in želja, da bi našli razmerje zlatega reza.

Pri Keopsovi piramidi je razmerje med višino in polovico osnovnega roba enako $14/11$, kar je zelo blizu vrednosti $\sqrt{\phi}$. To naj bi napeljevalo, da je v teh piramidah zakodirano razmerje zlatega reza. Po drugi strani pa je vrednost $4/\sqrt{\phi}$ zelo blizu vrednosti π , zato nekateri trdijo, da je v egipčanskih piramidah zakodirano tudi število π oziroma njegova približna vrednost $22/7$, ki pa je natančnejša, kot so jo poznali v tistem času. V skoraj tisoč let mlajšem dokumentu je omenjena vrednost $256/81$ kot približek za π .

Merjenje kotov in dolžin v starem Egiptu

Razmerje dimenzij egipčanskih piramid bomo bolj razumeli, če si ogledamo njihov merski sistem. Osnova za merjenje dolžine je bil *kraljevi komolec*, ki je imel vlogo našega metra. Kraljevi komolec je meril 28 *palcev*. Dolžina enega palca ni bila natanko določena. S časom se je nekoliko spreminjala in se je gibala med 18,7 mm in 18,8 mm, tako se je dolžina kraljevega komolca gibala med 52,36 cm in 52,64 cm. Poleg kraljevega komolca so uporabljali še (navaden) *komolec*, ki pa je meril 24 palcev.

Kote so merili v stopinjah, vendar pa so v gradbeništvu in zemljemerstvu kote izražali v *sekedih*.

Seked kota je enak dolžini kotu priležne katete v pravokotnem trikotniku, merjene v palcih, če je dolžina nepriležne katete en kraljevi komolec (glej sliko 2 spodaj).

Pri pisanju sestavka nismo imeli na razpolago enako natančnih mer za vse piramide. V literaturi in na internetu se mere piramid niso vedno ujemale. Razlike so bile tudi do 50 cm. Pri pretvarjanju mer piramid iz metrov v komolce smo upoštevali načelo, da so dolžine osnovnih robov piramid, izražene v komolcih, zaokrožene. To je smiselno, ker so navodila

za gradnjo tako preprostejša. Mere piramid smo izbrali v mejah, ki smo jih našli v literaturi in ki so najbolj ustrezale gornjemu načelu.

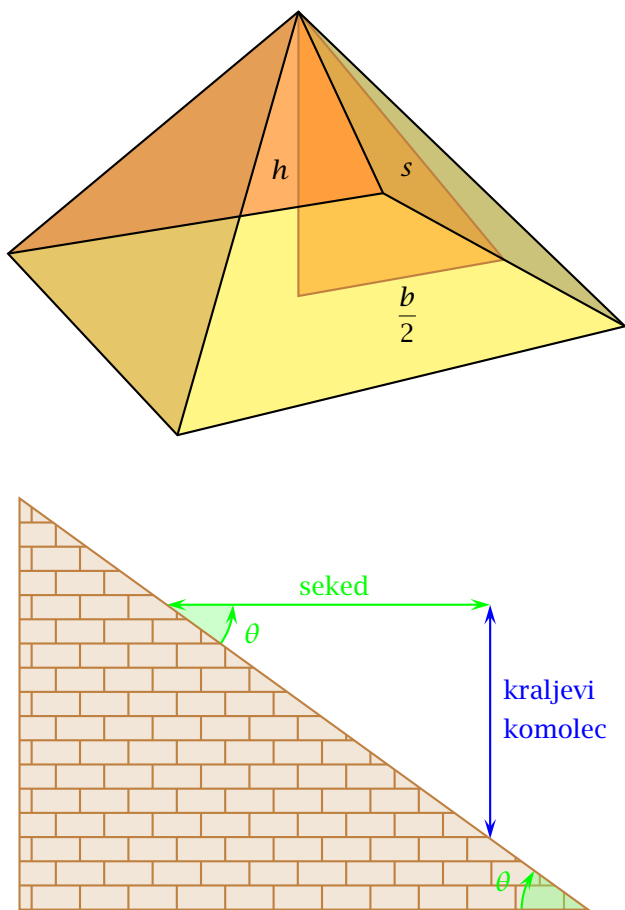
Dimenzije egipčanskih piramid

Pri proučevanju dimenzij egipčanskih piramid se bomo omejili na razmerje stranic trikotnika, ki ga tvorijo polovični osnovni rob piramide, njena višina in višina stranske ploskve. Ker bomo ta trikotnik še velikokrat omenili, mu bomo dali delovno ime *središčni pravokotni trikotnik piramide* (glej sliko 2 zgoraj).

Pričakujemo, da so graditelje iz estetskega vidika privlačile piramide, ki imajo dodatne geometrijske simetrije. Gradili so pokončne piramide. Večinoma je osnovna ploskev imela kvadratno obliko. Izjema je piramida 3 v tabeli 1.

Med piramidami, ki imajo dodatne simetrije, izstopajo piramide, katerih *središčni pravokotni trikotnik* ima stranice v razmerju 3 : 4 : 5 (pitagorejska trojica). V tabeli 1 so te piramide označene z znakom ♣, to so piramide 5, 8, 9 in od 11 do 15. Naklonski kot stranskih ploskev teh piramid je $53^{\circ}7'48''$. Naslednji primer so piramide, katerih stranske ploskve so enakostranični trikotniki. Naklonski kot teh piramid je $54^{\circ}44'10''$. Pri teh piramidah je razmerje med višino in robom osnovne ploskve iracionalno. Temu se najbolj približata piramidi 18 in 22, z nekoliko slabšo natančnostjo na 1° jima sledita še piramidi 10 in 16. V tabeli sta prvi dve označeni z znakom ▲, drugi dve s slabšim ujemanjem pa smo označili s △. V tabeli ni piramide, katere osni presek bi bil enakostranični trikotnik, to je piramide z naklonskim kotom 60° . Najbolj pa burijo domišljijo piramide 1, 4 in 7, katerih razmerje stranic v *središčnem pravokotnem trikotniku* se približa zlatemu trikotniku. Pogojno štejemo mednje tudi piramido 3, pogojno zato, ker nima kvadratnega tlorisa, vendar se dva od naklonskih kotov stranskih ploskev približata kotu $51^{\circ}50'35''$, ki je značilen za ostale tri. V tabeli so te piramide označene z znakom ♠.

V začetku so gradili stopničaste piramide, nato so na prehodu med III. in IV. dinastijo začeli graditi piramide z ravnimi stranskimi ploskvami. Snefrujevo lomljeno piramido štejemo za prehodno piramido med obema načinoma gradnje (glej sliko 3 zgoraj levo). Pri tej piramidi so postavili temelje za naklonski kot 60° . Zelo verjetno se je izkazalo, da bi bila v



SLIKA 2.

Središčni pravokotni trikotnik piramide in seked. Zgoraj: trikotnik v piramidi, spodaj: seked.



SLIKA 3.

Piramide. Zgoraj levo: lomljena piramida v Dahshurju, zgoraj desno: rdeča piramida v Dahshurju, spodaj levo: Keopsova piramida v Gizi, spodaj desno: Kefrenova piramida v Gizi.

tem primeru piramida preveč strma, konstrukcija ne bi vzdržala, verjetno bi bil problem pritrditve tlaka za stranske ploskve. Takoj po začetku gradnje so kot popravili na $54^{\circ}50'$. Ta kot je zelo blizu kota, ki ga ima piramida z enakostraničnimi stranskimi ploskvami. Nekje na sredini gradnje so naklonski kot še enkrat popravili, to pot na $43^{\circ}22'$. Ta kot se še enkrat ponovi pri Rdeči piramidi, ki je bila ravno tako zgrajena v času vladanja faraona Snefruja (glej sliko 3 zgoraj desno).

V tabeli najdemo še eno piramido z naklonskim kotom blizu 45° , to je piramida 21, njen naklonski kot je 42° . Ta piramida je med vsemi piramidami v tabeli 1 najbolj položna. Največji naklonski kot ima piramida 17. Njen naklonski kot je $57^{\circ}15'53''$ in spada med srednje visoke piramide. Pri višjih piramidah bi moral biti kot manjši, da bi konstrukcija vzdržala. Seveda pa kot ni smel biti premajhen, po

eni strani zaradi videza, strma piramida deluje močno, po drugi strani pa zaradi količine materiala, ki bi ga potrebovali za gradnjo. Naklonski koti stranskih ploskev piramid so v mejah od 42° do 56° , to so meje, ki jih zasledimo pri lomljeni piramidi. V nadaljevanju si bomo ogledali še en kriterij pri izbiri dimenzij, ki je čisto praktičen. Kako zapisati čim bolj preprosta navodila za gradnjo? Videli bomo, kako so egipčanske dolžinske enote in merjenje kotov vplivali na določanje dimenzij.

Naklonski koti v egipčanskih piramidah

Keopsova piramida ima izjemno natančno določene dimenzije. Stranice osnovne ploskve se razlikujejo le za nekaj centimetrov. Tudi koti med robovi osnovne ploskve se razlikujejo od pravih za največ $2'$. Sečed naklonskega kota pri Keopsovi piramidi je enak

Piramida			dimenzije			$(b/2)/h$	napaka	**
št.	faraon	mesto	b	h	b'	s/q	ε	
1	Snefru	Maidum	147,0	93,5	280	22/28	0'48''	♠
2	Snefru*	Dahshur	220,0	105,0	240	21/20	0'46''	□
3	Mikerin*	Giza	103,0	65,6	195	22/28	1'23''	♠
3	Mikerin	Giza	105,0	65,6	200	4/5	0'38''	□
4	Keops	Giza	230,3	146,6	440	22/28	0'31''	♠
5	Kefren	Giza	215,2	143,5	410	21/28	0'23''	♣
6	Sahure	Abusir	78,7	47,2	150	20/24	0'42''	♥
7	Niuserre'	Abusir	81,0	51,6	180	22/28	1'45''	♠
8	Neferirkare	Abusir	105,0	70,0	200	21/28	0'00''	♣
9	Userkaf	Sakkara	73,5	49,0	140	21/28	0'00''	♣
10	Unas	Sakkara	57,7	43,3	110	16/24	0'45''	△
11	Izezi	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1'02''	♣
12	Teti	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1'02''	♣
13	Pepi I	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1'02''	♣
14	Merenre	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1'02''	♣
15	Pepi II	Sakkara	78,7	52,5	150	21/28	1'02''	♣
16	Senwosret III	Dahshur	105,0	78,7	200	16/24	1'00''	△
17	Amenemhat III	Dahshur	105,0	81,6	200	18/28	1'16''	♥
18	Amenemhat I	El-Lisht	78,7	55,1	150	20/28	0'17''	▲
19	Senusret I	El-Lisht	105,0	61,2	200	24/28	1'23''	♥
20	Amenemhat III	Hawara	99,7	57,7	190	19/22	0'37''	□
21	Senusret II	El-Lahun	105,0	47,2	200	10/9	1'48''	□
22	Khendjer	Sakkara	52,5	36,7	100	20/28	0'00''	▲

** Pomen oznak je opisan v besedilu članka.

* Rdeča piramida (glej sliko 3 zgoraj desno).

b' Osnovni rob, izražen v kraljevih komolcih.

' Pri piramidi 7 je osnovni rob izražen v navadnih komolcih.

* Piramida 3 nima kvadratnega tlorisa.

TABELA 1.

Dimenzije egipčanskih piramid.

22 palcev, odstopanje je manj kot 1'. Tudi druga največja (Kefrenova) piramida v Gizi ima natančno določene dimenzije. Seked naklonskega kota pri tej piramidi je 21 palcev, odstopanje pa je ravno tako manj kot 1'.

V tabeli 1 so zapisane dimenzije 22 piramid. V sedmem stolpcu tabele 1 je zapisano razmerje med polovičnim robom in višino piramide v idealiziranem primeru. Če je imenovalc enak 28, je števec enak sekedu. V osmem stolpcu je zapisana razlika med

kotom, ki ga dobimo z idealiziranim razmerjem in razmerjem, ki je izračunamo iz podatkov v četrtem in petem stolpcu. Iz tabele 1 preberemo, da ima 16 od 22 piramid celoštevilčni seked. Pri nadaljnjih treh piramidah dobimo dobro ujemanje, če v definiciji za seked kraljevi komolec, ki meri 28 palcev, nadomestimo z navadnim komolcem, ki meri 24 palcev. Vidimo, da so v tabeli le štiri piramide, katerih seked kota se v nobenem primeru ne izraža celoštevilčno. To so piramide 2, 3, 20 in 21. V tabeli smo jih ozna-





čili z znakom $\square$. Za piramido 3 vemo, da nima kvadratnega tlorisa. Piramide s celoštevilčnim sekedom, ki ne spadajo v nobeno od teh kategorij, smo označili z znakom ♥.

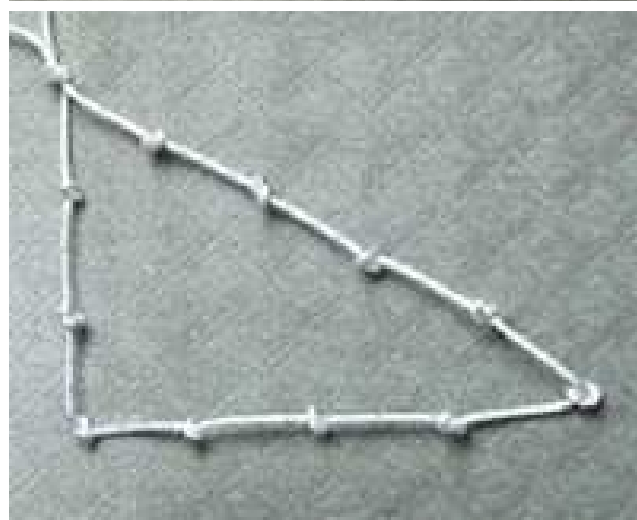
Zakaj meri seked naklonskega kota Keopsove piramide 22 palcev?

Pri sekedu 22 palcev se razmerje stranic v središčnem pravokotnem trikotniku približa razmerju stranic zlatega trikotnika. Ker zlati rez v zgodovini Egipta ni bil nikoli omenjen, ne smemo podleči skušnjavi, da bi trdili, da je bil zlati trikotnik namerno izbran. Seked 21 palcev bi bil razumljiv, ker je v mejah, v katerih se da varno graditi piramide; poleg tega je razmerje stranic središčnega pravokotnega trikotnika enako $3 : 4 : 5$ (pitagorejska trojica). Pitagorejske trojice so uporabljali za določanje pravih kotov pri gradnji piramid (glej sliko 4).

Pitagorov izrek so v Egiptu poznali, vendar ga v tistem času niso imenovali tako, ker je moralo preteči več kot 1500 let, da je Pitagora ugledal luč sveta. Celoštevilčni sekedi naklonskih kotov piramid merijo 18, 20, 21, 22 in 24 palcev. V poštev pri gradnji velike piramide prideta sekeda 21 in 22 palcev, manjši so preveč tvegani, večji pa preveč potratni, kar se tiče gradbenega materiala. Vidimo, da izbira ni bila velika. Do začetka gradnje Keopsove piramide ni bilo uspešno dograjene večje piramide s sekedom, manjšim od 22 palcev. Lahko rečemo, da graditelji Keopsove piramide, vedoč, da gradijo največjo piramido doslej, niso hoteli tvegati in so izbrali seked 22 palcev. Šele po uspehu Keopsove piramide so pri gradnji Kefrenove tvegali seked 21 palcev.

Zaključek

Želeli smo poudariti, da so graditelji piramid izbirali dimenzije tako, da večinoma ustrezajo celoštevilčnemu sekedu, če upoštevamo, da je pri nekaterih potrebno kraljevi komolec nadomestiti z navadnim. Tudi pri piramidah, pri katerih seked ni celoštevilčen, se razmerje med višino in osnovnim robom izraža s kvocientom majhnih celih števil. Celoštevilčne podatke je preprosteje zapisati v navodila graditeljem. Izbor celoštevilčnega sekeda pri upoštevanju robnih pogojev, kot sta varčnost pri uporabi materiala in varnost, je zelo omejen. In lahko rečemo,



SLIKA 4.

Konstrukcija pravega kota. Zgoraj: $3 + 4 + 5 = 12$, spodaj: $3 : 4 : 5$.

da niso izbrali sekeda 22 palcev zaradi skritega zlatega trikotnika, ampak ker se nahaja v »zlati sredini« kompromisa med varnostjo in varčevanjem. V resnici je graditelje bolj privlačil seked 21 palcev, ker v sebi skriva pitagorejsko trojico, ki so jo brez dvoma poznali.

× × ×

www.presek.si